ВОРОНЕЖСКИЙ ИНСТИТУТ МВД РОССИИ

О. Ю. Данилова

С. В. Синегубов

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

Воронеж
2024

ББК 22.184
УДК 519.72

Рецензенты:

С. Ю. Кобзистый — доцент кафедры технических комплексов охраны и связи Воронежского института ФСИН России, кандидат технических наук, доцент;

А. Ф. Самороковский — доцент кафедры гуманитарных и социально-экономических дисциплин Центрального филиала Российского государственного университета правосудия, кандидат технических наук, доцент.

Данилова О. Ю.

Теория информации : учебное пособие [Электронный ресурс] / О. Ю. Данилова, С. В. Синегубов. — Электр. дан. и прогр. — Воронеж : Воронежский институт МВД России, 2024. — 1 электр. опт. диск (CD-ROM) : 12 см. — Систем. требования: процессор Intel с частотой не менее 1,3 ГГц ; ОЗУ 512 Мб ; операц. система семейства Windows ; CD-ROM дисковод.

Учебное пособие предназначено для проведения практических занятий по дисциплине «Теория информации» со слушателями факультета заочного обучения, а также может быть использовано для организации самостоятельной работы курсантов, обучающихся по данной дисциплине.

ISBN 978-5-00229-117-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Курс теории информации, преподаваемый слушателям-заочникам инженерно-технических специальностей, предполагает изучение понятий количества информации, энтропии, расчет характеристик канала связи, а также методов сжатия информации.

Данный курс ставит своей целью подготовку обучающихся к решению задач профессиональной деятельности следующих типов: научно-исследовательский, производственно-технологический, организационно-управленческий, проектный.

Задачи дисциплины:

– сформировать систематические знания в области теории информации;

– сформировать умения и навыки расчета характеристик источников и каналов связи;

– сформировать умения и навыки сжатия данных и помехоустойчивого кодирования;

– ознакомить с историей, перспективами развития и современным состоянием теории информации, а также ее связями с другими дисциплинами;

– сбор, обработка, анализ и систематизация научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта в сфере профессиональной деятельности;

– моделирование объектов и процессов с целью анализа и оптимизации их параметров с использованием имеющихся средств исследований, включая стандартные пакеты прикладных программ;

– составление обзоров и отчетов по результатам проводимых исследований.

Дисциплина «Теория информации» является дисциплиной по выбору.

Для успешного освоения дисциплины обучающимся необходимо обладать знаниями, умениями в области математики, информатики, физики, экономики, экологии, программирования, дискретной математики, теории автоматов, в результате освоения которых обучающийся должен:

знать:

основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, дискретной математики;

уметь:

– применять математические методы и понимать физические законы для решения практических задач;

– формулировать и решать задачи, использовать математический аппарат и численные методы для анализа и синтеза систем специальной связи;

– применять информационные технологии и информационно-вычислительные системы для решения научно-исследовательских и проектных задач прикладной радиотехники;

владеть:

– методами решения дифференциальных и алгебраических уравнений, дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей и математической статистики;

– методами математической логики, функционального анализа;

– математическим аппаратом для решения различных задач;

– основными методами работы на компьютере с прикладными программными средствами.

Дисциплина «Теория информации» является предшествующей дисциплиной для последующего изучения основ интеллектуального анализа данных.

Все примеры и задания носят академический характер, никаких социальных выводов по данным примерам и задачам делать не стоит.

Авторы выражают благодарность доценту кафедры математики и моделирования систем А.Н. Копылову за ценные замечания и предложения, высказанные при написании данного издания.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

<table>
<tr><th rowspan="2">№</th><th rowspan="2">Наименование разделов и тем</th><th rowspan="2">Всего часов</th><th colspan="3">Виды занятий</th></tr>
<tr><th>Самостоятельная работа</th><th>Лекция</th><th>Практическое занятие</th></tr>
<tr><td colspan="6">Раздел 1. Вероятностные основы принципов передачи информации</td></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Энтропия и информация. Каналы связи</td><td>32</td><td>30</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Раздел 2. Теория кодирования классической и квантовой информации</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>Теория помехоустойчивого кодирования. Квантовая информация</td><td>40</td><td>32</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зачет</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">За 4 курс</td><td>72</td><td>62</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Итого за период обучения</td><td>72</td><td>62</td><td>4</td><td>6</td></tr>
</table>

2. ГРАФИК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРОХОЖДЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№ п/п	№ темы	Название темы	Вид занятия	Часов	Примечание
1	1.1	Энтропия и информация. Каналы связи	Лекция	2	
2	2.1	Теория помехоустойчивого кодирования. Квантовая информация	Лекция	2	
3	2.1	Теория помехоустойчивого кодирования. Квантовая информация	Практическое занятие	2	
4	2.1	Теория помехоустойчивого кодирования. Квантовая информация	Практическое занятие	2	
5	2.1	Теория помехоустойчивого кодирования. Квантовая информация	Практическое занятие	2	
Итого (по видам занятий)			Лекция	4	
			Практическое занятие	6	
Итого				**10**	

3. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Вероятностные основы принципов передачи информации

Тема 1.1. Энтропия и информация. Каналы связи

Энтропия случайных событий и величин. Условная информация. Энтропия непрерывных источников сообщений. Количество информации между дискретными источниками. Свойства взаимной информации между дискретными ансамблями. Кодирование информации методом Шеннона – Фено. Избыточность кодирования. Надежность электрических схем. Скорость создания информации источником без памяти при равномерном кодировании. Прямая и обратная теоремы Шеннона. Задачи информационного поиска.

Раздел 2. Теория кодирования классической и квантовой информации

Тема 2.1. Теория помехоустойчивого кодирования. Квантовая информация

Источники дискретных сообщений. Прямая и обратная теоремы Шеннона; информационные пределы избыточности и методика построения кодов; проблемы передачи непрерывной информации с оценкой ошибок дискретизации по времени и по амплитуде; возможности информационного подхода к оценке качества функционирования систем связи. Модулярная арифметика. Вычисления в полях Галуа. Приводимые и неприводимые полиномы. Коды Хэмминга, БЧХ, Рида–Соломона. Турбокоды. Сверточные коды. Алгоритм декодирования Витерби.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Изучение дисциплины «Теория информации» осуществляется в форме учебных занятий под руководством профессорско-преподавательского состава кафедры и самостоятельной подготовки обучающихся.

Основными видами учебных занятий по изучению данной дисциплины являются: лекционное занятие; практическое занятие; консультация преподавателя (индивидуальная, групповая) и т. д.

При проведении учебных занятий используются элементы классических и современных педагогических технологий, в том числе проблемного и проблемно-деятельностного обучения.

Предусматриваются следующие формы работы обучающихся:

прослушивание лекционного курса;

чтение и конспектирование рекомендованной литературы;

участие в практических занятиях.

Помимо устного изложения материала, в процессе лекций предполагается использовать визуальную поддержку в виде мультимедийных презентаций содержания лекции, отражающих основные тезисы, понятия, схемы, иллюстрации, выдержки из учебных, документальных и художественных фильмов по теме лекции.

Контроль знаний обучающихся проводится в форме текущей и промежуточной аттестации.

Контроль текущей успеваемости обучающихся проводится в ходе семестра с целью определения уровня усвоения обучающимися знаний; сформированности у них умений и навыков; своевременного выявления преподавателем недостатков в подготовке обучающихся и принятия необходимых мер по ее корректировке; совершенствования методики обучения; организации учебной работы и оказания обучающимся индивидуальной помощи.

К контролю текущей успеваемости относятся проверка знаний, умений и навыков обучающихся:

на занятиях;

по результатам выполнения обучающимися индивидуальных заданий;

по результатам проверки качества конспектов лекций и иных материалов;

по результатам отчета обучающихся в ходе индивидуальной консультации преподавателя.

Контроль за выполнением обучающимися каждого вида работ может осуществляться поэтапно и служит основанием для промежуточной аттестации по дисциплине.

Промежуточная аттестация обучающихся проводится с целью выявления соответствия уровня их теоретических знаний, практических умений и навыков по требованиям ФГОС ВО по направлению подготовки в форме зачета.

Зачет проводится в 4 семестре после завершения изучения дисциплины в объеме рабочей программы дисциплины на заочной форме обучения.

Форма проведения зачета определяется кафедрой (устный по билетам или путем собеседования по вопросам; письменная работа, тестирование, коллоквиум и др.).

Оценка по результатам зачета носит недифференцированный характер: зачтено/не зачтено.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа как вид учебной деятельности является неотъемлемым обязательным звеном процесса обучения, предусматривающим прежде всего индивидуальную работу обучающихся в соответствии с установкой преподавателя или программы обучения. Самостоятельная работа рассматривается, с одной стороны, как форма обучения, осуществляемая без непосредственного вмешательства, но под руководством преподавателя, а с другой – как средство вовлечения обучающихся в самостоятельную познавательную деятельность, формируя у них навыки организации такой деятельности.

Тематический план самостоятельной работы обучающихся (заочная форма)

№ темы	Наименование темы	Вид самостоятельной работы	Время
1.1	Энтропия и информация. Каналы связи	Подготовка к аудиторным занятиям Подготовка к лекционным и групповым занятиям	30
2.1	Теория помехоустойчивого кодирования. Квантовая информация	Подготовка к аудиторным занятиям Подготовка к лекционным и групповым занятиям	32
		Итого:	**62**

6. КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ

6.1. Случайные события

Наблюдаемые нами каждый день явления (события) можно назвать результатами некоторого опыта (эксперимента).

Событие (случайное событие) — всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Например:

A — попадание в мишень при выстреле;

B — появление герба при бросании монеты;

C — задержание двух правонарушителей.

Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Достоверное событие — событие, которое в результате опыта непременно должно произойти, т. е.

$P(A) = 1$.

Пример: выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости.

Невозможное событие — событие, которое в данном опыте не может произойти, т. е.

$P(A) = 0$.

Например, выпадение 7 при бросании одной игральной кости.

Таким образом, вероятность любых событий меняется от 0 до 1, т. е.

$0 \le P(A) \le 1$.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них.

Пример:

1) выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты;

2) попадание и промах при выстреле;

3) правонарушитель наказан и не наказан.

4) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости;

5) появление белого шара и появление черного шара при вынимании шара из урны, в которой 3 белых и 4 черных шара.

Несколько событий называют **несовместными** в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Пример:

1) выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты;

2) попадание и промах при одном выстреле.

Несколько событий в данном опыте называются **равновозможными**, если есть основание считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другое.

Пример:

1) выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты.

Если группа событий: 1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновозможны, то они называются **исходами** (случаями, шансами).

Исход называют **благоприятным** некоторому событию, если появление этого случая влечет за собой появление данного события.

Пример. При бросании игральной кости возможно: появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков. Из них событию A — появление четного числа очков — благоприятны три случая: выпадение 2, 4, и 6 очков.

Вероятность события A вычисляется как отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число исходов, благоприятных событию A;

n — общее число исходов опыта.

6.2. Количественная оценка информации

Пусть в результате опыта случайная величина X приняла значения x_1, x_2, …, x_m; при этом значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз и т. д. Построим таблицу.

X	x_1	x_2	…	x_m
	n_1	n_2	…	n_m

Тогда, учитывая, что

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = \sum_{i=1}^{m} n_i ,$$

найдем вероятности появления различных значений случайной величины X как

$$p_1 = \frac{n_1}{n},\ p_2 = \frac{n_2}{n}, \ldots,\ p_m = \frac{n_m}{n}.$$

Дополним таблицу.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m
	n_1	n_2	$\dots$	n_m
P	p_1	p_2	$\dots$	p_m

Любое высказывание (сообщение, информация) всегда обладает некоторой неопределенностью, которую удобно выразить через вероятность появления того, о чем было высказывание.

Количество информации в сообщении определяется как

$$I = -\log_2(p).$$

Минус определяется тем, что т. к. $0 \le p \le 1$, то $\log_2(p) < 0$, а количество не может быть отрицательным.

Используя формулу

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a},$$

можно записать

$$I = -\log_2(p) = -\frac{\ln p}{\ln 2} = -lb(p).$$

Количество информации, рассчитанное при использовании логарифма по основанию 2, измеряют в **битах**.

Дополним таблицу.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m
	n_1	n_2	$\dots$	n_m
P	p_1	p_2	$\dots$	p_m
I	$-\log_2(p_1)$	$-\log_2(p_2)$		$-\log_2(p_m)$

Известно, что для нахождения среднего арифметического случайной величины X можно воспользоваться выражением

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_m \cdot n_m}{n} = \frac{x_1 \cdot n_1}{n} + \frac{x_2 \cdot n_2}{n} + \cdots + \frac{x_m \cdot n_m}{n} =$$

$$= \left| p_i = \frac{n_i}{n} \right| = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_m \cdot p_m = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot p_i .$$

Тогда, аналогично, найдем понятие среднего значения информации или **энтропию**

$$H = -\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \log_2(p_i) = -[p_1 \cdot \log_2(p_1) + p_2 \cdot \log_2(p_2) + \ldots + p_m \cdot \log_2(p_m)].$$

Энтропия измеряется как бит на символ (слово, единицу чего-либо).

Пример 1. Брошены две игральные кости. Какое количество информации содержится в следующих событиях: сумма очков на выпавших гранях — четная; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность равна четырем.

Решение. Выпишем исходы, которые могут произойти в результате опыта.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно $6 \cdot 6 = 36$.

а) Искомое событие $A = \{$сумма очков на выпавших гранях — четная$\}$.

Выпишем данные исходы:

(11, 13, 15, 22, 24, 26, 31, 33, 35, 42, 44, 46, 51, 53, 55, 62, 64, 66).

Т. е. количество исходов, благоприятствующих нашему событию 18.

Таким образом, $m = 18$, $n = 36$ и искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Количество информации в том, что сумма очков на выпавших гранях — четная, определим как

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{1}{2}) = 1 \text{ } бит.$$

б) Искомое событие $A = \{$сумма выпавших очков равна восьми, а разность равна четырем$\}$.

Выпишем исходы опыта, у которых сумма очков равна восьми:

(26, 35, 44, 53, 62).

Выберем из них исходы, когда разность равна четырем:

(26, 62).

Таким образом, $m = 2$, $n = 36$ и искомая вероятность равна
$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Количество информации в том, что сумма выпавших очков равна восьми, а разность равна четырем, определим как

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{18}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{18}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{1}{18}) \approx 4{,}17\ \textit{бит}.$$

Пример 2. Опыт состоит в одновременном (или последовательном) бросании двух монет. Какое количество информации содержится в событии, что хотя бы один раз появится «герб».

Решение.

Искомое событие

$A = \{$хотя бы один раз появится герб$\}$.

Выпишем исходы опыта.

$\omega_1 = \{$на первой монете герб, на второй герб$\}$;

$\omega_2 = \{$на первой монете герб, на второй цифра$\}$;

$\omega_3 = \{$на первой монете цифра, на второй герб$\}$;

$\omega_4 = \{$на первой монете цифра, на второй цифра$\}$.

Событию A благоприятствуют ω_1, ω_2, ω_3, т.е. $m = 3$, $n = 4$. Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}.$$

Количество информации в том, что хотя бы один раз появится «герб», определим как

$$I = -\log_2\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{3}{4}) \approx 0{,}41\ \textit{бит}.$$

Пример 3. (Задача де Мере). Какое событие более не определено с точки зрения теории информации: сумма очков при бросании двух игральных костей — 11 или 12?

Решение.

Всего возможно $6 \cdot 6 = 36$ комбинаций.

Сумма 12 выпадает лишь при одной комбинации: 6 и 6. Таким образом, $P(12) = \frac{1}{36}$. Сумма 11 выпадет при двух комбинациях 5 и 6, и наоборот. Тогда $P(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Таким образом, сумма очков 11 имеет в два раза больше шансов выпасть, чем 12.

Найдем количество информации в обоих случаях

$$I_1 = -\log_2\left(\frac{1}{36}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{36}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{1}{36}) \approx 5{,}17 \quad \textit{бит};$$

$$I_1 = -\log_2\left(\frac{1}{18}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{18}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{1}{18}) \approx 4{,}17 \quad \textit{бит}.$$

Т. е. неопределенности информации больше в первом случае.

Задача 1. Брошены две игральные кости. Какое количество информации содержится в следующих событиях:

а) сумма выпавших очков равна n;

б) сумма выпавших очков равна n, а разность — k;

б) сумма выпавших очков равна n, а произведение — m.

	n	k	m		n	k	m
1.	4	2	3	11.	7	3	10
2.	5	3	4	12.	8	4	12
3.	6	4	5	13.	9	5	14
4.	7	5	6	14.	10	16	6
5.	8	7	6	15.	5	3	6
6.	9	7	8	16.	6	4	9
7.	10	8	9	17.	7	5	12
8.	4	4	0	18.	8	6	15
9.	5	1	6	19.	9	7	18
10.	6	2	8	20.	10	8	21

6.3. Комбинаторные схемы в теории информации

Пример 4. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад составляется пятизначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что составленное число будет четным? Определить количество информации, содержащееся в данном событии.

Решение. Общее количество исходов определим как $n = 5!$ Нашему опыту благоприятствует случай, когда на последнем месте числа будет стоять 2 или 4 (два варианта). Таким образом $m = 4!\cdot 2$.

Искомая вероятность равна

$$P = \frac{4!\cdot 2}{5!} = \frac{2}{5}.$$

Количество информации в том, что составленное число будет четным, определим как

$$I = -\log_2\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{2}{5}) \approx 1{,}322 \textit{ бит}.$$

Пример 5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад составляется трехзначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что составленное число будет четным? Определить количество информации, содержащееся в данном событии.

Решение. Процедуру составления трехзначного числа можно представить как последовательный выбор трех элементов из пяти без возвращения (повторения), причем порядок важен. Тогда общее количество исходов определим как $n = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Нашему опыту благоприятствует случай, когда на последнем месте числа будет стоять 2 или 4 (два варианта). Таким образом, $m = 2 \cdot A_4^2 = \frac{2 \cdot 4!}{(4-2)!} = \frac{2 \cdot 4!}{2!} = 24$.

Искомая вероятность равна

$$P = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Количество информации в том, что составленное число будет четным, определим как

$$I = -\log_2\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{2}{5}) \approx 1{,}322 \textit{ бит}.$$

Данную задачу можно решить аналогично предыдущему примеру.

Пример 6. Совершено правонарушение. Задержано семь человек, из которых один виновен. Следователь по одному вызывает к себе задержанных. Какова вероятность того, что преступник будет третьим? Определить количество информации, содержащееся в данном событии.

Решение. Общее количество исходов определим как $n = 7!$ Изучаемое событие состоит в том, что третьим будет искомый гражданин. Два предыдущих и четыре последующих задержанных могут следовать в произвольном порядке. Следовательно, число событий, нам благоприятствующих, равно $m = 6!$

Искомая вероятность равна

$$P=\frac{6!}{7!}=\frac{1}{7}.$$

Данную задачу можно решить иначе. Вероятность того, что первый задержанный, которого вызывает следователь, не совершал правонарушение, равна $\frac{6}{7}$. Вероятность того, что правонарушение не совершал и первый и второй вызываемый — $\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}$. Третьим должен быть преступник. Так как осталось неопрошенными пять человек, то вероятность того, что третьим будет преступник, равна $\frac{1}{5}$. Искомая вероятность

$$P=\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{7},$$

т. е. первый не совершал правонарушение, второй не совершал, а третий совершил.

Количество информации в том, что преступник будет третьим, определим как

$$I=-\log_2\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln 2}=-lb(\frac{2}{5})\approx 1{,}322\ \textit{бит}.$$

Пример 7. Преступник забыл последние две цифры пин-кода и набрал их наудачу. Какова вероятность того, что он набрал нужные цифры? Определить количество информации, содержащееся в данном событии.

Решение. Задача имеет два решения: цифры не повторяются (все различны); цифры могут повторяться.

1) Цифры не повторяются. Всего цифр 10. Выбрать две из десяти без повторения, но с учетом порядка можно $A_{10}^2=10\cdot 9=\frac{10!}{(10-2)!}=90$ способами. (Так как цифры не повторяются, то первую цифру можно выбрать 10 способами, а вторую 9 способами). Нам благоприятствует один вариант. Таким образом, искомая вероятность $P=\frac{1}{90}$.

Количество информации в том, что преступник набрал нужные цифры (цифры не повторяются), определим как

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{90}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{90}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{1}{90}) \approx 6{,}492\ \textit{бит}.$$

2) Цифры могут повторяться. Выбрать две цифры из десяти с повторением (возвращением) с учетом порядка можно $\overline{A}_{10}^2 = 10^2 = 100$ способами. Благоприятствует также один вариант. Искомая вероятность $P = \frac{1}{100}$.

Количество информации в том, что преступник набрал нужные цифры (цифры могут повторяться), определим как

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{100}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{1}{100}) \approx 6{,}644\ \textit{бит}.$$

Пример 8. В коробке два белых и два черных шара. Не глядя вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара будут белыми? Определить количество информации, содержащееся в данном событии.

Решение. Каким образом вынимают шары (одновременно или поочередно), в данном случае не имеет значения.

Выбрать два шара из четырех без возвращения и без учета порядка можно $C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = 6$ способами. Благоприятствует один случай — выбрать два белых шара из двух можно $C_2^2 = \frac{2!}{2!\cdot(2-2)!} = 1$ способом, тогда искомая вероятность $P = \frac{1}{6}$.

Количество информации в том, что оба шара будут белыми, определим как

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{1}{6}) \approx 2{,}585\ \textit{бит}.$$

Пример 9. В одну шеренгу строятся четыре майора полиции и три капитана полиции. Какова вероятность того, что три капитана полиции будут стоять рядом? Определить количество информации, содержащееся в данном событии.

Решение. Всего возможно 7! размещений офицеров. Для подсчета благоприятных случаев расставим 5 офицеров (5!): одного офицера (трех капитанов полиции считаем за одного) и четырех майоров полиции расставим между собой. Так же расставим трех капитанов между собой (3!). Т. е. возможно 5!·3! вариантов. Искомая вероятность $P = \frac{5!\cdot 3!}{7!} = \frac{1}{7}$.

Количество информации в том, что три капитана полиции будут стоять рядом, определим как

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{7}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{7}\right)}{\ln 2} = -lb(\frac{1}{7}) \approx 2{,}807 \ \textit{бит}.$$

Пример 10. На работу в отделе полиции претендуют 15 выпускников, среди которых 4 выпускника вуза № 1, 6 выпускников вуза № 2, остальные окончили вуз № 3. Наудачу выбирают 5 претендентов. Найти вероятность того, что среди отобранных 3 выпускника вуза № 1, 1 выпускник вуза № 2, 1 выпускник вуза № 3. Определить количество информации, содержащееся в данном событии.

Решение. Составим таблицу.

	имеем	выбираем
№ 1	$n_1 = 4$	$m_1 = 3$
№ 2	$n_2 = 6$	$m_2 = 1$
№ 3	$n_3 = 5$	$m_3 = 1$
всего	$N = 15$	$M = 5$

Выбрать 5 выпускников из 15 можно C_{15}^5 способами. Для первого вуза выбрать 3 из четырех можно C_4^3 способами. Аналогично для второго и третьего вуза имеем: C_6^1 и C_5^1

По формуле гипергеометрической вероятности получим

$$P = \frac{C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot C_{n_3}^{m_3}}{C_N^M} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1}{C_{15}^5}.$$

Учитывая, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

получим

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4,\ C_6^1 = \frac{6!}{1!(6-1)!} = 6,\ C_5^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5,$$

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!(15-5)!} = 3003.$$

Тогда

$$P = \frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{3003} \approx 0{,}0399.$$

Количество информации, содержащееся в данном событии, определим как

$$I = -\log_2(0{,}0399) = -\frac{\ln(0{,}0399)}{\ln 2} = -lb(0{,}0399) \approx 4{,}647 \ \textit{бит}.$$

Пример 11. В здании отдела полиции 4 этажа. В отдел пришли 4 посетителя. Какова вероятность того, что: 1) все посетители будут на одном этаже; 2) посетители будут на разных этажах? Определить количество информации, содержащееся в данных событиях.

Решение. Общее количество исходов: каждый из четырех посетителей может остаться на каждом этаже (первый на любом из четырех, второй на любом из четырех и т. д.), т. е. поиск количества комбинаций с повторением (возвращением и учетом порядка) — $\overline{A}_4^4 = 4^4 = 256$ способов.

1) Все посетители будут на одном этаже. Число исходов, благоприятствующих данному событию 4 (всего 4 этажа). Искомая вероятность $P = \frac{4}{4^4} = \frac{1}{4^3} \approx 0{,}016$.

Количество информации, содержащееся в данном событии, определим как

$$I = -\log_2(0{,}016) = -\frac{\ln(0{,}016)}{\ln 2} = -lb(0{,}016) \approx 5{,}966 \ \textit{бит}.$$

2) Посетители будут на разных этажах. Разместить 4 человек по этажам можно $4!$ способами. Искомая вероятность $P = \frac{4!}{4^4} \approx 0{,}094$.

Количество информации, содержащееся в данном событии, определим как

$$I = -\log_2(0{,}094) = -\frac{\ln(0{,}094)}{\ln 2} = -lb(0{,}094) \approx 3{,}411 \ \textit{бит}.$$

Пример 12. Из цифр 1, 2 и 3 случайным образом составляют шестизначное число. Найти вероятность того, что цифра 1 будет встречаться один раз, цифра 2 — два раза, цифра 3 — три раза.

Решение. Общее количество исходов определим из условия, что цифры повторяются и порядок важен, т. е. общее количество исходов $\overline{A}_3^6 = 3^6 = 729$.

Число благоприятствующих исходов определим как $\overline{P}_6(1,\,2,\,3) = \frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!} = 60$. Искомая вероятность $P = \frac{60}{729} \approx 0{,}082$.

Количество информации, содержащееся в данном событии, равно

$$I = -\log_2(0{,}082) = -\frac{\ln(0{,}082)}{\ln 2} = -lb(0{,}082) \approx 3{,}608 \ \textit{бит}.$$

Задача 2.

1. У следователя 10 версий по расследуемому делу, из которых только одно достоверное. Какое количество информации содержится в том, что для раскрытия преступления придется проверить ровно половину версий?

2. Следователь знает первые семь цифр телефонного номера. Какое количество информации содержится в том, что, набрав наудачу телефонный номер один раз, он угадает? Известно, что цифры разные.

3. В папке у следователя три фотографии с места преступления № 1 и две фотографии с места преступления № 2. Он одновременно вынимает две фотографии. Какое количество информации содержится в том, что они окажутся с места преступления № 1?

4. Для опознания правонарушителя представлены пять брюнетов и четыре шатена. Какое количество информации содержится в том, что брюнеты будут находиться рядом?

5. Задержаны десять человек, среди которых два находятся в розыске. Наудачу выбрали восемь человек. Какое количество информации содержится в том, что среди них будет один, находящийся в розыске?

6. В камере сидят 5 человек осужденных по статье № 1 кодекса, 6 человек по статье № 2 кодекса и 7 человек по статье № 3 кодекса. Наудачу вызывают трех человек. Какое количество информации содержится в том, что все вызванные осуждены по статье № 1 кодекса?

7. Какое событие содержит больше информации: выиграть в лотерею «5 из 36» или «7 из 49»?

8. Известно, что из 20 радиостанций, поступивших в отдел полиции, 4 имеют дефекты. Какое количество информации содержится в том, что среди 10 розданных сотрудникам отдела радиостанций будут 2 с дефектами?

9. Из тюрьмы сбежали пять заключенных. Оцепленный район разбит на пять секторов. Какое количество информации содержится в том, что все спрячутся в одном секторе?

10. Пароль на компьютере состоит из 4 цифр. Пользователь забыл пароль и набирает комбинацию наугад. Какое количество информации содержится в том, что пользователь с первого раза угадает пароль?

11. Из 10 карточек с буквами, образующими слово «МАТЕМАТИКА», наудачу выбирают четыре и выкладывают слева направо. Какое количество информации содержится в том, что получится слово «ТЕМА»?

12. Известно, что десятизначный телефонный номер состоит из цифр 3, 5, 7 и 9. Случайным образом набирают номер. Какое количество информации содержится в том, что в данном телефонном номере цифра 3 будет встречаться один раз, цифра 5 — два раза, цифра 7 — три раза, цифра 9 — четыре раза?

13. По оперативной информации, в автобусе едут семь наркокурьеров. Автобус делает семь остановок. Какое количество информации содержится в том, что курьеры выйдут на одной остановке?

14. На соревнования по стрельбе из табельного оружия направили 10 человек, из которых 4 женщины. Какое количество информации содержится в том, что на пьедестал взойдут женщины?

15. Из тюрьмы сбежали пять заключенных. Оцепленный район разбит на пять секторов. Какое количество информации содержится в том, что все спрячутся в разных секторах?

16. На соревнования по стрельбе из табельного оружия направили 10 человек, из которых 4 женщины. Какое количество информации содержится в том, что на пьедестал взойдут 2 женщины и один мужчина?

17. Известно, что из 25 радиостанций, поступивших в отдел полиции, 5 имеют дефекты. Какое количество информации содержится в том, что среди 12 розданных сотрудникам отдела радиостанций не будет дефектных?

18. В камере сидят 7 человек, осужденных по статье № 1 кодекса, 6 человек — по статье № 2 кодекса и 5 человек — по статье № 3 кодекса. Наудачу вызывают трех человек. Какое количество информации содержится в том, что все вызванные осуждены по разным статьям кодекса?

19. В папке у следователя три фотографии с места преступления № 1 и две фотографии с места преступления № 2. Он поочередно вынимает две фотографии. Какое количество информации содержится в том, что они окажутся с места преступления № 1?

20. Следователь не знает семь цифр телефонного номера. Какое количество информации содержится в том, что, набрав наудачу телефонный номер один раз, он угадает? Известно, что цифры могут быть одинаковые.

6.4. Количество информации. Энтропия

Пример 13. Алфавит состоит из букв A, B, C. Какое максимальное количество сообщений можно получить, комбинируя по две буквы в сообщении? Какое количество информации приходится на одно такое сообщение? Какое количество информации содержится в $m=5$ таких сообщениях? Чему равно количество информации на символ первичного алфавита? Передаваемые сообщения равновероятны.

Решение.

1. Общее число неповторяющихся сообщений, которое может быть составлено из алфавита $m=3$ путем комбинирования по $k=2$ символов определим как (размещения с повторениями и с учетом порядка)

$$\overline{A}_n^k = m^k \Rightarrow N = 3^2 = 9.$$

2. Количество информации, приходящееся на одно сообщение, составленное из алфавита $m=3$ путем комбинирования по $k=2$ символов

$$I = k \cdot \log_2 m = \log_2 m^k = \log_2 N = \frac{\ln N}{\ln 2} = lbN = \log_2 9 = \frac{\ln 9}{\ln 2} = lb9 \approx 3{,}17 \;\; \textit{бит}.$$

3. Количество информации в 5 сообщениях

$$I = n \cdot k \cdot \log_2 m \approx 5 \cdot 3{,}17 = 15{,}85 \;\; \textit{бит}.$$

4. Количество информации на символ первичного алфавита

$$I = \log_2 N = \log_2 m^k = \log_2 3^2 = lb9 \approx 3{,}17 \;\; \textit{бит}.$$

Задача 3. Алфавит состоит из m букв. Символы алфавита встречаются с равными вероятностями, передаваемые сообщения равновероятны.

1. Какое количество сообщений можно составить, комбинируя по n букв в слове (сообщении)?
2. Какое количество информации приходится на одну букву исходного алфавита?
3. Чему равна энтропия слова (одного сообщения)?
4. Какое количество информации приходится на k букв исходного алфавита?
5. Какое количество информации приходится на t слов?

	m	n	k	t
1.	2	9	3	6
2.	3	8	6	9
3.	4	7	9	4
4.	5	5	5	7
5.	6	7	3	3
6.	7	9	5	7
7.	8	8	3	4
8	9	4	7	7
9.	2	6	9	8
10.	3	7	4	5
11.	4	9	2	3
12.	5	4	3	7
13.	6	5	5	2
14.	7	6	7	8
15.	8	7	9	3

	m	n	k	t
16.	5	4	7	7
17.	6	2	6	5
18.	7	7	3	7
19.	8	5	5	5
20.	9	3	7	4
21.	2	7	4	7
22.	3	6	8	9
23.	4	5	5	4
24.	5	4	3	7
25.	6	9	8	8
26.	7	3	4	4
27.	9	5	5	5
28.	8	7	3	9
29.	7	3	5	7
30	6	4	7	5

Задача 4. Алфавит состоит из m букв. Какое количество букв в принятом слове, если оно содержит k бит информации? Чему равна энтропия принятого сообщения?

	m	k
1.	4	10
2.	8	15
3.	16	8
4.	32	55
5.	64	30
6.	128	14
7.	256	40
8	512	63
9.	1024	30
10.	512	27
11.	256	56
12.	128	42
13.	64	36
14.	32	25
15.	16	32

	m	k
16.	128	35
17.	64	42
18.	32	35
19.	16	28
20.	8	21
21.	4	14
22.	4	18
23.	8	6
24.	16	44
25.	32	45
26.	64	12
27.	128	56
28.	256	72
29.	512	90
30.	1024	50

Пример 14. Алфавит состоит из букв A, B, C. Определить количество информации на символ сообщения, составленного из такого алфавита:

1) вероятности появления букв равны соответственно $p_A = 0{,}2$, $p_B = 0{,}3$, $p_C = 0{,}5$;

2) буквы алфавита встречаются с равными вероятностями.

Решение.

1. Количество информации на символ алфавита есть энтропия данного алфавита. Тогда

$$H = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i =$$
$$= -\left(0{,}2 \cdot \log_2 0{,}2 + 0{,}3 \cdot \log_2 0{,}3 + 0{,}5 \cdot \log_2 0{,}5\right) \approx 1{,}485 \ \text{бит/символ}.$$

2. Если буквы алфавита встречаются с равными вероятностями, то

$$H = \log_2 m = \log_2 3 =$$

или

$$= -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i = -\left(\frac{1}{3} \cdot \log_2 \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 \frac{1}{3}\right) =$$
$$= -3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_2 \frac{1}{3} \approx 1{,}485 \ \text{бит/символ}.$$

Задача 5. Алфавит состоит из букв A, B, C, D, E.

Найти:

1. Максимальное количество сообщений, комбинируя по k букв в сообщении. Какое количество информации приходится на одно такое сообщение?

2. Известно, что при передаче n сообщений буква A встречалась n_1 раз, буква B — n_2 раз, буква C — n_3 раз, буква D — n_4 раз, буква E — n_5 раз. Чему равна энтропия данного алфавита (количество информации на символ первичного алфавита)?

3. Определить количество информации, приходящееся на одно слово (сообщение), комбинируя по k букв в сообщении.

4. Определить количество информации на символ сообщения (энтропию системы), составленного из алфавита, если символы алфавита встречаются с равными вероятностями.

	k	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1.	2	20	30	40	5	5
2.	3	15	25	10	15	35
3.	4	17	20	27	12	24
4.	5	11	30	26	14	19
5.	2	21	17	25	31	6
6.	3	19	9	31	29	12
7.	4	41	7	12	24	16
8	5	23	18	25	20	14
9.	2	12	38	4	27	19
10.	3	32	19	15	27	7
11.	4	17	19	45	3	16
12.	5	7	39	23	12	19
13.	2	15	32	27	7	32
14.	3	4	38	12	19	27
15.	4	25	18	20	14	23

	k	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
16.	5	19	27	4	38	12
17.	2	7	27	15	19	32
18.	3	27	20	12	17	24
19.	4	7	12	41	16	24
20.	5	26	30	11	19	14
21.	2	19	29	9	12	31
22.	3	25	31	21	17	6
23.	4	24	12	27	20	17
24.	5	35	15	10	25	15
25.	2	16	17	19	3	45
26.	3	14	20	25	18	23
27.	4	16	24	12	7	41
28.	5	12	29	31	9	19
29.	2	6	31	25	17	21
30.	3	19	14	26	30	11

Задача 6. Найти количество информации в сообщении, составляющем Вашу фамилию имя отчество:

Фамилия_Имя_Отчество.

Задача 7. Найти среднее количество информации на одну букву русского алфавита. Частоты появления букв русского алфавита приведены в приложении 1.

Пример 15. Источник сообщений вырабатывает символы a_1, a_2, a_3 с вероятностями 0,2, 0,3 и 0,5 соответственно. Определить энтропию источника.

Решение.

Построим таблицу распределения случайной величины (закон распределения), вырабатываемой источником

X	a_1	a_2	a_3
P	0,2	0,3	0,5

$\sum p_i = 1$

Тогда, энтропию источника определим как

$$H = -\sum_{i=1}^{m} p_i lbp_i = -\left(0{,}2 \cdot lb0{,}2 + 0{,}3 \cdot lb0{,}3 + 0{,}5 \cdot lb0{,}5\right) \approx 1{,}485 \;\; \textit{бит/символ}.$$

Задача 8. Источник вырабатывает ансамбль независимых символов с частотами n_i. Вычислить энтропию источника.

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
1.	12	11	24	32	45	19	21	18
2.	44	23	17	75	22	21	78	25
3.	54	32	27	32	14	78	43	15
4.	34	56	23	17	73	32	12	11
5.	11	30	26	14	11	30	11	12
6.	21	17	25	31	21	17	23	17
7.	19	9	31	29	12	11	32	27
8	41	7	12	24	44	23	44	32
9.	23	17	27	32	14	78	32	11
10.	32	27	11	30	26	14	11	30
11.	22	23	21	17	25	31	21	17
12.	11	30	19	9	31	29	12	11
13.	21	17	41	7	12	24	44	23
14.	12	11	4	23	17	5	11	30
15.	44	23	6	32	27	7	21	17

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
16.	23	17	12	11	11	30	8	11
17.	32	27	44	23	21	17	16	23
18.	9	21	18	11	30	26	14	17
19.	12	11	10	21	17	25	31	25
20.	44	23	19	19	9	31	29	27
21.	12	20	21	41	7	12	24	28
22.	22	24	26	28	11	30	23	17
23.	11	30	26	14	21	17	32	27
24.	21	17	25	31	14	30	12	11
25.	19	9	31	29	23	17	44	23
26.	41	7	12	24	32	27	15	31
27.	23	17	11	30	11	30	26	14
28.	32	27	21	17	21	17	25	31
29.	11	30	12	11	19	9	31	29
30.	21	17	44	23	41	7	12	24

Задача 9. Два дискретных троичных источника вырабатывают сообщения одинаковой длины по 20 элементов. Количество различных элементов в сообщении каждого источника постоянно. Сообщения каждого источника отличаются только порядком элементов. Зафиксированы два типичных сообщения от каждого источника. Сообщения какого источника несут в среднем большее количество информации?

1.	02102012012011202102	11002210210012101210
2.	02210002221112001120	22220010201021021100
3.	20102010201020110021	00021002112021002110
4.	21021021021021021021	01201201201201201201
5.	02020202101010111111	11110000111122000200
6.	22001100220102010220	00201020112000210210
7.	00022020102020102011	02020101100212121021
8.	12120021021001110010	02111002220000111111
9.	02211121101120111120	12122222111111200110
10.	20202020201010102022	11110201020201020102
11.	20101010120020102011	02010201020102002111
12.	22202020102010102010	11010100002010201021
13.	02020201020212112102	00000020201020100210
14.	02010200100021021011	22222020100201002010
15.	01020102010021120101	20102001001001110102
16.	00020111102010020121	22201001110000201011
17.	02000200011120022201	11010002011201201221
18.	00202010002010021112	02020100010201020111
19.	00002220020101020102	20222000100211020112
20.	02020111102010202010	11111022100201020200
21.	11102020201002212000	00000222220000011111
22.	00000222221111120111	01010200100000111122
23.	02020100201002010201	11111202010020102012
24.	02020010101020102010	01010202220102010201
25.	00222200020200021111	22200102010200102020
26.	20202010022100111000	12010201020102010201
27.	21020102010201020100	20102010201020102002
28.	11100201020010001011	02010200102100011111
29.	01010201020010201222	20102001001002010110
30.	02010210011102010101	02020102210001110210

6.5. Условная энтропия

Пример 16. Производится стрельба по двум мишеням: по первой мишени сделано 2 выстрела, по второй 3. Вероятности попадания при одном выстреле соответственно равны $1/2$ и $1/4$. Исход стрельбы по какой мишени является более определенным?

Решение.

Составляем законы распределения случайных величин X и Y — числа попаданий по мишеням

X	0	1	2
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

$\sum p_i = 1$

Y	0	1	2	3
P	$27/64$	$27/64$	$9/64$	$1/64$

$\sum p_i = 1$

Мерой неопределенности исхода стрельбы является энтропия числа попаданий

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i lbp_i \,.$$

Тогда

$$H_1 = -\left(\frac{1}{4}\cdot lb\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot lb\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot lb\frac{1}{4}\right) = 1{,}5\,;$$

$$H_2 = -\left(\frac{27}{64}\cdot lb\frac{27}{64} + \frac{27}{64}\cdot lb\frac{27}{64} + \frac{9}{64}\cdot lb\frac{9}{64} + \frac{1}{64}\cdot lb\frac{1}{64}\right) \approx 1{,}54\,.$$

Так как $H_1 < H_2$, то исход стрельбы по первой мишени обладает большей определенностью.

Задача 10. В двух урнах по n шаров, причем в первой k_1 белых, b_1 синих, c_1 красных, а во второй k_2 — белых, b_2 — синих, c_2 — красных.

1. Из каждой урны вынимают по два шара. Составить закон распределения количества красных шаров среди отобранных. Определить, для какой урны исход опыта является более определенным.
2. Из каждой урны вынимают по три шара. Составить закон распределения количества синих шаров среди отобранных. Определить, для какой урны исход опыта является более определенным.

Замечание. Гипергеометрическое распределение случайной величины имеет вид:

$$p = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\,,$$

где N — общее количество элементов;

M — количество элементов, обладающих нужным свойством;

n — количество отобранных элементов;

m — количество отобранных элементов, обладающих нужным свойством.

	k_1	b_1	c_1	k_2	b_2	c_2
1.	5	5	10	7	6	7
2.	11	4	5	8	5	7
3.	10	3	7	8	4	8
4.	9	2	9	7	3	10
5.	8	1	11	5	2	13
6.	5	10	5	6	7	7
7.	7	2	11	4	6	10
8	6	3	11	3	7	10
9.	5	4	11	2	8	10
10.	17	1	2	5	12	3
11.	1	16	3	10	5	5
12.	14	2	4	8	8	4
13.	12	4	4	6	6	8
14.	10	5	5	7	7	6
15.	10	3	7	4	1	15

	k_1	b_1	c_1	k_2	b_2	c_2
16.	15	1	4	1	9	10
17.	14	2	4	12	4	4
18.	7	10	3	8	11	1
19.	3	7	10	4	5	11
20.	8	2	10	6	11	3
21.	10	2	8	4	7	9
22.	12	2	6	3	12	5
23.	9	2	9	5	12	3
24.	14	2	4	8	5	7
25.	8	1	11	12	4	4
26.	6	3	11	7	7	6
27.	10	3	7	8	4	8
28.	12	4	4	5	4	11
29.	3	12	5	6	3	11
30.	4	1	15	7	6	7

Пример 17. Два студента должны сдать два экзамена. Вероятность получения положительного результата первым студентом при сдаче первого экзамена равна 0,5, второго экзамена 0,3 и не сдать — 0,2. Второй студент сдаст первый экзамен с первого раза с вероятностью 0,3, второй экзамен — с вероятностью 0,5 и не сдаст экзамены — с вероятностью 0,2. Вероятность выбора первого студента 0,4.

1. Вычислить неопределенность при условии, что будет сдан второй экзамен.

2. Вычислить неопределенность при условии, что экзамены не будут сданы.

3. Определить неопределенность, если экзамен сдает любой студент.

Решение.

Составляем вероятностную схему. Пусть случайная величина Y — сдача экзамена студентами; X — выбор студента.

Тогда безусловный закон распределения X

P	$p(x_1)$	$p(x_2)$
X	0,4	0,6

Вероятности сдачи экзаменов студентами — условные вероятности, сведем в таблицу и сделаем проверку — суммы элементов по строкам матрицы $p(y_j/x_i)$ должны быть равны 1:

$$p(y_j/x_i)=\begin{pmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Определим вероятности совместного появления событий, т. е. элементы матрицы $p(x_i, y_j)$ как

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)\,p(y_j / x_i).$$

Тогда

$$p(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,12 & 0,08 \\ 0,18 & 0,3 & 0,12 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j) = 0,2 + 0,12 + 0,08 + 0,18 + 0,3 + 0,12 = 1.$$

Найдем безусловный закон распределения случайной величины Y — сдача экзамена студентами

P	$p(y_1)$	$p(y_2)$	$p(y_3)$	
Y	0,2+0,18=0,38	0,12+0,3=0,42	0,08+0,12=0,2	$\sum p(y_i) = 1$

Вычислим условные вероятности $p(x_i / y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$:

$$p(x_1/y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,2}{0,38} = 0,526;$$

$$p(x_1/y_2) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,12}{0,42} = 0,286;$$

$$p(x_1/y_3) = \frac{p(x_1, y_3)}{p(y_3)} = \frac{0,08}{0,2} = 0,4;$$

$$p(x_2/y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,18}{0,38} = 0,474;$$

$$p(x_2/y_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,3}{0,42} = 0,714;$$

$$p(x_2/y_3) = \frac{p(x_2, y_3)}{p(y_3)} = \frac{0,08}{0,2} = 0,6.$$

Сведем полученные результаты в таблицу и сделаем проверку — суммы элементов по столбцам матрицы $p(x_i / y_j)$ должны быть равны 1:

$$p(x_i / y_j) = \begin{pmatrix} 0,526 & 0,286 & 0,4 \\ 0,474 & 0,714 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

1. Неопределенность исхода, что будет сдан второй экзамен, представляет собой энтропию

$$H(x_i / y_2) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i / y_2) \cdot lb\,p(x_i / y_2) =$$
$$= -(0,286 \cdot lb0,286 + 0,714 \cdot lb0,714) \approx 0,863 \ \textit{бит/событие}.$$

2. Неопределенность в случае неудачи при сдаче экзаменов есть энтропия

$$H(x_i/y_3) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i/y_3) \cdot lbp(x_i/y_3) =$$
$$= -(0{,}4 \cdot lb0{,}4 + 0{,}6 \cdot lb0{,}6) \approx 0{,}971 \ \textit{бит/событие}.$$

3. Неопределенность ситуации, что экзамен сдает случайно выбранный студент, характеризуется средней условной энтропией

$$H(y_j/x_i) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i) \sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_i) \cdot lbp(y_j/x_i).$$
$$= -[0{,}4 \cdot (0{,}5 \cdot lb0{,}5 + 0{,}3 \cdot lb0{,}3 + 0{,}2 \cdot lb0{,}2) +$$
$$+ 0{,}6 \cdot (0{,}3 \cdot lb0{,}3 + 0{,}5 \cdot lb0{,}5 + 0{,}2 \cdot lb0{,}2)] \approx 1{,}485 \ \textit{бит/событие}.$$

Задача 11. Два стрелка стреляют по двум мишеням. Первый стрелок поражает мишень № 1 с вероятность p_1, мишень № 2 — с вероятностью p_2 и промахивается с вероятностью p_3. Второй стрелок поражает мишень № 1 с вероятностью p_4, мишень № 2 — p_5 и промахивается с вероятность p_6. Вероятность выбора второго стрелка для стрельбы равна p_7.

1. Вычислить неопределенность назначения стрелка для стрельбы, если в результате поражена первая цель.
2. Вычислить неопределенность назначения стрелка для стрельбы, если в результате цель не поражена.
3. Определить неопределенность, если стреляет произвольный стрелок.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
1.	0,6	0,3	0,1	0,55	0,35	0,1	0,41
2.	0,45	0,35	0,2	0,3	0,4	0,3	0,42
3.	0,57	0,32	0,11	0,45	0,45	0,1	0,43
4.	0,33	0,47	0,2	0,58	0,37	0,05	0,44
5.	0,43	0,51	0,06	0,67	0,24	0,09	0,45
6.	0,64	0,34	0,02	0,45	0,47	0,08	0,46
7.	0,51	0,38	0,11	0,56	0,26	0,18	0,47
8	0,51	0,35	0,14	0,61	0,33	0,06	0,48
9.	0,54	0,38	0,08	0,44	0,41	0,15	0,49
10.	0,59	0,31	0,1	0,46	0,44	0,1	0,5
11.	0,51	0,32	0,17	0,53	0,35	0,12	0,51
12.	0,56	0,4	0,04	0,49	0,43	0,08	0,52
13.	0,56	0,36	0,08	0,54	0,37	0,09	0,53
14.	0,57	0,37	0,06	0,37	0,47	0,16	0,54
15.	0,57	0,27	0,16	0,5	0,42	0,08	0,55
16.	0,38	0,45	0,17	0,6	0,29	0,11	0,56
17.	0,6	0,32	0,08	0,58	0,3	0,12	0,57

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
18.	0,41	0,47	0,12	0,32	0,49	0,19	0,58
19.	0,55	0,36	0,09	0,53	0,37	0,1	0,59
20.	0,35	0,47	0,18	0,39	0,46	0,15	0,6
21.	0,48	0,44	0,08	0,52	0,38	0,1	0,4
22.	0,43	0,49	0,08	0,33	0,48	0,19	0,41
23.	0,63	0,35	0,02	0,36	0,47	0,17	0,42
24.	0,37	0,46	0,17	0,54	0,36	0,1	0,43
25.	0,45	0,44	0,11	0,55	0,39	0,06	0,44
26.	0,47	0,46	0,07	0,42	0,48	0,1	0,45
27.	0,53	0,38	0,09	0,47	0,45	0,08	0,46
28.	0,34	0,47	0,19	0,57	0,41	0,02	0,47
29.	0,52	0,33	0,15	0,55	0,37	0,08	0,48
30.	0,52	0,36	0,12	0,62	0,34	0,04	0,49

7. КАНАЛЫ СВЯЗИ

7.1. Условная энтропия. Энтропия объединения

Канал связи со стороны источника.

Пусть канал задан матрицей $m \times n$, состоящей из элементов $p(b_j / a_i)$.

Потери информации, которые приходятся на долю сигнала a_i, описываются при помощи **частной условной энтропии**

$$H(a_i) = H(b_j / a_i) = -\sum_j p(b_j / a_i) \log_2 p(b_j / a_i), \ i = 1,\dots,m.$$

При **равновероятном** появлении m символов в сообщении **полная (общая) условная энтропия**

$$H(B/A) = -\frac{1}{m} \sum_j \sum_i p(b_j / a_i) \log_2 p(b_j / a_i);$$

энтропия источника

$$H(A) = \log_2(m).$$

При **неравновероятном** появлении m символов в сообщении **полная (общая) условная энтропия**

$$H(B/A) = -\sum_i \sum_j p(a_i) p(b_j / a_i) \log_2 p(b_j / a_i);$$

энтропия источника

$$H(A) = -\sum_i p(a_i) \log_2 p(a_i).$$

Для нахождения энтропии приемника безусловные вероятности приемника определяются как

$$p(b_j) = \sum_i p(a_i) p(b_j / a_i), \ j = 1,\dots,n.$$

Тогда энтропия приемника вычисляется по формуле:

$$H(B) = -\sum_j p(b_j) \log_2 p(b_j).$$

Канал связи со стороны приемника.

Пусть канал задан матрицей $m \times n$, состоящей из элементов $p(a_i / b_j)$.

Потери информации, которые приходятся на долю сигнала b_j, описываются при помощи **частной условной энтропии**

$$H(b_j) = H(a_i / b_j) = -\sum_j p(a_i / b_j) \log_2 p(a_i / b_j), \ j = 1,\dots,n.$$

При **равновероятном** появлении m символов в сообщении **полная (общая) условная энтропия**

$$H(A/B) = -\frac{1}{m}\sum_j \sum_i p(a_i / b_j)\log_2 p(a_i / b_j);$$

энтропия источника

$$H(A) = \log_2(m).$$

При **неравновероятном** появлении m символов в сообщении **полная (общая) условная энтропия**

$$H(A/B) = -\sum_j \sum_i p(b_j)p(a_i / b_j)\log_2 p(a_i / b_j);$$

Энтропия приемника вычисляется по формуле:

$$H(B) = -\sum_j p(b_j)\log_2 p(b_j).$$

Для нахождения энтропии источника безусловные вероятности приемника определяются как

$$p(a_i) = \sum_j p(b_j)\, p(a_i / b_j),\ i = 1,...,m.$$

Тогда энтропия источника

$$H(A) = -\sum_i p(a_i)\log_2 p(a_i).$$

Пример 18. Влияние помех в канале связи со стороны приемника описывается распределением условных вероятностей

$$p(b/a) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить:

1. Частные условные энтропии $H(a_i)$.

2. Энтропию источника $H(A)$ и полную (общую) условную энтропию сообщений $H(B/A)$, передаваемых по каналу связи:

2.1. Появление символов в сообщение равновероятно.

2.2. Вероятности появления символов на выходе источника $p(a_1) = 0{,}5$, $p(a_2) = 0{,}3$, $p(a_3) = 0{,}2$.

3. Энтропию приемника $H(B)$.

Решение.

1. Частные условные энтропии $H(a_i)$:

$$H(a_1) = H(b_j/a_1) = -\sum_j p(b_j/a_1)\log_2 p(b_j/a_1) =$$

$$= -[0{,}8 \cdot \log_2(0{,}8) + 0{,}15 \cdot \log_2(0{,}15) + 0{,}05 \cdot \log_2(0{,}05)] \approx 0{,}884\ \textit{бит/символ};$$

$$H(a_2)=H(b_j/a_2)=-\sum_j p(b_j/a_2)\log_2 p(b_j/a_2)=$$
$$=-[0{,}1\cdot\log_2(0{,}1)+0{,}7\cdot\log_2(0{,}7)+0{,}2\cdot\log_2(0{,}2)]\approx 1{,}157 \ \textit{бит/символ};$$
$$H(a_3)=H(b_j/a_3)=-\sum_j p(b_j/a_3)\log_2 p(b_j/a_3)=$$
$$=-[0{,}2\cdot\log_2(0{,}2)+0{,}3\cdot\log_2(0{,}3)+0{,}5\cdot\log_2(0{,}5)]\approx 1{,}485 \ \textit{бит/символ}.$$

2.1. Энтропия источника $H(A)$ при равновероятном появлении символов

$$H(A)=\log_2(3)\approx 1{,}585 \ \textit{бит/символ}.$$

Полная общая условная энтропия при равновероятном появлении символов

$$H(B/A)=-\frac{1}{m}\sum_j\sum_i p(b_j/a_i)\log_2 p(b_j/a_i)=$$
$$=-\frac{1}{3}[0{,}8\cdot\log_2(0{,}8)+0{,}15\cdot\log_2(0{,}15)+0{,}05\cdot\log_2(0{,}05)+$$
$$+0{,}1\cdot\log_2(0{,}1)+0{,}7\cdot\log_2(0{,}7)+0{,}2\cdot\log_2(0{,}2)+$$
$$+0{,}2\cdot\log_2(0{,}2)+0{,}3\cdot\log_2(0{,}3)+0{,}5\cdot\log_2(0{,}5)]\approx 1{,}175 \ \textit{бит/символ},$$

или

$$H(B/A)=\frac{1}{3}[H(b_j/a_1)+H(b_j/a_2)+H(b_j/a_3)]\approx 1{,}175 \ \textit{бит/символ}.$$

2.2. Энтропия источника $H(A)$ при вероятности появления символов на выходе источника $p(a_1)=0{,}5$, $p(a_2)=0{,}3$, $p(a_3)=0{,}2$

$$H(A)=-\sum_i p(a_i)\log_2 p(a_i)=$$
$$=-[0{,}5\cdot\log_2(0{,}5)+0{,}3\cdot\log_2(0{,}3)+0{,}2\cdot\log_2(0{,}2)]\approx 1{,}485 \ \textit{бит/символ}.$$

Полная общая условная энтропия при вероятности появления символов на выходе источника $p(a_1)=0{,}5$, $p(a_2)=0{,}3$, $p(a_3)=0{,}2$

$$H(B/A)=-\sum_i\sum_j p(a_i)p(b_j/a_i)\log_2 p(b_j/a_i)=$$
$$=-[0{,}5\cdot(0{,}8\cdot\log_2(0{,}8)+0{,}15\cdot\log_2(0{,}15)+0{,}05\cdot\log_2(0{,}05))+$$
$$+0{,}3\cdot(0{,}1\cdot\log_2(0{,}1)+0{,}7\cdot\log_2(0{,}7)+0{,}2\cdot\log_2(0{,}2))+$$
$$+0{,}2\cdot(0{,}2\cdot\log_2(0{,}2)+0{,}3\cdot\log_2(0{,}3)+0{,}5\cdot\log_2(0{,}5))]\approx 1{,}086 \ \textit{бит/символ},$$

или

$$H(B/A)=0{,}5\cdot H(b_j/a_1)+0{,}3\cdot H(b_j/a_2)+0{,}2\cdot H(b_j/a_3)\approx 1{,}086 \ \textit{бит/символ}.$$

3. Энтропия приемника $H(B)$.

Найдем безусловные вероятности приемника $p(b_j)$:

$$p(b_1)=\sum_i p(a_i)p(b_1/a_i)=0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}47;$$

$$p(b_2) = \sum_i p(a_i) p(b_2/a_i) = 0{,}5 \cdot 0{,}15 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}345;$$

$$p(b_3) = \sum_i p(a_i) p(b_3/a_i) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}185;$$

Проверка $0{,}47 + 0{,}345 + 0{,}185 = 1$.

Тогда энтропия приемника

$$H(B) = -\sum_j p(b_j) \log_2 p(b_j) =$$

$$= -[0{,}47 \cdot \log_2(0{,}47) + 0{,}345 \cdot \log_2(0{,}345) + 0{,}185 \cdot \log_2(0{,}185)] \approx$$

$$\approx 1{,}492 \ \textit{бит/символ}.$$

Задача 12. Влияние помех в канале связи со стороны приемника описывается распределением условных вероятностей $p(b/a)$.

Вычислить:

1. Частные условные энтропии $H(a_i)$.

2. Энтропию источника $H(A)$ и полную (общую) условную энтропию сообщений $H(B/A)$, передаваемых по каналу связи:

2.1. Появление символов в сообщение равновероятно.

2.2. Вероятности появления символов на выходе источника $p(a_1)$, $p(a_2)$, $p(a_3)$, $p(a_4)$.

3. Энтропию приемника $H(B)$.

1.
$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}02 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}08 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$
$p(a_1) = 0{,}4$, $p(a_2) = 0{,}3$,
$p(a_3) = 0{,}2$, $p(a_4) = 0{,}1$.

2.
$$\begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}59 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}74 & 0{,}06 \\ 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}88 \end{pmatrix}$$
$p(a_1) = 0{,}1$, $p(a_2) = 0{,}2$,
$p(a_3) = 0{,}3$, $p(a_4) = 0{,}5$.

3.
$$\begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}13 & 0{,}06 & 0{,}05 \\ 0{,}09 & 0{,}81 & 0{,}07 & 0{,}03 \\ 0{,}03 & 0{,}1 & 0{,}74 & 0{,}13 \\ 0{,}04 & 0{,}12 & 0{,}15 & 0{,}69 \end{pmatrix}$$
$p(a_1) = 0{,}15$, $p(a_2) = 0{,}25$,
$p(a_3) = 0{,}35$, $p(a_4) = 0{,}15$.

4.
$$\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}57 & 0{,}25 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}75 & 0{,}13 \\ 0{,}07 & 0{,}17 & 0{,}23 & 0{,}53 \end{pmatrix}$$
$p(a_1) = 0{,}2$, $p(a_2) = 0{,}3$,
$p(a_3) = 0{,}4$, $p(a_4) = 0{,}1$.

5.
$$\begin{pmatrix} 0{,}78 & 0{,}12 & 0{,}06 & 0{,}04 \\ 0{,}34 & 0{,}56 & 0{,}09 & 0{,}01 \\ 0{,}18 & 0{,}22 & 0{,}55 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}29 & 0{,}11 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$
$p(a_1) = 0{,}25$, $p(a_2) = 0{,}35$,
$p(a_3) = 0{,}15$, $p(a_4) = 0{,}15$.

6.
$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$
$p(a_1) = 0{,}17$, $p(a_2) = 0{,}35$,
$p(a_3) = 0{,}28$, $p(a_4) = 0{,}2$.

7.
$$\begin{pmatrix} 0,45 & 0,25 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,33$, $p(a_2)=0,21$, $p(a_3)=0,14$, $p(a_4)=0,32$.

8.
$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,25 & 0,03 & 0,02 \\ 0,3 & 0,65 & 0,03 & 0,02 \\ 0,1 & 0,2 & 0,65 & 0,05 \\ 0,05 & 0,1 & 0,1 & 0,75 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,09$, $p(a_2)=0,47$, $p(a_3)=0,32$, $p(a_4)=0,12$.

9.
$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,45 & 0,2 & 0,1 \\ 0,15 & 0,25 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,19$, $p(a_2)=0,39$, $p(a_3)=0,17$, $p(a_4)=0,25$.

10.
$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,15 & 0,05 & 0,05 \\ 0,05 & 0,7 & 0,23 & 0,02 \\ 0,03 & 0,07 & 0,65 & 0,25 \\ 0,05 & 0,05 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,34$, $p(a_2)=0,25$, $p(a_3)=0,08$, $p(a_4)=0,33$.

11.
$$\begin{pmatrix} 0,77 & 0,13 & 0,07 & 0,03 \\ 0,04 & 0,7 & 0,15 & 0,11 \\ 0,03 & 0,08 & 0,87 & 0,02 \\ 0,05 & 0,08 & 0,12 & 0,75 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,29$, $p(a_2)=0,31$, $p(a_3)=0,26$, $p(a_4)=0,14$.

12.
$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,15 & 0,1 & 0 \\ 0,15 & 0,65 & 0,16 & 0,04 \\ 0,05 & 0,35 & 0,59 & 0,01 \\ 0,07 & 0,1 & 0,35 & 0,48 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,17$, $p(a_2)=0,28$, $p(a_3)=0,21$, $p(a_4)=0,34$.

13.
$$\begin{pmatrix} 0,85 & 0,1 & 0,03 & 0,02 \\ 0,02 & 0,74 & 0,2 & 0,04 \\ 0,13 & 0,19 & 0,58 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,19 & 0,66 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,42$, $p(a_2)=0,11$, $p(a_3)=0,17$, $p(a_4)=0,3$.

14.
$$\begin{pmatrix} 0,79 & 0,11 & 0,08 & 0,02 \\ 0,05 & 0,8 & 0,09 & 0,06 \\ 0,02 & 0,1 & 0,83 & 0,05 \\ 0,01 & 0,12 & 0,13 & 0,74 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,29$, $p(a_2)=0,12$, $p(a_3)=0,57$, $p(a_4)=0,02$.

15.
$$\begin{pmatrix} 0,56 & 0,23 & 0,15 & 0,06 \\ 0,1 & 0,61 & 0,16 & 0,13 \\ 0,12 & 0,14 & 0,51 & 0,23 \\ 0,06 & 0,09 & 0,15 & 0,7 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,23$, $p(a_2)=0,41$, $p(a_3)=0,28$, $p(a_4)=0,08$.

16.
$$\begin{pmatrix} 0,94 & 0,03 & 0,02 & 0,01 \\ 0,03 & 0,82 & 0,07 & 0,05 \\ 0,08 & 0,09 & 0,76 & 0,07 \\ 0,06 & 0,09 & 0,17 & 0,68 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,14$, $p(a_2)=0,34$, $p(a_3)=0,31$, $p(a_4)=0,21$.

17.
$$\begin{pmatrix} 0,65 & 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,3 & 0,45 & 0,15 & 0,1 \\ 0,15 & 0,25 & 0,5 & 0,1 \\ 0,06 & 0,09 & 0,15 & 0,7 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,35$, $p(a_2)=0,12$, $p(a_3)=0,43$, $p(a_4)=0,1$.

18.
$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,07 & 0,03 \\ 0,2 & 0,6 & 0,15 & 0,05 \\ 0,02 & 0,08 & 0,8 & 0,1 \\ 0,08 & 0,12 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,23$, $p(a_2)=0,47$, $p(a_3)=0,12$, $p(a_4)=0,18$.

19.
$$\begin{pmatrix} 0,74 & 0,1 & 0,09 & 0,07 \\ 0,2 & 0,56 & 0,21 & 0,03 \\ 0,04 & 0,1 & 0,66 & 0,2 \\ 0,03 & 0,05 & 0,1 & 0,82 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,18$, $p(a_2)=0,35$, $p(a_3)=0,14$, $p(a_4)=0,33$.

20.
$$\begin{pmatrix} 0,65 & 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,15 & 0,6 & 0,15 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,75 & 0,1 \\ 0,05 & 0,05 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,17$, $p(a_2)=0,25$, $p(a_3)=0,19$, $p(a_4)=0,39$.

21.
$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,13 & 0,07 \\ 0,08 & 0,8 & 0,07 & 0,05 \\ 0,09 & 0,11 & 0,68 & 0,12 \\ 0,06 & 0,14 & 0,17 & 0,63 \end{pmatrix}$$
$p(a_1)=0,22$, $p(a_2)=0,31$, $p(a_3)=0,19$, $p(a_4)=0,28$.

22.

$$\begin{pmatrix} 0,66 & 0,18 & 0,1 & 0,06 \\ 0,12 & 0,72 & 0,11 & 0,05 \\ 0,11 & 0,17 & 0,56 & 0,16 \\ 0,05 & 0,07 & 0,08 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$p(a_1) = 0,32$, $p(a_2) = 0,11$, $p(a_3) = 0,39$, $p(a_4) = 0,18$.

23.

$$\begin{pmatrix} 0,74 & 0,12 & 0,1 & 0,04 \\ 0,16 & 0,64 & 0,13 & 0,07 \\ 0,05 & 0,09 & 0,76 & 0,1 \\ 0,08 & 0,12 & 0,18 & 0,62 \end{pmatrix}$$

$p(a_1) = 0,25$, $p(a_2) = 0,29$, $p(a_3) = 0,39$, $p(a_4) = 0,07$.

24.

$$\begin{pmatrix} 0,54 & 0,2 & 0,16 & 0,1 \\ 0,14 & 0,62 & 0,14 & 0,1 \\ 0,07 & 0,11 & 0,7 & 0,12 \\ 0,08 & 0,12 & 0,14 & 0,66 \end{pmatrix}$$

$p(a_1) = 0,14$, $p(a_2) = 0,27$, $p(a_3) = 0,32$, $p(a_4) = 0,27$.

25.

$$\begin{pmatrix} 0,64 & 0,2 & 0,1 & 0,06 \\ 0,1 & 0,77 & 0,09 & 0,04 \\ 0,06 & 0,07 & 0,79 & 0,08 \\ 0,04 & 0,06 & 0,09 & 0,81 \end{pmatrix}$$

$p(a_1) = 0,42$, $p(a_2) = 0,12$, $p(a_3) = 0,14$, $p(a_4) = 0,32$.

26.

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,15 & 0,1 & 0,05 \\ 0,11 & 0,71 & 0,1 & 0,08 \\ 0,07 & 0,13 & 0,67 & 0,13 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,65 \end{pmatrix}$$

$p(a_1) = 0,02$, $p(a_2) = 0,31$, $p(a_3) = 0,15$, $p(a_4) = 0,52$.

27.

$$\begin{pmatrix} 0,83 & 0,08 & 0,06 & 0,03 \\ 0,1 & 0,73 & 0,1 & 0,07 \\ 0,08 & 0,14 & 0,63 & 0,15 \\ 0,03 & 0,07 & 0,14 & 0,76 \end{pmatrix}$$

$p(a_1) = 0,27$, $p(a_2) = 0,39$, $p(a_3) = 0,14$, $p(a_4) = 0,20$.

28.

$$\begin{pmatrix} 0,54 & 0,22 & 0,16 & 0,08 \\ 0,12 & 0,67 & 0,11 & 0,1 \\ 0,08 & 0,16 & 0,58 & 0,18 \\ 0,06 & 0,09 & 0,11 & 0,74 \end{pmatrix}$$

$p(a_1) = 0,17$, $p(a_2) = 0,28$, $p(a_3) = 0,19$, $p(a_4) = 0,36$.

29.

$$\begin{pmatrix} 0,85 & 0,07 & 0,05 & 0,03 \\ 0,1 & 0,75 & 0,09 & 0,06 \\ 0,05 & 0,15 & 0,65 & 0,15 \\ 0,06 & 0,08 & 0,1 & 0,76 \end{pmatrix}$$

$p(a_1) = 0,22$, $p(a_2) = 0,23$, $p(a_3) = 0,24$, $p(a_4) = 0,31$.

30.

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,15 & 0,1 & 0,05 \\ 0,16 & 0,64 & 0,13 & 0,07 \\ 0,07 & 0,11 & 0,7 & 0,12 \\ 0,06 & 0,14 & 0,17 & 0,63 \end{pmatrix}$$

$p(a_1) = 0,27$, $p(a_2) = 0,3$, $p(a_3) = 0,31$, $p(a_4) = 0,12$.

Задача 13. Канал связи задается канальной матрицей $p(a/b)$.

Вычислить:

1. Частные условные энтропии $H(b_j)$.

2. Энтропию приемника $H(B)$ и полную (общую) условную энтропию сообщений $H(A/B)$, передаваемых по каналу связи:

2.1. Появление символов в сообщение равновероятно.

2.2. Вероятности появления символов на входе приемника $p(b_1)$, $p(b_2)$, $p(b_3)$, $p(b_4)$.

3. Энтропию источника $H(A)$.

1.

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,4 & 0,25 & 0,03 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,02 \\ 0,03 & 0,05 & 0,35 & 0,2 \\ 0,02 & 0,05 & 0,1 & 0,75 \end{pmatrix}$$

$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

2.

$$\begin{pmatrix} 0,72 & 0,2 & 0,08 & 0,03 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 & 0,17 \\ 0,04 & 0,15 & 0,64 & 0,1 \\ 0,04 & 0,05 & 0,08 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$p(b_1) = 0,2$, $p(b_2) = 0,4$, $p(b_3) = 0,16$, $p(b_4) = 0,03$.

3.

$$\begin{pmatrix} 0,73 & 0,1 & 0,08 & 0,03 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 & 0,17 \\ 0,04 & 0,16 & 0,65 & 0,2 \\ 0,03 & 0,04 & 0,07 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$p(b_1) = 0,3$, $p(b_2) = 0,1$, $p(b_3) = 0,55$, $p(b_4) = 0,05$.

4.
$$\begin{pmatrix} 0,65 & 0,25 & 0,02 & 0,01 \\ 0,2 & 0,5 & 0,25 & 0,24 \\ 0,1 & 0,15 & 0,45 & 0,2 \\ 0,05 & 0,1 & 0,25 & 0,55 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,05$, $p(b_2) = 0,55$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

5.
$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,02 & 0,1 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 & 0,3 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,5 & 0,15 \\ 0,05 & 0,08 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

6.
$$\begin{pmatrix} 0,66 & 0,01 & 0,05 & 0,03 \\ 0,2 & 0,59 & 0,15 & 0,04 \\ 0,1 & 0,3 & 0,74 & 0,05 \\ 0,04 & 0,1 & 0,06 & 0,88 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

7.
$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,16 & 0,07 & 0,06 \\ 0,15 & 0,64 & 0,11 & 0,14 \\ 0,1 & 0,13 & 0,7 & 0,17 \\ 0,05 & 0,07 & 0,12 & 0,63 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

8.
$$\begin{pmatrix} 0,76 & 0,09 & 0,03 & 0,04 \\ 0,13 & 0,81 & 0,1 & 0,12 \\ 0,06 & 0,07 & 0,74 & 0,15 \\ 0,05 & 0,03 & 0,13 & 0,69 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

9.
$$\begin{pmatrix} 0,85 & 0,1 & 0,05 & 0,06 \\ 0,07 & 0,75 & 0,15 & 0,08 \\ 0,05 & 0,09 & 0,65 & 0,1 \\ 0,03 & 0,06 & 0,15 & 0,76 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

10.
$$\begin{pmatrix} 0,94 & 0,03 & 0,08 & 0,06 \\ 0,03 & 0,82 & 0,09 & 0,09 \\ 0,02 & 0,07 & 0,76 & 0,17 \\ 0,01 & 0,05 & 0,07 & 0,68 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

11.
$$\begin{pmatrix} 0,74 & 0,16 & 0,05 & 0,08 \\ 0,12 & 0,64 & 0,09 & 0,12 \\ 0,1 & 0,13 & 0,76 & 0,18 \\ 0,04 & 0,07 & 0,1 & 0,62 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

12.
$$\begin{pmatrix} 0,77 & 0,04 & 0,03 & 0,05 \\ 0,13 & 0,7 & 0,08 & 0,08 \\ 0,07 & 0,15 & 0,87 & 0,12 \\ 0,03 & 0,11 & 0,02 & 0,75 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

13.
$$\begin{pmatrix} 0,83 & 0,1 & 0,08 & 0,03 \\ 0,08 & 0,73 & 0,14 & 0,07 \\ 0,06 & 0,1 & 0,63 & 0,14 \\ 0,03 & 0,07 & 0,15 & 0,76 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

14.
$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,25 & 0,15 & 0,1 \\ 0,3 & 0,45 & 0,25 & 0,15 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,25 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

15.
$$\begin{pmatrix} 0,56 & 0,1 & 0,12 & 0,06 \\ 0,23 & 0,61 & 0,14 & 0,09 \\ 0,15 & 0,16 & 0,51 & 0,15 \\ 0,06 & 0,13 & 0,23 & 0,7 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

16.
$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,11 & 0,07 & 0,05 \\ 0,15 & 0,71 & 0,13 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,67 & 0,2 \\ 0,05 & 0,08 & 0,13 & 0,65 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

17.
$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 & 0,05 \\ 0,25 & 0,65 & 0,2 & 0,1 \\ 0,03 & 0,03 & 0,65 & 0,1 \\ 0,02 & 0,02 & 0,05 & 0,75 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

18.
$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,15 & 0,05 & 0,07 \\ 0,15 & 0,65 & 0,35 & 0,1 \\ 0,1 & 0,16 & 0,59 & 0,35 \\ 0 & 0,04 & 0,01 & 0,48 \end{pmatrix}$$
$p(b_1) = 0,4$, $p(b_2) = 0,3$, $p(b_3) = 0,25$, $p(b_4) = 0,05$.

19.
$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,08 & 0,09 & 0,06 \\ 0,3 & 0,8 & 0,11 & 0,14 \\ 0,13 & 0,07 & 0,68 & 0,17 \\ 0,07 & 0,05 & 0,12 & 0,63 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

20.
$$\begin{pmatrix} 0,79 & 0,05 & 0,02 & 0,01 \\ 0,11 & 0,8 & 0,1 & 0,12 \\ 0,08 & 0,09 & 0,83 & 0,13 \\ 0,02 & 0,06 & 0,05 & 0,74 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

21.
$$\begin{pmatrix} 0,64 & 0,1 & 0,06 & 0,04 \\ 0,2 & 0,77 & 0,07 & 0,06 \\ 0,1 & 0,09 & 0,79 & 0,09 \\ 0,06 & 0,04 & 0,08 & 0,81 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

22.
$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

23.
$$\begin{pmatrix} 0,54 & 0,14 & 0,07 & 0,08 \\ 0,2 & 0,62 & 0,11 & 0,12 \\ 0,16 & 0,14 & 0,7 & 0,14 \\ 0,1 & 0,1 & 0,12 & 0,66 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

24.
$$\begin{pmatrix} 0,85 & 0,02 & 0,13 & 0,05 \\ 0,1 & 0,74 & 0,19 & 0,1 \\ 0,03 & 0,2 & 0,58 & 0,19 \\ 0,02 & 0,04 & 0,1 & 0,66 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

25.
$$\begin{pmatrix} 0,66 & 0,12 & 0,11 & 0,05 \\ 0,18 & 0,72 & 0,17 & 0,07 \\ 0,1 & 0,11 & 0,56 & 0,08 \\ 0,06 & 0,05 & 0,16 & 0,8 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

26.
$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,05 & 0,03 & 0,05 \\ 0,15 & 0,7 & 0,07 & 0,05 \\ 0,05 & 0,23 & 0,65 & 0,3 \\ 0,05 & 0,02 & 0,15 & 0,6 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

27.
$$\begin{pmatrix} 0,74 & 0,2 & 0,04 & 0,03 \\ 0,1 & 0,56 & 0,1 & 0,05 \\ 0,09 & 0,21 & 0,66 & 0,1 \\ 0,07 & 0,03 & 0,2 & 0,82 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

28.
$$\begin{pmatrix} 0,74 & 0,2 & 0,04 & 0,03 \\ 0,1 & 0,56 & 0,1 & 0,05 \\ 0,09 & 0,21 & 0,66 & 0,1 \\ 0,07 & 0,03 & 0,2 & 0,82 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

29.
$$\begin{pmatrix} 0,45 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,25 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0,25 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

30.
$$\begin{pmatrix} 0,54 & 0,12 & 0,08 & 0,06 \\ 0,22 & 0,67 & 0,16 & 0,09 \\ 0,16 & 0,11 & 0,58 & 0,11 \\ 0,08 & 0,1 & 0,18 & 0,74 \end{pmatrix}$$
$p(b_1)=0,4$, $p(b_2)=0,3$,
$p(b_3)=0,25$, $p(b_4)=0,05$.

Пример 19. Частоты появления символов устройства, состоящего из двух взаимозависимых источников A и B, сведены в таблицу
$$n(A,B)=\begin{pmatrix} 35 & 5 & 2 \\ 4 & 25 & 5 \\ 1 & 3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Найти:

1. Таблицу распределения вероятностей объединенной системы $p(A,B)$.

2. Полные условные энтропии $H(A/B)$ и $H(B/A)$.

3. Энтропию источников $H(A)$ и $H(B)$.

4. Энтропию объединения.

Решение.

1. Таблицу распределения вероятностей объединенной системы $p(A,B)$.

Просуммируем частоты появления символов. Так как $n=100$, то

$$p(a,b)=\begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}05 & 0{,}02 \\ 0{,}04 & 0{,}25 & 0{,}05 \\ 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}20 \end{pmatrix}.$$

2. Полные условные энтропии $H(A/B)$ и $H(B/A)$.

Найдем безусловные законы распределения.

	b_1	b_2	b_3	$p(a_i)$
a_1	0,35	0,05	0,02	0,42
a_2	0,04	0,25	0,05	0,34
a_3	0,01	0,03	0,2	0,24
$p(b_j)$	0,4	0,33	0,27	$\sum=1$

Найдем распределение условных вероятностей $p(b_j/a_i)$. Учитывая, что

$$p(a_i,b_j)=p(a_i)p(b_j/a_i)=p(b_j)p(a_i/b_j),$$

можем записать

$$p(b_j/a_i)=\frac{p(a_i,b_j)}{p(a_i)}.$$

Тогда

$p(b_1/a_1)=\frac{0{,}35}{0{,}42}\approx 0{,}83$	$p(b_2/a_1)=\frac{0{,}05}{0{,}42}\approx 0{,}12$	$p(b_3/a_1)=\frac{0{,}02}{0{,}42}\approx 0{,}05$
$p(b_1/a_2)=\frac{0{,}04}{0{,}34}\approx 0{,}12$	$p(b_2/a_2)=\frac{0{,}25}{0{,}34}\approx 0{,}74$	$p(b_3/a_2)=\frac{0{,}05}{0{,}34}\approx 0{,}14$
$p(b_1/a_3)=\frac{0{,}01}{0{,}24}\approx 0{,}04$	$p(b_2/a_3)=\frac{0{,}03}{0{,}24}\approx 0{,}12$	$p(b_3/a_3)=\frac{0{,}20}{0{,}24}\approx 0{,}84$

Таким образом

$$p(b/a)=\begin{pmatrix}0{,}83 & 0{,}12 & 0{,}05\\ 0{,}12 & 0{,}74 & 0{,}14\\ 0{,}04 & 0{,}12 & 0{,}84\end{pmatrix}.$$

Проверяем — сумма элементов в каждой строке должна равняться единице.

Полная (общая) условная энтропия $H(B/A)$ равна

$$H(B/A)=-\sum_i\sum_j p(a_i)p(b_j/a_i)\log_2 p(b_j/a_i)=$$
$$=-[0{,}42\cdot(0{,}83\cdot\log_2(0{,}83)+0{,}12\cdot\log_2(0{,}12)+0{,}05\cdot\log_2(0{,}05))+$$
$$+0{,}34\cdot(0{,}12\cdot\log_2(0{,}12)+0{,}74\cdot\log_2(0{,}74)+0{,}14\cdot\log_2(0{,}14))+$$
$$+0{,}24\cdot(0{,}04\cdot\log_2(0{,}04)+0{,}12\cdot\log_2(0{,}12)+0{,}84\cdot\log_2(0{,}84))]\approx$$
$$\approx 0{,}89\ \textit{бит/символ}.$$

Найдем распределение условных вероятностей $p(a_i/b_j)$. Учитывая, что

$$p(a_i,b_j)=p(a_i)p(b_j/a_i)=p(b_j)p(a_i/b_j),$$

можем записать

$$p(a_i/b_j)=\frac{p(a_i,b_j)}{p(b_j)}.$$

В результате получим

$$p(a/b)=\begin{pmatrix}0{,}875 & 0{,}15 & 0{,}07\\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}19\\ 0{,}025 & 0{,}1 & 0{,}74\end{pmatrix}.$$

Проверяем — сумма элементов в каждом столбце должна равняться единице.

Полная (общая) условная энтропия $H(A/B)$ равна

$$H(A/B)=-\sum_j\sum_i p(b_j)p(a_i/b_j)\log_2 p(a_i/b_j)=$$
$$=-[0{,}4\cdot(0{,}875\cdot\log_2(0{,}875)+0{,}1\cdot\log_2(0{,}1)+0{,}025\cdot\log_2(0{,}025))+$$
$$+0{,}33\cdot(0{,}15\cdot\log_2(0{,}15)+0{,}75\cdot\log_2(0{,}75)+0{,}1\cdot\log_2(0{,}1))+$$
$$+0{,}27\cdot(0{,}07\cdot\log_2(0{,}07)+0{,}19\cdot\log_2(0{,}19)+0{,}74\cdot\log_2(0{,}74))]\approx$$
$$\approx 0{,}88\ \textit{бит/символ}.$$

3. Найдем безусловные энтропии $H(A)$ и $H(B)$.

$$H(A)=-\sum_i p(a_i)\log_2 p(a_i)=$$
$$=-[0{,}42\cdot\log_2(0{,}42)+0{,}34\cdot\log_2(0{,}34)+0{,}24\cdot\log_2(0{,}24)]\approx$$
$$\approx 1{,}55\ \textit{бит/символ}.$$

$$H(B) = -\sum_j p(b_j)\log_2 p(b_j) =$$
$$= -[0{,}4 \cdot \log_2(0{,}4) + 0{,}33 \cdot \log_2(0{,}33) + 0{,}27 \cdot \log_2(0{,}27)] \approx$$
$$\approx 1{,}57 \ \text{бит/символ}.$$

4. Энтропия объединения вычисляется по формуле

$$H(A,B) = H(A) + H(B/A) = 1{,}55 + 0{,}89 = 2{,}44 \ \text{бит/символ}$$

или

$$H(B,A) = H(B) + H(A/B) = 1{,}57 + 0{,}88 = 2{,}45 \ \text{бит/символ}.$$

Отличие значений обусловлено округлениями в результате подсчета параметров.

Задача 14. Частоты появления символов устройства, состоящего из двух взаимозависимых источников A и B, сведены в таблицу.

Найти:

1. Таблицу распределения вероятностей объединенной системы $p(A,B)$.
2. Полные условные энтропии $H(A/B)$ и $H(B/A)$.
3. Энтропию источников $H(A)$ и $H(B)$.
4. Энтропию объединения.

1.
$$\begin{pmatrix} 75 & 24 & 11 & 5 \\ 34 & 97 & 32 & 12 \\ 5 & 23 & 78 & 17 \\ 7 & 23 & 56 & 85 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 92 & 25 & 15 & 0 \\ 31 & 83 & 57 & 23 \\ 21 & 37 & 91 & 17 \\ 2 & 29 & 34 & 80 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 79 & 38 & 12 & 5 \\ 18 & 85 & 23 & 11 \\ 17 & 29 & 93 & 35 \\ 9 & 21 & 53 & 89 \end{pmatrix}$$

4.
$$\begin{pmatrix} 95 & 59 & 21 & 8 \\ 52 & 91 & 27 & 11 \\ 12 & 35 & 90 & 39 \\ 3 & 15 & 27 & 87 \end{pmatrix}$$

5.
$$\begin{pmatrix} 90 & 51 & 15 & 2 \\ 45 & 91 & 52 & 17 \\ 11 & 47 & 92 & 53 \\ 3 & 12 & 48 & 93 \end{pmatrix}$$

6.
$$\begin{pmatrix} 97 & 48 & 21 & 0 \\ 39 & 95 & 47 & 19 \\ 15 & 42 & 93 & 45 \\ 0 & 17 & 43 & 91 \end{pmatrix}$$

7.
$$\begin{pmatrix} 97 & 37 & 7 & 2 \\ 12 & 87 & 32 & 9 \\ 3 & 17 & 77 & 27 \\ 1 & 8 & 22 & 71 \end{pmatrix}$$

8.
$$\begin{pmatrix} 85 & 57 & 12 & 0 \\ 39 & 87 & 75 & 14 \\ 17 & 42 & 89 & 49 \\ 0 & 15 & 51 & 91 \end{pmatrix}$$

9.
$$\begin{pmatrix} 75 & 49 & 21 & 7 \\ 41 & 80 & 47 & 19 \\ 21 & 43 & 78 & 45 \\ 5 & 17 & 48 & 75 \end{pmatrix}$$

10.
$$\begin{pmatrix} 77 & 48 & 17 & 7 \\ 37 & 98 & 39 & 15 \\ 12 & 38 & 85 & 45 \\ 9 & 14 & 41 & 89 \end{pmatrix}$$

11.
$$\begin{pmatrix} 95 & 41 & 12 & 5 \\ 37 & 89 & 39 & 15 \\ 11 & 43 & 97 & 45 \\ 9 & 17 & 38 & 84 \end{pmatrix}$$

12.
$$\begin{pmatrix} 79 & 35 & 12 & 4 \\ 29 & 75 & 32 & 18 \\ 17 & 39 & 93 & 37 \\ 2 & 15 & 36 & 87 \end{pmatrix}$$

13.
$$\begin{pmatrix} 95 & 47 & 12 & 0 \\ 25 & 89 & 45 & 11 \\ 15 & 27 & 87 & 39 \\ 0 & 17 & 41 & 91 \end{pmatrix}$$

14.
$$\begin{pmatrix} 95 & 52 & 15 & 5 \\ 43 & 93 & 37 & 11 \\ 12 & 39 & 97 & 41 \\ 1 & 17 & 35 & 92 \end{pmatrix}$$

15.
$$\begin{pmatrix} 85 & 48 & 12 & 5 \\ 39 & 78 & 42 & 17 \\ 21 & 45 & 92 & 39 \\ 7 & 19 & 41 & 89 \end{pmatrix}$$

16.
$$\begin{pmatrix} 89 & 31 & 11 & 0 \\ 29 & 85 & 39 & 9 \\ 3 & 27 & 91 & 27 \\ 0 & 5 & 35 & 93 \end{pmatrix}$$

17.
$$\begin{pmatrix} 98 & 35 & 12 & 3 \\ 27 & 87 & 29 & 19 \\ 11 & 31 & 93 & 37 \\ 2 & 15 & 35 & 91 \end{pmatrix}$$

18.
$$\begin{pmatrix} 89 & 37 & 11 & 4 \\ 27 & 85 & 39 & 12 \\ 14 & 29 & 87 & 35 \\ 3 & 15 & 39 & 88 \end{pmatrix}$$

19.
$$\begin{pmatrix} 89 & 27 & 15 & 0 \\ 29 & 87 & 31 & 12 \\ 10 & 28 & 85 & 30 \\ 0 & 11 & 27 & 83 \end{pmatrix}$$

20.
$$\begin{pmatrix} 89 & 32 & 15 & 0 \\ 35 & 87 & 31 & 14 \\ 11 & 34 & 95 & 30 \\ 0 & 12 & 33 & 91 \end{pmatrix}$$

21.
$$\begin{pmatrix} 90 & 35 & 17 & 2 \\ 34 & 89 & 37 & 12 \\ 11 & 36 & 97 & 39 \\ 1 & 10 & 38 & 95 \end{pmatrix}$$

22.
$$\begin{pmatrix} 89 & 25 & 12 & 2 \\ 27 & 93 & 27 & 14 \\ 11 & 29 & 97 & 24 \\ 3 & 10 & 26 & 90 \end{pmatrix}$$

23.
$$\begin{pmatrix} 87 & 29 & 15 & 0 \\ 31 & 89 & 27 & 11 \\ 12 & 29 & 91 & 30 \\ 3 & 17 & 32 & 85 \end{pmatrix}$$

24.
$$\begin{pmatrix} 88 & 35 & 9 & 0 \\ 27 & 89 & 31 & 7 \\ 10 & 33 & 91 & 30 \\ 0 & 12 & 29 & 85 \end{pmatrix}$$

25.
$$\begin{pmatrix} 89 & 35 & 9 & 0 \\ 19 & 90 & 39 & 8 \\ 8 & 25 & 92 & 28 \\ 0 & 7 & 20 & 82 \end{pmatrix}$$

26.
$$\begin{pmatrix} 92 & 34 & 15 & 0 \\ 37 & 97 & 31 & 11 \\ 9 & 39 & 98 & 29 \\ 1 & 10 & 32 & 95 \end{pmatrix}$$

27.
$$\begin{pmatrix} 85 & 30 & 15 & 2 \\ 29 & 81 & 20 & 10 \\ 10 & 21 & 89 & 25 \\ 0 & 15 & 24 & 79 \end{pmatrix}$$

28.
$$\begin{pmatrix} 95 & 35 & 21 & 1 \\ 32 & 94 & 31 & 15 \\ 12 & 37 & 97 & 38 \\ 1 & 17 & 29 & 98 \end{pmatrix}$$

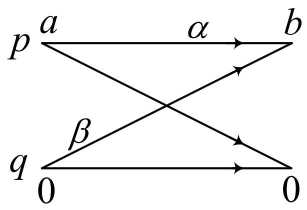
29.
$$\begin{pmatrix} 87 & 30 & 15 & 0 \\ 29 & 98 & 30 & 14 \\ 15 & 30 & 78 & 29 \\ 0 & 14 & 30 & 90 \end{pmatrix}$$

30.
$$\begin{pmatrix} 90 & 31 & 0 & 0 \\ 12 & 90 & 32 & 0 \\ 0 & 28 & 80 & 33 \\ 0 & 0 & 25 & 80 \end{pmatrix}$$

7.2. Каналы связи

Двоичный канал связи

Пример 20. Сигнал a подается на вход двоичного канала с вероятностью $p = 0{,}8$ и отсутствует на входе с вероятностью $q = 1 - p = 0{,}2$. На выходе канала связи сигнал воспроизводится с вероятностью $\alpha = 0{,}7$ и теряется с вероятностью $1 - \alpha = 0{,}3$. При отсутствии сигнала на входе возможен прием сигнала b на выходе с вероятностью $\beta = 0{,}2$.



Найти:

1. Энтропию источника $H(A)$ и энтропию приемника $H(B)$.

2. Полные условные энтропии $H(A/B)$ и $H(B/A)$.

3. Количество совместной информации (количество информации на символ сообщения) $I(A,B)$.

4. Количество взаимной информации, передаваемой по каналу, $I^*(A,B)$.

5. Пропускную способность канала $C_{\max}$.

Решение.

Пусть наличие сигнала на входе обозначим через a_1, его отсутствие — a_2. Прием сигнала a_1 обозначим через b_1, в противном случае — b_2.

По условию задачи имеем

$p(a_1) = 0{,}8$;

$p(a_2) = 0{,}2$;

$p(b_1/a_1) = 0{,}7$;

$p(b_2/a_1) = 0{,}3$;

$p(b_2/a_2) = 0{,}8$;

$p(b_1/a_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Запишем канальную матрицу

$$p(b/a)=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}.$$

Сумма элементов в строках должна равняться единице.

Найдем матрицу совместных вероятностей. Учитывая, что $p(a_i,b_j)=p(a_i)p(b_j/a_i)=p(b_j)p(a_i/b_j)$, можем записать

$p(a_1,b_1)=p(a_1)p(b_1/a_1)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$	$p(a_1,b_2)=p(a_1)p(b_2/a_1)=0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}24$
$p(a_2,b_1)=p(a_2)p(b_1/a_2)=0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04$	$p(a_2,b_2)=p(a_2)p(b_2/a_2)=0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}16$

Таким образом,

$$p(a,b)=\begin{pmatrix}0{,}56 & 0{,}24\\ 0{,}04 & 0{,}16\end{pmatrix}$$

Делаем проверку: $0{,}56+0{,}24+0{,}04+0{,}18=1$.

Найдем безусловные законы распределения.

	b_1	b_2	$p(a_i)$
a_1	0,56	0,24	0,8
a_2	0,04	0,16	0,2
$p(b_j)$	0,6	0,4	$\sum=1$

Т. е. $p(a_1)=0{,}8$, $p(a_2)=0{,}2$, $p(b_1)=0{,}6$, $p(b_2)=0{,}4$.

Найдем распределение условных вероятностей $p(a_i/b_j)$. Учитывая, что

$$p(a_i,b_j)=p(a_i)p(b_j/a_i)=p(b_j)p(a_i/b_j),$$

можем записать

$$p(a_i/b_j)=\frac{p(a_i,b_j)}{p(b_j)}.$$

В результате получим

$$p(a/b)=\begin{pmatrix}0{,}93 & 0{,}6\\ 0{,}07 & 0{,}4\end{pmatrix}.$$

Проверяем — сумма элементов в каждом столбце должна равняться единице.

Найдем безусловные энтропии $H(A)$ и $H(B)$.

$$H(A)=-\sum_i p(a_i)\log_2 p(a_i)=$$

$$=-[0{,}8\cdot\log_2(0{,}8)+0{,}2\cdot\log_2(0{,}2)]\approx 0{,}72\ \textit{бит/символ}.$$

$$H(B) = -\sum_j p(b_j)\log_2 p(b_j) =$$
$$= -[0{,}6 \cdot \log_2(0{,}6) + 0{,}4 \cdot \log_2(0{,}4)] \approx 0{,}97 \ \textit{бит/символ}.$$

Полная (общая) условная энтропия $H(A/B)$ равна

$$H(A/B) = -\sum_j \sum_i p(b_j)p(a_i/b_j)\log_2 p(a_i/b_j) =$$
$$= -[0{,}6 \cdot (0{,}93 \cdot \log_2(0{,}93) + 0{,}07 \cdot \log_2(0{,}07)) +$$
$$+ 0{,}4 \cdot (0{,}6 \cdot \log_2(0{,}6) + 0{,}4 \cdot \log_2(0{,}4))] \approx 0{,}6 \ \textit{бит/символ}.$$

Полная (общая) условная энтропия $H(B/A)$ равна

$$H(B/A) = -\sum_i \sum_j p(a_i)p(b_j/a_i)\log_2 p(b_j/a_i) =$$
$$= -[0{,}8 \cdot (0{,}7 \cdot \log_2(0{,}7) + 0{,}3 \cdot \log_2(0{,}3)) +$$
$$+ 0{,}2 \cdot (0{,}2 \cdot \log_2(0{,}2) + 0{,}8 \cdot \log_2(0{,}8))] \approx 0{,}85 \ \textit{бит/символ}.$$

Энтропия объединения вычисляется по формуле

$$H(A,B) = H(A) + H(B/A) = 0{,}72 + 0{,}85 = 1{,}57 \ \textit{бит/символ}$$

или

$$H(B,A) = H(B) + H(A/B) = 0{,}97 + 0{,}6 = 1{,}57 \ \textit{бит/символ}.$$

Проверяем: $H(A,B) = H(B,A)$.

Найдем среднюю взаимную информацию (скорость передачи по каналу при заданных помехах).

$$I(A,B) = H(A) + H(B) - H(A,B) = 0{,}72 + 0{,}97 - 1{,}57 = 0{,}12 \ \textit{бит}.$$

Для нахождения пропускной способности канала (максимальной скорости передачи) составим таблицу совместного распределения передаваемых и получаемых сигналов.

	b_1	b_2	$p(a_i)$
a_1	$0{,}7 \cdot p$	$0{,}3 \cdot p$	p
a_2	$0{,}2 \cdot q$	$0{,}8 \cdot q$	q
$p(b_j)$	$0{,}7 \cdot p + 0{,}2 \cdot q$	$0{,}3 \cdot p + 0{,}8 \cdot q$	$\sum = 1$

Тогда, учитывая, что

$$H(A) = -\sum_i p(a_i)\log_2 p(a_i),$$

$$H(B) = -\sum_j p(b_j)\log_2 p(b_j),$$

$$H(A,B) = -\sum_i \sum_j p(a_i, b_j)\log_2 p(a_i, b_j)$$

можно записать

$$I(A,B) = H(A) + H(B) - H(A,B) =$$

$$= -p \cdot \log_2(p) - q \cdot \log_2(q) -$$
$$- (0{,}7 \cdot p + 0{,}2 \cdot q) \cdot \log_2(0{,}7 \cdot p + 0{,}2 \cdot q) - (0{,}3 \cdot p + 0{,}8 \cdot q) \cdot \log_2(0{,}3 \cdot p + 0{,}8 \cdot q) +$$
$$+ 0{,}7 \cdot p \cdot \log_2(0{,}7 \cdot p) + 0{,}3 \cdot p \cdot \log_2(0{,}3 \cdot p) + 0{,}2 \cdot q \cdot \log_2(0{,}2 \cdot q) + 0{,}8 \cdot q \cdot \log_2(0{,}8 \cdot q)$$

Учитывая, что $q = 1 - p$ и упростив предыдущее выражение, исследуем его на экстремум.

Получаем $p = 0{,}48993$. Тогда

$C_{\max} = I(p) = 0{,}191$ *бит*.

Задача 15. Сигнал a подается на вход двоичного канала с вероятностью p и отсутствует на входе с вероятностью $q = 1 - p$. На выходе канала связи сигнал воспроизводится с вероятностью α и теряется с вероятностью $1 - \alpha$. При отсутствии сигнала на входе возможен прием сигнала b на выходе с вероятностью β.

Найти:

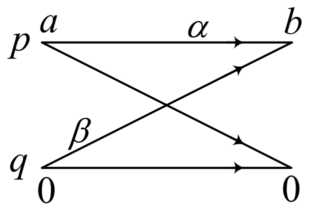
1. Энтропию источника $H(A)$ и энтропию приемника $H(B)$.

2. Полные условные энтропии $H(A/B)$ и $H(B/A)$.

3. Количество совместной информации (количество информации на символ сообщения) $I(A,B)$.

4. Количество взаимной информации, передаваемой по каналу, $I^*(A,B)$.

5. Пропускную способность канала $C_{\max}$.



	p	α	β
1.	0,55	0,70	0,11
2.	0,65	0,79	0,12
3.	0,50	0,88	0,13
4.	0,97	0,80	0,14
5.	0,53	0,71	0,15
6.	0,70	0,89	0,16
7.	0,57	0,81	0,17
8.	0,55	0,72	0,18
9.	0,57	0,90	0,19
10.	0,75	0,95	0,20

	p	α	β
11.	0,80	0,73	0,21
12.	0,83	0,82	0,22
13.	0,73	0,96	0,23
14.	0,92	0,74	0,24
15.	0,57	0,94	0,25
16.	0,77	0,83	0,26
17.	0,85	0,75	0,27
18.	0,94	0,97	0,28
19.	0,57	0,93	0,29
20.	0,92	0,84	0,30

	p	α	β
21.	0,45	0,76	0,29
22.	0,95	0,85	0,28
23.	0,67	0,98	0,27
24.	0,50	0,92	0,26
25.	0,59	0,77	0,25
26.	0,77	0,86	0,24
27.	0,55	0,99	0,23
28.	0,87	0,78	0,22
29.	0,72	0,91	0,21
30.	0,67	0,87	0,11

Двоичный симметричный канал связи

Задача 16. По двоичному симметричному каналу связи с помехами передаются сигналы a_1 и a_2 с априорными вероятностями $p(a_1)$ и $p(a_2) = 1 - p(a_1)$. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из сигналов a_1 и a_2 снижается до α. Найти:

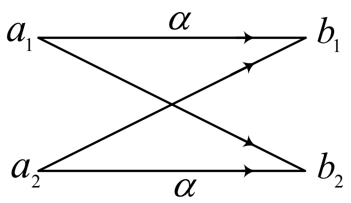
1. Энтропию источника $H(A)$ и энтропию приемника $H(B)$.

2. Полные условные энтропии $H(A/B)$ и $H(B/A)$.

3. Количество совместной информации (количество информации на символ сообщения) $I(A,B)$.

4. Количество взаимной информации, передаваемой по каналу, $I^*(A,B)$.

5. Пропускную способность канала $C_{\max}$.



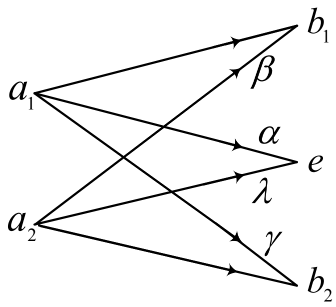
	$p(a_1)$	α
1.	0,15	0,70
2.	0,65	0,79
3.	0,10	0,88
4.	0,97	0,80
5.	0,20	0,71
6.	0,70	0,89
7.	0,17	0,81
8.	0,25	0,72
9.	0,27	0,90
10.	0,75	0,95

	$p(a_1)$	α
11.	0,30	0,73
12.	0,80	0,82
13.	0,37	0,96
14.	0,02	0,74
15.	0,35	0,94
16.	0,47	0,83
17.	0,85	0,75
18.	0,40	0,97
19.	0,57	0,93
20.	0,90	0,84

	$p(a_1)$	α
21.	0,45	0,76
22.	0,95	0,85
23.	0,67	0,98
24.	0,50	0,92
25.	0,05	0,77
26.	0,77	0,86
27.	0,55	0,99
28.	0,87	0,78
29.	0,07	0,91
30.	0,60	0,87

Двоичный канал связи со стираниями

Задача 17. По каналу связи с помехами передаются сигналы a_1 и a_2 с априорными вероятностями $p(a_1)$ и $p(a_2)=1-p(a_1)=q$. Определить пропускную способность канала связи $C_{\max}$.



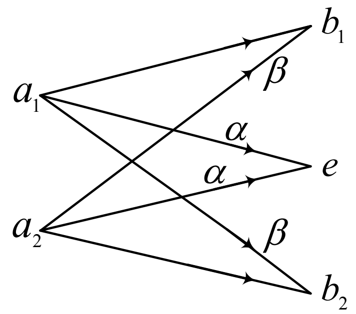
	$p(a_1)$	α	β	λ	γ
1.	0,91	0,15	0,10	0,11	0,13
2.	0,92	0,15	0,12	0,19	0,12
3.	0,93	0,10	0,08	0,13	0,06
4.	0,94	0,07	0,10	0,14	0,04
5.	0,95	0,23	0,11	0,25	0,24
6.	0,85	0,20	0,19	0,26	0,23
7.	0,86	0,17	0,11	0,27	0,15
8.	0,87	0,15	0,12	0,28	0,07
9.	0,88	0,17	0,10	0,29	0,13
10.	0,89	0,15	0,05	0,20	0,04

	$p(a_1)$		α	β	λ	γ
11.	0,91		0,10	0,13	0,21	0,01
12.	0,92		0,13	0,02	0,22	0,02
13.	0,93		0,13	0,06	0,13	0,03
14.	0,94		0,22	0,14	0,24	0,14
15.	0,95		0,17	0,14	0,25	0,05
16.	0,85		0,17	0,13	0,26	0,06
17.	0,86		0,15	0,15	0,27	0,07
18.	0,87		0,14	0,17	0,28	0,18
19.	0,88		0,17	0,13	0,29	0,19
20.	0,89		0,12	0,14	0,30	0,02

	$p(a_1)$	α	β	λ	γ
21.	0,91	0,15	0,06	0,29	0,02
22.	0,92	0,15	0,05	0,28	0,03
23.	0,93	0,17	0,08	0,27	0,13
24.	0,94	0,50	0,02	0,26	0,12
25.	0,95	0,19	0,07	0,25	0,17
26.	0,85	0,17	0,16	0,24	0,07
27.	0,86	0,25	0,19	0,23	0,05
28.	0,87	0,27	0,08	0,22	0,04
29.	0,88	0,12	0,01	0,21	0,07
30.	0,89	0,17	0,07	0,11	0,02

Двоичный симметричный канал связи со стираниями

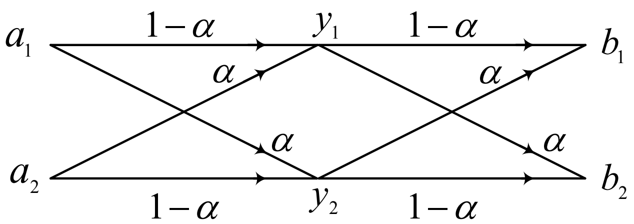
Задача 18. По каналу связи с помехами передаются сигналы a_1 и a_2 с априорными вероятностями $p(a_1) = p$ и $p(a_2) = 1 - p(a_1) = q$. Определить пропускную способность двоичного симметричного канала связи со стиранием $C_{\max}$.



	$p(a_1)$	α	β		$p(a_1)$	α	β		$p(a_1)$	α	β
1.	0,91	0,15	0,10	11.	0,91	0,17	0,12	21.	0,91	0,20	0,16
2.	0,92	0,15	0,19	12.	0,92	0,18	0,11	22.	0,92	0,05	0,15
3.	0,93	0,10	0,18	13.	0,93	0,17	0,16	23.	0,93	0,07	0,18
4.	0,94	0,17	0,11	14.	0,94	0,02	0,04	24.	0,94	0,10	0,12
5.	0,95	0,20	0,11	15.	0,95	0,15	0,11	25.	0,95	0,11	0,17
6.	0,85	0,10	0,19	16.	0,85	0,17	0,10	26.	0,85	0,12	0,16
7.	0,86	0,17	0,01	17.	0,86	0,15	0,17	27.	0,86	0,14	0,19
8.	0,87	0,15	0,12	18.	0,87	0,16	0,17	28.	0,87	0,15	0,18
9.	0,88	0,17	0,12	19.	0,88	0,17	0,02	29.	0,88	0,07	0,11
10.	0,89	0,15	0,14	20.	0,89	0,19	0,14	30.	0,89	0,04	0,17

Канал с ретранслятором

Задача 19. По каналу связи с помехами передаются сигналы a_1 и a_2 с априорными вероятностями $p(a_1)$ и $p(a_2) = 1 - p(a_1) = q$. Определить пропускную способность канала связи с ретранслятором $C_{\max}$.



Замечание. Канальная матрица $p(b/a)$ для данного канала с ретранслятором имеет вид

$$p(b/a)=\begin{pmatrix} p(a_1)\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\alpha)+p(a_1)\cdot\alpha\cdot\alpha & p(a_1)\cdot(1-\alpha)\cdot\alpha+p(a_1)\cdot\alpha\cdot(1-\alpha) \\ p(a_2)\cdot(1-\alpha)\cdot\alpha+p(a_2)\cdot\alpha\cdot(1-\alpha) & p(a_2)\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\alpha)+p(a_2)\cdot\alpha\cdot\alpha \end{pmatrix}.$$

	$p(a_1)$	α		$p(a_1)$	α		$p(a_1)$	α
1.	0,15	0,10	11.	0,30	0,13	21.	0,45	0,16
2.	0,65	0,29	12.	0,80	0,12	22.	0,95	0,15
3.	0,10	0,38	13.	0,37	0,16	23.	0,67	0,18
4.	0,97	0,10	14.	0,02	0,14	24.	0,50	0,02
5.	0,20	0,21	15.	0,35	0,14	25.	0,05	0,07
6.	0,70	0,39	16.	0,47	0,23	26.	0,77	0,06
7.	0,17	0,21	17.	0,85	0,25	27.	0,55	0,09
8.	0,25	0,72	18.	0,40	0,07	28.	0,87	0,18
9.	0,27	0,20	19.	0,57	0,03	29.	0,07	0,11
10.	0,75	0,15	20.	0,90	0,04	30.	0,60	0,17

8. СЖАТИЕ ДАННЫХ

8.1. Метод Шеннона–Фено

Пример 21. Закодировать по методу Шеннона-Фено сообщение из $N = 24$ символов:

математика_-_царица_наук

Решение. Выпишем в таблицу частоты n_i и вероятности $p_i = \frac{n_i}{N}$ появления каждой буквы сообщения:

x	М	А	Т	Е	И	К	Ц	Р	Н	У	_	-
n	2	6	2	1	2	2	2	1	1	1	3	1
p	0,08	0,25	0,08	0,04	0,08	0,08	0,08	0,04	0,04	0,04	0,15	0,04

Найдем энтропию сообщения

$$H(\mathbf{x}) = \sum p_i lbp_i = 0{,}08 \cdot lb0{,}08 + 0{,}25 \cdot lb0{,}25 + 0{,}08 \cdot lb0{,}08$$
$$+ 0{,}04 \cdot lb0{,}04 + 0{,}08 \cdot lb0{,}08 + 0{,}08 \cdot lb0{,}08 + 0{,}08 \cdot lb0{,}08$$
$$+ 0{,}04 \cdot lb0{,}04 + 0{,}04 \cdot lb0{,}04 + 0{,}04 \cdot lb0{,}04 + 0{,}15 \cdot lb0{,}15$$
$$+ 0{,}04 \cdot lb0{,}04 \approx 3{,}3$$

Расположим символы в порядке убывания вероятностей:

x	А	_	Ц	К	И	М	Т	Е	Р	Н	У	-
n	0,25	0,15	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04

Разобьем таблицу на две группы таким образом, чтобы сумма вероятностей появления символов в каждой группе была примерно одинаковой. Пометим все буквы, попавшие в первую группу символом 0, а все буквы, попавшие во вторую группу символом 1.

0.44					0.56						
А	_	Ц	К	И	М	Т	Е	Р	Н	У	-
0,25	0,15	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
0					1						

Аналогично, разбиваем первую группу на две равные по вероятностям части и присваиваем первой группе символ 0, а второй группе — символ 1 и т. д.

<table>
<tr><td>А</td><td>_</td><td>Ц</td><td>К</td><td>И</td><td>М</td><td>Т</td><td>Е</td><td>Р</td><td>Н</td><td>У</td><td>-</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>0,15</td><td>0,08</td><td>0,08</td><td>0,08</td><td>0,08</td><td>0,08</td><td>0,04</td><td>0,04</td><td>0,04</td><td>0,04</td><td>0,04</td></tr>
<tr><td colspan="5">0</td><td colspan="7">1</td></tr>
<tr><td colspan="2">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="4">1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>0</td><td>1</td><td></td><td></td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>

Объединяя символы для каждой буквы, получим кодовую таблицу.

А	000	И	011	Р	1100
_	001	М	100	Н	1101
Ц	0100	Т	1010	У	1110
К	0111	Е	1011	-	1111

Задача 20. Алфавит состоит из букв, образующих Вашу фамилию, имя и отчество.

Закодировать сообщение методом Шеннона – Фено.

фамилия_имя_отчество

8.2. Арифметическое кодирование

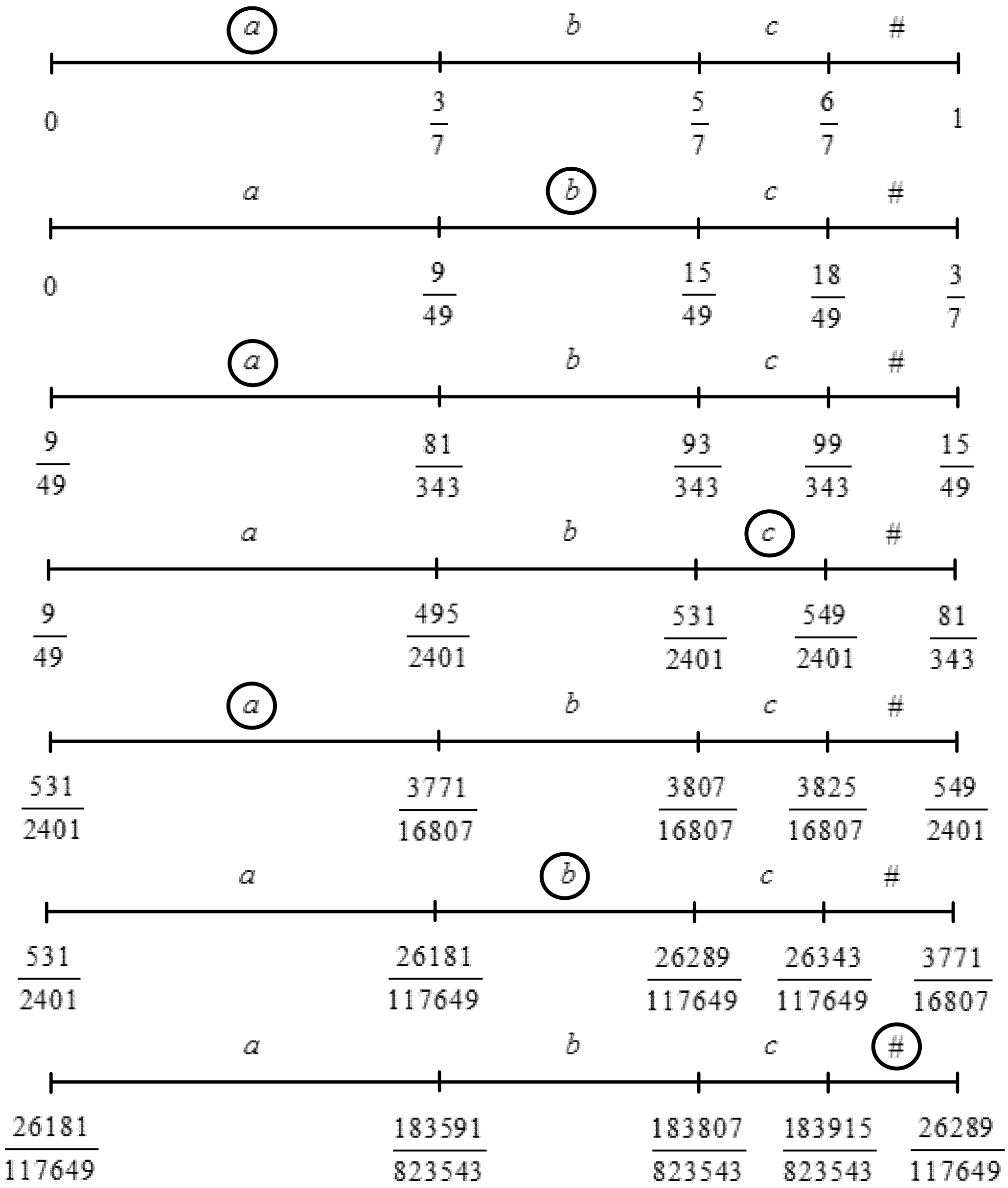
Способ оптимального кодирования, который показывает наилучший результат даже в случае очень низкой энтропии источника сообщений.

Пример 22. Закодировать сообщение:

abacab

Решение. Добавим символ конца сообщения #. Тогда

	a	b	c	#
p	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$



Задача 21. С помощью арифметического кодирования сжать сообщение

Фамилия_Имя_Отчество.

Задача 22. Из алфавита $\{a, b, c\}$ образовано сообщение, в результате арифметического кодирования которого получено число γ. Раскодировать сообщение если известны частоты появления символов, # — символ конца сообщения.

	n_a	n_b	n_c	$n_\#$	γ
1.	4	3	2	1	0,099865
2.	2	5	2	1	0,328022
3.	4	4	1	1	0,20663
4.	1	7	1	1	0,27378
5.	4	3	2	1	0,095357
6.	3	3	3	1	0,148011
7.	4	2	3	1	0,181312
8.	4	3	2	1	0,095358
9.	3	3	3	1	0,212758
10.	3	3	3	1	0,011885
11.	3	3	3	1	0,845277
12.	3	3	3	1	0,213064
13.	3	3	3	1	0,749625
14.	3	4	2	1	0,395355
15.	3	3	3	1	0,693037

	n_a	n_b	n_c	$n_\#$	γ
16.	4	2	3	1	0,520879
17.	1	1	7	1	0,856686
18.	4	2	3	1	0,314928
19.	3	3	3	1	0,527106
20.	2	1	6	1	0,33247
21.	6	2	1	1	0,05983
22.	2	2	5	1	0,424647
23.	2	1	6	1	0,14171
24.	4	1	4	1	0,748957
25.	1	3	5	1	0,457527
26.	1	1	7	1	0,16195
27.	3	3	3	1	0,691999
28.	1	6	2	1	0,84971
29.	7	1	1	1	0,07239
30.	1	7	1	1	0,31325

8.3. Алгоритм LZ77

Пример 23. Закодировать алгоритмом LZ77 сообщение с длиной словаря 8 символов и размером упреждающего буфера 6 символов.

солнсольцесолнечное

Решение.

8	7	6	5	4	3	2	1	6	5	4	3	2	1	Выход
								с	о	л	н	с	о	(0,0,*с*)
							с	о	л	н	с	о	л	(0,0,*о*)
						с	о	л	н	с	о	л	ь	(0,0,*л*)
					с	о	л	н	с	о	л	ь	с	(0,0,*н*)
				с	о	л	н	с	о	л	ь	ц	е	(4,3,*ь*)
с	о	л	н	с	о	л	ь	ц	е	с	о	л	н	(0,0,*ц*)
о	л	н	с	о	л	ь	ц	е	с	о	л	н	е	(0,0,*е*)
л	н	с	о	л	ь	ц	е	с	о	л	н	е	ч	(6,3,*н*)
ь	ц	е	с	о	л	н	е	ч	н	о	е			(0,0,*ч*)
ц	е	с	о	л	н	е	ч	н	о	е				(3,1,*о*)
с	о	л	н	е	ч	н	о	е						(4,1,)
Буфер поиска (текущий словарь)								Упреждающий буфер						
Скользящее окно														

солнсольцесолнечное → (0,0,*с*) (0,0,*о*) (0,0,*л*) (0,0,*н*) (4,3,*ь*) (0,0,*ц*) (0,0,*е*) (6,3,*н*) (0,0,*ч*) (3,1,*о*) (4,1,)

Задача 23. Закодировать алгоритмом LZ77 сообщение с длиной словаря 9 символов и размером упреждающего буфера 5 символов.

1. мятатаманамятнаятаманаматанмата
2. веснавнавняесенняясеняосеньсено
3. летолетнеевалетевалвалетвалвале
4. дереводеревянноеревянереванрева
5. советсоветскийветоскийвтоскавто
6. сольсоленаясоленоидоленьидоллен
7. бегстокстанокбегущийбегунокщибе
8. компкомпьютерныйютеррныйтерраый
9. бумажнаябумагажнаямагазгажнагаз
10. деньгиденежныйенежежныйснегжежн
11. словословесныйслововесысовеласс
12. картакартофелькартонфельктонффе
13. математикаматематическийматтема
14. философфилосовскилососькилогсос
15. тематематическийматматемйматтем
16. сольсолнцесоленыйцесолныйцесолн
17. краскакрасныйкрасителькрасатель
18. сонясонетсонныйсонпатисонпатион
19. связьсвязанныйвязаныйязыкыйязкы
20. проводникпроводникпрованикпрова
21. мяснойммясооймясоксооймясосоксос
22. воздушныйвоздухдушушныхудушныху
23. красотакрасиваятаккрасивокраска
24. математикатематикатьематтиккатя
25. информационнаяинформациянаяфора
26. кодированиекодкорованкоровваняя
27. бабушкинбабушкаушкибашкакипашап
28. дедушкиндедушкаинддушмандушапша
29. елочнаяелкасочнаяяелкочнаоколяя
30. сороксороковсорокасоросковракас

9. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ (К ЗАЧЕТУ)

1. Энтропия и информация дискретных источников сообщений.
2. Энтропия непрерывных источников сообщений.
3. Условная энтропия.
4. Задачи информационного поиска. Взаимная информация.
5. Кодирование информации методом Шеннона. Избыточность сообщения.
6. Теория массового обслуживания. Цепи Маркова.
7. Теория массового обслуживания. Работа телефонного коммутатора.
8. Системы массового обслуживания с ожиданием.
9. Стандарт сотовой связи GSM.
10. Стандарты записи CD и DVD.
11. Теория помехоустойчивого кодирования. Коды Хэмминга.
12. Циклические коды. Исправление 1 ошибки.
13. Циклические коды. Исправление 2 ошибок.
14. Сверточные коды. Блочное чередование. Теория автоматов.
15. Сверточные коды. Треллис. Коррекция ошибок сверточным кодом.
16. Сверточные коды. Алгоритм декодирования Витерби.
17. Турбокоды.
18. Вычисления в полях Галуа.
19. Коды БЧХ. Декодирование прямым алгебраическим методом PGZ.
20. Коды БЧХ над $GF(2^3)$.
21. Коды БЧХ над $GF(2^4)$.
22. Пропускная способность каналов связи.
23. Теоремы Котельникова и Шеннона
24. Коды БЧХ. Расширенный алгоритм Евклида.
25. Коды БЧХ. Алгоритм Берлекемпа-Месси.
26. Совершенные недвоичные коды над $GF(2^3)$ и $GF(2^4)$.
27. Коды Рида–Соломона.
28. Коды Рида–Соломона. Декодирование $RSC[7,5]_8$.
29. Коды Рида–Соломона. Декодирование $RSC[7,3]_8$.
30. Коды Рида–Соломона. Алгоритм Берлекемпа–Месси.
31. Коды Рида–Соломона. Расширенный алгоритм Евклида.
32. Квантовая информация.
33. Квантовая информация. Матрица плотности.
34. Квантовая информация. Редуцированные матрицы плотности.
35. Квантовая информация. Разложение Шмидта.

36. Квантовая информация. Зацепленные квантовые состояния.
37. Квантовые алгоритмы. Алгоритм Дойча.
38. Квантовые алгоритмы. Квантовое плотное кодирование.
39. Квантовые алгоритмы. Квантовая телепортация.
40. Квантовые алгоритмы. Коррекция ошибок в квантовых каналах информации.
41. Квантовые алгоритмы. Клонирование квантовой информации.
42. Алгебро-геометрические коды. Теорема Римана–Роха. Эллиптические кривые.
43. Алгебро-геометрические коды. Дивизоры на кривой. Кодирование рациональными точками кривой.
44. Алгебро-геометрические коды. Рациональные точки эллиптической кривой. Декодирование.
45. Цифровая подпись. Цифровая подпись на эллиптических кривых.
46. Эллиптические кривые. Сложение точек эллиптической кривой.
47. Эллиптические кривые над конечными полями. Порядок точки эллиптической кривой.
48. Алгебро-геометрические коды. Когомологии цепных комплексов. Дивизоры. Теорема Римана–Роха.
49. Алгебро-геометрические коды. Кодирование точками эллиптческой кривой.
50. Алгебро-геометрические коды. Характеристические классы. Коды Гоппа.

10. ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ (К ЗАЧЕТУ)

Классическая информация

1. Считая, что каждый символ кодируется одним байтом, определите, чему равен информационный объем слова ЧЕСТЬ.
2. Сколько различных последовательностей длиной в 5 символов можно составить из цифр 0 и 1?
3. В корзине лежат m шаров. (m=8). Все шары разного цвета. Сколько информации несет сообщение, что из корзины выкатился синий шар?
4. Какое максимальное количество бит потребуется для кодирования целых положительных чисел, меньших 243?
5. В алфавите формального (искусственного) языка всего 8 знака-буквы. Каждое слово этого языка состоит из трех букв. Какое максимальное число слов возможно в этом языке?
6. Сколько различных символов можно закодировать с помощью двоичных слов, состоящих из 6 символов?
7. Чему равно количество информации, при получении сообщения о поломке одного из 16 компьютеров УВД?
8. Определите объем информации текста, состоящего из 24 символов русского алфавита, если для хранения информации используется расширенный стандартный код ASCII.
9. Определите энтропию (неопределенность) случайной величины x, заданной законом распределения p=(0, 1/2, 1/4, 1/4).
10. Определите случайную величину с максимальной энтропией.

Каналы связи

11. Для заданного канала информации определить канальную матрицу.
12. Для заданной канальной матрицы определить структуру канала информации.
13. Для заданного канала информации определить матрицу совместной вероятности появления сигнала.
14. Используя метод Фено-Шеннона, предложить оптимальное кодирование сообщения, в котором символы (f, b, c, d, e, f) появляются с равными вероятностями.
15. Найти энтропию системы, состояния которой в интервале от 2 до 130 распределены равновероятно.

16. Определить пропускную способность двоичного симметричного канала, способного передавать 100Kb/s. Причем каждый из символов искажается с вероятностью e=1/8.

17. Пользуясь формулой Найквиста, определить количество N допустимых уровней сигнала в канале связи с частотой 10KHz и пропускной способностью C=100Kb/s.

18. Определить максимально возможную скорость передачи информации по каналу связи с частотой 20MHz, если отношение сигнал-шум равно S/N=31.

19. Определить пропускную способность 3-ичного симметричного канала, способного передавать 100 символов в секунду. Причем каждый из символов искажается с вероятностью e=1/3.

Коды Хэмминга

20. Определить количество контрольных бит кода Хэмминга для информационного сообщения длиной 55 bit.

21. Определить количество информационных бит кода Хэмминга длиной 254 bit.

22. Определить минимальное количество проверочных бит, необходимых при построении кода, исправляющего 2 ошибки, для информационной последовательности длиной 4 бит.

23. Сколько информационных бит имеет кодовая комбинация Хэмминга 11010111?

24. Определить минимальное кодовое расстояние «d» для бинарного кода, исправляющего 6 ошибок.

25. Определить контрольные биты [b0, b1, b2] для кода Хэмминга информационной последовательности [a1, a2, a3, a4]=[0101].

26. Локализовать и исправить ошибку кода Хэмминга [n,k]=[7,4], записанного в систематическом виде [a1, a2, a3, a4, b0, b1, b2]=[1010010].

27. Записать сообщение 95F1 в двоичном виде.

28. Определите энтропию (неопределенность) случайной величины x, заданной законом распределения p=(1/2, 0, 1/2, 0).

29. Определить проверочные биты для кода Хэмминга информационной последовательности EF.

Полиномиальные коды

31. Какой примитивный полином необходимо использовать для кодирования сообщения «D» кодом, исправляющим 1 ошибку?

32. Используя примитивный полином 1101, построить для сообщения «A» полиномиальный код, исправляющий 1 ошибку.

33. Используя примитивный полином 111101, раскодировать сообщение «0011 1011 0110 1110 10111», исправив 1 ошибку.
34. Найти наибольший общий делитель чисел 66 и 42.
35. Найти наименьшее общее кратное чисел 154 и 105.
36. Найти порядок полинома 111001 в поле GF(2).
37. Найти порядок примитивного полинома 3-й степени в поле GF(2).
38. Определить степени примитивных полиномов, которые необходимо использовать для построения полиномиального кода, исправляющего 2 ошибки в информационной последовательности длиной 3 bit.

Турбокоды

39. Определить выход автомата для входа 11000010.
40. Определить вид треллиса сверточного кода.
41. Закодировать сообщение «1001» сверточным кодом.
42. Раскодировать сообщение «38» сверточным кодом.
43. Исправить ошибку и выделить информационное сообщение из последовательности «C9», полученной сверточным кодом.
44. Исправить ошибки и выделить информационное сообщение из последовательности «DF61», полученной сверточным кодом.
45. Исправить ошибку и выделить информационное сообщение из последовательности «-4-5 6-7 4 8 -7-4», полученной кодом Витерби.
46. Построить турбокод для информационной последовательности «C».
47. Исправить ошибку и выделить информационное сообщение из последовательности «8221 1298», полученной турбокодом.

Коды Рида–Соломона

48. Вычислить 3(5+5) в поле GF(8).
49. Определить место ошибки БЧХ кода [7,4] в GF(8): (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1).
50. Определить места ошибок БЧХ кода [7,1] над GF(8): (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1).
51. Исправить ошибку совершенного кода [9,7] над GF(8): (3, 4, 3, 4, 3, 4, 5, 0, 3).
53. Определить значения проверочных символов (e1,e2) для информационного сообщения a=(4, 5, 1, 3, 1) кода RS [7,5] над GF(8) при b=3.
54. Определить позицию L и значение E ошибки кода RS [7,5] над GF(8) по вектору синдромов (S1,S2)=(2,6).

55. Определить позиции (L1,L2) и значения (E1,E2) ошибок кода RS [7,3] над GF(8) по вектору синдромов (S1,S2,S3,S4)=(4, 4, 0, 1).

56. Определить компоненты вектора синдромов (S1,S2) кода RS [7,5] F=(4, 5, 1, 3, 1, 5, 3) над GF(8) при b=3.

57. Сколько ошибок может исправить двоичный код [n,k]=[14,3].

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутов В. В. Нейросетевые декодеры : учебно-методическое пособие / В. В. Бутов, В. Н. Думачев. — Воронеж : Воронежский институт МВД России, 2018.

2. Котенко В.В. Теория информации : учебное пособие / В.В. Котенко, К.Е. Румянцев. — Ростов-на-Дону ; Таганрог : Изд-во Южного федерального ун-та, 2018.

3. Кудряшов Б.Д. Теория информации : учебное пособие : доп. УМО / Б.Д. Кудряшов. — Санкт-Петербург : Питер, 2009. — 313 с.

4. Думачев В.Н. Теория информации и кодирования [Электронный ресурс] : методическое пособие / В.Н. Думачев. — Воронеж : Воронежский ин-т МВД России, 2013.

5. Парфенов В.И. Теория электрической связи : учебное пособие / В.И. Парфенов, М.М. Жуков, В.П. Удалов. — Воронежский институт МВД России. — Воронеж : ВИ МВД России, 2020. — 202 с.

6. Воробьев Л.В. Системы и сети передачи информации : учеб.пособие : рек. УМО по образованию / Л.В. Воробьев, А.В. Давыдов, Л.П. Щербина. — Москва : Академия, 2011. — 336 с.

7. Биккенин Р.Р. Теория электрической связи : учебное пособие : рек. УМО по образованию в обл. телекоммуникаций / Р.Р. Биккенин, М.Н. Чесноков. — Москва : Академия, 2010. — 336 с.

8. Рид Р. Основы теории передачи информации : пер. с англ. / Р. Рид. — Москва : Вильямс, 2005. — 293 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Относительные частоты букв русского алфавита

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{32} p_i lbp_i \approx 4{,}36 \ \textit{бит/символ}$$

а	0,07998	з	0,01641	п	0,02804	ч	0,0145	я	0,02001
б	0,01592	и	0,07367	р	0,04746	ш	0,00718		
в	0,04533	й	0,01208	с	0,05473	щ	0,00361		
г	0,01687	к	0,03486	т	0,06318	ъ	0,00037		
д	0,02977	л	0,04343	у	0,02615	ы	0,01898		
е	0,08483	м	0,03203	ф	0,00267	ь	0,01735		
ё	0,00013	н	0,067	х	0,00966	э	0,00331		
ж	0,0094	о	0,10983	ц	0,00486	ю	0,00639		

Приложение 2. Значения функции Лапласа

1. Значения функции $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ для $x \in [0; 3{,}99]$.

2. $\Phi_0(-x) = \Phi_0(x)$; $\Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi_0(x)$, $\Phi(x) \sim N_{0,1}$.

3. При решении практических задач для $x \geq 4$ значения функции $\Phi_0(x)$ принимают равными $1/2$.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	x
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586	0,0
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535	0,1
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409	0,2
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14083	0,15173	0,3
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793	0,4
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240	0,5
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490	0,6
0,7	0.25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524	0,7
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327	0,8
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891	0,9
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214	1,0
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298	1,1
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147	1,2
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774	1,3
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0.42785	0,42922	0,43056	0,43189	1,4
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408	1,5
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449	1,6
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327	1,7
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062	1,8
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670	1,9
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169	2,0
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574	2,1
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899	2,2
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158	2,3
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0.49361	2,4
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520	2,5
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0.49609	0,49621	0,49632	0,49643	2,6
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0.49736	2,7
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807	2,8
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861	2,9
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900	3,0
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929	3,1
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0.49942	0.49944	0.49946	0.49948	0.49950	3,2
3,3	0,49952	0.49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965	3,3
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976	3,4
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0.49981	0.49981	0.49982	0.49983	0.49983	3,5
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989	3,6
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992	3,7
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995	3,8
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997	3,9
x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	x

Приложение 3. Полезные формулы

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z; \qquad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \qquad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z.$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \qquad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}, \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}, \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha; \qquad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha; \qquad 1 \pm \sin 2\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2;$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}; \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2};$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z; \qquad tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z.$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z;$$

$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z.$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]; \qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

Соотношения между $\sin\alpha,\cos\alpha,tg\frac{\alpha}{2}$ (универсальная тригонометрическая подстановка)

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\alpha\neq\pi+2\pi n,n\in Z; \qquad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\alpha\neq\pi+2\pi n,n\in Z;$$

$$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}},\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z,\alpha\neq\pi+2\pi n,n\in Z.$$

Некоторые дополнительные формулы

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right);$$

$$\sin\alpha+\cos\beta=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=A\sin(\alpha+\varphi),A=\sqrt{a^2+b^2},\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Формулы привидения

Название функции не изменяется				Название функции изменяется на сходное			
	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$			$\alpha \neq \pi n, n \in Z$			
ctg	$-ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$
	$\alpha \neq \pi n, n \in Z$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$			

Значения тригонометрических функций основных углов

Функция	Угол				
	0°	30°	45°	60°	90°
	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Учебное издание

Данилова Ольга Юрьевна
Синегубов Сергей Владимирович

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерный набор С. А. Телкова
Объем 0,64 МБ.

Воронежский институт МВД России
394065, Воронеж, просп. Патриотов, 53