



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ КАЗЕННОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МИНИСТЕРСТВА ВНУТРЕННИХ ДЕЛ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ИМЕНИ В.Я. КИКОТЯ»

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКСПЕРТНО-КРИМИНАЛИСТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Учебное пособие

Москва
2020

ББК 22.172+67.523

С78

Рецензенты:

начальник кафедры информационно-компьютерных технологий
и деятельности ОВД Белгородского юридического института

МВД России имени И. Д. Путилина

доцент, кандидат технических наук **А. Н. Прокопенко;**

ведущий научный сотрудник 1 отдела НИЦ № 3

Всероссийского научно-исследовательского

института МВД России

кандидат психологических наук **Е. А. Печенкова**

Коллектив авторов:

Н. В. Задохина, А. А. Дорошин, Н. М. Дубинина,

Е. А. Слесарева, А. А. Страхов

**Статистические методы в экспертно-криминалистиче-
ской деятельности** : учебное пособие / [Н. В. Задохина и др.]. –
С78 М. : Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя,
2020. – 87 с.

ISBN 978-5-9694-0859-3

Учебное пособие нацелено на повышение качества освоения обучающимися статистических методов решения идентификационных и диагностических задач судебной экспертизы и обоснования экспертных методик, а также на изучение реализации статистических методов посредством информационных технологий.

Пособие предназначено для курсантов и слушателей, адъюнктов и преподавателей образовательных организаций МВД России, а также для всех, интересующихся технологией обработки статистических данных, используемых в экспертно-криминалистической деятельности.

ББК 22.172+67.523

ISBN 978-5-9694-0859-3

© Московский университет
МВД России имени В.Я Кикотя, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОЦЕНКА ИСТИННОГО ЗНАЧЕНИЯ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ	7
§ 1.1. Основные понятия и определения	7
§ 1.2. Правила представления результатов измерений	11
§ 1.3 Проверка результатов измерений на наличие промахов.....	15
§ 1.4. Обработка результатов прямых измерений	22
§ 1.5. Обработка результатов косвенных измерений	32
Контрольные задания к главе 1	40
ГЛАВА 2. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ..	42
§ 2.1. Основные понятия и определения	42
§ 2.2. Гипотеза о равенстве выборочного среднего заданному значению.....	44
§ 2.3. Гипотеза о равенстве дисперсий двух независимых выборок	51
§ 2.4. Гипотеза о равенстве средних двух независимых выборок	54
§ 2.5. Гипотеза об однородности двух независимых выборок	57
Контрольные задания к главе 2	61
ГЛАВА 3. АНАЛИЗ И ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ	63
§ 3.1. Основные понятия и определения	63
§ 3.2. Оценка коэффициентов регрессии методом наименьших квадратов	64
§ 3.3. Алгоритм корреляционно-регрессионного анализа	68
Контрольные задания к главе 3	73

<i>Приложение 1. Таблица значений интегральной функции Лапласа.....</i>	<i>75</i>
<i>Приложение 2. Критические точки распределения Стьюдента</i>	<i>82</i>
ОТВЕТЫ	84
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	85

ВВЕДЕНИЕ

Математическая статистика – наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов.

Широкое применение математической статистики в различных областях познания обусловлено тем, что ее методы располагают понятийным аппаратом, который по своей широте и универсальности приближается к философскому, отражая общие количественные характеристики качественно различных явлений и предметов.

В результате применения методов математической статистики перестроены многие трудоемкие процессы идентификационных и диагностических исследований объектов судебной экспертизы. Статистические методы позволяют с достаточной надежностью вычислить идентификационную значимость как отдельных признаков, так и всей их совокупности, а также исследовать существующую между ними взаимосвязь.

Кроме того, реализация статистических методов непосредственно связана с процессом использования современных информационных технологий. Именно такой синтез лежит в основе решения многих вопросов экспертной диагностики.

Таким образом, методы математической статистики постепенно внедряются в практику судебной экспертизы, однако их применение носит частный характер и не нашло еще своего теоретического обоснования.

В настоящем пособии рассмотрены основные статистические методы, используемые в деятельности эксперта-криминалиста: метод доверительных интервалов, метод проверки статистических гипотез, метод наименьших квадратов и др.

Данные методы могут применяться при оценке истинного значения физической величины, измеряемой в процессе экспертного исследования, при решении идентификационных и диагностических задач судебной экспертизы, а также для обоснования экспертных методик.

Очевидно, что применение методов математической статистики открывает большие возможности в дальнейшем совершенствовании теории и практики судебной экспертизы. Они позволяют изучать количественные характеристики объектов и процессов, а также выявлять различные статистические закономерности. Кроме того, статистические методы отличаются строгой внутренней логикой, что обеспечивает безошибочность экспертных выводов.

ГЛАВА 1.

ОЦЕНКА ИСТИННОГО ЗНАЧЕНИЯ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1.1. Основные понятия и определения

Измерение – это процесс нахождения числового значения физической величины.

Физическая величина – это характеристика одного из свойств физического объекта (системы, явления или процесса).

Различают *истинное* и *измеренное* значения физической величины.

Истинное значение – это значение, которое идеально отражает в качественном и количественном отношениях соответствующее свойство объекта¹.

Измеренное значение – это значение, которое найдено экспериментально с помощью соответствующих средств и методов измерения. Измеренное значение лишь приближенно отражает свойство объекта.

Замечание 1. Истинное и измеренное значения физической величины могут быть соотнесены с понятиями абсолютной и относительной истины². Абсолютная истина складывается из относительных, но никогда окончательно сложиться не может. В каждой относительной истине есть часть абсолютной истины. Истинное значение физической величины может быть получено только в результате бесконечного процесса измерений с бесконечным совершенствованием методов и средств измерений³.

¹ ГОСТ 16263–70. ГСИ. Метрология. Термины и определения.

² Абсолютная истина – это полное, исчерпывающее знание о действительности, которое нельзя опровергнуть. Относительная истина – это знание, которое приближенно и ограниченно воспроизводит действительность.

³ Левин С. Ф. Философские проблемы и статистические методы фундаментальной метрологии // Метафизика. 2012. № 3 (5). С. 93–94.

Измерения могут быть *прямыми* и *косвенными*.

Прямое измерение – это процесс нахождения числового значения физической величины с помощью средств измерений.

Например, длину гильзы измеряют штангенциркулем, а температуру воздуха – термометром.

Косвенное измерение – это процесс нахождения числового значения физической величины по формуле, связывающей искомую величину с другими величинами, определяемыми прямыми измерениями.

Например, объем цилиндрической детали определяют по формуле:

$$V = \pi R^2 H,$$

где R и H измеряются линейкой, штангенциркулем, микрометром и т. п.

Ни одно измерение не может быть выполнено абсолютно точно, поэтому искомая физическая величина в процессе измерения всегда определяется с некоторой погрешностью (ошибкой).

Погрешностью измерения называют отклонение результата измерения физической величины от ее истинного значения.

Различают *абсолютную* и *относительную* погрешности.

Абсолютная погрешность ΔX определяется как разность между измеренным значением величины $\bar{X}$ и ее истинным значением X :

$$\Delta X = |\bar{X} - X|.$$

Абсолютная погрешность выражается в единицах измерения исследуемой величины.

Относительная погрешность δX определяется как отношение абсолютной погрешности ΔX к истинному значению X измеряемой величины:

$$\delta X = \frac{\Delta X}{X}.$$

Относительная погрешность выражается в процентах или в относительных единицах (долях).

Замечание 2. Очевидно, что для нахождения абсолютной погрешности измерений, нужно знать не только измеренное, но и истинное значение исследуемой величины. Поэтому вышеприведенная формула, определяющая величину абсолютной погрешности, на практике не используется. При практических измерениях погрешности не вычисляются, а оцениваются. При оценках учитывается ряд факторов: условия проведения эксперимента, точность методики, качество приборов и др.

Погрешности измерений подразделяют на три основных типа: систематические погрешности, случайные погрешности и грубые погрешности.

Систематическая погрешность – погрешность, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторении измерений.

Систематические погрешности сохраняют свою величину и знак во время эксперимента. Под влиянием систематических погрешностей экспериментальные данные колеблются не вокруг истинного, а вокруг некоторого смещенного значения.

Систематические погрешности могут быть связаны с несовершенством методов измерений (например, при измерении диаметра детали не учитывается ее температурное расширение, возникающее при обработке на станке); конструктивными особенностями средств измерений (инструментальная погрешность); неправильной установкой измерительных приборов (например, стрелка ненагруженных весов перестает занимать центральное положение на шкале и смещается в сторону); индивидуальными особенностями экспериментатора (например,

запаздывание при регистрации изменяющегося во времени показания прибора).

Случайная погрешность – погрешность, изменяющаяся случайным образом при повторении измерений.

Если многократно повторять одно и то же измерение, то можно заметить, что его результаты рассеяны вокруг некоторого среднего значения. Погрешности, меняющие величину и знак от опыта к опыту, называют случайными. Эти погрешности случайным образом изменяют значение измеряемой величины. Они произвольно вносятся экспериментатором и обусловлены рядом случайных факторов: несовершенством органов чувств экспериментатора, колебанием воздуха, вибрацией здания и т. д.

Хотя исключить случайные погрешности отдельных измерений невозможно, статистические методы позволяют правильно оценить их значение, существенно уменьшив влияние на окончательный результат измерения.

Грубая погрешность (промах) – погрешность, существенно превосходящая ожидаемую погрешность. Промахи относятся к аномальным результатам измерений. Обычно их возникновение обусловлено резким нарушением условий измерения: грубый просчет экспериментатора, сбой аппаратуры и т. д. Промахи обнаруживают статистическими методами. Если установлено, что они произошли, соответствующие измерения отбрасывают¹.

¹ Для отбрасывания промахов необходимо использовать специальные критерии, чтобы выявить закономерность появления аномальных результатов измерений, так как именно аномальные результаты могут привести к замечательным открытиям (например, таким образом было открыто явление сверхпроводимости).

§ 1.2. Правила представления результатов измерений

При любых измерениях существуют и случайные, и систематические погрешности. Однако погрешности можно свести к минимуму, правильно оценив их величину.

В инженерно-технических расчетах полную абсолютную погрешность принято оценивать как квадратичную сумму абсолютной случайной ($\Delta X_{\text{случ}}$) и абсолютной систематической ($\Delta X_{\text{сист}}$) погрешностей¹:

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_{\text{случ}}^2 + \Delta X_{\text{сист}}^2},$$

а истинное значение измеряемой величины $\langle X \rangle$ принято оценивать по формуле:

$$\langle X \rangle = \bar{X} \pm \Delta X.$$

Поскольку результат измерений представляется в виде интервала значений, величину которого определяет полная абсолютная погрешность, важное значение имеет правильное округление результата и погрешности.

Сформулируем правила округления:

1. Округление следует начинать с погрешности, оставляя одну или две значащие цифры. Если первая значащая цифра – единица или двойка, то после округления оставляют две значащие цифры, в противном случае после округления оставляют одну значащую цифру.

¹ Если одна из погрешностей на порядок (хотя бы в 10 раз) меньше другой, то этой погрешностью пренебрегают.

Замечание 3. Значащие цифры данного числа – все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней справа¹. При этом нули, следующие из множителя 10^n , где n – целое число, не учитывают. Например, в числе 0,0607 *значащими* являются последние три цифры², а первые два нуля не представляют количественную величину, они служат для определения разрядов других цифр³.

Примеры:

1) $801,5 \times 10^2$ – *четыре* значащие – цифры, первая цифра – 8, последняя – 5;

2) 400 – *три* значащие цифр, первая цифра – 4, последующие нули – также значащие цифры;

3) 30×10^3 – *две* значащие цифры, первая цифра – 3, вторая цифра – 0, нули, следующие из множителя 10^3 , не учитывают;

4) $64,908$ – *пять* значащих цифр, первая цифра – 6, последняя – 8;

5) $0,03 \times 10^6$ – *одна* значащая цифра – 3;

6) $2,0$ – *две* значащие цифры, первая цифра – 2, вторая цифра – 0.

При округлении лишние цифры у целых чисел заменяют нулями, а у десятичных дробей – отбрасывают. Если заменяемая нулем или отбрасываемая цифра меньше 5, то оставшиеся цифры не изменяются. Если указанная цифра больше или равна 5, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу (табл. 1.1).

¹ СТ СЭВ 543-77. Числа. Правила записи и округления // Электронный фонд правовой и нормативно технической документации. URL: <http://docs.cntd.ru/>.

² Значащей называется любая цифра, отличная от нуля, и нуль, если он не стоит в числе до его первой отличной от нуля цифры.

³ Разряд цифры – позиция цифры в записи числа.

Таблица 1.1

Представление результатов измерения

До округления	После округления
0,16835	0,17
8,8321	9
0,00343	0,003
153	150

Замечание 4. Следует различать, например, числа 3,4 и 3,40. Запись 3,4 означает, что верны только цифры целых и десятых; истинное значение числа может быть, например, 3,43 и 3,38. Запись 3,40 означает, что верны и сотые доли числа; истинное число может быть 3,403 и 3,398, но не 3,421 и не 3,382¹.

2. Далее округляется сама величина, причем ее последняя значащая цифра должна находиться на той же позиции, что и последняя значащая цифра погрешности (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Представление результатов измерения

До округления	После округления
$5,3872 \pm 0,17835$	$5,39 \pm 0,18$
$11,481 \pm 0,9728$	$11,5 \pm 1,0$
$296,385 \pm 4,8219$	296 ± 5
$17563,431 \pm 56,4219$	17560 ± 60

3. Если при округлении погрешности указан порядок, т. е. 10^n , то такой же порядок должен быть и у самой величины, при этом оба числа заключаются в скобки и множитель 10^n указывается один раз (табл. 3).

¹ СТ СЭВ 543-77. Числа. Правила записи и округления // Электронный фонд правовой и нормативно технической документации. URL: <http://docs.cntd.ru/>.

Таблица 1.3

Представление результатов измерения

До округления	После округления
$0,3872 \pm 0,00835$	$0,387 \pm 0,008$ или $(38,7 \pm 0,8) \times 10^{-2}$
$11481,56 \pm 57,12$	11480 ± 60 или $(114,8 \pm 0,6) \times 10^2$

4. Если при округлении погрешности и самой величины указаны единицы измерения, то оба числа (сама величина и погрешность) заключаются в скобки, а единицы измерения указываются один раз (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Представление результатов измерения

До округления	После округления
$(1,045 \pm 0,0000036) \text{ с}$	$(1,045000 \pm 0,000004) \text{ с}$
$(123357 \pm 678) \text{ В}$	$(123400 \pm 700) \text{ В} = (123,4 \pm 0,7) \text{ кВ}$

Пример 1. При измерении длины отрезка были получены значения: $L = 2,34582 \text{ см}$, $\Delta L = 0,02631 \text{ см}$. Запишем окончательный результат (табл. 1.5), выполнив необходимое округление:

Таблица 1.5

До округления	После округления
$L \pm \Delta L$	$L \pm \Delta L$
$(2,34582 \pm 0,02631) \text{ см}$	$(2,346 \pm 0,026) \text{ см}$

Пример 2. При измерении сопротивления резистора были получены следующие значения: $R = 123,7893735 \text{ Ом}$, $\Delta R = 0,348562 \text{ Ом}$.

Запишем окончательный результат (табл. 1.6), выполнив необходимое округление:

Таблица 1.6

До округления	После округления
$R \pm \Delta R$	$R \pm \Delta R$
$(123,78937 \pm 0,34856) \text{ Ом}$	$(123,8 \pm 0,3) \text{ Ом}$

§ 1.3 Проверка результатов измерений на наличие промахов

Наличие промаха может сильно исказить окончательный результат. Проще всего, установив причину промаха, устранить его в процессе измерения. Если в процессе измерения промах не был исключен, то это следует сделать при обработке результатов измерений, используя специальные статистические критерии: критерий 3σ (трех сигм), критерий Романовского, критерий Шовене и др. Данные критерии позволяют объективно выделить в каждой серии измерений грубую ошибку, если она имеется.

Пример 3. Ниже представлены шесть независимых равно- точных измерений периода колебания маятника (в секундах): 3,8; 3,5; 3,9; 3,9; 3,4; 1,8.

Используя статистический критерий, сделайте вывод о присутствии или отсутствии грубой ошибки (промаха) в данном массиве.

Решение:

Для проверки данной серии измерений на наличие грубой ошибки (промаха) будем использовать критерий Шовене.

1. Вычисляем среднее арифметическое измерений периода колебания маятника:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n = \\ &= (3,8 + 3,5 + 3,9 + 3,9 + 3,4 + 1,8) / 6 = 3,38.\end{aligned}$$

В результате округления получаем $\bar{X} = 3,4$.

2. Вычисляем стандартное отклонение измерений периода колебания маятника:

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3,8 - 3,4)^2 + (3,5 - 3,4)^2 + \dots + (1,8 - 3,4)^2}{5}} = 0,804.$$

В результате получаем $S = 0,8$.

3. Для «подозрительного» результата измерения $x_6 = 1,8$ вычисляем Z – число стандартных отклонений, на которое данный результат измерения отклоняется от среднего арифметического измерений:

$$Z = \frac{|x_6 - \bar{x}|}{S} = \frac{|1,8 - 3,4|}{0,8} = 2.$$

4. Выясняем, до какой степени подозрительный результат $x_6 = 1,8$ «аномален». Находим вероятность того, что среди последующих измерений не появятся такие же аномальные результаты (как $x_6 = 1,8$), т. е. результаты последующих измерений окажутся в пределах ± 2 стандартных отклонений от среднего значения.

По таблице приложения 1 находим значение функции Лапласа (рис. 1.1) $\Phi(2) = 0,4772$, которая показывает вероятность того, что результаты последующих измерений окажутся в пределах от 0 до 2 стандартных отклонений от среднего значения. Очевидно, что вероятность того, что результаты последующих измерений окажутся в пределах ± 2 стандартных отклонений от среднего значения (рис. 1.2), равна: $P = 2 \times 0,4772 = 0,9544 \approx 0,95$.

Z	$\Phi(z)$	Z	$\Phi(z)$	Z	$\Phi(z)$	Z	$\Phi(z)$	Z	$\Phi(z)$	Z	$\Phi(z)$
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903

Рис. 1.1. Нахождение значения функции Лапласа

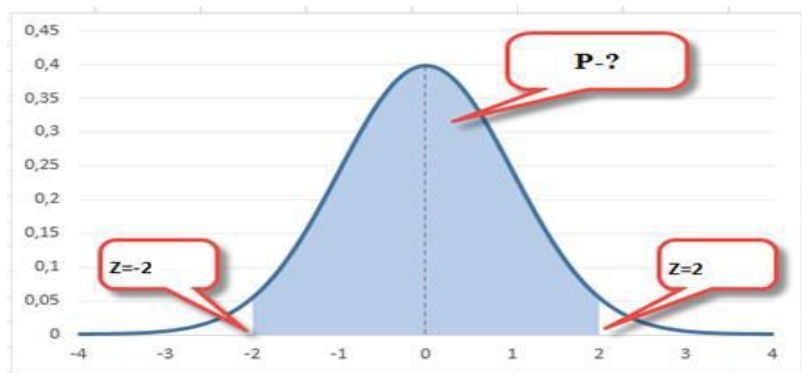


Рис. 1.2. Вероятность того, что результат измерения окажется в пределах ± 2 стандартных отклонений от среднего значения

Далее находим вероятность того, что при последующих измерениях появятся результаты (не менее аномальные, чем $x_6 = 1,8$), которые будут отличаться по крайней мере на ± 2 стандартных отклонений от среднего значения:

$$1 - P = 1 - 0,95 = 0,05.$$

5. Вычисляем число ожидаемых измерений n^* , результат которых не менее аномален (чем $x_6 = 1,8$):

$$n^* = (1 - P) \times n = 0,05 \times 6 = 0,3.$$

То есть для шести измерений можно получить только 0,3 случая такого же аномального результата, как $x_6 = 1,8$.

Так как $n^* = 0,3 < 0,5$, результат измерения $x_6 = 1,8$ не удовлетворяет критерию Шовене¹.

Итак, значение $x_6 = 1,8$ является грубой ошибкой и может быть отброшено.

Пример 4. Ниже представлены девять независимых равно- точных измерений напряжения в электрической цепи, В²: 140, 155, 135, 145, 110, 150, 135, 140, 155.

Используя критерий Шовене, сделайте вывод о присутствии или отсутствии грубой ошибки (промаха) в данном массиве.

Решение:

Использование статистических функций MS Excel позволяет автоматизировать процесс проверки серии измерений на наличие грубой ошибки (промаха).

1. В ячейки B2:B10 вводим результаты девяти измерений: 140, 155, 135, 145, 110, 150, 135, 140, 155.

2. Вычисляем среднее арифметическое измерений напряжения в электрической цепи: в ячейку B11 вводим =СРЗНАЧ(B2:B10). В результате получаем $\bar{X} = 141$.

3. Вычисляем стандартное отклонение измерений напряжения: в ячейку B12 вводим =СТАНДОТКЛОН.В(B2:B10). В результате получаем $S = 13,8$.

4. Для каждого результата измерения вычисляем Z – число стандартных отклонений, на которое данный результат измерения отклоняется от среднего арифметического измерений³: в ячейку C2 вводим: =НОРМАЛИЗАЦИЯ(B2;B11;B12). В результате получаем $z_1 = -0,04$ (число стандартных отклонений,

¹ Преимущество критерия Шовене – отсутствие таблиц критических значений.

² Вольт – единица измерения напряжения.

³ Данная процедура называется нормализацией (нормированием).

на которое первый результат измерения $x_1 = 140$ отклоняется от среднего значения $\bar{X} = 141$).

С помощью маркера автозаполнения копируем формулу =НОРМАЛИЗАЦИЯ(B2;\$B\$11;\$B\$12) в ячейки B3:B10. Для копирования формулы необходимо использовать абсолютную ссылку на ячейки B11 и B12 (рис. 1.3). Получаем число стандартных отклонений, на которое каждый результат измерения отклоняется от среднего значения.

Замечание 5. Функция НОРМАЛИЗАЦИЯ (x ; среднее; станд_откл) имеет три аргумента: x (отдельное измерение); среднее (среднее арифметическое измерений); станд_откл (стандартное отклонение). В нашем случае: $x_1 = 140$; $\bar{X} = 141$ (ячейка B11); $S = 13,8$ (ячейка B12).

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	X	Z				
2		1	140	=НОРМАЛИЗАЦИЯ(B2;\$B\$11;\$B\$12)			
3		2	155	НОРМАЛИЗАЦИЯ(x; среднее; стандартное_откл)			
4		3	135				
5		4	145				
6		5	110				
7		6	150				
8		7	135				
9		8	140				
10		9	155				
11	Среднее		141				
12	Стандартное отклонение		13,8				

Рис. 1.3. Процедура нормализации

5. Анализ полученных результатов делает очевидным, что значение $x_5 = 110$ — аномально маленькое, так как $z_5 = -2,22$ (рис. 1.4). В этой связи необходимо проверить: значение $x_5 = 110$ является промахом (и может быть отброшено) или закономерным результатом измерения.

6. Выясняем степень «аномальности» значения $x_5 = 110$. Находим вероятность того, что среди последующих измерений

не появятся такие же аномальные результаты (как $x_5 = 110$), т. е. результаты последующих измерений окажутся в пределах $\pm 2,22$ стандартных отклонений от среднего значения (рис. 1.5): в ячейку B13 вводим $=ABS(2*NORM.СТ.РАСП(C6;1)-1)$. В результате получаем $P = 0,973$ (рис. 1.6).

Замечание 6. Функция ABS(число) возвращает модуль числового значения. Функция NORM.СТ.РАСП предназначена расчета вероятности по нормированным данным. Функция NORM.СТ.РАСП (z; интегральная) имеет два аргумента: z (нормированное значение отдельного измерения); интегральная (если установлена 1, то рассчитывается вероятность, в противном случае плотность вероятности). В нашем случае: $z = z_5 = -2,22$ (ячейка C6); интегральная (1).

C10				=НОРМАЛИЗАЦИЯ(B10;\$B\$11;\$B\$12)			
	A	B	C	D	E	F	G
1	№	X	Z				
2		1	140	-0,04			
3		2	155	1,05			
4		3	135	-0,40			
5		4	145	0,32			
6		5	110	-2,22			
7		6	150	0,68			
8		7	135	-0,40			
9		8	140	-0,04			
10		9	155	1,05			
11	Среднее		141				
12	Стандартное отклонение		13,8				

Рис. 1.4. Выявление аномального результата измерения

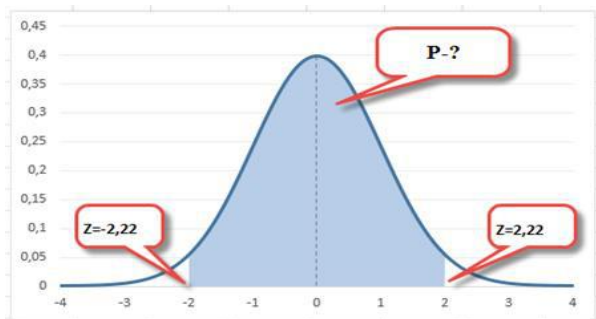


Рис. 1.5. Вероятность того, что результат измерения окажется в пределах $\pm 2,22$ стандартных отклонений от среднего значения

B13		=ABS(2*НОРМ.СТ.РАСП(С6;1)-1)				
	A	B	C	D	E	F
№	X	Z				
1	1	140	-0,04			
2	2	155	1,05			
3	3	135	-0,40			
4	4	145	0,32			
5	5	110	-2,22			
6	6	150	0,68			
7	7	135	-0,40			
8	8	140	-0,04			
9	9	155	1,05			
Среднее		141				
Стандартное отклонение		13,8				
P		0.973				

Рис. 1.6. Вычисление P

Далее находим вероятность того, что при последующих измерениях появятся результаты (не менее аномальные чем $x_5 = 110$), которые будут отличаться по крайней мере на $\pm 2,22$ стандартных отклонений от среднего значения: в ячейку B14 вводим $1 - B13$.

В результате получаем $1 - P = 1 - 0,973 = 0,027$ (рис. 1.7).

B14		=1-B13	
	A	B	C
13	P	0,973	
14	1-P	0,027	

Рис. 1.7. Вычисление 1-P

7. Вычисляем число ожидаемых измерений n^* , результат которых не менее аномален (чем $x_5 = 110$). (рис. 1.8): в ячейку B15 вводим $= B14*9$.

В результате получаем $n^* = (1 - P) \times n = 0,027 \times 9 = 0,24$. То есть для девяти измерений можно получить только 0,24 случаев такого же аномального результата, как $x_5 = 110$.

	A	B	C
13	P	0,973	
14	1-P	0,027	
15	n*	0,24	

Рис. 1.8. Вычисление n^*

Так как $n^* = 0,24 < 0,5$, результат измерения $x_5 = 110$ не удовлетворяет критерию Шовене.

Итак, значение $x_5 = 110$ является грубой ошибкой и может быть отброшено.

§ 1.4. Обработка результатов прямых измерений

Прямые измерения могут быть *однократными* и *многократными*.

Прямые однократные измерения проще и дешевле, в то время как прямые многократные измерения дают более точный результат. Прямые однократные измерения проводятся в том случае, если ожидается, что случайная погрешность на порядок (хотя бы в 10 раз) меньше систематической. В этом случае случайной погрешностью пренебрегают, а оценка истинного значения измеряемой величины находится по формуле: $\langle X \rangle = \bar{X} \pm \Delta X_{\text{сист}}$.

Замечание 7. Выше было указано, что полную абсолютную погрешность принято оценивать как квадратичную сумму абсолютной случайной ($\Delta X_{\text{случ}}$) и абсолютной систематической ($\Delta X_{\text{сист}}$) погрешностей:

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_{\text{случ}}^2 + \Delta X_{\text{сист}}^2}.$$

Наиболее просто оцениваются инструментальные погрешности – систематические погрешности, связанные с конструктивными особенностями средств измерения¹. Методика определения инструментальной погрешности содержится в паспорте прибора. Инструментальную погрешность некоторых приборов можно оценить и без обращения к паспорту. Например, для некоторых электроизмерительных приборов на панели указывается класс точности. Тогда инструментальная погрешности находится по формуле:

$$\Delta X_{\text{сист}} = \Delta X_{\text{инст}} = K \times \frac{A}{100},$$

где K – класс точности прибора, A – наибольшее значение шкалы прибора².

Пример 5. С помощью амперметра, класс точности которого $K = 2.0$, произведено однократное измерение силы тока I^3 . Оцените систематическую (инструментальную) погрешность и запишите окончательный результат.

Решение:

Так как на панели прибора указан класс точности, систематическая погрешность находится по формуле:

$$\Delta I_{\text{сист}} = \Delta I_{\text{инст}} = K \times \frac{A}{100} = 0,04 \text{ А},$$

где $K = 2.0$ – класс точности прибора, $A = 2 \text{ А}$ – наибольшее значение шкалы прибора.

¹ Инструментальная погрешность средств измерения линейных размеров указывается на самом приборе в виде абсолютной погрешности или в виде цены деления. Если на приборе не указан ни класс точности, ни абсолютная погрешность, то инструментальная погрешность принимается равной половине цены наименьшего деления.

² В метрологии используется и другие (более сложные) методы определения инструментальной погрешности, связанной с классом точности прибора.

³ Амперметр – прибор для измерения силы электрического тока.

Учитывая, что показания прибора – 0,75 А (рис. 1.9), запишем окончательный результат: $I \pm \Delta I = (0,75 \pm 0,04) \text{ А}$.

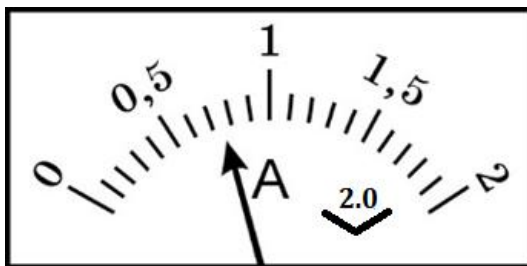


Рис. 1.9. Показания прибора

Многократные измерения проводятся с целью уменьшения влияния случайных погрешностей на результат измерения. Случайную погрешность можно оценить при помощи статистической обработки многократных измерений исследуемой величины.

Следует заметить, что если систематическая погрешность пренебрежимо мала, то оценка истинного значения измеряемой величины сводится к нахождению доверительного интервала¹:

$$\langle X \rangle = \bar{X} \pm \Delta X_{\text{случ}} = \bar{X} \pm \frac{t_{\alpha} S}{\sqrt{n}}$$

или

$$\bar{X} - \frac{t_{\alpha} S}{\sqrt{n}} < \langle X \rangle < \bar{X} + \frac{t_{\alpha} S}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{X} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$ – среднее арифметическое результатов отдельных измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$ (n – количество измерений); S – стандартное отклонение², t_{α} – коэффициент Стью-

¹ Доверительный интервал – числовой интервал, который с заданной вероятностью содержит истинное значение измеряемой величины. Доверительный интервал называют также интервальной оценкой истинного значения измеряемой величины, а среднее арифметическое отдельных результатов измерений $\bar{X}$ называют точечной оценкой.

² Стандартное отклонение описывает типичное расстояние от среднего значения для отдельных результатов измерений.

дента¹, $\bar{X} - t_{\alpha} S / \sqrt{n}$ – левая граница доверительного интервала, $\bar{X} + t_{\alpha} S / \sqrt{n}$ – правая граница доверительного интервала.

Пример 6. В ходе установления конструктивных особенностей эксперт произвел семь равноточных независимых измерений диаметра пули, мм: 5,52; 5,39; 5,43; 5,54; 5,44; 5,42; 5,56; 5,48.

Требуется оценить истинное значение измеряемой величины (диаметра пули) с 95 % надежностью ($P = 0,95$)². Систематической погрешностью можно пренебречь.

Решение:

По условию задачи систематическая погрешность пренебрежимо мала, поэтому оценка истинного значения измеряемой величины сводится к нахождению доверительного интервала:

$$\langle X \rangle = \bar{X} \pm \Delta X_{\text{случ}} = \bar{X} \pm t_{\alpha} S / \sqrt{n}$$

1. Вычисляем среднее арифметическое измерений диаметра пули: $\bar{X} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n = (5,52 + 5,39 + \dots + 5,48) / 8 = 5,47$.

2. Вычисляем стандартное отклонение измерений диаметра патрона:

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5,52 - 5,47)^2 + (5,39 - 5,47)^2 + \dots + (5,48 - 5,47)^2}{8 - 1}} = 0,06.$$

3. По таблице *приложения 2* находим значение коэффициента Стьюдента t_{α} , который зависит от числа измерений и доверительной вероятности (надежности). Предварительно определяем

¹ Коэффициент Стьюдента зависит от числа измерений n и доверительной вероятности (надежности) P .

² Надежность – доверительная вероятность P .

число степеней свободы k^1 и уровень значимости α :
 $k = n - 1 = 7$; $\alpha = 1 - P = 1 - 0,95 = 0,05$.

Учитывая, что $k = 7$, $\alpha = 0,05$, определяем $t_\alpha = 2,36$ (рис 1.10).

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	4,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78

Рис. 1.10. Нахождение коэффициента Стьюдента с помощью таблицы

Замечание 8. Коэффициент Стьюдента можно найти с помощью статистической функции СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х табличного процессора Excel (рис. 1.11). Функция СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х (вероятность; степени свободы) имеет два аргумента: вероятность ($\alpha = 1 - P$); степени свободы ($k = n - 1$).

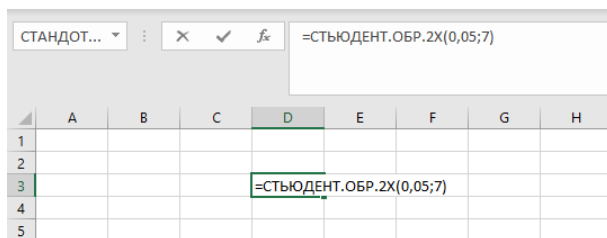


Рис. 1.11. Нахождение коэффициента Стьюдента с помощью Excel

¹ Степени свободы – разность между числом независимых измерений и числом тех связей, которые наложены на эти измерения при дальнейшей обработке. В этой связи имеем $n - 1$ степеней свободы, так как была наложена одна связь (вычислено среднее значение $\bar{X}$).

4. Вычисляем случайную погрешность:

$$\Delta X_{\text{случ}} = \frac{t_{\alpha} S}{\sqrt{n}} = 2,36 \times \frac{0,06}{\sqrt{8}} = 0,05.$$

Учитывая, что $\langle X \rangle = \bar{X} \pm \Delta X = \bar{X} \pm \Delta X_{\text{случ}}$, представляем окончательный результат в виде:

$$\bar{X} \pm \Delta X = (5,47 \pm 0,05) \text{ мм.}$$

5. Если результат необходимо представить в виде доверительного интервала, то вычисляем левую и правую границы интервала:

$$\bar{X} - \Delta X_{\text{случ}} = 5,47 - 0,05 = 5,42.$$

$$\bar{X} + \Delta X_{\text{случ}} = 5,47 + 0,05 = 5,52.$$

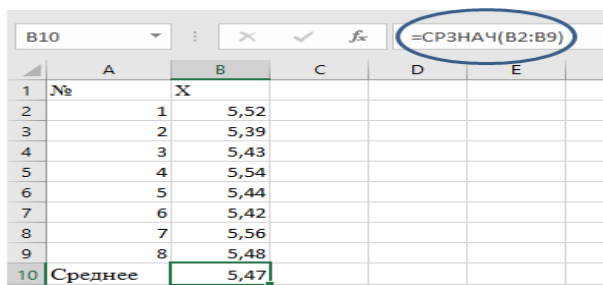
Итак, с надежностью 0,95 истинное значение диаметра пули заключено в интервале (5,42; 5,52) или $5,42 < \langle X \rangle < 5,52$.

Использование статистических функций табличного процессора Excel позволяет автоматизировать процесс оценки истинного значения измеряемой величины:

1. В ячейки B2:B9 вводим результаты восьми измерений: 5,52; 5,39; 5,43; 5,54; 5,44; 5,42; 5,56; 5,48.

2. Вычисляем среднее арифметическое измерений диаметра пули (рис. 1.12): в ячейку B10 вводим =СРЗНАЧ(B2:B9).

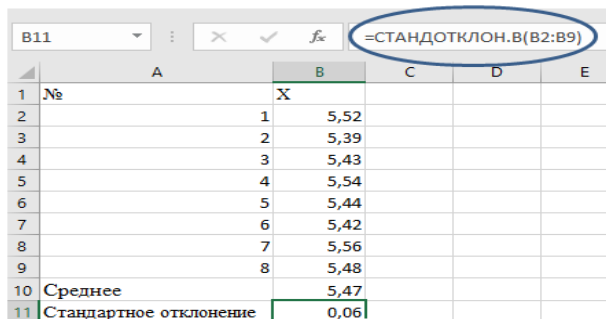
В результате получаем: $\bar{X} = 5,47$.



	A	B	C	D	E
1	№	X			
2	1	5,52			
3	2	5,39			
4	3	5,43			
5	4	5,54			
6	5	5,44			
7	6	5,42			
8	7	5,56			
9	8	5,48			
10	Среднее	5,47			

Рис. 1.12. Нахождение среднего арифметического результатов отдельных измерений

3. Вычисляем стандартное отклонение измерений диаметра пули (рис. 1.13): в ячейку B11 вводим $=\text{СТАНДОТКЛОН.В}(B2:B9)$. В результате получаем $S = 0,06$.



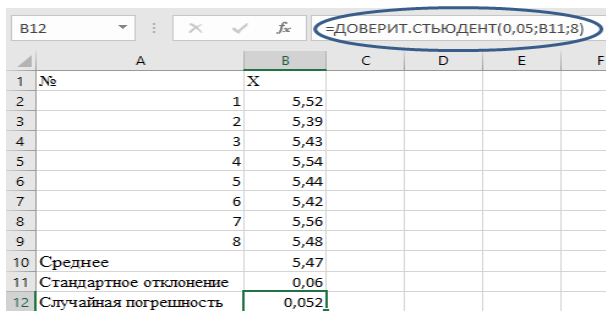
The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E
1	№	X			
2		1	5,52		
3		2	5,39		
4		3	5,43		
5		4	5,54		
6		5	5,44		
7		6	5,42		
8		7	5,56		
9		8	5,48		
10	Среднее		5,47		
11	Стандартное отклонение		0,06		

The formula bar at the top shows the formula $=\text{СТАНДОТКЛОН.В}(B2:B9)$ entered in cell B11.

Рис. 1.13. Нахождение стандартного отклонения

4. Вычисляем случайную погрешность $\Delta X_{\text{случ}} = t_{\alpha} S / \sqrt{n}$ (рис. 1.14): в ячейку B12 вводим $=\text{ДОВЕРИТ.СТЫЮДЕНТ}(0,05;B11;8)$. В результате получаем $\Delta X_{\text{случ}} = 0,052$.



The screenshot shows the same Excel spreadsheet as Figure 1.13, with an additional row for random error:

	A	B	C	D	E	F
1	№	X				
2		1	5,52			
3		2	5,39			
4		3	5,43			
5		4	5,54			
6		5	5,44			
7		6	5,42			
8		7	5,56			
9		8	5,48			
10	Среднее		5,47			
11	Стандартное отклонение		0,06			
12	Случайная погрешность		0,052			

The formula bar at the top shows the formula $=\text{ДОВЕРИТ.СТЫЮДЕНТ}(0,05;B11;8)$ entered in cell B12.

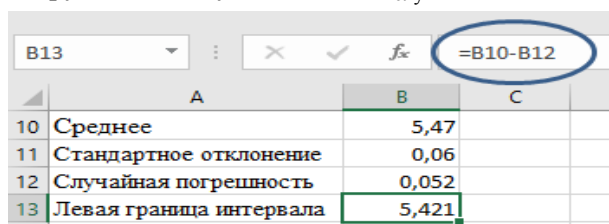
Рис. 1.14. Нахождение случайной погрешности

Замечание 9. Функция ДОВЕРИТ.СТЫЮДЕНТ (альфа; станд_откл; размер) имеет три аргумента: альфа ($\alpha = 1 - P$); станд_откл (стандартное отклонение); размер (количество измерений n). В нашем случае: $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$, $S = 0,06$ (ячейка B11); $n = 8$.

Округляя случайную погрешность $\Delta X_{\text{случ}} = 0,05$, представляем окончательный результат:

$$\langle X \rangle \pm \Delta X = (5,47 \pm 0,05) \text{ мм.}$$

5. Если результат необходимо представить в виде доверительного интервала, то вычисляем его левую и правую границы. Для вычисления левой границы доверительного интервала $\bar{X} - \Delta X_{\text{случ}}$ (рис. 1.15): в ячейку B13 вводим $=B10 - B12$. В результате округления получаем: $\bar{X} - \Delta X_{\text{случ}} = 5,42$.

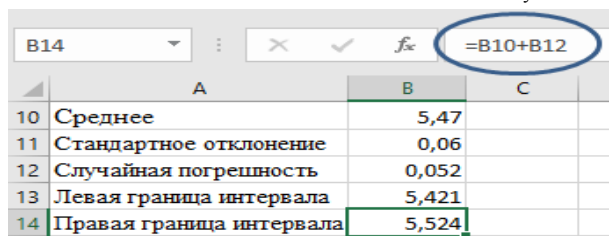


	A	B	C
10	Среднее	5,47	
11	Стандартное отклонение	0,06	
12	Случайная погрешность	0,052	
13	Левая граница интервала	5,421	

Рис. 1.15. Нахождение левой границы доверительного интервала

Для вычисления правой границы доверительного интервала $\bar{X} + \Delta X_{\text{случ}}$ (рис. 1.16): в ячейку B14 вводим $=B10 + B12$.

В результате округления получаем: $\bar{X} + \Delta X_{\text{случ}} = 5,52$.



	A	B	C
10	Среднее	5,47	
11	Стандартное отклонение	0,06	
12	Случайная погрешность	0,052	
13	Левая граница интервала	5,421	
14	Правая граница интервала	5,524	

Рис. 1.16. Нахождение правой границы доверительного интервала

Пример 7. Ниже представлены десять независимых равно-точных измерений диаметра пули, мм: 8,75; 8,90; 9,05; 9,15; 8,92; 8,89; 9,14; 9,22; 8,76; 9,08.

Требуется оценить истинное значение измеряемой величины (диаметра пули) с 99 % надежностью ($P = 0,99$), если систематическая погрешность равна 0,05 мм.

Решение:

Для оценки истинного значения измеряемой величины $\langle X \rangle$ воспользуемся формулой:

$$\langle X \rangle = \bar{X} \pm \Delta X,$$

где полная абсолютная погрешность ΔX оценивается как квадратичная сумма абсолютной случайной и абсолютной систематической погрешностей:

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_{\text{случ}}^2 + \Delta X_{\text{сист}}^2},$$

Используем табличный процессор Excel для автоматизации процесса оценки истинного значения измеряемой величины.

1. В ячейки B2:B11 вводим результаты десяти измерений: 8,75; 8,90; 9,05; 9,15; 8,92; 8,89; 9,14; 9,22; 8,76; 9,08.

Вычисляем среднее арифметическое измерений диаметра пули (рис. 1.17): в ячейку B12 вводим =СРЗНАЧ(B2:B11).

В результате получаем $\bar{X} = 8,986$.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F
1	№	X				
2	1	8,75				
3	2	8,9				
4	3	9,05				
5	4	9,15				
6	5	8,92				
7	6	8,89				
8	7	9,14				
9	8	9,22				
10	9	8,76				
11	10	9,08				
12	Среднее	8,986				

The formula bar at the top shows the formula for cell B12: =СРЗНАЧ(B2:B11).

Рис. 1.17. Нахождение среднего арифметического

2. Вычисляем стандартное отклонение измерений диаметра пули (рис. 1.18): в ячейку B13 вводим =СТАНДОТКЛОН.В(B2:B11).

В результате получаем $S = 0,165$.

Замечание 10. Как было указано выше, округление следует начинать с погрешности, оставляя одну или две значащие цифры. Если первая значащая цифра – единица или двойка, при округлении оставляют две значащие цифры, в противном случае – одну значащую цифру. Для промежуточных вычислений необходимо оставлять дополнительную значащую цифру, поэтому $S = 0,165$. Значение самой величины $\bar{X}$ не округляют, пока не оценена погрешность.

	A	B	C	D	E
1	№	X			
2		1 8,75			
3		2 8,9			
4		3 9,05			
5		4 9,15			
6		5 8,92			
7		6 8,89			
8		7 9,14			
9		8 9,22			
10		9 8,76			
11		10 9,08			
12	Среднее	8,986			
13	Стандартное отклонение	0,165			

Рис. 1.18. Нахождение стандартного отклонения

3. Вычисляем случайную погрешность $\Delta X_{\text{случ}} = t_{\alpha} S / \sqrt{n}$ (рис. 1.19): в ячейку B14 вводим =ДОВЕРИТ.СТЪЮДЕНТ(0,01;B13;10).

В результате получаем $\Delta X_{\text{случ}} = 0,170$.

Как было указано выше, функция ДОВЕРИТ.СТЪЮДЕНТ (альфа; станд_откл; размер) имеет три аргумента: α , S , n . В нашем случае: $\alpha = 1 - 0,99 = 0,01$, $S = 0,165$ (ячейка B13), $n = 10$.

Учитывая, что $\Delta X_{\text{сист}} = 0,05$ (по условию), находим полную абсолютную погрешность:

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_{\text{случ}}^2 + \Delta X_{\text{сист}}^2} = \sqrt{0,17^2 + 0,05^2} = 0,177.$$

Округляя полную абсолютную погрешность $\Delta X = 0,18$, представляем окончательный результат:

$$\langle X \rangle = (8,99 \pm 0,18) \text{ мм.}$$

B14		=ДОВЕРИТ.СТЮДЕНТ(0,01;B13;10)				
	A	B	C	D	E	F
1	№	X				
2		1 8,75				
3		2 8,9				
4		3 9,05				
5		4 9,15				
6		5 8,92				
7		6 8,89				
8		7 9,14				
9		8 9,22				
10		9 8,76				
11		10 9,08				
12	Среднее	8,986				
13	Стандартное отклонение	0,165				
14	Случайная погрешность	0,170				

Рис. 1.19. Нахождение случайной погрешности

§ 1.5. Обработка результатов косвенных измерений

Косвенным называют такое измерение, при котором искомое значение величины U находят на основании известной зависимости данной величины с величинами $X, Y, Z, \dots$, измеренными напрямую.

Рассмотрим три способа оценки погрешности косвенных измерений.

1. Алгоритм пошаговой оценки погрешностей. Основан на следующих правилах:

- при сложении и разности абсолютные погрешности складываются $\Delta(x \pm y) = \Delta x + \Delta y$;
- при умножении на число абсолютная погрешность умножается на модуль этого числа, а относительная погрешность не меняется: $\Delta(Bx) = |B|\Delta x$;

– при умножении и делении относительные погрешности складываются: $\delta(xy) = \delta(x/y) = \delta x + \delta y$;

– при возведении в степень относительная погрешность умножается на модуль показателя степени: $\delta(x^n) = |n|\delta x$.

Вычисления производятся по действиям и на каждом шаге оцениваются возможные погрешности. Для промежуточных вычислений сохраняется дополнительная значащая цифра.

2. Алгоритм оценки погрешностей основан на вычислении частных производных измеряемой величины по ее аргументам.

Если требуется вычислить $u = f(x, y, z, \dots)$ и оценить абсолютную погрешность Δu , где значения $x, y, z, \dots$ измерены с некоторыми погрешностями: $x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta z, \dots$, то используют формулу:

$$\Delta u \approx |u'_x \times \Delta x| + |u'_y \times \Delta y| + |u'_z \times \Delta z| + \dots,$$

где u'_x, u'_y, u'_z – частные производные, $u = f(x, y, z, \dots)$ по всем переменным.

3. Алгоритм оценки погрешностей основан на вычислении частных производных измеряемой величины по ее аргументами квадратичном сложении погрешностей.

Если значения $x, y, z, \dots$ измерены с некоторыми погрешностями: $x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta z, \dots$ и эти погрешности являются независимыми случайными величинами, то используют формулу:

$$\Delta u \approx \sqrt{(u'_x \times \Delta x)^2 + (u'_y \times \Delta y)^2 + (u'_z \times \Delta z)^2 + \dots},$$

где u'_x, u'_y, u'_z – частные производные $u = f(x, y, z, \dots)$ по всем переменным.

Пример 8. Дано: $x = 130,0 \pm 2,6$, $y = 15,0 \pm 0,5$. Вычислить $u(x, y) = 3y + 2x$ и оценить погрешность вычисления Δu .

Решение:

Запишем данные в таблицу 1.7:

Таблица 1.7

x	y	Δx	Δy
130	15	2,6	0,5

1. Пошаговый способ оценки погрешностей.

$$u(x, y) = 3y + 2x = 3 \times 15 + 2 \times 130 = 45 + 260 = 305,$$

$$\Delta u = \Delta(3y) + \Delta(2x) = 3\Delta y + 2\Delta x = 3 \times 0,5 + 2 \times 2,6 = 6,7 \approx 7.$$

Получаем: $u \pm \Delta u = 305 \pm 7$.

2. Оценка погрешностей, основанная на вычислении частных производных измеряемой величины по ее аргументам.

Находим частные производные $u(x, y) = 3y + 2x$ по переменным x, y .

$$u'_{x(y=\text{const})} = 2; u'_{y(x=\text{const})} = 3.$$

Учитывая, что $\Delta x = 2,6$ и $\Delta y = 0,5$, находим Δu

$$\Delta u = |u'_x \times \Delta x| + |u'_y \times \Delta y| = |2 \times 2,6| + |3 \times 0,5| = 5,2 + 1,5 = 6,7 \approx 7;$$

$$u(x, y) = 3y + 2x = 3 \times 15 + 2 \times 130 = 305.$$

Ответ: $u \pm \Delta u = 305 \pm 7$.

3. Оценка погрешностей, основанная на вычислении частных производных измеряемой величины по ее аргументам и квадратичном сложении погрешностей.

Находим частные производные $u(x, y) = 3y + 2x$ по переменным x, y .

$$u'_{x(y=\text{const})} = 2; u'_{y(x=\text{const})} = 3.$$

Учитывая, что $\Delta x = 2,6$ и $\Delta y = 0,5$, находим Δu :

$$\Delta u = \sqrt{(u'_x \times \Delta x)^2 + (u'_y \times \Delta y)^2} =$$

$$\sqrt{(2 \times 2,6)^2 + (3 \times 0,5)^2} = 5,41 \approx 5,$$

$$u(x, y) = 3y + 2x = 3 \times 15 + 2 \times 130 = 305.$$

Ответ: $u \pm \Delta u = 305 \pm 5$.

Пример 9. Прямыми измерениями длины и ширины прямоугольной детали были получены следующие результаты: $a = 12,0 \pm 0,5$, $b = 8 \pm 2 \%$.

Вычислить $S(a, b) = ab$ (площадь детали) и оценить погрешность вычисления ΔS .

Решение:

Запишем данные в таблицу 1.8:

Таблица 1.8

a	Δa	b	δb
12	0,5	8	2 %

1. Пошаговый способ оценки погрешностей.

$$S(a, b) = ab = 12 \times 8 = 96.$$

Для оценки погрешности $\Delta S = \Delta(ab)$ необходимо знать относительные погрешности, так как мультипликативные операции возможны только с этими погрешностями: $\delta(ab) = \delta(a/b) = \delta a + \delta b$.

Относительная погрешность δb известна, поэтому находим только δa и выражаем ее в процентах¹:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} \times 100 \% = \frac{0,5}{12} \times 100 \% = 4,1666... \% \approx 4,2 \%$$

$$\delta(ab) = \delta a + \delta b = 4,2 \% + 2 \% = 6,2 \%$$

Правила округления относительных погрешностей аналогичны правилам округления абсолютных погрешностей, поэтому для промежуточных вычислений сохраняем дополнительную значащую цифру.

$$\Delta S = \Delta(ab) = \frac{\delta(ab) \times (ab)}{100 \%} = \frac{(6,2 \%) \times 96}{100 \%} = 5,952 \approx 6$$

Ответ: $S \pm \Delta S = 96 \pm 6$.

¹ Формула, связывающая абсолютную и относительную погрешности, приведена в § 1.1.

2. Оценка погрешностей, основанная на вычислении частных производных измеряемой величины по ее аргументам.

Находим частные производные $S(a, b) = ab$ по переменным a, b .

$$u'_{a(b=\text{const})} = b = 8; u'_{b(a=\text{const})} = a = 12.$$

Абсолютная погрешность Δa известна, поэтому находим только Δb :

$$\Delta b = \frac{\delta(b) \times b}{100 \%} = \frac{(2 \%) \times 8}{100 \%} = 0,16.$$

Учитывая, что $\Delta x = 0,5$ и $\Delta y = 0,16$, находим ΔS :

$$\Delta S \approx |u'_a \times \Delta a| + |u'_b \times \Delta b| = |8 \times 0,5| + |12 \times 0,16| = 4 + 1,92 = 5,92 \approx 6;$$

$$S(a, b) = ab = 12 \times 8 = 96.$$

Ответ: $S \pm \Delta S = 96 \pm 6$.

3. Оценка погрешностей, основанная на вычислении частных производных измеряемой величины по ее аргументам и квадратичном сложении погрешностей.

Находим частные производные $S(a, b) = ab$ по переменным a, b .

$$u'_{a(b=\text{const})} = b = 8; u'_{b(a=\text{const})} = a = 12.$$

Абсолютная погрешность Δa известна, поэтому находим только Δb :

$$\Delta b = \frac{\delta(b) \times b}{100 \%} = \frac{(2 \%) \times 8}{100 \%} = 0,16.$$

Учитывая, что $\Delta x = 0,5$ и $\Delta y = 0,16$, находим ΔS :

$$\Delta S = \sqrt{(u'_a \times \Delta a)^2 + (u'_b \times \Delta b)^2} = \sqrt{(8 \times 0,5)^2 + (12 \times 0,16)^2} = 4,43 \dots \approx 4.$$

$$S(a, b) = ab = 12 \times 8 = 96.$$

Ответ: $S \pm \Delta S = 96 \pm 4$.

Пример 10. Прямыми измерениями массы, радиуса, линейной скорости были получены следующие результаты:

$$m = (0,310 \pm 0,006) \text{ кг}, R = (0,104 \pm 0,005) \text{ м}; v = (30 \pm 1) \text{ м/с}^1.$$

Вычислить $F = f(m, R, v)$ – значение центробежной силы, действующей на материальную точку массой m , равномерно вращающейся по окружности радиуса R с линейной скоростью v и оценить погрешность вычисления ΔF , если:

$$F(m, R, v) = \frac{m \times v^2}{R}.$$

Решение:

Запишем данные в таблицу 1.9:

Таблица 1.9

m	R	v	Δm	ΔR	Δv
0,31	0,104	30	0,006	0,005	1

1. Пошаговый способ оценки погрешностей.

$$F(m, R, v) = \frac{m \times v^2}{R} = \frac{0,31 \times 30^2}{0,104} = 2682,692... \text{ Н.}$$

Значение F не округляем, пока не оценим ΔF .

Для оценки погрешности:

$$\Delta F = \Delta \left(\frac{m \times v^2}{R} \right)$$

необходимо знать относительные погрешности δm , δR , δv , так как мультипликативные операции возможны только с этими погрешностями:

$$\delta(xy) = \delta(x/y) = \delta x + \delta y; \delta(x^n) = |n| \delta x.$$

$$\delta m = \frac{\Delta m}{m} \times 100 \% = \frac{0,006}{0,31} \times 100 \% = 1,9354... \% \approx 1,94 \% ;$$

¹ Савчук В. П. Обработка результатов измерений. Физическая лаборатория. Ч. 1. Одесса : ОНПУ, 2002. С. 19–22.

$$\delta R = \frac{\Delta R}{R} \times 100 \% = \frac{0,005}{0,104} \times 100 \% = 4,8076... \% \approx 4,8 \% ;$$

$$\delta v = \frac{\Delta v}{v} \times 100 \% = \frac{1}{30} \times 100 \% = 3,3333... \% \approx 3,3 \%.$$

По правилам округления погрешностей для промежуточных вычислений сохраняем дополнительную значащую цифру.

$$\delta F = \delta \left(\frac{m \times v^2}{R} \right);$$

$$\delta \left(\frac{m \times v^2}{R} \right) = \delta m + \delta(v^2) + \delta R = \delta m + 2\delta(v) + \delta R;$$

$$\delta \left(\frac{m \times v^2}{R} \right) = \delta m + 2\delta(v) + \delta R = 1,94 \% + 2 \times 3,3 \% + 4,8 \% = 13,3 \%;$$

$$\Delta F = \Delta \left(\frac{m \times v^2}{R} \right) = \frac{\delta \left(\frac{m \times v^2}{R} \right) \times \frac{m \times v^2}{R}}{100 \%} = \frac{13,3 \% \times 2682,69}{100 \%} = 356,7... \approx 400 \text{ Н}.$$

Ответ: $F \pm \Delta F = (2700 \pm 400) \text{ Н} = (2,7 \pm 0,4) \times 10^3 \text{ Н} = (2,7 \pm 0,4) \text{ кН}.$

2. Оценка погрешностей, основанная на вычислении частных производных измеряемой величины по ее аргументам.

Находим частные производные от $F(m, R, v)$ по переменным m, R, v :

$$F'_{m(R, v = \text{const})} = \frac{v^2}{R} = \frac{30^2}{0,104} = 8653,84... \approx 8654;$$

$$F'_{R(m, v = \text{const})} = -\frac{m \times v^2}{R^2} = -\frac{0,31 \times 30^2}{0,104^2} = -25795,11... \approx -25795;$$

$$F'_{v(m, R = \text{const})} = \frac{m \times 2v}{R} = \frac{0,31 \times 2 \times 30}{0,104} = 178,84... \approx 179;$$

Учитывая, что $\Delta m = 0,006$, $\Delta R = 0,005$, $\Delta v = 1$, находим ΔF :

$$\begin{aligned} \Delta F &\approx |F'_m \times \Delta m| + |F'_R \times \Delta R| + |F'_v \times \Delta v| = |8654 \times 0,006| + \\ &|-25795 \times 0,005| + |179 \times 1| = 51,924 + 128,975 + 179 = \\ &359,899 \text{ Н} \approx 400 \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$F(m, R, v) = \frac{m \times v^2}{R} = \frac{0,31 \times 30^2}{0,104} = 2682,692... \text{ Н.}$$

Ответ: $F \pm \Delta F = (2700 \pm 400) \text{ Н} = (2,7 \pm 0,4) \cdot 10^3 \text{ Н} = (2,7 \pm 0,4) \text{ кН.}$

3. Оценка погрешностей, основанная на вычислении частных производных измеряемой величины по ее аргументам и квадратичном сложении погрешностей.

Находим частные производные от $F(m, R, v)$ по переменным m, R, v :

$$F'_{m(R, v = \text{const})} = \frac{v^2}{R} = \frac{30^2}{0,104} = 8653,84... \approx 8654;$$

$$F'_{R(m, v = \text{const})} = -\frac{m \times v^2}{R^2} = -\frac{0,31 \times 30^2}{0,104^2} = -25795,11... \approx -25795;$$

$$F'_{v(m, R = \text{const})} = \frac{m \times 2v}{R} = \frac{0,31 \times 2 \times 30}{0,104} = 178,84... \approx 179;$$

Учитывая, что $\Delta m = 0,006$, $\Delta R = 0,005$, $\Delta v = 1$, находим ΔF :

$$\begin{aligned} \Delta F &= \sqrt{(F'_m \times \Delta m)^2 + (F'_R \times \Delta R)^2 + (F'_v \times \Delta v)^2} = \\ &= \sqrt{(8654 \times 0,006)^2 + (-25795 \times 0,005)^2 + (179 \times 1)^2} = \\ &= \sqrt{(51,924)^2 + (128,975)^2 + (179)^2} = 226,653... \text{ Н} \approx 230 \text{ Н}; \\ F(m, R, v) &= \frac{m \times v^2}{R} = \frac{0,31 \times 30^2}{0,104} = 2682,692... \text{ Н.} \end{aligned}$$

Ответ: $F \pm \Delta F = (2680 \pm 230) \text{ Н} = (2,68 \pm 0,23) \times 10^3 \text{ Н} = (2,68 \pm 0,23) \text{ кН.}$

Контрольные задания к главе 1

1. При расчете мощности нагревательного прибора по данным измерений получены значения: $P = 2361,7893$ Вт, $\Delta P = 5,4822$ Вт. Запишите окончательный результат, выполнив необходимое округление.

2. В результате расчета силы тока по данным измерений получены значения: $I = 67,89 \cdot 10^{-7}$ А, $\Delta I = 49,3 \times 10^{-8}$ А. Запишите окончательный результат, выполнив необходимое округление. Результат запишите в мкА, учитывая, что $1 \text{ А} = 1000000 \text{ мкА}$.

3. Вольтметр (класс точности $K = 2.5$) имеет максимальное значение шкалы, равное $A = 200$ В. Оцените инструментальную погрешность данного прибора.

4. Ниже представлены 8 измерений некоторой величины: 16, 18, 14, 8, 15, 17, 18, 14. Используя критерий Шовене, сделайте вывод о присутствии или отсутствии грубой ошибки в данном массиве.

5. Ниже представлены 8 измерений некоторой величины: 32, 35, 30, 31, 33, 34, 39, 34. Используя критерий Шовене, сделайте вывод о присутствии или отсутствии грубой ошибки в данном массиве.

6. В ходе установления конструктивных особенностей патрона АКМ¹ эксперт произвел семь равноточных независимых измерений длины гильзы и получил следующие результаты, мм: 38,5; 39,1; 38,4; 38,6; 39,3; 38,7; 39,0.

Требуется оценить истинное значение измеряемой величины (длины гильзы патрона АКМ $7,62 \times 39$) с 95 % надежностью ($P = 0,95$). Систематической погрешностью можно пренебречь.

¹ АКМ – автомат Калашникова модернизированный.

7. Прямыми измерениями основания и высоты объекта треугольной формы были получены следующие результаты: $a = 11 \pm 1 \%$, $h = 8,0 \pm 0,3$. Оцените значение площади данного объекта ($S = \frac{1}{2}ah$). Используйте три способа расчета погрешности косвенных измерений.

8. Прямыми измерениями длин сторон объекта прямоугольной формы были получены следующие результаты: $a = 7,0 \pm 0,2$, $b = 10 \pm 5 \%$. Оцените значение площади данного объекта ($S = ab$). Используйте три способа расчета погрешности косвенных измерений.

ГЛАВА 2.

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

§ 2.1. Основные понятия и определения

Метод проверки статистических гипотез применяется при решении идентификационных¹ задач судебной экспертизы и для обоснования экспертных методик.

Алгоритм (этапы проверки гипотезы):

1. Сформулировать нулевую (основную) и альтернативную (конкурирующую) гипотезы.
2. Задать уровень значимости.
3. Выбрать статистический критерий.
4. Найти критическое значение критерия и построить критическую область.
5. Найти эмпирическое значение критерия (статистику).
6. Сделать вывод. Если эмпирическое значение критерия попало в критическую область, то нулевую гипотезу следует отклонить и принять альтернативную.

Статистическая гипотеза – всякое утверждение о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Генеральная совокупность – множество, включающее все однородные объекты, которым присущи (или не присущи) определенные количественные и (или) качественные признаки.

Выборочная совокупность (выборка) – совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

¹ Идентификация – установление тождественности неизвестного объекта известному на основании совпадения признаков.

Замечание 1. С точки зрения деятельности эксперта: генеральная совокупность – совокупность всех возможных (мыслимых) результатов измерений физической величины в данных условиях; выборка – конечный набор измерений в результате конкретного наблюдения (эксперимента)¹. Например, выборка – пять измерений диаметра патрона ПМ, а генеральная совокупность – совокупность всех мыслимых измерений (бесконечного числа измерений) диаметра патрона ПМ.

Нулевая гипотеза – утверждение об отсутствии статистически значимых различий или связи.

Альтернативная гипотеза – утверждение о наличии статистически значимых различий или связи.

Уровень значимости α – вероятность ошибки, связанной с обобщением результата измерения, полученного по выборке, на всю генеральную совокупность. Это достаточно малое число, которое может принимать значения из промежутка (0; 1).

Например, $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$ и т. п.

Статистический критерий – строгое математическое правило, согласно которому отвергается или принимается та или иная статистическая гипотеза с известным уровнем значимости.

Различают параметрические и непараметрические критерии. Параметрические критерии предназначены для проверки гипотез о параметрах распределений, вид которых известен².

¹ Статистическое наблюдение (эксперимент) – выбор объекта из генеральной совокупности и измерение значения признака. Признак – это свойство, характерная черта или иная особенность объекта.

² Вид распределения исследуемой величины считается известным, если может быть определено, какова частота тех или иных значений этой величины в общей совокупности. Различают теоретическое (предельное или эталонное) и эмпирическое (опытное) распределения. Теоретическое распределение – распределение результатов измерений исследуемой величины, которое получилось бы, если число этих измерений было бы бесконечно велико. Эмпирическое распределение (статистическое распределение выборки) – соответствие между измеренными значениями исследуемой величины, записанными в порядке возрастания, и их частотами.

В частности, многие параметрические критерии опираются на предположение, что распределение, которому принадлежат исследуемые выборки, соответствует нормальному¹.

Расчет статистики параметрического критерия основывается на параметрах распределения (среднее, дисперсия, стандартное отклонение и др.).

Статистика непараметрического критерия основана на оперировании рангами или частотами. Непараметрические критерии могут применяться для распределений, вид которых неизвестен.

Указанная последовательность шагов применима ко всем критериям.

Ошибка первого рода, возникающая при проверке статистических гипотез, заключается в отклонении верной гипотезы: нулевую гипотезу отвергают, когда она верна.

Ошибка второго рода, возникающая при проверке статистических гипотез, заключается в принятии ложной гипотезы: нулевую гипотезу не отвергают, когда она ложна.

§ 2.2. Гипотеза о равенстве выборочного среднего заданному значению

Пример 1. Можно ли отнести представленный на исследование предмет, изготовленный самодельным способом и имитирующий автомат специальный 9А-91 (далее – объект судебной экспертизы), к огнестрельному оружию (типа автомат специальный 9А-91) по критерию – начальная скорость пули, если

¹ Если на результат измерения оказывает влияние большое количество небольших случайных ошибок, то измеренные значения распределяются по колоколообразной кривой (кривой Гаусса), т. е. подчиняются нормальному закону. Центр этой кривой и будет истинным значением измеряемой величины. Нормальному распределению подчиняются: рост человека; давление крови; погрешности в измерениях и др.

в результате эксперимента установлены следующие ее значения, м/с: 265; 268; 258; 272; 278; 260; 266; 276; 264.

Замечание 2. Начальная скорость пули автомата специального 9А-91 равна 270 м/с.

Решение:

1. Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:

H_0 : объект судебной экспертизы является огнестрельным оружием (типа автомат специальный 9А-91) по критерию начальная скорость пули (или H_0 : истинное значение начальной скорости пули, выстрелянной из исследуемого объекта, статистически значимо не отличается от 270 м/с – начальной скорости пули автомата специального 9А-91).

H_1 : объект судебной экспертизы не является огнестрельным оружием (типа автомат специальный 9А-91) по критерию начальная скорость пули (или H_1 : истинное значение начальной скорости пули, выстрелянной из исследуемого объекта, статистически значимо отличается от 270 м/с – начальной скорости пули автомата специального 9А-91).

2. Выбираем уровень значимости: $\alpha = 0,05$.

3. Выбираем статистический критерий: t-критерий.

Замечание 3. *t-критерий* – это общее название для методов статистической проверки гипотез (статистических критериев), которые основаны на распределении Стьюдента¹. *T-критерий* может применяться для исследования малых выборок ($n < 30$). Для применения *t-критерия* необходимо, чтобы выборки извлекались из совокупности, имеющей нормальное распределение.

4. Находим критическое значение критерия и строим критическую область:

В нашем случае находим двустороннее значение критерия и строим двустороннюю критическую область (рис. 2.1).



Рис. 2.1. Двусторонняя критическая область

Для нахождения двустороннего критического значения критерия (рис. 2.2) используем функцию СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х (альфа; степени свободы) табличного процессора Excel, которая имеет два аргумента: уровень значимости α ; степени свободы $n - 1$.

В нашем случае: $\alpha = 0,05$, $n - 1 = 8$. Получаем: $t_{кр} = 2,31$ (формула =СТЮДЕНТ.ОБР.2Х(0,05;8)).

¹ При малом количестве измерений распределение может более или менее отклоняться от нормального. Эта дополнительная ненадежность устраняется с помощью симметричного *t*-распределения. Распределение Стьюдента (*t*-распределение) зависит только от объема выборки (степеней свободы) и не зависит от параметров генеральной совокупности. При увеличении количества измерений вид *t*-распределения приближается к нормальному распределению.



Рис. 2.2. Критическое значение критерия

5. Находим эмпирическое значение критерия (статистику):

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)},$$

где: $\mu = 270$ м/с – начальная скорость пули автомата специального 9А-91;

$$\bar{X} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n = (265 + 268 + \dots + 264) / 9 = 267,4$$

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n - 1}} = 6,8.$$

Учитывая, что $n = 9$, находим эмпирическое значение критерия (рис. 2.3):

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{267,4 - 270}{\left(\frac{6,8}{3}\right)} = -1,14.$$

6. Формулируем вывод: так как $t_{\text{эмп}}$ не попало в критическую область, H_0 не отклоняется.



Рис. 2.3. Эмпирическое значение критерия

Вывод: представленный на исследование предмет, изготовленный самодельным способом и имитирующий автомат специальный 9А-91, является огнестрельным оружием типа автомат специальный 9А-91 по критерию начальная скорость пули.

Пример 2. Можно ли отнести представленный на исследование предмет, изготовленный самодельным способом по типу пистолета 6,35-мм «Браунинг» образца 1906 г. (далее – объект судебной экспертизы), к огнестрельному оружию по критерию: поражающая способность (убойная сила), если в результате эксперимента установлены следующие значения удельной кинетической энергии снаряда, Дж/мм²: 1,3; 0,7; 0,9; 0,6; 1,1.

Решение:

1. Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:

H_0 : объект судебной экспертизы не является огнестрельным оружием (истинное значение удельной кинетической энергии снаряда, выстрелянного из исследуемого объекта не больше порога поражаемости).

H_1 : объект судебной экспертизы является огнестрельным оружием (истинное значение удельной кинетической энергии снаряда больше порога поражаемости).

Замечание 4. Поражающая способность оружия – способность снаряда, выстрелянного из этого оружия причинять проникающие повреждения телу человека. В современной судебной баллистике и судебной медицине за минимальный порог поражаемости принята величина удельной кинетической энергии снаряда не менее 0,5 Дж/мм².

2. Выбираем уровень значимости: $\alpha = 0,05$.

3. Выбираем статистический критерий: t-критерий.

4. Находим критическое значение критерия и строим критическую область:

В нашем случае находим правостороннее значение критерия и строим правостороннюю критическую область (рис. 2.4) (если истинное значение удельной кинетической энергии снаряда попадает правее заданного значения 0,5, то объект может быть признан огнестрельным оружием).

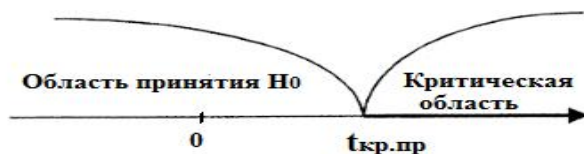


Рис. 2.4. Правосторонняя критическая область

Для нахождения правостороннего критического значения критерия (рис. 2.5) используем таблицу приложения 2 или функцию Excel СТЬЮДЕНТ.ОБР (альфа; степени свободы), которая имеет два аргумента: уровень значимости α ; степени свободы $n - 1$. В нашем случае: $\alpha = 0,05$, $n - 1 = 4$.

Функция СТЬЮДЕНТ.ОБР (альфа; степени свободы) позволяет находить левостороннее критическое значение критерия, поэтому воспользуемся формулой: $=ABS(СТЮДЕНТ.ОБР(0,05;4))$. Получаем: $t_{кр.пр} = 2,13$.



Рис. 2.5. Критическое значение критерия

5. Находим эмпирическое значение критерия (статистику):

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)},$$

где: $\mu = 0,5 \text{ Дж/мм}^2$ – порог поражаемости;
 $\bar{X} = 0,92 \text{ Дж/мм}^2$; $S = 0,29$.

Учитывая, что $n = 5$, находим эмпирическое значение критерия (рис. 2.6):

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{0,92 - 0,5}{\left(\frac{0,29}{\sqrt{5}}\right)} = 3,3.$$

6. Формулируем вывод: так как $t_{\text{эмп}}$ попало в критическую область, H_0 отклоняется и принимается H_1 .



Рис. 2.6. Эмпирическое значение критерия

Объект судебной экспертизы является огнестрельным оружием.

Вывод: представленный на исследование предмет, изготовленный самодельным способом по типу 6,35-мм пистолета «Браунинг» образца 1906 г., является короткоствольным огнестрельным оружием.

§ 2.3. Гипотеза о равенстве дисперсий двух независимых выборок

Если требуется сравнить точность измерительных приборов или точность самих методик измерений, то возникает задача сравнения дисперсий¹ двух независимых выборок.

Пример 3. При сравнении методов А и В измерения междустрочного интервала машинописного текста были получены следующие результаты (табл. 2.1), мм:

Таблица 2.1

А	4,12; 4,11; 4,15; 4,15; 4,11; 4,11; 4,06; 4,10; 4,15; 4,12
В	4,11; 4,09; 4,12; 4,13; 4,09; 4,09; 4,02; 4,09; 4,13; 4,11

Проверить, используя F-критерий (критерий Фишера) с уровнем значимости $\alpha = 0,05$, нулевую гипотезу: методы А и В дают одинаковую точность измерений против альтернативной гипотезы: Метода А предпочтительнее метода В.

Решение:

1. Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:

H_0 : методы А и В дают одинаковую точность измерений (дисперсии распределений, из которых извлечены выборки равны).

H_1 : точность метода А выше точности метода В (дисперсия распределения, из которого извлечена выборка В больше дисперсии распределения, из которого извлечена выборка А).

¹ Дисперсией называют меру рассеивания измеряемой величины относительно ее математического ожидания. Дисперсия имеет размерность квадрата измеряемой величины. Математическое ожидание является тем «средним» значением, вокруг которого распределены все возможные значения измеряемой величины. Для n равноточных независимых измерений некоторой физической величины математическое ожидание является истинным значением этой величины. Выборочная дисперсия определяет меру рассеивания результатов отдельных измерений относительно среднего значения.

2. Выбираем уровень значимости: $\alpha = 0,05$ (по условию).
3. Выбираем статистический критерий: F-критерий¹.
4. Находим критическое значение критерия:

Для нахождения критического значения F-критерия (рис. 2.7) используем функцию Excel =ФРАСПОБР (альфа; степени свободы_1; степени свободы_2), которая имеет три аргумента: уровень значимости α ; степени свободы первой выборки²; степени свободы второй выборки.

В нашем случае: $\alpha = 0,05$, $n - 1 = 10 - 1 = 9$; $n - 1 = 10 - 1 = 9$.

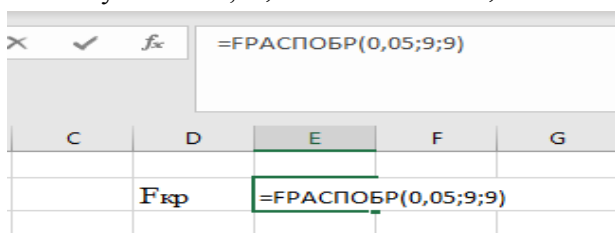


Рис. 2.7. Критическое значение критерия

Получаем: $F_{кр} = 3,18$.

5. Находим эмпирическое значение критерия (статистику):

$$F_{эмп} = \frac{S_6^2}{S_M^2},$$

где: S_6^2 – большая выборочная дисперсия; S_M^2 – меньшая выборочная дисперсия.

Находим эмпирическое значение критерия, используя табличный процессор Excel (рис. 2.8):

Для нахождения выборочной дисперсии (рис. 2.8) используем функцию Excel =ДИСП.В (число1;...), которая в нашем случае имеет десять аргументов – результаты измерения, входящие в соответствующую выборку.

¹ Для применения F-критерия необходимо, чтобы выборки извлекались из совокупности, имеющей нормальное распределение.

² Первой считается та выборка, которая имеет большую дисперсию S^2 .

B2		X ✓ fx		=ДИСП.В(B2:B11)	
	A	B	C	D	E
1	№ измерения	A	B		
2	1	4,12	4,11		
3	2	4,11	4,09		
4	3	4,15	4,12		
5	4	4,15	4,13		
6	5	4,11	4,09		
7	6	4,11	4,09		
8	7	4,06	4,02		
9	8	4,10	4,09		
10	9	4,15	4,13		
11	10	4,12	4,11		
12	Дисперсия	=ДИСП.В(B2:B11)			
13					

Рис. 2.8. Нахождение выборочной дисперсии

Далее находим эмпирическое значение критерия (рис. 2.9):

$$F_{\text{эмп}} = \frac{S_6^2}{S_M^2} = 1,32.$$

B13		X ✓ fx		=C12/B12	
	A	B	C	D	E
1	№ измерения	A	B		
2	1	4,12	4,11		
3	2	4,11	4,09		
4	3	4,15	4,12		
5	4	4,15	4,13		
6	5	4,11	4,09		
7	6	4,11	4,09		
8	7	4,06	4,02		
9	8	4,10	4,09		
10	9	4,15	4,13		
11	10	4,12	4,11		
12	Дисперсия	0,0008	0,0010		
13	Fэмп	1,32			
14					

Рис. 2.9. Нахождение эмпирического значения критерия

6. Формулируем вывод: $F_{\text{эмп}} < F_{\text{кр}}$ ($F_{\text{эмп}}$ не попало в критическую область), поэтому H_0 не отклоняется.

Вывод: Методы А и В дают одинаковую точность измерений.

§ 2.4. Гипотеза о равенстве средних двух независимых выборок

Если требуется выяснить, привело ли усовершенствование некоторого процесса к изменению среднего значения наблюдаемого показателя (признака), то возникает задача сравнения средних значений двух независимых выборок.

Пример 4. Проведено усовершенствование процесса обработки некоторого изделия. Проверка качества изделия дала следующие результаты (табл. 2.2):

Таблица 2.2

Старый процесс	11,5; 12,5; 13,5; 12,5; 14,0; 11,0
Новый процесс	12,5; 13,0; 13,5; 14,0; 16,2; 15,0

Определить на уровне значимости $\alpha = 0,05$, привело ли усовершенствование процесса обработки к повышению качества изделия.

Решение:

1. Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:

H_0 : качество не изменилось (средние распределений¹, из которых извлечены выборки, равны).

H_1 : качество повысилось (среднее распределения, из которого извлечена выборка, соответствующая новому процессу, больше средней распределения, из которого извлечена выборка, соответствующая старому процессу).

2. Выбираем уровень значимости: $\alpha = 0,05$ (по условию).

3. Выбираем статистический критерий: t-критерий для разности двух средних независимых выборок (двухвыборочный t-тест).

¹ Среднее распределения – генеральное среднее или математическое ожидание.

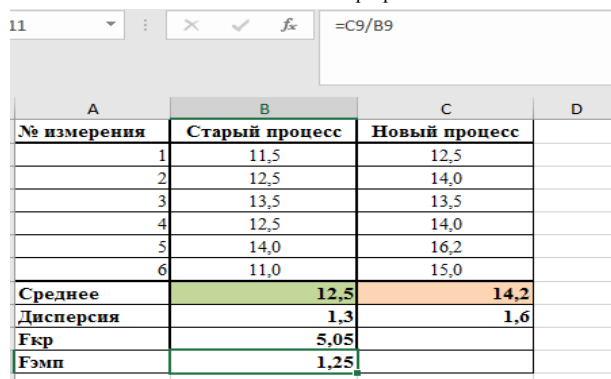
Проверим выборки с помощью F-критерия (рис. 2.10) и убедимся, что дисперсии не имеют статистически значимых различий (см. § 2.3).

$F_{\text{эмп}} < F_{\text{кр}}$ ($F_{\text{эмп}}$ не попало в критическую область), поэтому можем применить двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями.

Замечание 5. Если $F_{\text{эмп}} > F_{\text{кр}}$, т. е. дисперсии значимо различаются, то применяют двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями.

4. Находим критическое значение критерия:

В нашем случае находим правостороннее значение критерия. Для нахождения правостороннего критического значения критерия используем таблицу приложения 2 или выражение Excel $=\text{ABS}(\text{СТЮДЕНТ.ОБР}(\alpha; \text{степени свободы}))$. В нашем случае: $\alpha = 0,05$, $k = n_1 + n_2 - 2 = 12 - 2 = 10$, где n_1 , n_2 – объемы выборок. Получаем: $t_{\text{кр.пр}} = 1,81$.



The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

A	B	C	D
№ измерения	Старый процесс	Новый процесс	
1	11,5	12,5	
2	12,5	14,0	
3	13,5	13,5	
4	12,5	14,0	
5	14,0	16,2	
6	11,0	15,0	
Среднее	12,5	14,2	
Дисперсия	1,3	1,6	
F _{кр}	5,05		
F _{эмп}	1,25		

The formula bar at the top shows the formula $=C9/B9$ for cell D9.

Рис. 2.10. Нахождение эмпирического значения F-критерия

5. Находим эмпирическое значение критерия (статистику):

Находим эмпирическое значение критерия, используя MSExcel:

1) выбираем пакет «Анализ данных»¹, который содержит группа инструментов «Анализ» вкладки «Данные» табличного процессора Excel (рис. 2.11).

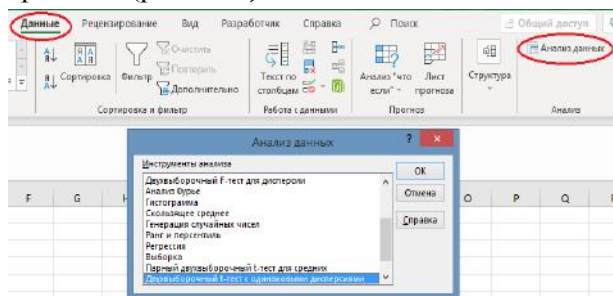


Рис. 2.11. Пакет инструментов Excel «Анализ данных»

2) в диалоговом окне пакета инструментов «Анализ данных» выбираем «двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями» и вводим необходимые данные (рис. 2.12).

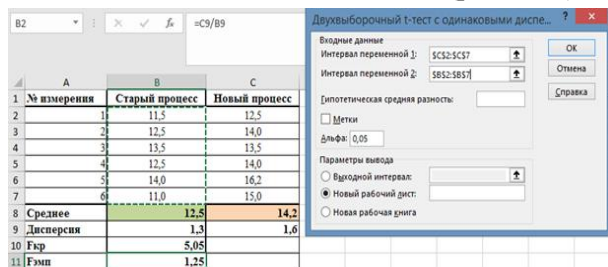


Рис. 2.12. Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями

3) среди полученных результатов, которые отображаются на новом листе Excel, определяем эмпирическое значение t-критерия (t-статистику): $t_{\text{эм}} = 2,4368... \approx 2,44$, $t_{\text{кр}} = 1,8124 \approx 1,81$ (рис. 2.13).

¹ Если пакет «Анализ данных» не активен, то следует выполнить последовательность шагов: Файл – Параметры – Настройки – Пакет анализа – Перейти... – Пакет анализа – Ок.

	A	B	C	D
1	Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями			
2				
3		Переменная 1	Переменная 2	
4	Среднее	14,2	12,5	
5	Дисперсия	1,62	1,3	
6	Наблюдения	6	6	
7	Объединенная дисперсия	1,46		
8	Гипотетическая разность средних	0		
9	df	10		
10	t-статистика	2,436874261		
11	P(T<=t) одностороннее	0,017517907		
12	t критическое одностороннее	1,812461123		
13	P(T<=t) двухстороннее	0,035035814		
14	t критическое двухстороннее	2,228138852		

Рис. 2.13. Нахождение эмпирического значения
двухвыборочного t-критерия

Формулируем вывод: $t_{\text{эмп}} > t_{\text{кр}}$ ($t_{\text{эмп}}$ попало в критическую область), поэтому H_0 отклоняется.

Вывод: Усовершенствование процесса обработки привело к повышению качества изделия.

§ 2.5. Гипотеза об однородности двух независимых выборок

Ранговый (непараметрический) критерий Вилкоксона служит для проверки однородности двух независимых выборок объемом n_1 и n_2 ($n_1 \leq n_2$)¹. Следует заметить, что критерий Вилкоксона может быть применим к случайным величинам, распределения которых неизвестны² (распределения могут отклоняться от нормального распределения).

¹ Ранговые критерии – это статистические критерии, в которых вместо выборочных значений используются их ранги.

² Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов. 6-е изд., стер. М. : Высш. шк., 1998. С. 343–346.

Пример 5. При исследовании концентрации некоторого элемента в сплавах А и В были получены следующие результаты (табл. 12, в %):

Таблица 2.3

А	1,02; 1,6; 2,1; 2,8; 3,5; 3,9; 3,5; 2,5
В	2,5; 4,2; 1,2; 4,1; 1,1; 3,8; 1,0; 4,0; 1,5

Требуется проверить, одинакова ли концентрация элемента в сплавах.

Решение:

Доказательство однородности (отсутствия статистически значимых различий) двух выборок (А и В) состоит из 5 этапов.

1. Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:

H_0 : концентрация элемента в сплавах А и В одинакова.

H_1 : концентрация элемента в сплавах А и В разная.

2. Уровень значимости $\alpha = 0,05$ (по условию).

3. Строим общий вариационный ряд для элементов двух выборок (элементы двух выборок перемешиваются, располагаясь по возрастанию) и находим ранги каждого элемента¹. В рассматриваемых выборках, как видно из таблицы (табл. 2.3), некоторые значения повторялись. В таком случае соответствующим совпадающим величинам присваиваем среднее арифметическое тех рангов (позиций в общем вариационном ряду), которые они занимают. Так, одинаковые значения 2,5 (сплав А) и 2,5 (сплав В) занимают в объединенной выборке позиции 9 и 10, поэтому им приписываем ранг 9,5 и т. д. Заметим, что одинаковым значениям 3,5 и 3,5 приписываем различные ранги, так как они получены для сплава А (для элементов только од-

¹ Вариационный ряд – ранжированная совокупность результатов статистического наблюдения (ранжированная выборка). Ранжирование в статистике – это распределение отдельных единиц (объектов) совокупности в порядке возрастания (убывания) исследуемого признака.

ной выборки приписывание рангов 12 и 13 эквивалентно приписыванию рангов 12,5 и 12,5).

4. Находим наблюдаемое значение критерия Вилкоксона. Определяем сумму рангов элементов первой выборки: $W_{\text{набл}} = S_1 = 83$, сумму рангов второй выборки (ранги набраны полужирным шрифтом) $S_2 = 88$ и обеих выборок $S = 171$. Для контроля вычислений используем формулу:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{(9 + 9) \times (9 + 9 + 1)}{2} = 171.$$

Таблица 2.4

**Общий вариационный ряд элементов
двух выборок**

Элементы выборки	1,0	1,0	1,1	1,2	1,5	1,6	2,0	2,1	2,5
Выборка	A	B	B	B	B	A	A	A	A
Ранги	1,5	1,5	3	4	5	6	7	8	9,5
Элементы выборки	2,5	2,8	3,5	3,5	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
Выборка	B	A	A	A	B	A	B	B	B
Ранги	9,5	11	12	13	14	15	16	17	18

5. По таблице приложения I¹ находились верхняя и нижняя критические точки, учитывая, что $n_1 = n_2 = 9$ и $Q = \frac{\alpha}{2} = 0,025$.

$$W_{\text{ниж.кр.}}(0,025; 9; 9) = 62;$$

$$W_{\text{верх.кр.}} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - W_{\text{ниж.кр.}} = \\ (9 + 9 + 1)9 - 62 = 171 - 62 = 109.$$

¹ Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. С. 471.

Так как значение статистики $W_{\text{набл}} = 83$, при $\alpha = 0,05$ не попало в критическую область: $W_{\text{ниж.кр}} < W_{\text{набл}} < W_{\text{верх.кр}}$, т. е. $62 < 83 < 109$, то нулевая гипотеза не отклонялась.

Вывод: концентрация элемента в сплавах А и В одинакова.

Контрольные задания к главе 2

1. В результате 22 измерений начальной скорости пули, м/с, были получены следующие результаты: $\bar{X} = 932$, $s = 26$. Используя двусторонний t-критерий при уровне значимости $\alpha = 0,05$, проверьте нулевую гипотезу, что данная выборка взята из распределения с $\mu = 900$ (начальная скорость пули АК-74).

2. В результате 16 измерений прицельной дальности пистолета, м, были получены следующие результаты: $\bar{X} = 27$, $S = 1,8$. Используя двусторонний t-критерий при уровне значимости $\alpha = 0,01$, проверьте нулевую гипотезу, что данная выборка взята из распределения с $\mu = 25$ (прицельная дальность пистолета-пулемета ПП-9 «Кедр»).

3. В результате 24 измерений боевой скорострельности автомата одиночными выстрелами, выстр./мин, были получены следующие результаты: $\bar{X} = 45$, $s = 3,6$. Используя двусторонний t-критерий при уровне значимости $\alpha = 0,05$, проверьте нулевую гипотезу, что данная выборка взята из распределения с $\mu = 40$ (боевая скорострельность одиночными выстрелами АКС-74У).

4. При обследовании двух групп студентов с помощью теста по выявлению способностей к научной деятельности получены следующие результаты: $n_1 = 20$; $S_1^2 = 36$ и $n_2 = 15$; $S_2^2 = 64$. Применяя F-критерий при уровне значимости 0,1, проверьте нулевую гипотезу о том, что дисперсии распределений, из которых извлечены выборки, равны (выборки извлекались из генеральных совокупностей, имеющих нормальное распределение).

5. При сравнении двух технологий добычи некоторого вещества было получено следующее количество продукта (в граммах, табл. 2.5):

Таблица 2.5

I	4,0; 4,0; 4,14; 5,48; 5,15; 16,0
II	4,9; 5,1; 6,1; 6,4; 4,7; 5,0; 4,0; 5,5

Проверить, используя t-критерий для разности двух средних независимых выборок с $\alpha = 0,05$, нулевую гипотезу: I и II технологии дают одинаковый выход вещества, против альтернативной: II технология предпочтительнее.

6. Проведено усовершенствование метода обработки некоторого изделия. Проверка качества изделия дала следующие результаты (табл. 2.6):

Таблица 2.6

I метод	15; 23; 25; 26; 28; 29
II метод	12; 14; 18; 20; 22; 24; 27; 30

При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу: качество не изменилось (выборки однородны), против альтернативной гипотезы: качество изменилось (выборки неоднородны), используя критерий Вилкоксона.

ГЛАВА 3.

АНАЛИЗ И ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

§ 3.1. Основные понятия и определения

Регрессионный анализ – статистический метод исследования влияния одной или нескольких независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ на зависимую переменную y . С регрессионным анализом тесно связан корреляционный.

В *корреляционном анализе* оценивается сила связи между переменными, в регрессионном – форма.

Уравнение регрессии – это зависимость случайной величины Y от неслучайных факторов X (обычно X не случайна и управляема), т. е. зависимость «следствия» Y от «причин» X .

Регрессия – «возвращение», «движение» назад. Термин «регрессия» появился в 1885 г. в работе английского антрополога Френсиса Гальтона.

Пусть проводится некоторый эксперимент, целью которого является исследование зависимости величины y от другой величины x : $y = \varphi(x)$.

В результате эксперимента получены несколько пар значений x и y .

Таким образом, на основании экспериментальных данных требуется установить вид зависимости.

Простое проведение через все экспериментальные точки некоторой кривой, являющейся графиком этой зависимости, лишено смысла, так как вид этой зависимости будет меняться от одной серии измерений к другой из-за наличия случайных погрешностей.

В этом случае возникает типичная для практики задача сглаживания экспериментальных зависимостей (аппроксимации).

Аппроксимация (или приближение) – научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным, но более простыми (метод сознательного упрощения «слишком точного» теоретического знания с целью привести его в соответствие с потребностями и возможностями практики).

Очевидно, что необходимо подобрать функцию, график которой проходил бы как можно ближе к экспериментальным точкам. Такую функцию называют аппроксимирующей¹. Аппроксимирующая функция должна быть достаточно простой и адекватно отражать зависимость между переменными. Один из методов нахождения таких функций – метод наименьших квадратов (МНК).

§ 3.2. Оценка коэффициентов регрессии методом наименьших квадратов

Данный метод применяется при решении идентификационных и диагностических задач судебной экспертизы.

МНК – метод регрессионного анализа.

Пусть вид аппроксимирующей функции $\varphi(x) = \varphi(x, a, b, c \dots)$ известен или из теоретических соображений, или на основе характера расположения экспериментальных точек на координатной плоскости. Подбор параметров $a, b, c, \dots$ этой функции по методу наименьших квадратов (МНК) производится таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений ординат эксперименталь-

¹ В качестве аппроксимирующей функции не рекомендуется использовать многочлен высокой степени, так как график такой функции «петляет», плохо отражая главную тенденцию.

ных значений y_i от ординат аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ была минимальной:

$$S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots))^2 \rightarrow \min.$$

Итак, параметры аппроксимирующей функции подбираются так, чтобы (рис. 3.1):

- 1) функция располагалась как можно ближе к экспериментальным точкам;
- 2) сумма квадратов отклонений ординат экспериментальных точек от соответствующих ординат графика аппроксимирующей функции была минимальной.

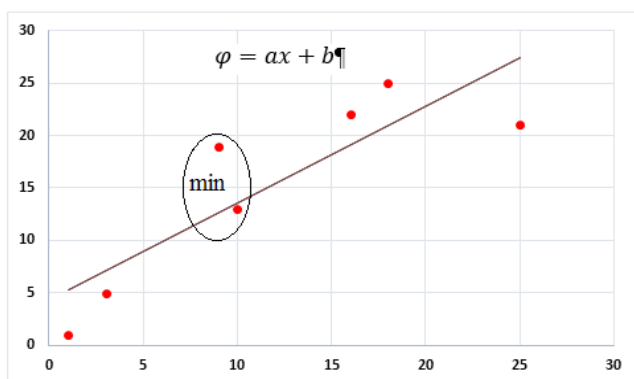


Рис. 3.1. Аппроксимирующая функция

Пример 1. В результате обработки видеозаписи движения автомобиля составлена таблица 3.1 зависимости пройденного пути и времени. Подобрать функциональную зависимость вида $y = ax + b$.

Таблица 3.1

х, сек	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
у, м	0	5	18	42	75	118	171	231	299	375

Решение:

Используем табличный процессор Excel для автоматизации процесса нахождения параметров уравнения регрессии (a, b) методом наименьших квадратов.

1. В ячейки B2:L3 вводим табличные данные (табл. 3.2):

Таблица 3.2

x, сек	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
y, м	0	5	18	42	75	118	171	231	299	375

2. По данным таблицы строим точечную диаграмму (рис. 3.2):

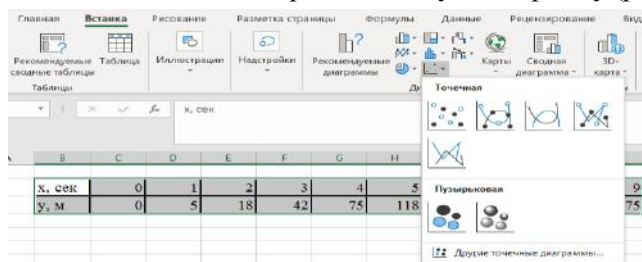


Рис. 3.2. Построение точечной диаграммы по экспериментальным точкам

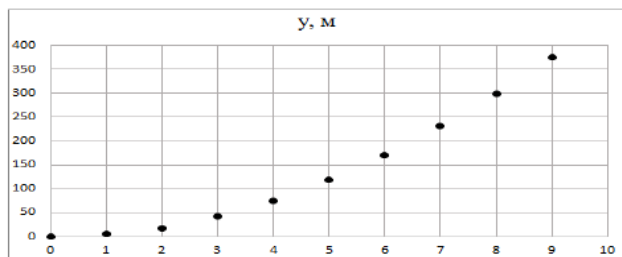


Рис. 3.3. Экспериментальные точки

3. Подбираем аппроксимирующую функцию МНК:

1) выделяем правой клавишей мыши экспериментальные точки и вызываем контекстное меню.

Выбираем команду «Добавить линию тренда» (рис. 3.4).

2) в диалоговом окне «Формат линии тренда» выбираем линейную зависимость (рис. 3.5).

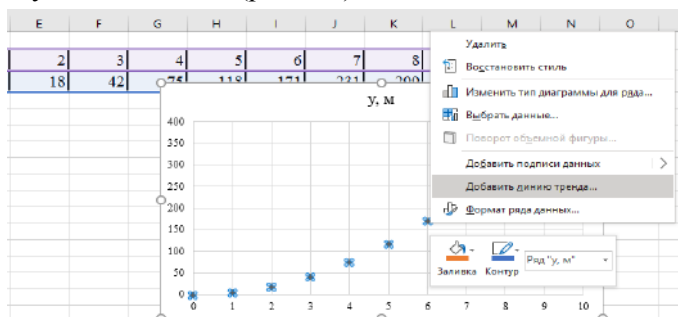


Рис. 3.4. Построение линии тренда (аппроксимирующей функции)

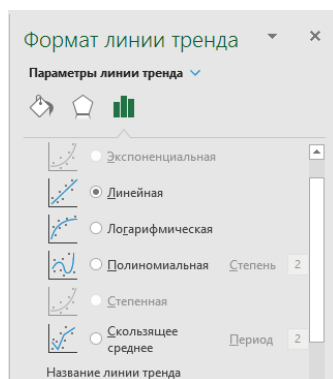


Рис. 3.5. Выбор вида аппроксимирующей функции

3) в нижней части диалогового окна «Формат линии тренда» ставим два флажка: показывать уравнение на диаграмме; поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации R^2 ¹ (рис. 3.6).

¹ Коэффициент достоверности аппроксимации показывает, насколько точно функциональная зависимость, параметры которой определены МНК, описывает исследуемый процесс. Чем ближе R^2 к единице, тем точнее подобрана функция.

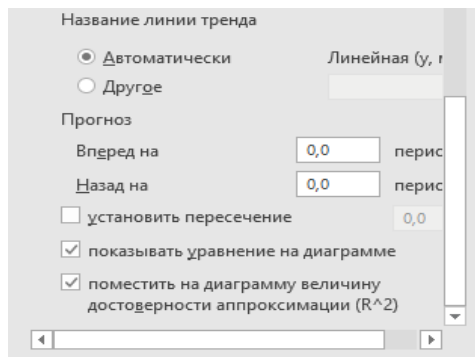


Рис. 3.6. Выбор вида аппроксимирующей функции

Уравнение регрессии имеет вид (рис. 3.7):

$$y = 41,988x - 55,545.$$

$$R^2 = 0,9304.$$

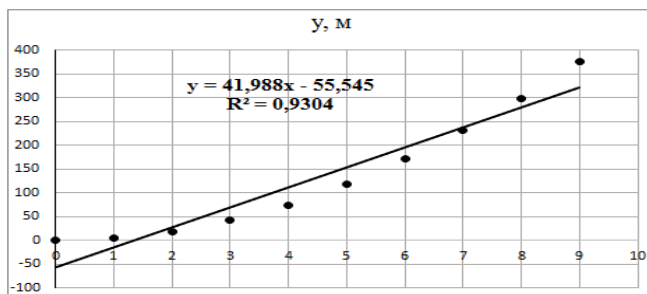


Рис. 3.7. Выбор вида аппроксимирующей функции

§ 3.3. Алгоритм корреляционно-регрессионного анализа

Результаты диагностических исследований материальных следов преступника, в частности следов его ног, нередко приобретают ориентирующее и доказательственное значение. Одной из целей таких исследований является определение физических свойств лица, оставившего следы, в частности, его роста.

Эти сведения позволяют сузить круг подозреваемых лиц и проверить их на причастность к расследуемому событию.

Пример 2. Построить уравнение линейной регрессии, определяющее взаимосвязь между ростом и стопой человека, если в результате наблюдения составлена таблица 3.3 зависимости роста и длины стопы. Сделать вывод о характере корреляционной связи между переменными x и y .

Таблица 3.3

X	22,5	22,8	23,0	23,0	23,0	23,5	24,0	24,0	24,0	24,2	24,5	24,5	24,8
Y	164	163	165	163	165	168	175	174	165	175	178	169	79

Решение:

Используем табличный процессор Excel для автоматизации процесса нахождения параметров уравнения линейной регрессии (а, b) методом наименьших квадратов.

1. В ячейки B2:O3 вводим табличные данные (рис. 3.8):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2		X	22,5	22,8	23,0	23,0	23,0	23,5	24,0	24,0	24,0	24,2	24,5	24,5	24,8	
3		Y	164	163	165	163	165	168	175	174	165	175	178	169	179	
4																

Рис. 3.8. Исходные данные

2. По данным таблицы строим точечную диаграмму (рис. 3.9):

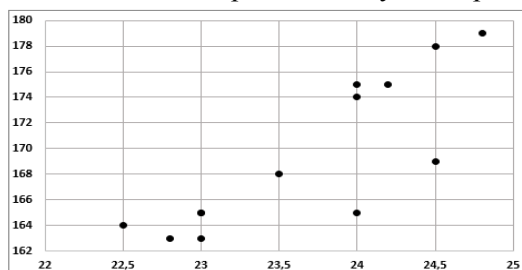


Рис. 3.9. Экспериментальные точки

3. Подбираем аппроксимирующую функцию МНК:

Выделяем правой клавишей мыши экспериментальные точки и вызываем контекстное меню. Выбираем команду «Доба-

вить линию тренда». В диалоговом окне «Формат линии тренда» выбираем линейную зависимость. В нижней части диалогового окна «Формат линии тренда» ставим два флажка: показывать уравнение на диаграмме; поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации R^2 .

Уравнение регрессии имеет вид (рис. 3.10):

$$y = 6,6299x + 12,486.$$

$$R^2 = 0,7057.$$

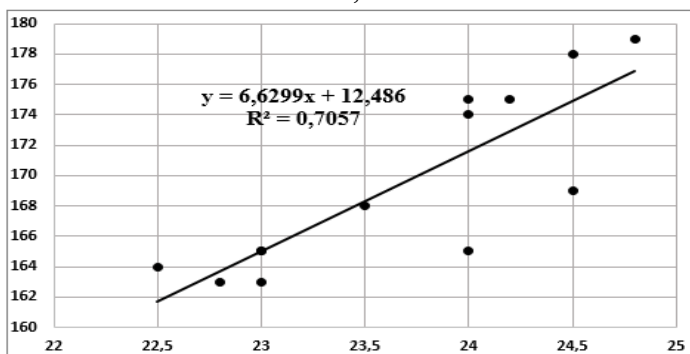


Рис. 3.10. Построение уравнения линейной регрессии

4. Делаем вывод о характере корреляционной связи между переменными x и y . С помощью табличного процессора Excel вычисляем коэффициент корреляции Пирсона r^1 (рис. 3.11) : в ячейку H4 вводим =PEARSON(C2:O2;C3:O3). Аргументами функции PEARSON (массив 1; массив 2) служат элементы первой и второй выборки соответственно.

В результате получаем: $r = 0,84$, что свидетельствует о положительной (достаточно сильной) корреляции между переменными x и y .

¹ Предварительно необходимо проверить, что выборки извлечены из совокупностей, имеющих нормальное распределение.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with a data table in columns B through O and rows 2 through 3. The formula bar at the top shows the formula `=PEARSON(C2:O2;C3:O3)`. The data table is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2		X	22,5	22,8	23,0	23,0	23,0	23,5	24,0	24,0	24,0	24,2	24,5	24,5	24,8
3		Y	164	163	165	163	165	168	175	174	165	175	178	169	179
4															
5															
6															
7															

Рис. 3.11. Нахождение коэффициента корреляции Пирсона

Чем ближе значение коэффициента корреляции r к единице (по модулю), тем теснее корреляционная связь.

Если $r = 1$, то наблюдается полная положительная корреляция.

Если $r = -1$, то наблюдается полная отрицательная корреляция.

Так как исходные данные являются выборочными, то необходимо оценить значимость коэффициента корреляции.

1. Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:

H_0 : корреляционная связь статистически не значима¹.

H_1 : корреляционная связь статистически значима².

2. Выбираем уровень значимости: $\alpha = 0,05$.

3. Выбираем статистический критерий: t -критерий.

4. Находим критическое значение критерия:

В нашем случае: $\alpha = 0,05$, $n - 2 = 13 - 2 = 11$. Получаем: $t_{кр} = 2,2$ (формула `=СТЮДЕНТ.ОБР.2X(0,05;11)`).

5. Находим эмпирическое значение критерия (статистику):

$$t_{\text{эмп}} = \frac{|r|}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{0,84}{\sqrt{\frac{1-0,84^2}{13-2}}} = 5,13,$$

где: $n = 13$ – число элементов выборки, r – коэффициент корреляции.

¹ $r_r = 0$ – коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю.

² $r_r \neq 0$ – коэффициент корреляции в генеральной совокупности не равен нулю.

Контрольные задания к главе 3

1. В результате эксперимента получено семь значений функции y при соответствующих значениях аргумента x . Результаты представлены в таблице 3.4:

Таблица 3.4

x	92	94	96	98	100	102	104
y	69	34	49	64	54	44	59

Сделайте вывод о характере корреляционной связи между переменными x и y .

2. В результате эксперимента получено семь значений функции y при соответствующих значениях аргумента x . Результаты представлены в таблице 3.5:

Таблица 3.5

x	7	23	35	42	46	48	49
y	12	30	26	29	24	29	36

Сделайте вывод о характере корреляционной связи между переменными x и y .

3. В результате эксперимента получено семь значений функции y при соответствующих значениях аргумента x . Результаты представлены в таблице 3.6:

Таблица 3.6

x	92	94	96	98	100	102	104
y	34	39	44	49	54	59	64

С помощью МНК подберите функциональную зависимость вида $y = ax + b$; сделайте вывод о характере корреляционной связи между переменными x и y .

4. В результате эксперимента получено семь значений функции y при соответствующих значениях аргумента x . Результаты представлены в таблице 3.7:

Таблица 3.7

x	36	47	49	52	54	68	76
y	118	108	95	82	77	52	47

С помощью МНК подберите функциональную зависимость вида $y = a \times \ln(x) + b$; сделайте вывод о характере корреляционной связи между переменными x и y .

Таблица значений интегральной функции Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Z	$\Phi(z)$	Z	$\Phi(z)$	Z	$\Phi(z)$	Z	$\Phi(z)$	Z	$\Phi(z)$	Z	$\Phi(z)$
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942

0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49960
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,53	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994

0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000

Продолжение приложения 1

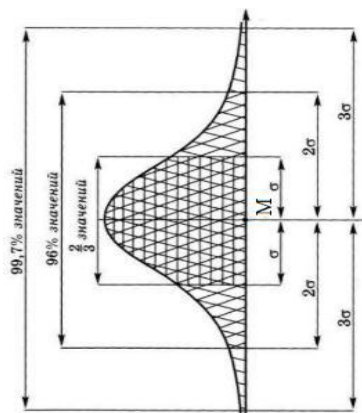
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30875	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760	–	–

Окончание приложения 1

0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774	—	—
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788	—	—
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801	—	—
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813	—	—
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825	—	—
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836	—	—
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846	—	—
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856	—	—

Примечание.

В основе теории погрешностей лежат три предположения, подтвержденные опытом: отклонения наблюдаемых значений от истинного значения образуют непрерывный ряд; погрешности, имеющие одинаковые абсолютные значения, но разные знаки встречаются одинаково часто; чем больше значение погрешности, тем реже оно встречается. Из этих предположений следует, что распределение вероятности значений измеряемой величины соответствует нормальному распределению. Существует эталонное нормальное распределение (универсальное, не зависящее от масштаба и единиц измерения), которое называется стандартным. Стандартное нормальное распределение имеет следующие параметры: M – математическое ожидание (генеральное среднее или истинное значение измеряемой величины), равное 0, σ – среднеквадратическое отклонение (характеризует степень отклонения измеряемой величины от ее математического ожидания), равное 1.



Значения, приведенные в таблице, представляют собой величину площади под стандартной нормальной кривой от 0 до соответствующего значения Z (или вероятность попадания случайной величины в интервал от 0 до Z). Для того, чтобы воспользоваться стандартным нормальным распределением, масштаб реальных данных «подгоняют» под эталон с помощью нормализации, которая для выборки имеет вид:

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

где x – результат отдельного измерения, $\bar{x}$ – среднее арифметическое выборки, s – стандартное отклонение выборки.

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы, k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	4,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07

Окончание приложения 2

16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

ОТВЕТЫ

К главе 1

1. $P \pm \Delta P = (2362 \pm 5) \text{ Вт}$.
2. $I \pm \Delta I = (6,8 \pm 0,5) \text{ мкА}$.
3. 5 В.
4. $x_4 = 8$ – грубая ошибка, так как $n^* = 0,25 < 0,5$.
5. $x_7 = 39$ – грубая ошибка, так как $n^* = 0,38 < 0,5$.
6. $\bar{X} \pm \Delta X = \bar{X} \pm \Delta X_{\text{случ}} = 38,8 \pm 0,3$.
7. $S \pm \Delta S = 44,0 \pm 2,1$; $S \pm \Delta S = 44,0 \pm 2,1$; $S \pm \Delta S = 44,0 \pm 1,7$.
8. $S \pm \Delta S = 70 \pm 6$; $S \pm \Delta S = 70 \pm 6$; $S \pm \Delta S = 70 \pm 4$.

К главе 2

1. $t_{\text{кр}} = 2,08$, $t_{\text{эмп}} = 5,77$, H_0 отклоняется.
2. $t_{\text{кр}} = 2,95$, $t_{\text{эмп}} = 4,44$, H_0 отклоняется.
3. $t_{\text{кр}} = 2,07$, $t_{\text{эмп}} = 6,8$, H_0 отклоняется.
4. $F_{\text{кр}} = 1,88$, $F_{\text{эмп}} = 1,78$, H_0 не отклоняется.
5. $F_{\text{кр}} = 3,79$, $F_{\text{эмп}} = 1,23$, $t_{\text{кр}} = 2,14$, $t_{\text{эмп}} = 1,39$ H_0 не отклоняется.
6. $W_{\text{набл}} = 54$, $W_{\text{н.кр}} = 29$, $W_{\text{в.кр}} = 61$, H_0 не отклоняется.

К главе 3

1. $r = 0,03$ корреляционная связь практически отсутствует.
2. $r = 0,74$ положительная (достаточно сильная) корреляция.
3. $y = 2,5x - 196$; $r = 1$ полная положительная корреляция.
4. $y = -105,51n(x) + 501,83$; $r = -0,97$ отрицательная сильная корреляция.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2004. – 407 с.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 1998. – 479 с.
3. Горелова, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с использованием Excel : учеб. пособие для вузов / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – 3-е изд., перераб. и доп. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 480 с.
4. Ватутин, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / В. А. Ватутин, Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев и др. – 2-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2003. – 328 с.
5. Карасев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика. Математическая статистика : практикум / В. А. Карасев, Г. Д. Левшина. – М. : Издательский дом МИСиС, 2016. – 120 с.
6. Левин, С. Ф. Философские проблемы и статистические методы фундаментальной метрологии / С. Ф. Левин // Метафизика. – 2012. – № 3 (5). – С. 93–94.
7. Савчук, В. П. Обработка результатов измерений. Физическая лаборатория. Ч. 1 / В. П. Савчук. – Одесса : ОНПУ, 2002. – 54 с.
8. ГОСТ 16263–70. ГСИ. Метрология. Термины и определения [Электронный ресурс] // Электронный фонд правовой и нормативно технической документации. – URL: <http://docs.cntd.ru/>.

9. ГОСТ Р 50779.22-2005. Статистические методы. Статистическое представление данных. Точечная оценка и доверительный интервал для среднего [Электронный ресурс] // Электронный фонд правовой и нормативно технической документации. – URL: <http://docs.cntd.ru/>.

10. ГОСТ Р 50779.21-2004. Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным. Ч. 1 : Нормальное распределение [Электронный ресурс] // Электронный фонд правовой и нормативно технической документации. – URL: <http://docs.cntd.ru/>.

11. Р 50.1.040-2002. Статистические методы. Планирование экспериментов. Термины и определения [Электронный ресурс] // Электронный фонд правовой и нормативно технической документации. – URL: <http://docs.cntd.ru/>.

12. Р 50.1.082-2012. Статистические методы. Примеры применения. Ч. 4 : Простые статистические приемы анализа данных [Электронный ресурс] // Электронный фонд правовой и нормативно технической документации. – URL: <http://docs.cntd.ru/>.

13. СТ СЭВ 543-77. Числа. Правила записи и округления [Электронный ресурс] // Электронный фонд правовой и нормативно технической документации. – URL: <http://docs.cntd.ru/>.

Учебное пособие

Задохина Нина Владимировна,

кандидат педагогических наук

Дорошин Анатолий Алексеевич

Дубинина Наталья Михайловна,

кандидат юридических наук, доцент

Слесарева Екатерина Александровна,

кандидат психологических наук

Страхов Андрей Александрович

Статистические методы в экспертно-криминалистической деятельности



Редактор *Тарасова Т. С.*

Корректор *Лосева О. С.*

Компьютерная верстка *Тарасова Т. С., Лосева О. С.*

Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя
117437, г. Москва, ул. Академика Волгина, д. 12

Подписано в печать 25.06.2020	Формат 60×84 1/16	Тираж 51 экз.
Заказ № 213	Цена договорная	Объем 2,11 уч.-изд. л. 5,07 усл. печ. л.
