

Краснодарский университет МВД России

Е. В. Михайленко

МАТЕМАТИКА

Часть 3

Математический анализ

Курс лекций

Краснодар
2020

УДК 517
ББК 22.161
М69

Одобрено
редакционно-издательским советом
Краснодарского университета
МВД России

Рецензенты:

А. Н. Прокопенко, кандидат технических наук, доцент (Белгородский юридический институт МВД России имени И.Д. Путилина);

О. Ю. Бубнова, кандидат физико-математических наук (Нижегородская академия МВД России).

Михайленко Е. В.

М69 Математика. Ч. 3. Математический анализ : курс лекций /
Е. В. Михайленко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России,
2020. – 90 с.

ISBN 978-5-9266-1615-3

В курсе лекций рассматриваются разделы математического анализа: функция одной переменной, предел и непрерывность функций, производные и дифференциальное исчисление, функции нескольких переменных, интегральное исчисление.

Для профессорско-преподавательского состава, курсантов и слушателей образовательных организаций МВД России.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-9266-1615-3

© Краснодарский университет
МВД России, 2020
© Михайленко Е. В., 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Функция одной переменной	4
1.1. Понятие функции	4
1.2. Основные свойства функций	7
1.3. Классификация функций	12
Глава 2. Предел и непрерывность функций	16
2.1. Предел числовой последовательности.....	16
2.2. Понятие предела функции.....	17
2.3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины	21
2.4. Основные теоремы о пределах	27
2.5. Непрерывность функции	30
Глава 3. Дифференциальное исчисление	32
3.1. Основные понятия.....	32
3.2. Дифференцирование функций.....	34
3.3. Производные сложной и обратной функций, производные высших порядков	35
3.4. Правило Лопиталю.....	37
3.5. Интерполирование функций	39
Глава 4. Исследование функций	44
4.1. Локализация корней.....	44
4.2. Асимптоты функции	47
4.3. Монотонность функции.....	50
4.4. Выпуклость и вогнутость функции.....	52
4.5. Пример построения графика функции по общей схеме.....	54
Глава 5. Функции нескольких переменных	59
5.1. Понятие функции нескольких переменных	59
5.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.....	62
5.3. Производные по направлению. Градиент.....	64
5.4. Экстремумы функции двух переменных	66
Глава 6. Интегральное исчисление.....	70
6.1. Понятие неопределенного интеграла.....	70
6.2. Основные методы интегрирования	73
6.3. Определенные интегралы.....	80
6.4. Геометрические приложения определенного интеграла	86
Литература	88

Глава 1. Функция одной переменной

1.1. Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Определение. Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие вполне определенный единственный элемент y множества Y , то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$.

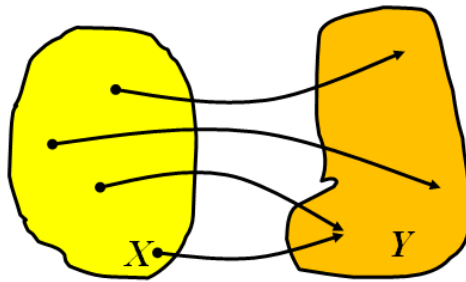


Рис. 1.1. Определение функции.

Функцию можно понимать, как закон соответствия между зависимой переменной y и независимой переменной x . При этом переменную y называют функцией, а переменную x – аргументом этой функции. Множество X для такого соответствия является *областью определения функции*, а множество Y называется *множеством значений* (рис.1).



Рис.1.2. Функция и ее аргумент.

Запись $y = f(x)$ означает, что y является функцией x . Значение функции $f(x)$ при $x = a$ обозначают через $f(a)$.

Обычно функцию описывают тремя способами: *табличным, графическим и аналитическим.*

В табличной форме перечисляются некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции. Такой способ задания функции обычно применяется, если известны только некоторые значения функции (таблица 1.1).

Талица 1.1.

Табличное описание функции

X	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Y	0,756	1,223	3,006	2,168	1,983	1,766	1,612	1,529	1472

Обычно в таблицу записывают данные, полученные в результате наблюдений или измерений. Значения аргумента, как правило, определяются через заданный интервал, чем меньше интервал, тем точнее задана функция. Однако с уменьшением интервала значений аргумента таблица становится громоздкой.

Из таблицы можно определить не только указанные значения функции, но и с помощью математических расчетов найти приближенные значения функции, для любого значения аргумента на заданной области.

Второй способ задания функции – графический. На оси абсцисс откладываются значения аргумента x , а на оси ординат – значения функции $f(x)$ (рис. 1.3). Функциональная зависимость отображается с помощью кривой, каждая точка которой имеет координаты $(x; f(x))$.

В графической форме нагляднее прослеживается поведение функции в области ее отображения на графике. По графику функции можно всегда составить таблицу с любым интервалом значений аргумента, однако при этом теряется точность значений функции. Кроме того, графики дают лишь условное представление о поведении функции при стремлении аргумента к бесконечности или значительного удаления самой функции от начала координат.

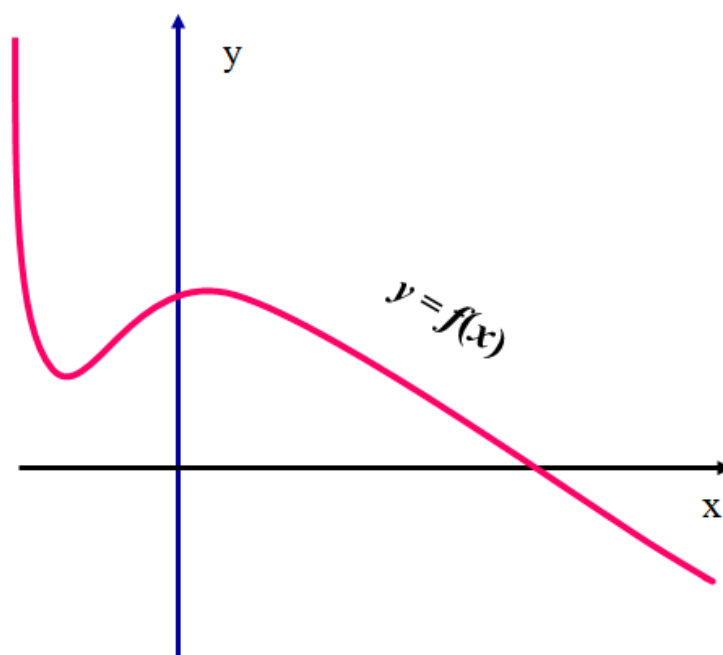


Рис. 1.3. График функции.

Наиболее общим способом задания функции является аналитический. В этом способе с помощью математических операций четко описывается правило f , по которому значениям аргумента x ставятся в соответствие значения функции y .

Пример. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную аналитически:

$y = \frac{x-5}{x^2-2x-3}$. Для каждого значения аргумента из области определения из заданной формулы можно найти соответствующее ему значение функции. Найдем значение функции для аргумента $x = 2$, для этого подставим число 2 вместо переменной x в указанную формулу: $y(2) = \frac{2-5}{2^2-2 \cdot 2-3} = \frac{-3}{-3} = 1$.

Любую функцию, заданную аналитически, можно всячески исследовать: найти значения функции для любых аргументов, определить область определения функции и множество значений, ее монотонность, области возрастания и убывания функции, экстремальные точки, выпуклость и перегибы графика функции.

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной x , при котором данная функция существует и обозначается $D(x)$.

Область определения функции $y = f(x)$ может представлять собой:

- *интервал* (открытый промежуток) – множество значений x , удовлетворяющих условию $a < x < b$, записывается $(a; b)$;
- *сегмент* (отрезок или замкнутый промежуток) – множество значений x , удовлетворяющих условию $a < x < b$, записывается $[a; b]$;
- *полуинтервал* – множество значений x , удовлетворяющих условиям $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$, записываются $[a; b)$ или $(a; b]$;
- *бесконечный интервал* вида: $-\infty < x < +\infty$, $a < x < +\infty$, $-\infty < x < b$, $a \leq x < +\infty$; $-\infty < x \leq b$, записывается $(-\infty; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$;
- совокупность нескольких интервалов или сегментов и т.п.

Пример. Областью определения функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 17$ является бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$.

Пример. Областью определения функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ является сегмент $[-2; 2]$, поскольку под квадратным корнем могут быть только положительные числа.

Пример. Областью определения функции $y = \frac{x-5}{\sqrt{3-x}}$ является бесконечный интервал $(-\infty; 3)$.

Пример. Областью определения функции $y = \frac{x-5}{x^2 - 2x - 3}$ является объединение интервалов $(-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$.

Множеством значений $E(x)$ данной функции является совокупность всех ее возможных значений, принимаемых данной функцией на области определения. Для определения множества значений функции необходимо детально исследовать функцию.

1.2. Основные свойства функций

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений аргументов x из ее области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции расположен симметрично относительно оси ординат Oy (рис. 1.4).

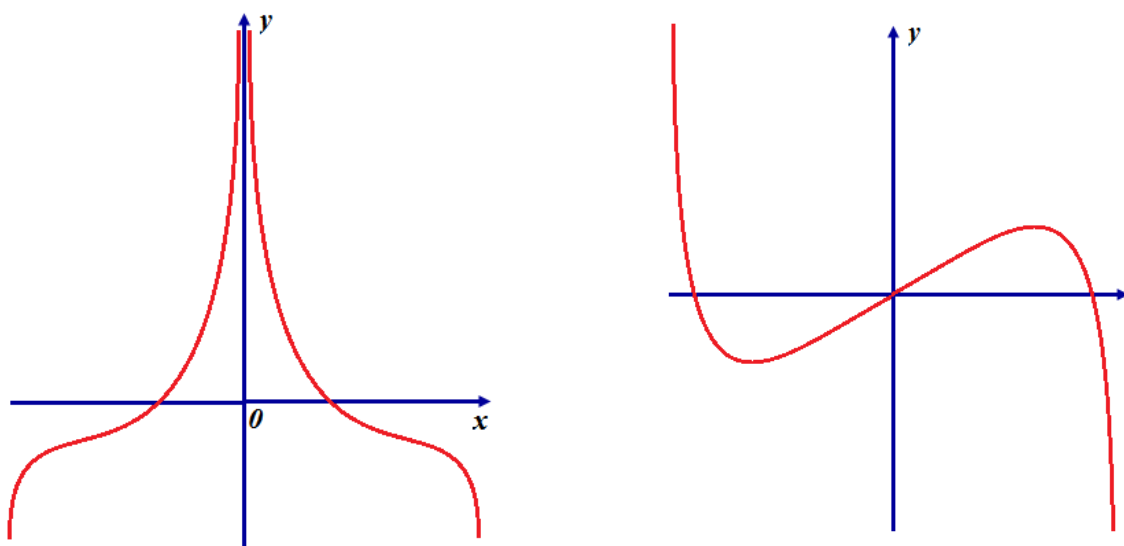


Рис. 1.4. Графики четной (слева) и нечетной (справа) функций.

Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если для любых значений аргументов x из ее области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. для любого значения x . График нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат. Если оба этих условия не выполняются, то функция $y = f(x)$ называется *функцией общего вида*. Соответственно, график функции общего вида не будет симметричным ни относительно оси ординат, ни обладать центральной симметрией относительно начала координат.

Следует отметить области определений у четных и нечетных функций будут симметричны относительно точки 0, а у функций общего вида это может не выполняться.

Пример. Определить вид функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Найдем область определения данной функции. В нашем случае при аргументе равном -1 и 1 знаменатель дроби будет равен нулю, следовательно, $D(x) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$, область определения функции – симметрична. Подставим в правую часть равенства вместо x значение $-x$, раскроем скобки и вынесем минус из числителя дроби:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Получившееся выражение отличается от первоначального только знаком перед дробью, то есть $f(-x) = -f(x)$, значит функция является нечетной.

Пример. Определить вид функции $y = 3\sin(x^4 + 3) + \cos x$.

Область определения функции $D(x) = (-\infty; +\infty)$ является симметричной. Подставив вместо аргумента $-x$, и учитывая, что $\cos(x) = \cos(-x)$, получим:

$$f(-x) = 3\sin((-x)^4 + 3) + \cos(-x) = 3\sin(x^4 + 3) + \cos x,$$

что полностью совпадает с выражением функции $f(-x) = f(x)$, а значит функция является четной.

Пример. Определить вид функции $y = \frac{2\log_7(x-1)}{x-2}$. Область определения функции $D(x) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ не является симметричной относительно точки 0, следовательно функция общего вида.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число $T > 0$, что для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$. Число T называют периодом функции. Периодическими бывают только функции, содержащие тригонометрические выражения.

Пример. Исследовать на периодичность функцию $y = 3\sin(2x + 3) - 8$.

Решим уравнение относительно переменной T , в левой части которого будет $f(x + T)$, а справа $f(x)$:

$$3\sin(2(x + T) + 3) - 8 = 3\sin(2x + 3) - 8$$

Упростим уравнение и разделим обе части уравнения на 3:

$$\sin(2(x + T) + 3) = \sin(2x + 3)$$

Так как функция $\sin$ периодична с периодом $2\pi k$, то из полученного равенства следует, что

$$2(x + T) + 3 = 2x + 3 + 2\pi k.$$

Раскроем скобки:

$$2x + 2T + 3 = 2x + 3 + 2\pi k,$$

Затем, приведем подобные слагаемые:

$$2T = 2\pi k,$$

Отсюда получим значение $T = \pi k$. Таким образом, исследуемая функция $y = 3\sin(2x + 3) - 8$ является периодической с периодом πk .

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке X , если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$, тогда функция возрастает на промежутке X , если $f(x_2) > f(x_1)$, и убывает, если $f(x_2) < f(x_1)$. Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными* функциями.

Пример. Функция $y = x^2 + 2x - 3$ (рис. 1.5) убывает при $x \in (-\infty; 0]$ и возрастает при $x \in [0; +\infty)$.

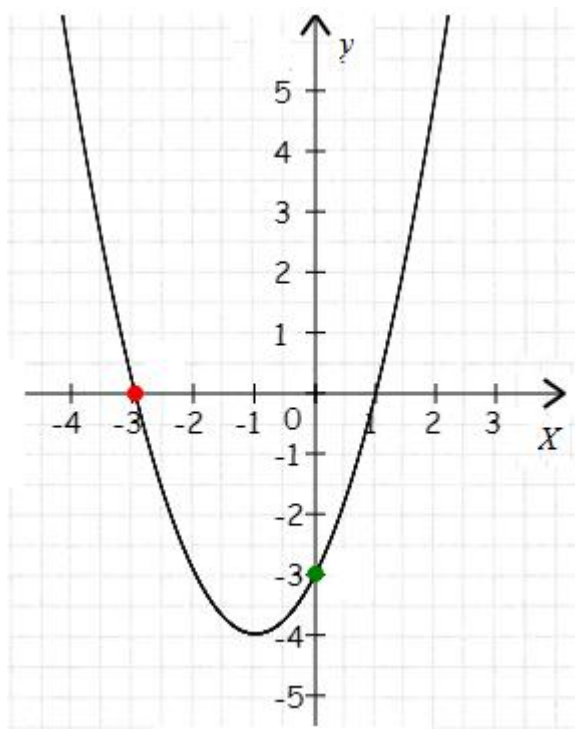


Рис. 1.5. График функции $y = x^2 + 2x - 3$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X , если существует такое положительное число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$. В противном случае функция называется *неограниченной*.

Пример. Функция $y = 2\sin(x - 3) + 2$ (рис. 1.6) является ограниченной, так как ее минимальное значение равно нулю, а максимальное равно 4.

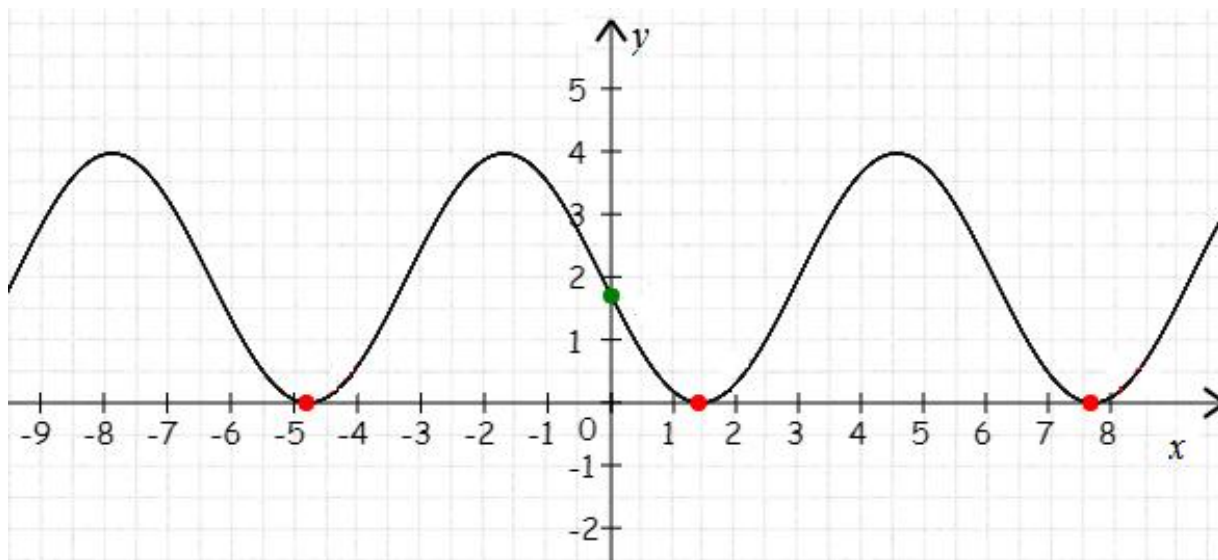


Рис. 1.6. График функции $y = 2\sin(x - 3) + 2$.

Пример. Функция $y = 2^{x-1} - 2$ (рис. 1.7) является неограниченной, так как при удалении аргумента x от начала координат вправо, значение функции $y = f(x)$ стремится к бесконечности.

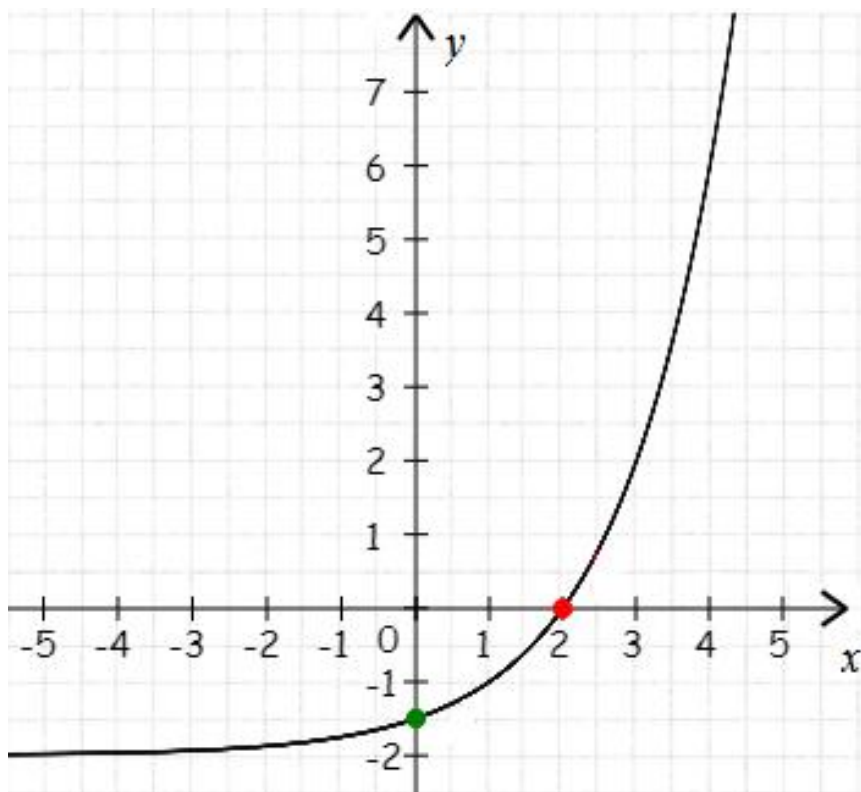


Рис. 1.7. График функции $y = 2^{x-1} - 2$.

1.3. Классификация функций

Функция $y = f(x)$ называется *явной*, если она задана равенством, в которой правая часть не содержит зависимой переменной. В противном случае функцию называют *неявной*. Часто неявная функция задается уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной.

Пример. Функция $x^2 - y + 3x = 0$ задана неявно. Однако после преобразований данную функцию можно получить в явном виде. Если оставить переменную y слева от знака равенства, а остальные слагаемые перенести вправо и умножить уравнение на -1 , то получим выражение функции в явном виде: $x^2 - y + 3x = 0$.

Пусть $y = f(x)$ является явной функцией от независимой переменной x , определенной на множестве X с областью значений Y . Поставим в соответствие каждому значению y из множества Y единственное значение $x \in X$, при котором $f(x) = y$. Тогда полученная функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве Y с областью значений X , называется *обратной*.

Однако для обратных функций приняты традиционные обозначения: y для функции и x для аргумента, поэтому вместо $x = \varphi(y)$ пишут $y = \varphi(x)$.

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Пример. Для функции $y = 3^x$ обратной будет функция $y = \log_3 x$.

Изобразим графики взаимно обратных функций $y = 3^x$ и $y = \log_3 x$ на одной координатной плоскости (рис. 1.8). Из рисунка видно, что графики взаимно обратных функций $y = 3^x$ и $y = \log_3 x$ симметричны относительно прямой $y = x$.

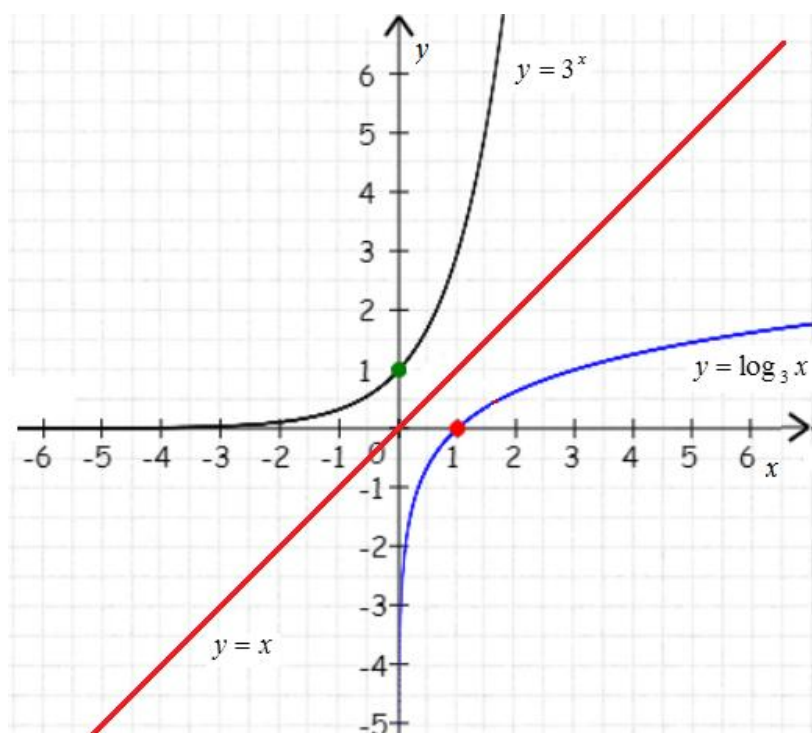


Рис. 1.8. Графики функций $y = 3^x$ и $y = \log_3 x$.

Пусть $y = f(u)$ есть функция от переменной u , определенной на множестве U с областью значений Y , а переменная u в свою очередь является функцией $u = \varphi(x)$ от переменной x , определенной на множестве X с областью значений U . Тогда заданная на множестве X функция $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией (композицией функций)*.

Пример. Функция $y = \cos(2x - 5)$ является сложной функцией, где $y = \cos(u)$, а $u = 2x - 5$.

Из простых функций новые сложные функции могут быть получены двумя способами при помощи *алгебраических действий* и *операций образования сложной функции*.

Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются *элементарными*.

Пример. Функция $y = \left(\frac{\sin(x^3 - \cos 5x)}{\sqrt{\lg(4x - 2)}} \right)^{3x}$ является элементарной

функцией.

Пример. Функция
$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \frac{24}{x^4} + \dots + \frac{n!}{x^n} + \dots$$

элементарной функцией не является, так как она построена с помощью бесконечного числа алгебраических действий.

Все элементарные функции можно разделить на два класса: алгебраические и неалгебраические. На рисунке 1.9. представлена классификация элементарных функций.



Рис. 1.9. Классификация элементарных функций.

Элементарная функция вида $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ называется *целой рациональной* функцией.

Пример. Функция $y = 2x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 12x - 17$ является целой рациональной функцией.

Элементарная функция вида $y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ называется *дробно-рациональной* функцией.

Пример. Функция $y = \frac{5x^3 - 6x}{x^2 + 2x - 3}$ является дробно-рациональной функцией.

Если для образования функции использована операция извлечения корня какой-либо степени, то такая функция называется *иррациональной алгебраической* функцией.

Пример. Функции $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = (7x - 1)^{\frac{3}{5}}$ являются иррациональными алгебраическими функциями.

Функции, составленные из алгебраических функций, с помощью алгебраических операций или путем образования сложных функций также будут алгебраическими.

Пример. Сложная функция $y = \frac{x^7 \sqrt{1-x^2}}{\left(\frac{x^4-2}{2x+3}\right)^{\frac{2}{5}}}$ является алгебраической

функцией.

К неалгебраическим функциям относятся показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, а также сложные функции их содержащие.

Пример. Показательная функция $y = 2^{3x-5}$, логарифмическая функция $y = \log_5(5x^2 - 3x + 6)^3$, тригонометрическая функция $y = 6\sin^2(3x - 4)$ и обратная тригонометрическая функция $y = \arctg(x^2 - 1)$ являются неалгебраическими функциями.

Элементарные функции, содержащие хотя бы одну из неалгебраических функций, также являются неалгебраическими.

Пример. Дробная функция $y = \frac{3^{2x+2} + x^4}{\sin^2 5x}$ является неалгебраической функцией.

Глава 2. Предел и непрерывность функций

2.1. Предел числовой последовательности

Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определенное число a_n , то говорят, что задана *числовая последовательность* $\{a_n\}: a_1; a_2; \dots; a_n, \dots$.

Определение. Числа $a_1; a_2; \dots; a_n$ называют *членами* последовательности, а число a_n – *общим* или *n -м членом* данной последовательности.

Пример. Члены арифметической прогрессии: $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots$ образуют числовую последовательность с общим членом $a_n = -6 + 2(n-1)$.

Пример. Члены геометрической прогрессии: $-256, 64, -16, 4, -1, 0,125, \dots$ образуют числовую последовательность с общим членом $a_n = -256 \cdot (-0,25)^{n-1}$.

Определение. Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий от ε , $N=N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности обозначается: $\lim a_n = A$.

Пример. Члены геометрической прогрессии: $8, 4, 2, 1, 0,5, 0,25, 0,125, \dots$ образуют числовую последовательность с общим членом $a_n = 8 \cdot 0,5^{(n-1)}$.

Предел этой числовой последовательности равен нулю.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Пример. Предел числовой последовательности $8, 4, 2, 1, 0,5, 0,25, 0,125, \dots$, члены которой образуют геометрическую прогрессию, равен нулю, следовательно, числовая последовательность будет сходящейся.

Пример. Числовая последовательность $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots$, члены которой образуют арифметическую прогрессию, не имеет предела, следовательно, числовая последовательность будет расходящейся.

Пример. Числа 1, 2, 6, 24, 120, 720, ..., образуют числовую последовательность с общим членом $a_n = n!$ не имеющую предела, следовательно, числовая последовательность будет расходящейся.

2.2. Понятие предела функции

2.2.1. Предел функции в бесконечности

С понятием предела числовой последовательности $a_n = f(n)$ тесно связано понятие предела функции $y = f(x)$ в бесконечности. Если в первом случае переменная n , возрастая, принимает лишь целые значения, то во втором случае переменная x , изменяясь, принимает любые значения.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $S > 0$ (зависящее от ε ; $S = S(\varepsilon)$), что для всех x , таких, что $|x| > S$, верно неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Рассмотрим геометрический смысл предела функции в бесконечности (рис. 2.1).

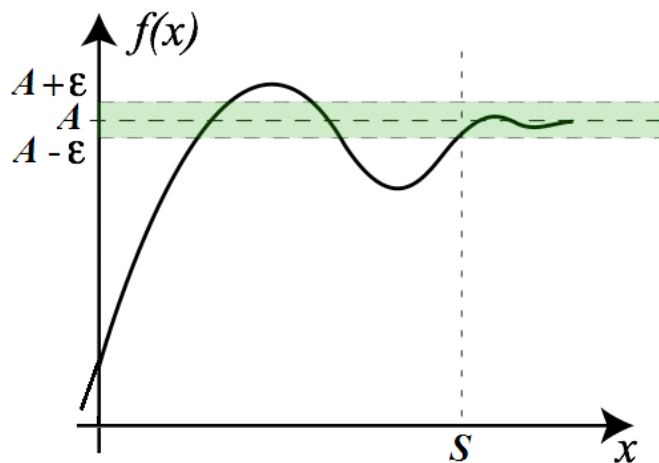


Рис. 2.1. Геометрический смысл предела функции в бесконечности.

Определение. Число A есть предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $S > 0$, что для всех x , таких, что $|x| > S$, соответствующие ординаты графика функции $f(x)$ будут заключены в полосе $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$, какой бы узкой эта полоса ни была.

Пример. Найдём предел функции $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+11}{x+5}$.

Для нахождения предела разделим числитель дроби на знаменатель и выделим целую часть. В итоге получим:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+11}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x+5} \right).$$

Графиком этой функции является гипербола $y = \frac{1}{x}$, смещенная на 5 единиц влево и 2 единицы вверх.

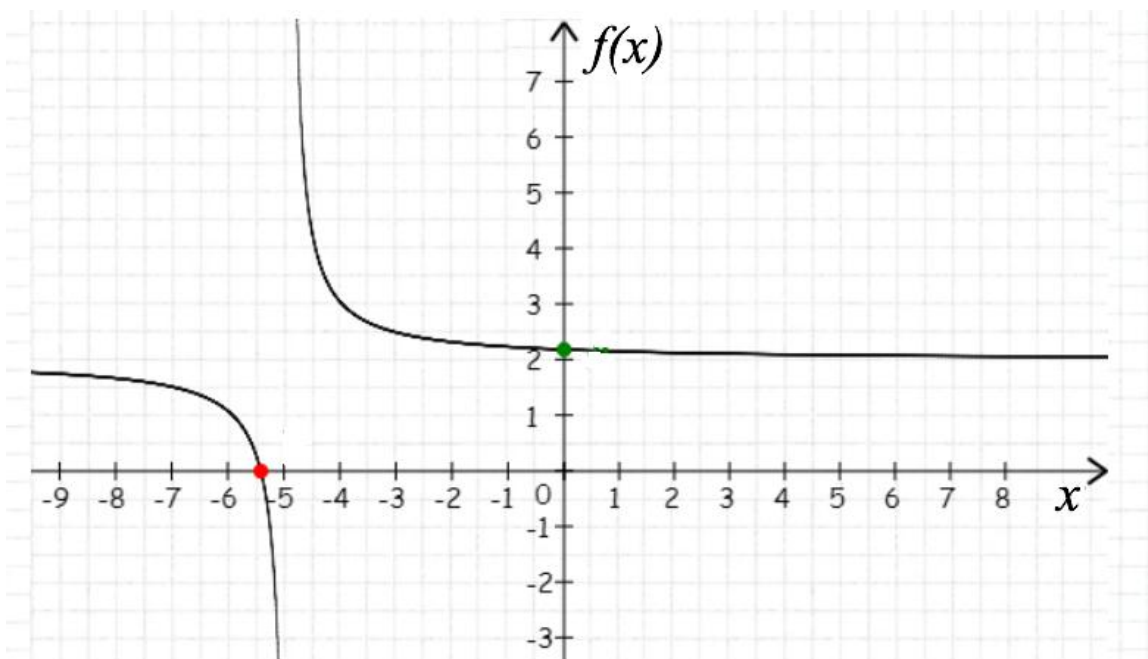


Рис. 2.2. График функции $f(x) = 2 + \frac{1}{x+5}$.

Следовательно, при $x \rightarrow \infty$ значение функции будет заключаться в полосе $(2-\varepsilon; 2+\varepsilon)$ и стремиться к двум. Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+11}{x+5} = 2.$$

2.2.2. Предел функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 .

Определение. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (или в точке x_0), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$

найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε ; $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x , не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Этот предел функции обозначается: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Рассмотрим геометрический смысл предела функции в точке (рис. 2.3).

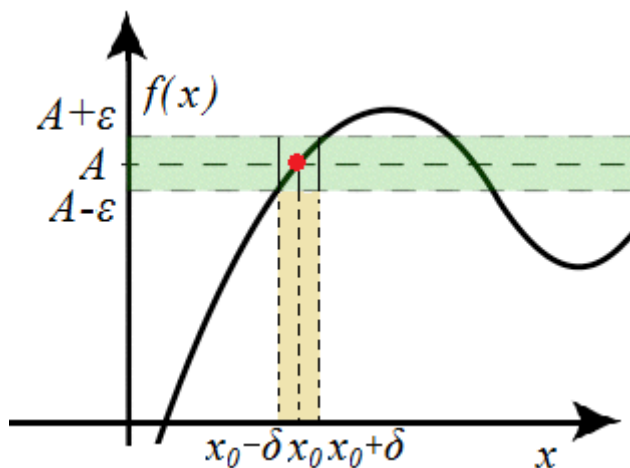


Рис. 2.3. Геометрический смысл предела функции в точке.

Число A есть предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции $f(x)$ будут заключены в полосе $- \varepsilon < y < A + \varepsilon$, какой бы узкой эта полоса ни была.

Замечание 1. Определение предела не требует существования функции в самой точке x_0 , ибо рассматривает значения $x \neq x_0$ в некоторой окрестности точки x_0 .

Другими словами, рассматривая предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, мы предполагаем, что x стремится к x_0 , но не достигает значения x_0 . Поэтому наличие или отсутствие предела при $x \rightarrow x_0$ определяется поведением функции в окрестности точки x_0 , но не связано со значением функции (или его отсутствием) в самой точке x_0 .

Пример. Найдем предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^3}{2x-2} + 4$.

Функция в точке $x=1$ не существует, так как при подстановке в $f(x)$ единицы знаменатель дроби обращается в ноль. В окрестности точки $x=1$ и слева и справа от точки $x=1$ функция существует, а числитель и знаменатель дроби можно сократить на выражение $x-1$. Приведя подобные слагаемые, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^3}{2x-2} + 4 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^2}{2} + 4 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - 2x + 1) + 8}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 2x + 7}{2}.$$

Таким образом, для всех значений $x \neq 1$ функцию $f(x) = \frac{-(x-1)^3}{2x-2} + 4$

можно заменить параболой $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 7}{2}$ (рис. 2.4).

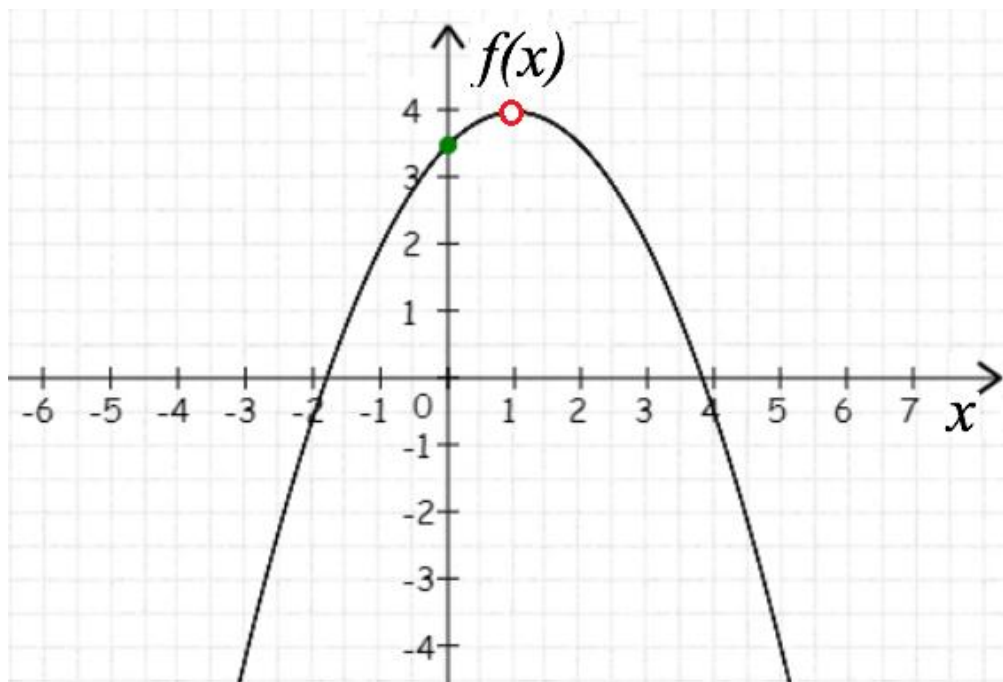


Рис. 2.4. График функции $f(x) = \frac{-(x-1)^3}{2x-2} + 4$.

Подставив в квадратный трехчлен вместо x единицу получим число 4.

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^3}{2x-2} + 4 = 4$

Замечание 2. Если при стремлении x к x_0 переменная x принимает лишь значения, меньшие x_0 , или наоборот, лишь значения, большие x_0 , и при этом

функция $f(x)$ стремится к некоторому числу A , то говорят об односторонних пределах функции $f(x)$ соответственно слева и справа:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ – левосторонний предел;}$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \text{ – правосторонний предел.}$$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1}$.

Областью определения данной функции является объединение промежутков $(-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$. В окрестности точки $x = 1$ функция существует только справа от нее, следовательно, в точке $x = 1$ мы можем рассматривать

только правосторонний предел: $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1}$.

2.3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

2.3.1. Бесконечно малые величины

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \rightarrow x_0$ (или при $x \rightarrow \infty$), если ее предел равен нулю.

Пример. Функция $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ является бесконечно малой величиной

при $x \rightarrow 2$, так как $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0$.

Пример. Функция $f(x) = \frac{4}{x^3}$ является бесконечно малой величиной при

$x \rightarrow \infty$, так как $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} = 0$.

Зная определение предела функции при $x \rightarrow x_0$ и при $x \rightarrow \infty$, можно дать развернутое определение бесконечно малой величины.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε ; $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для

всех x , не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Рассмотрим связь бесконечно малых величин с пределами функций.

Теорема 2.1. Если функция $f(x)$ имеет при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) предел, равный A , то ее можно представить в виде суммы этого числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$), т.е. $f(x) = A + \alpha(x)$.

Верна и обратная теорема.

Теорема 2.2. Если функцию $f(x)$ можно представить, как сумму числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$), то число A есть предел этой функции при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$).

Свойства бесконечно малых величин

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

Пример. Функции $y_1 = \frac{1}{x^2}$ и $y_2 = \frac{1}{x^3}$ являются бесконечно малыми величинами при $x \rightarrow \infty$.

Сумма этих величин $y_1 + y_2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{x+1}{x^3}$ также является бесконечно малой величиной при $x \rightarrow \infty$.

2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую) есть величина бесконечно малая.

Пример. Функцию $y = \frac{1}{x^3} \sin x$ при $x \rightarrow \infty$ можно представить как произведение бесконечно малой величины $\frac{1}{x^2}$ на ограниченную функцию $\sin x$, следовательно, она является бесконечно малой величиной.

3. Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

Пример. Функция $y = \frac{x+5}{x^3(2x+11)}$ также является бесконечно малой

величиной при $x \rightarrow \infty$, так как она представляет собой частное от деления

бесконечно малой величины $\frac{1}{x^3}$ на функцию $\frac{2x+11}{x+5}$, предел которой

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+11}{x+5}$ равен двум.

2.3.2. Бесконечно большие величины

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно большого положительного числа $M > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от M ; $\delta = \delta(M)$), что для всех x , не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x)| > M$.

Запись того, что функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$, следующая:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Рассмотрим связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.

1. Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$), то функция $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$).

Пример. Функция $y = \frac{1}{x^2}$ является бесконечно малой величиной при $x \rightarrow \infty$. Тогда функция $y = x^2$ при $x \rightarrow \infty$ будет бесконечно большой величиной.

Верно и обратное утверждение.

2. Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$), то функция $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$).

Пример. Функция $y = 2^x$ является бесконечно большой величиной при $x \rightarrow \infty$. Тогда функция $y = \frac{1}{2^x}$ при $x \rightarrow \infty$ – величина бесконечно малая.

Свойства бесконечно больших величин

1. Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.

Функция $y = \frac{1}{2x^2 - 18}$ является бесконечно большой величиной при $x \rightarrow 3$.

Тогда функция $y = \frac{5 \sin x}{2x^2 - 18}$ при $x \rightarrow 3$ также является бесконечно большой функцией, как произведение бесконечно большой величины $y = \frac{1}{2x^2 - 18}$ при $x \rightarrow 3$ на функцию $y = 5 \sin x$, предел которой при $x \rightarrow 3$ отличен от нуля.

Пример. Функция $y = 3x^2 + 6x + 8$ является бесконечно большой величиной при $x \rightarrow \infty$. Произведение $y \cdot \left(\frac{1}{x} + 1\right) = (3x^2 + 6x + 8) \cdot \left(\frac{1}{x} + 1\right)$ при $x \rightarrow \infty$ также будет бесконечно большой величиной, так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$.

2. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

Пример. Функция $y = 3x^2 + 6x + 8$ является бесконечно большой величиной при $x \rightarrow \infty$, тогда $y = 3x^2 + 6x + 8 + \cos 2x$ при $x \rightarrow \infty$ является бесконечно большой величиной, так как $\cos 2x$ является ограниченной функцией.

3. Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел, не равный бесконечности, есть величина бесконечно большая.

Пример. Функция $y = 3x^2 + 6x + 8$ является бесконечно большой

величиной при $x \rightarrow \infty$, тогда $y = \frac{3x^2 + 6x + 8}{\frac{x^2 + 3}{2x^2}}$ также бесконечно большая

величина при $x \rightarrow \infty$, так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{2x^2} \right) = \frac{1}{2}$.

2.3.3. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин

Пусть при $x \rightarrow x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми величинами, тогда:

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой

величиной более высокого порядка, чем функция $\beta(x)$.

Пример. Функция $y = \frac{1}{3x^2 + 6x + 1}$ является бесконечно малой величиной

более высокого порядка, чем функция $y = \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow \infty$, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3x^2 + 6x + 1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3x^2 + 6x + 1} = 0.$$

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми

величинами одного порядка.

Пример. Функции $y = \sin 5x$ и $y = \sin x$ при $x \rightarrow 0$ являются бесконечно малыми одного порядка, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin x}{5x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 5.$$

3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются эквивалентными бесконечно

малыми величинами. Эквивалентность бесконечно малых величин $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ обозначается: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Пример. Функции $y = \sin x$ и $y = x$ являются при $x \rightarrow 0$ эквивалентными бесконечно малыми, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

4. Для оценки порядков двух бесконечно малых величин можно придерживаться следующего правила.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ является бесконечно малой величиной n -го порядка относительно $\beta(x)$.

Пример. Функция $y = 1 - \cos x$ является при $x \rightarrow 0$ бесконечно малой второго порядка относительно бесконечно малой величины $y = x$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Аналогичные правила сравнения можно использовать и для бесконечно больших величин.

Пример. Функция $y = x - 2$ является бесконечно большой более низкого порядка, чем $y = 2x^4 - x + 7$ при $x \rightarrow \infty$, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{2x^4 - x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2/x}{2x^3 - 1 + 7/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^3 - 1} = 0.$$

Пример. Функции $y = x^2 + 3$ и $y = 5x^2 - 4x + 5$ при $x \rightarrow \infty$ являются бесконечно большими величинами одного порядка, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{5x^2 - 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 3/x^2}{5 - 4/x + 5/x^2} = \frac{1}{5}.$$

Функция $y = x^3 - 4$ является бесконечно большой третьего порядка по отношению к бесконечно большой $y = 2x$ при $x \rightarrow \infty$, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4}{(2x + 1)^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4}{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4/x^3}{8 + 12/x + 6/x^2 + 1/x^3} = \frac{1}{8}.$$

2.4. Основные теоремы о пределах

2.4.1. Свойства пределов

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, для которых существует предел при $x \rightarrow x_0$ (или при $x \rightarrow \infty$): $\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} \varphi(x) = B$, тогда:

1. Функция не может иметь более одного предела.
2. Предел алгебраической суммы (разности) конечного числа функций равен такой же сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} \varphi(x) = A \pm B.$$

Пример. Если $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$, а $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, то предел суммы функций

$\frac{\sin x}{3x} + \frac{1 - \cos x}{x^2}$ при $x \rightarrow 0$ будет равен

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{3x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, в частности:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} \varphi(x) = A \cdot B.$$

А в случае константы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} f(x) = c \cdot A.$$

Пример. Предел произведения $\frac{\sin x}{3x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}$ при $x \rightarrow 0$ равен:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{3x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} \varphi(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

Пример. Предел частного $\frac{\sin x}{3x} : \frac{1 - \cos x}{x^2}$ при $x \rightarrow 0$ равен:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{3x} : \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

5. Предел показательно-степенной функции равен пределу основания, возведенного в степень предела степени:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = A^B.$$

Пример. Предел показательно-степенной функции $\left(\frac{\sin x}{3x} \right)^{\frac{1 - \cos x}{x^2}}$ при $x \rightarrow 0$ равен:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\sin x}{3x} \right)^{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

6. Если $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, то предел сложной функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A$.

Пример. Пусть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)}{\frac{x}{x^2 - 1}} = \frac{1}{3}.$$

2.4.2. Признаки существования пределов

С помощью признаков существования предела можно выяснить вопроса о существовании предела использовать определения предела, сформулированные выше, не всегда удобно. Проще это.

Теорема 2.3. Если числовая последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Пример. Числа 257, 65, 17, 5, 2, 1,125, ... образуют числовую последовательность с общим членом $a_n = 256 \cdot 0,25^{n-1} + 1$. Очевидно, данная последовательность монотонно убывает и ограничена числом 1. Следовательно, она имеет предел равный единице.

Теорема 2.4. Если в некоторой окрестности точки x_0 (или при $x \rightarrow \infty$) функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел A при $x \rightarrow x_0$ (или при $x \rightarrow \infty$), то функция $f(x)$ имеет тот же предел A .

Пример. Функция $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ заключена между функциями $y = \frac{1}{x}$ и $y = 0$, имеющими при $x \rightarrow \infty$ одинаковый предел, равный нулю, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0.$$

2.4.3. Замечательные пределы

На практике при вычислении пределов применяются следующие пределы, которые принято называть *замечательными*:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{первый замечательный предел});$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \quad (\text{второй замечательный предел})$$

где $e = 2,71828182... .$

Пример. Найти предел функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x}{5x}$.

Для нахождения предела функции числитель и знаменатель дроби умножим на 3 и вынесем множитель $\frac{6}{5}$ за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 2 \sin 3x}{5 \cdot 3x} = \frac{6}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}.$$

Теперь наш предел полностью соответствует первому замечательному пределу, следовательно, все выражение будет равно 1,2:

$$\frac{6}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{6}{5} \cdot 1 = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Пример. Найти предел функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{2x}$.

Для нахождения предела функции числитель и знаменатель дроби умножим на 5 и вынесем множитель $\frac{5}{2}$ за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \operatorname{tg} 5x}{5 \cdot 2x} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{5x}.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} 5x = \frac{\sin 5x}{\cos 5x}$ и $\cos 0 = 1$ получим:

$$\frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{5x} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x \cos 5x} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x \cdot 1} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}.$$

Следовательно, значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{2x}$ будет равно $\frac{5}{2}$.

Пример. Найти предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{6x}$.

Преобразуем функцию, предел которой необходимо найти:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x \cdot 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x}\right]^4 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x}\right]^4.$$

Выражение в скобках является вторым замечательным пределом и равно e , а предел $\lim_{x \rightarrow \infty} 4$ равен четырем. Учитывая это, получим значение предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{6x} = e^4.$$

2.5. Непрерывность функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если она определена в точке x_0 , имеет конечный предел функции при $x \rightarrow x_0$ и этот предел равен значению функции в точке x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция является непрерывной на интервале или сегменте, если она непрерывна в каждой точке исследуемой области.

Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если эта функция в данной точке не является непрерывной.

Если существуют три конечных предела: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, и хотя бы одно из значений пределов не равно другим, то точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода*.

В случае, если левый и правый пределы функции в точке x_0 равны между собой: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, но не равны $f(x)$, то x_0 называется *устранимой точкой разрыва*.

Пример. Для функции $y = \frac{\sin x}{x}$ значение аргумента $x = 0$ является устранимой точкой разрыва, так как значение функции в точке $x_0 = 0$ не определено, а $\lim_{x \rightarrow 0 - 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0 + 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

В случае, если левосторонний и правосторонний пределы не равны между собой, то точка разрыва называется *неустранимой*.

Во всех остальных случаях, когда хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ не определен или равен бесконечности, точки разрыва считаются точками разрыва второго рода.

Пример. Для функции $y = \frac{1}{x - 2}$ значение аргумента $x = 2$ является точкой разрыва второго рода, так как левосторонний предел функции в точке $x = 2$ равен $+\infty$, а правосторонний $-\infty$.

Глава 3. Дифференциальное исчисление

Дифференцирование функций является одной из важнейших задач математики. В различных областях научных исследований, инженерных и производственных расчетах, производная функции используется всюду для изучения неравномерного протекания процессов. Это может быть механическое движение, ток в электрической цепи, химические реакции, радиоактивный распад вещества, факторы социальных, экономических явлений в человеческом обществе.

3.1. Основные понятия

3.1.1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X . Возьмем произвольную точку $x \in X$ из области определения функции и дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция $y = f(x)$ получит приращение:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Определение. Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Обычно производная функции $y = f(x)$ обозначается следующим образом: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Пример. Используя определение производной (3.2) найдем производную функции $f(x) = 3x^2$.

Определим сначала приращение функции (3.1) в произвольной точке x :

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 3x^2 = \\ &= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

По формуле (5.2) найдем производную в точке x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x) = 6x.$$

Мы видим, что по определению (3.2) найти производную даже очень простой функции $f(x) = 3x^2$ оказалось достаточно трудоемкой задачей.

3.1.2. Геометрический смысл производной

Пусть на плоскости Oxy дана непрерывная кривая $y=f(x)$ и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$. Дадим аргументу x_0 приращение Δx (рис. 3.1) и перейдем на кривой $y = f(x)$ от точки $M_0(x_0; f(x_0))$ к точке $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Проведем секущую M_0M_1 .

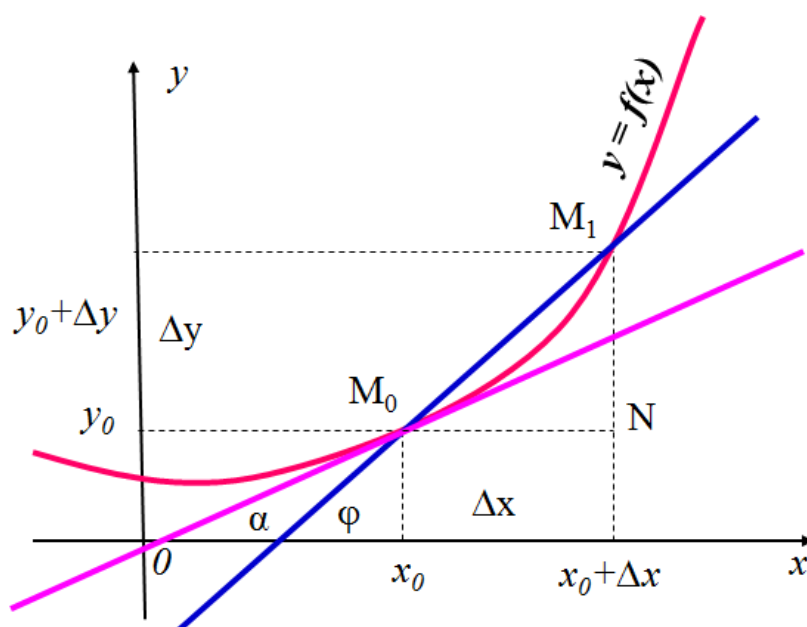


Рис. 3.1. Геометрический смысл производной.

Под касательной к кривой $y=f(x)$ в точке M_0 будем понимать предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0 , т.е. при $\Delta x \rightarrow 0$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 имеет вид:

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Угловым коэффициентом или тангенсом угла φ наклона секущей $k_{M_1M_0}$ может быть найден из $\triangle M_0M_1N$: $k_{M_1M_0} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, тогда переходя к предельному

положению прямой M_0M_1 при $\Delta x \rightarrow 0$, получим тангенс угла касательной к функции $y=f(x)$ в точке x_0 :

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \quad (3.3)$$

Таким образом, производная равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в точке определения производной.

3.2. Дифференцирование функций

Дифференцировать по определению функции, даже очень простые – довольно трудоемкое занятие. Гораздо эффективнее использовать готовые формулы для нахождения производных элементарных функций и правила дифференцирования.

Приведем готовые формулы для дифференцирования основных элементарных функций:

$(x^m)' = mx^{m-1}$	$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Для нахождения производных можно также использовать основные правила дифференцирования:

1. Производная постоянной равна нулю: $C' = 0$.

2. Производная аргумента равна 1: $x' = 1$.

3. Производная алгебраической суммы (разности) конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме (разности) производных этих функций: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Пример. Найдем производную функции $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 6$.

$$(x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 6)' = (x^4)' + (3x^3)' - (5x^2)' + (2x)' - (6)' = 4x^3 + 9x^2 - 10x + 2.$$

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(uv)' = u'v + uv'$.

Пример. Найдем производную произведения функций $\cos x \cdot \log_3 x$.

$$(\cos x \cdot \log_3 x)' = (\cos x)' \cdot \log_3 x + \cos x \cdot (\log_3 x)' = -\sin x \cdot \log_3 x + \cos x \cdot \frac{1}{x \ln 3}.$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(cu)' = cu'$.

Следствие 2. Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные.

Пример. Производная произведения трех функций u , v и w равна:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

5. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Пример. Найти производную частного двух функций $\left(\frac{3x^2 - 5}{x}\right)'$.

$$\left(\frac{3x^2 - 5}{x}\right)' = \frac{(3x^2 - 5)' \cdot x - (3x^2 - 5) \cdot x'}{x^2} = \frac{6x \cdot x - (3x^2 - 5) \cdot 1}{x^2} = \frac{6x^2 - 3x^2 + 5}{x^2} = \frac{3x^2 + 5}{x^2}.$$

3.3. Производные сложной и обратной функций, производные высших порядков

Пусть переменная y есть функция от переменной u ($y=f(u)$), а переменная u в свою очередь есть функция от независимой переменной x , т.е. задана сложная функция $y=f[\varphi(x)]$.

Теорема. Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу и, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x , т.е. $y'=f'(u) \cdot u'(x)$.

Пример. Найдем производную сложной функции $y = (\sqrt{x} + 5)^3$.

$$y' = ((\sqrt{x} + 5)^3)' = 3(\sqrt{x} + 5)^2 \cdot (\sqrt{x} + 5)' = 3(\sqrt{x} + 5)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}\right) = \frac{3(\sqrt{x} + 5)^2}{2\sqrt{x}}.$$

Теорема. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Пример. Для функции $y = \sin x$ обратной является функция $y = \arcsin x$. Используя формулу производной синуса $(\sin x)' = \cos x$ и выше приведенную теорему, найдем производную для арксинуса:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

Поскольку мы имеем дело с обратной функцией $y = \arcsin x$, то подставив это выражение вместо переменной y производная примет вид:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Если производную функции $y' = f'(x)$ еще один раз продифференцировать, то полученная функция будет называться второй производной функции и обозначается y'' или $f''(x)$. Большинство функций можно дифференцировать неоднократно. Если продифференцировать вторую производную функции, то получим третью производную, продолжая дифференцирование найдем четвертую производную, пятую, ..., n -ую:

$$f''(x) = (f'(x))', \quad f'''(x) = (f''(x))', \quad f^{(4)}(x) = (f'''(x))', \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Начиная со второго порядка производные называются производными высших порядков.

Пример. Найти вторую производную $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

$$2x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (8x^3 - 3x^2 + 4x - 5)' = 24x^2 - 6x + 4.$$

Пример. Найти седьмую производную функции $y = \sin 2$.

Последовательно дифференцируя функцию семь раз, получим результат:

$$(\sin 2x)^{(7)} = 2(\cos 2x)^{(6)} = -4(\sin 2x)^{(5)} = -8(\cos 2x)^{(4)} = 16(\sin 2x)^{(3)} = 32(\cos 2x)^{(2)} = -64(\sin 2x)' = -128\sin 2x.$$

3.4. Правило Лопиталя

Часто на практике требуется найти предел функций, аналитическое выражение которых представимо в виде дроби, содержащей в числителе и знаменателе одновременно бесконечно большие или бесконечно малые величины.

В этих случаях предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ часто называют неопределенностью вида

$\left[\frac{0}{0} \right]$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, и неопределенностью вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Для упрощения нахождения предела отношения двух функций можно воспользоваться правилом Лопиталя (Гийом Франсуа Лопиталь 1661 – 1704).

Правила Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших дифференцируемых функций равен пределу отношения их производных.

Таким образом, если имеется неопределенность вида: $\left[\frac{0}{0} \right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$,

тогда:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример. Найдем предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Решая данную задачу, с помощью Правила Лопиталя мы получим доказательство 1-го замечательного предела. При стремлении аргумента к нулю числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно малые величины. Применяя Правило Лопиталя, продифференцируем одновременно и числитель и знаменатель дроби, а после преобразования получим ответ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример. Найдем предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 1}{x^3 + 4x^2}$.

Условия задачи также позволяют применить Правило Лопиталя, поскольку здесь имеется неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Для нахождения пределов можно использовать Правило Лопиталя неоднократно, если после каждого дифференцирования будем получать неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. В нашем случае Правило Лопиталя необходимо применить три раза.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 1}{x^3 + 4x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 1}{3x^2 + 8x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{6x + 8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{6} = 2.$$

Пример. Найдем предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

В этом примере также необходимо использовать Правило Лопиталя три раза, поскольку после каждого дифференцирования числителя и знаменателя дроби получается неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2}.$$

3.5. Интерполирование функций

3.5.1. Понятия аппроксимации и интерполирования

Аппроксимация (от латинского *approximo* – приближение) – это замена заданной функции $f(x)$ новой функцией $\varphi(x)$, близкой к исходной на заданном отрезке $[a, b]$ и обладающей свойствами, позволяющими легко производить над ней те или иные аналитические или вычислительные операции. В качестве аппроксимирующих функций часто берут полиномы различных степеней, а также другие элементарные функции: степенные, показательные, логарифмические и гиперболические.

Аппроксимация функций бывает *непрерывной* и *точечной*.

Если исходная функция задана аналитически, то есть с помощью формул, то говорят, что $\varphi(x)$ *равномерно приближает* функцию $f(x)$ на промежутке $[a, b]$, с точностью $\varepsilon > 0$, если в каждой точке отрезка $[a, b]$ отклонение аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ по абсолютной величине меньше заданной величины ε :

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Такой вид аппроксимации называется *непрерывным* или *интегральным*. Практическое построение аппроксимирующих функций с равномерным распределением представляет большие трудности, поэтому непрерывная аппроксимация проводится, как правило, только в теоретических исследованиях.

Если исходная функция задана таблично, на конечном множестве точек $\{x_n\}$, то такая аппроксимация называется *точечной*. Точечную аппроксимацию используют для обработки массивов экспериментальных или статистических данных.

Точечная аппроксимация может представлять построение многочленов $P_n(x)$ степени n , которые во всех точках множества $\{x_n\}$ принимают значения, равные значениям функции $f(x)$:

$$P_n(x_i) = f(x_i).$$

Кроме того, к точечной аппроксимации относят среднеквадратичное приближение функций. В этом случае аппроксимирующая функция $\varphi(x)$ строится таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений значений функции $f(x_i)$ от значений приближений $\varphi(x_i)$ была минимальной:

$$\sum_{i=1}^m |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2 \rightarrow \min.$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ определены $n+1$ точки $x_1 = a, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1} = b$ из области определения функции $f(x)$. Назовем эти точки узлами интерполирования. В каждом из этих узлов x_i известны значения функции $f(x_i)$.

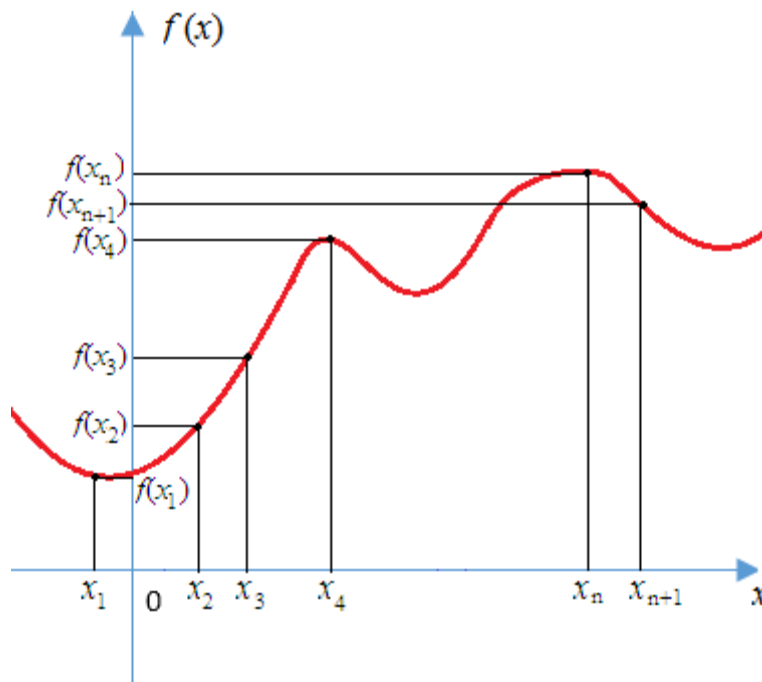


Рис. 3.2. Интерполирование функции $f(x)$.

Задача интерполирования заключается в построении полинома $P_n(x)$ степени n , принимающего в узлах интерполирования x_i те же значения, что и $f(x_i)$ (4.2.). Геометрически это означает, что нужно найти коэффициенты полинома $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, проходящего через множество заданных точек $\{x_{n+1}\}$ (рис. 3.2).

Внутри промежутков $[x_i, x_{i+1}]$, построенный полином $P_n(x)$ будет приближенно описывать функцию $f(x)$. Поэтому полученную интерполяционную формулу обычно используют для нахождения приближенного значения функции $f(x)$ в точках, отличных от узлов интерполирования.

3.5.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Одним из способов записи интерполяционного полинома является форма Лагранжа. Предположим, что для $k=1, 2, \dots, n+1$ функции $\Phi_k(x)$ являются многочленами степени n и обладают следующим свойством:

$$\Phi_k(x_i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}.$$

Тогда, используя функции $\Phi_k(x)$ и значения функции $y_k = f(x_k)$ можно

получить полином
$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \Phi_k(x).$$

Лагранж предложил способ построения функций $\Phi_k(x)$.

Рассмотрим выражение:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n+1}).$$

Обратим внимание на то, что в представленном произведении множитель $(x - x_k)$ отсутствует. Полученное выражение является полиномом $P_n(x)$ степени n , который при $k=i$ обращается в ноль для всех i не равных k , а в точке x_k произведение принимает значение:

$$(x_k - x_1) \cdot (x_k - x_2) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k - x_n) \cdot (x_k - x_{n+1}).$$

Разделив многочлен $P_n(x)$ на значение вышеприведенного выражения, получим формулу для нахождения полиномов $\Phi_n(x)$, удовлетворяющих условиям $\Phi_k(x_i)$:

$$\Phi_k(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1) \cdot (x_k - x_2) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k - x_n) \cdot (x_k - x_{n+1})}$$

В краткой форме эту формулу для $\Phi_k(x)$ можно записать в виде:

$$\Phi_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Сложив все $n+1$ многочленов $\Phi_k(x)$, получим интерполяционный полином в форме Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Пример. Рассчитаем коэффициенты интерполяционного полинома $L_n(x)$ в форме Лагранжа (4.10) для функции $f(x)$, имеющей следующие значения в заданных узлах интерполирования:

Таблица 3.1.

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
1	-1	-7
2	0	-12
3	2	-22
4	3	-39
5	5	53

По формуле (4.8) построим функции $\Phi_k(x)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \cdot (x - x_5)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \cdot (x_1 - x_5)} = \\ &= \frac{x(x - 2)(x - 3)(x - 5)}{72} = \frac{x^4 - 10x^3 + 31x^2 - 30x}{72}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \cdot (x - x_5)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \cdot (x_2 - x_5)} = \\ &= \frac{(x + 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5)}{-30} = \frac{x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x - 30}{-30}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \cdot (x - x_5)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \cdot (x_3 - x_5)} = \\ &= \frac{(x + 1)x(x - 3)(x - 5)}{18} = \frac{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 15x}{18}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_4(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \cdot (x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3) \cdot (x_4-x_5)} = \\ &= \frac{(x+1)x(x-2)(x-5)}{-24} = \frac{x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x}{-24};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_5(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \cdot (x-x_4)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3) \cdot (x_5-x_4)} = \\ &= \frac{(x+1)x(x-2)(x-3)}{180} = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x}{180}.\end{aligned}$$

Взяв полученные полиномы $\Phi_k(x)$ и значения функции y_k , получим интерполяционный полином Лагранжа.

$$\begin{aligned}L_4(x) &= (-7) \cdot \frac{x^4 - 10x^3 + 31x^2 - 30x}{72} + (-12) \cdot \frac{x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x - 30}{-30} + \\ &+ (-22) \cdot \frac{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 15x}{18} + (-39) \cdot \frac{x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x}{-24} + \\ &+ 53 \cdot \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x}{180} = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 12.\end{aligned}$$

Таким образом, для функции $f(x)$, заданной таблично с помощью пяти узлов, мы получили интерполяционный полином Лагранжа $L_4(x)$ четвертой степени:

$$L_4(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 12.$$

Глава 4. Исследование функций

При помощи дифференциального исчисления, во многих случаях можно получить представление о поведении графика функции, не заполняя подробных таблиц значений функции, которые в большинстве своем неудовлетворительно отражают важнейшие качественные свойства функции, такие, как точки разрыва, экстремальные точки, поведение функции в значительном удалении от начала координат.

Ниже приведена общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функции на четность, нечетность, периодичность.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции.
4. Построить асимптоты функции.
5. Определить экстремальные точки. Интервалы возрастания (убывания) функции.
6. Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции.
7. Контрольные точки. Схематичное изображение функции.

4.1. Локализация корней

Локализация корней уравнения $f(x) = 0$ производится графическим или аналитическим способами.

4.1.1 Графическая локализация корней

Если несложно построить эскиз графика функции, на котором можно с уверенностью определить сегменты на каждом из которых функция $f(x)$ принимает только одно нулевое значение, то следует воспользоваться графическим способом. В этом случае размер сегментов существенного значения не имеет. Если по графику мы видим, что на отрезке $[-100; 100]$ функция пересекает ось абсцисс только один раз, и неважно в каком месте, следовательно, на выбранном отрезке локализован 1 корень. Однако, если мы выберем меньший сегмент, например, $[-1; 2]$, то впоследствии при уточнении корня, будет потрачено меньше времени и вычислительных ресурсов на получение результата с заданной точностью.

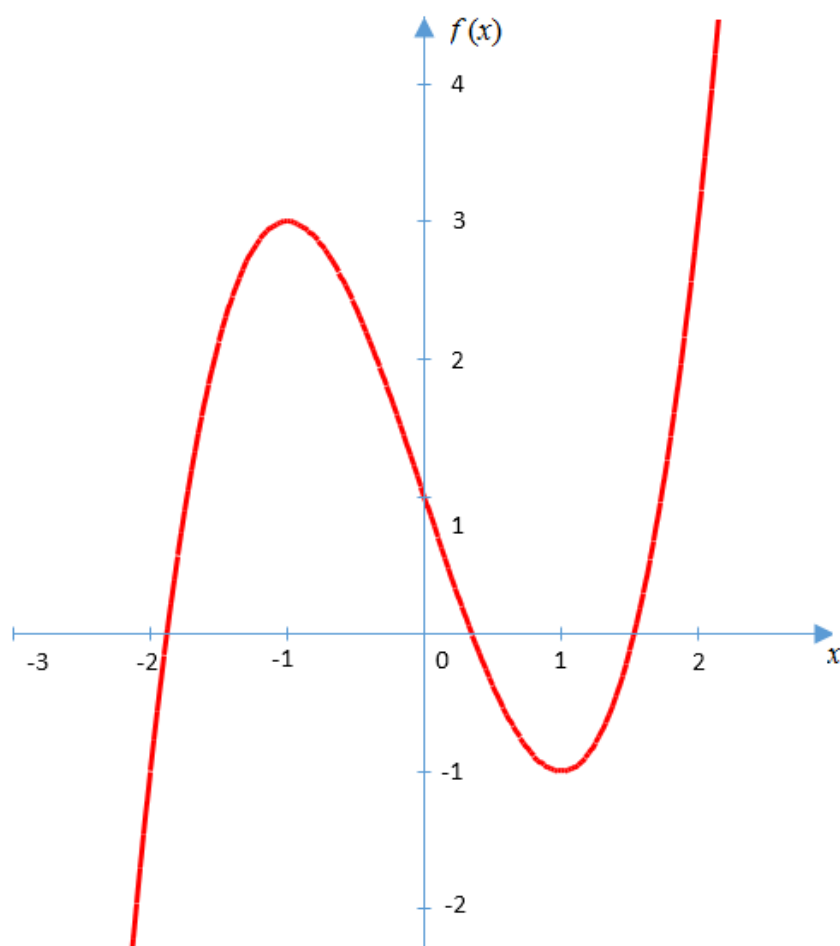


Рис. 4.1. График функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Пример. Локализуем корни уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$. Построим эскиз графика функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Зная, что функция представляет собой кубическую параболу и может иметь от одного до 3-х различных корней, достаточно найти ее значения в некоторых точках, а затем дорисовать кривую, определяющую график функции (рис. 4.1).

Из графика видно, что первый корень находится на промежутке $[-2; -1]$, второй – на отрезке $[0; 1]$, а третий – на отрезке $[1; 2]$. Такая точность отделения корней вполне удовлетворяет первому этапу локализации корней.

Но графического способа есть ряд недостатков. Во-первых, не всегда без предварительного анализа можно построить график функции. Во-вторых, если корни существенно удалены друг от друга, то график будет довольно громоздким. И, наконец, если корни достаточно близки друг к другу сложно выделить сегменты локализации.

4.1.2. Аналитическая локализация корней

Наиболее универсален аналитический способ. Исследуя функции с помощью первой производной найдем все локальные максимумы и минимумы функции $f(x)$, а затем рассчитаем значения функции в точках полученных экстремумов.

Если знаки функции $f(a)$ и $f(b)$ в соседних экстремальных точках различны, а функция непрерывна тогда она будет непрерывно возрастать или убывать на данном отрезке $[a, b]$, и, следовательно, иметь на этом отрезке ровно один корень.

Пример. Локализовать корни уравнения $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$.

Найдем производную функции $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$. Получим:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 3.$$

Определим корни полученной производной $f'(x)$. Для этого решим уравнение:

$$4x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 3 = 0.$$

Вынесем множитель $x^2 - 1$ из выражений $4x^3 - 3x^2$ и $4x^2 + 3$:

$$4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 0.$$

Сгруппируем полученное выражение:

$$(x^2 - 1)(4x - 3) = 0$$

В результате получим три различных корня производной $f'(x)$: $x_1 = -1$;

$x_2 = \frac{3}{4}$; $x_3 = 1$. Эти значения являются экстремальными точками для функции $f(x)$.

Составим таблицу знаков функции $f(x)$:

X	$-\infty$	-1	$0,75$	1	$+\infty$
$Sign f(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Исследуемая функция $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$ непрерывна на всей области действительных чисел, а из таблицы видно, что знаки функции $f(x)$ в соседних экстремальных точках различны только в двух случаях.

Следовательно, уравнение имеет равно два действительных корня, находящихся на промежутках: $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$.

Уменьшим промежутки, в которых находятся корни. Это можно сделать, подобрав значения таким образом, чтобы знаки функции $f(x)$ на границах интервалов были различны:

X	-2	-1	1	2
$Sign f(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Следовательно первый корень $x_1 \in [-2; -1]$, а второй корень $x_2 \in [1; 2]$.

4.2. Асимптоты функции

Для исследования функций часто бывает нужно знать, как ведет себя функция в окрестностях точек разрыва второго рода или при бесконечном удалении аргумента от начала координат. Решение этой проблемы можно получить исследуя асимптоты функции.

Определение. Прямая называется *асимптотой* функции $y=f(x)$, если расстояние от точки графика функции к этой прямой стремится к нулю, при неограниченном удалении указанной точки от начала координат.

Пример. Для гиперболы асимптотами являются оси абсцисс и ординат.

Пример. Для дробно-рациональной функции $y = \frac{x^3 + 6x + 16}{2x^2 + 2}$ асимптотой является наклонная прямая $y = 0,5x + 3$ (рис 4.2).

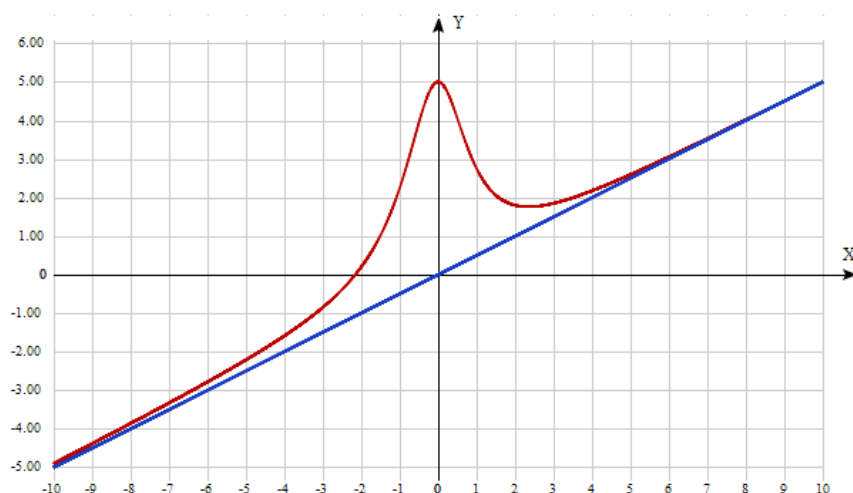


Рис. 4.2. График функции $y = \frac{x^3 + 6x + 16}{2x^2 + 2}$.

График функции может бесконечно приближаться к своей асимптоте справа, слева, сверху, снизу, никогда ее не пересекая при бесконечном удалении от начала координат (рис. 4.2). В некоторых случаях график функции может бесконечное множество раз пересекать свою асимптоту (рис. 4.3).

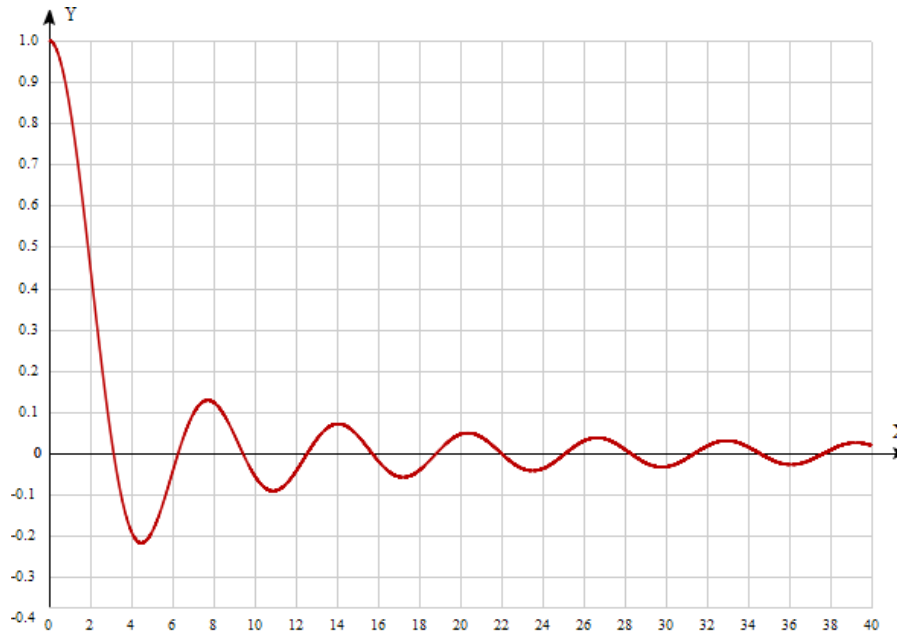


Рис. 4.3. График функции $y = \frac{\sin x}{x}$.

4.2.1. Вертикальные асимптоты

Асимптоты подразделяются на вертикальные и наклонные.

Прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой* функции $y=f(x)$, если существует и равен бесконечности хотя бы один из односторонних пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

Вертикальные асимптоты часто встречаются у *дробно-рациональных функций* в точках, где знаменатель равен нулю, а числитель не равен нулю (в точках разрыва второго рода). Вертикальных асимптот может быть любое количество.

Прямая не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке a . Поэтому вертикальные асимптоты следует искать только в *точках разрыва функции второго рода*.

Пример. Найдем вертикальную асимптоту функции $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Функция имеет разрыв второго рода в точке $x = -1$. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{(-1-0)+1} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{(-1+0)+1} = -\infty.$$

Следовательно, прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

4.2.2. Наклонные асимптоты

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* функции $y = f(x)$, если выполняется хотя бы одно из равенств:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = b \text{ или } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Если $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = b$, то прямая $y = kx + b$ является асимптотой при стремлении аргумента к $-\infty$, а если $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$, то асимптотой при стремлении аргумента к $+\infty$.

Если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то не существует и наклонной асимптоты функции на $-\infty$ или на $+\infty$.

Коэффициенты наклонных асимптоты находятся отдельно на $-\infty$ и на $+\infty$.

Для асимптоты функции при стремлении аргумента к $-\infty$

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1 x];$$

Для асимптоты при стремлении аргумента к $+\infty$.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2 x].$$

Пример. Найти наклонную асимптоту функции $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$.

Найдем коэффициенты наклонной асимптоты при $x \rightarrow -\infty$. Для нахождения пределов воспользуемся правилом Лопиталя:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-1)} = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_1 x] = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x-1)^2} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2(x-1)} = 0.$$

Таким образом, наклонная асимптота функции при $x \rightarrow -\infty$ существует и ее уравнение: $y = 0x + 0$ или $y = 0$.

Аналогично рассчитаем коэффициенты наклонной асимптоты функции при $x \rightarrow +\infty$.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)} = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1 x] = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x-1)^2} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(x-1)} = 0.$$

Следовательно, наклонная асимптота функции при $x \rightarrow +\infty$ также существует и ее уравнение совпадает с уравнение предыдущей асимптоты.

4.3. Монотонность функции

Понятия монотонности, возрастания, убывания и ограниченности функции мы рассмотрели в пункте 1.2. Основные свойства функций. Однако точно определить точное поведение функции на интервалах нам поможет только исследование функции по первой и второй производным. Рассмотрим необходимые и достаточные условия монотонности функции.

Теорема (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для любых $x \in (a; b)$.

Пример. Функция $y = x^2 - 6x - 5$ монотонно возрастает на интервале $(-\infty; 3)$, следовательно, на интервале $(-\infty; 3)$ ее производная $y' = 2x - 6$ будет принимать только положительные значения.

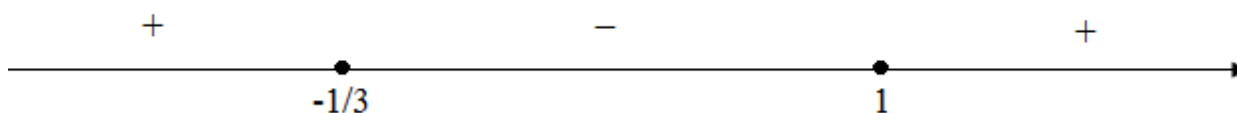
Теорема (достаточные условия). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любых аргументов из этого интервала, то функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$.

Пример. Для дифференцируемой функции $y = x^3 - x^2 - x + 4$ определим интервалы возрастания и убывания.

Найдем производную функции: $y' = (x^3 - x^2 - x + 4)' = 3x^2 - 2x - 1$.

Приравняем полученное выражение производной к нулю и решим уравнение: $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = -1/3$ и $x_2 = 1$. Пометим значения корней на числовой прямой и отметим знаки производной функции.



На интервалах $(-\infty; -1/3)$ и $(1; +\infty)$ производная функции $y' = 3x^2 - 2x - 1$ принимает положительные значения, следовательно, на этих интервалах функция $y = x^3 - x^2 - x + 4$ возрастает. На интервале $(-1/3; 1)$ производная принимает отрицательные значения, значит, на этом интервале функция убывает.

Точка x_1 называется точкой *максимума функции* $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство: $f(x) \leq f(x_1)$.

Точка x_2 называется точкой *минимума функции* $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_2 выполняется неравенство: $f(x) \geq f(x_2)$.

Значения функции в точках x_1 и x_2 называют соответственно *максимумом* и *минимумом* функции. Максимум и минимум функции называются *экстремумами функции*.

Теорема (Необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума, т.е. производная равна нулю или не существует, называются *критическими* (или *стационарными*).

Теорема (Первое достаточное условие экстремума). Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции $y = f(x)$, а если с минуса на плюс, то точка минимума.

Пример. Функция $y = x^3 - x^2 - x + 4$ имеет критические точки $x_1 = -1/3$ и $x_2 = 1$, поскольку значение производной функции $y' = 3x^2 - 2x - 1$ в этих точках равно нулю.

Точка $x_1 = -1/3$ является точкой максимума, так как при переходе через точку x_1 производная функции меняет свой знак с плюса на минус. Значение функции $f(x_1) \approx 3,5926$ является максимумом функции.

Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как при переходе через точку x_2 производная функции меняет свой знак с минуса на плюс. Значение функции $f(x_2) = 3$ является минимумом функции.

Теорема (Второе достаточное условие экстремума). Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0 , а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то x_0 есть точка минимума функции $f'(x)$; если $f''(x_0)$ отрицательна, то x_0 — точка максимума.

Пример. Продифференцируем функцию $y = x^3 - x^2 - x + 4$ второй раз:

$$y'' = (y')' = (3x^2 - 2x - 1)' = 6x - 2.$$

В точке $x_1 = -1/3$ первая производная равна нулю, а вторая производная $f''(-1/3) = 6 \cdot (-1/3) - 2 = -4$ меньше нуля, следовательно, $x_1 = -1/3$ является точкой максимума.

В точке $x_2 = 1$ первая производная равна нулю, а вторая производная $f''(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4$ больше нуля, следовательно, $x_2 = 1$ является точкой минимума.

4.4. Выпуклость и вогнутость функции

График дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *вогнутым* (*выпуклым вниз*) на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале.

График дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *выпуклым* (*выпуклым вверх*) на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции $y=f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба*.

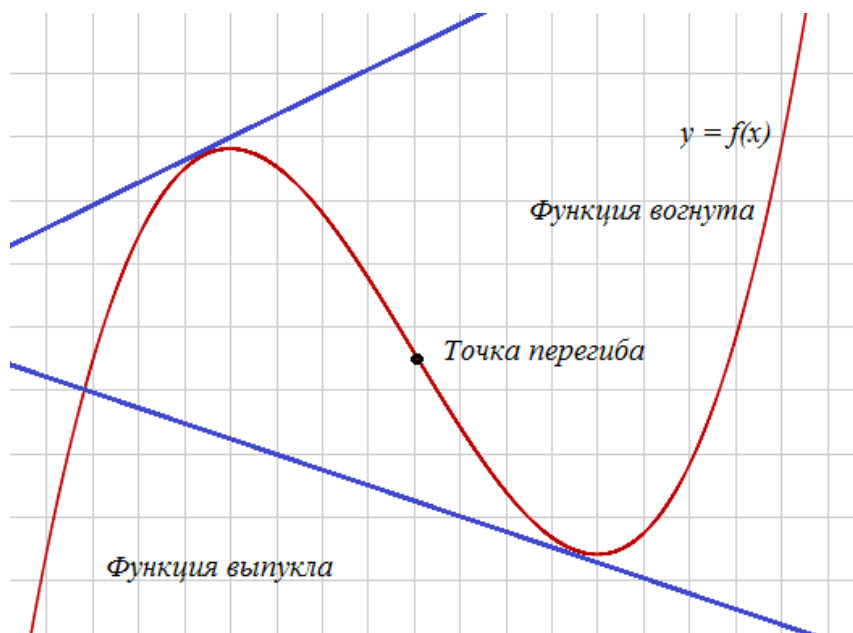


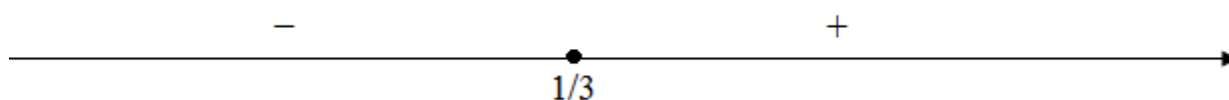
Рис. 4.4. Выпуклость и вогнутость функции.

Интервалы выпуклости, вогнутости функции находят с помощью следующих теорем.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$ имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x)<0$, то график функции в этом интервале выпуклый. Если же $f''(x)>0$, для любых $x \in (a; b)$ – график вогнутый.

Пример. Найдём интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x^3 - x^2 - x + 4$.

Приравняем вторую производную исследуемой функции к нулю и решим уравнение: $6x - 2 = 0$. Очевидно, единственным решением уравнения будет значение $x_0 = 1/3$. На числовой прямой рассмотрим значения второй производной слева и справа от решения.



Слева от $x_0 = 1/3$ вторая производная функции принимает отрицательные значения, следовательно, на интервале $(-\infty; 1/3)$ график функции выпуклый.

Справа от $x_0 = 1/3$ вторая производная функции принимает положительные значения, следовательно, на интервале $(1/3; +\infty)$ график функции вогнутый.

Теорема (необходимое условие перегиба). Вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю.

Теорема (достаточное условие перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку x_0 меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба ее графика.

Пример. Определим точку перегиба функции $y = x^3 - x^2 - x + 4$.

Мы уже выяснили, что в точке $x_0 = 1/3$ вторая производная равна нулю. Кроме того, при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак с минуса на плюс, тогда согласно приведенному выше достаточному условию точка $x_0 = 1/3$ является точкой перегиба.

4.5. Пример построения графика функции по общей схеме

Проведем исследование по общей схеме функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построим ее график.

1) Найдем область определения функции.

Так как знаменатель дроби не может быть равен нулю, то областью определения функции является вся числовая прямая, кроме точек $x = -1$ и $x = 1$. Таким образом, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Проверим нашу функцию на четность, нечетность, и периодичность.

Подставим в функцию вместо аргумента выражение $-x$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Так как $f(-x) = -f(x)$, то функция является нечетной. В силу

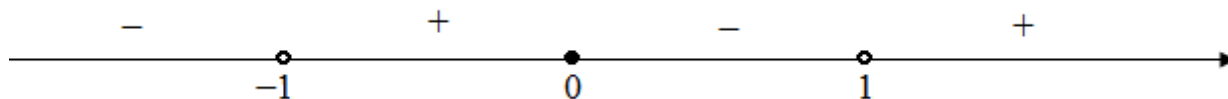
нечетности функция является симметричной относительно начала координат и четной быть не может. Кроме того, функция не содержит никаких тригонометрических выражений, следовательно, периодичности тоже не будет.

4) Найдем интервалы знакопостоянства функции.

Определим нули функции, решив уравнение $f(x) = 0$.

Уравнение $\frac{x^3}{x^2 - 1}$ имеет единственное решение $x = 0$.

На числовой прямой отметим три точки: точки разрыва функции и точку, в которой $x = 0$ функция принимает нулевое значение. Вычислив значение функции в произвольных точках, отметим символами «+» и «-» знаки функции на выделенных интервалах.



Таким образом, на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ функция принимает отрицательные значения, а на интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ функция знакоположительна.

5) Рассчитаем асимптоты функции.

Для определения параметров вертикальных асимптот найдем правосторонние и левосторонние пределы в каждой точке разрыва функции.

Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой исследуемой функции поскольку $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$.

Аналогично, прямая $x = 1$ также является асимптотой исследуемой функции, так как $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$.

Найдем наклонные асимптоты нашей функции.

Рассмотрим поведение функции при стремлении аргумента к $-\infty$. Для этого определим коэффициенты асимптоты $y = k_1x + b_1$:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

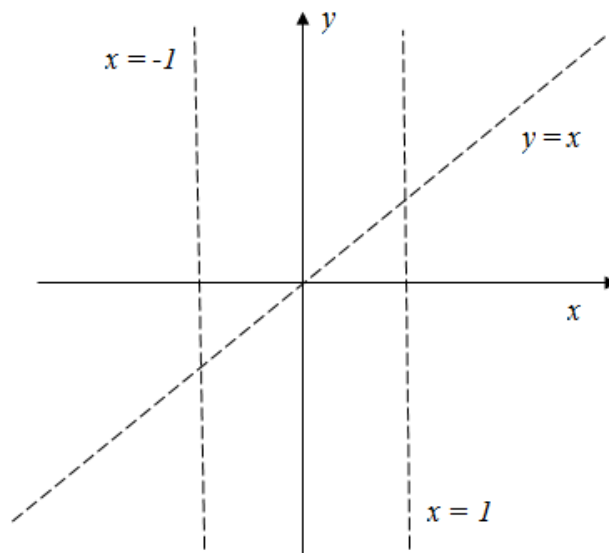
Таким образом, мы получили асимптоту: $y = 1 \cdot x + 0$ или $y = x$.

Определим коэффициенты асимптоты $y = k_2 x + b_2$ при $x \rightarrow +\infty$:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Мы снова получили горизонтальную асимптоту $y = x$. В силу симметричности функции относительно начала координат обе асимптоты совпадают. Нанесем асимптоты на систему координат (рис. 4.5).



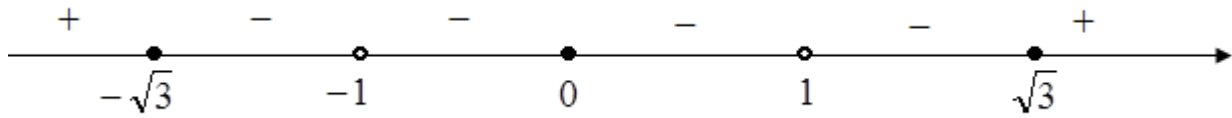
4.5. Асимптоты функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

б) Определим интервалы возрастания и убывания функции, экстремальные значения. Сначала продифференцируем нашу функцию:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^3)'(x^2 - 1) - x^3(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^3(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{x^4 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Приравняем полученную производную к нулю: $\frac{x^2(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2} = 0$.

Решая уравнение, получим три корня: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$. Нанесем эти значения и точки разрыва функции на числовую ось и укажем знаки производной на полученных промежутках.



На интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ первая производная функция принимает положительные значения, следовательно на этих интервалах функция возрастает. На интервалах $(-\sqrt{3}; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ и $(1; \sqrt{3})$ первая производная функция принимает отрицательные значения, значит здесь функция убывает.

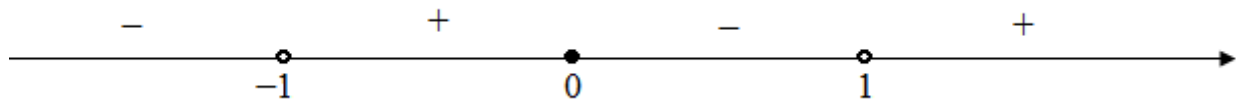
Рассмотрим поведение функции в критических точках. В точке $x_1 = -\sqrt{3}$ функция достигает своего локального максимума $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2,5981$. В точке $x_2 = 0$ экстремума нет, поскольку слева и справа от нее производная принимает отрицательные значения. В точке $x_3 = \sqrt{3}$ функция имеет локальный минимум: $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,5981$.

7) Найдем интервалы выпуклости, вогнутости функции и точки перегиба. Продифференцируем нашу функцию второй раз:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \right)' = \left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \right)' = \frac{(x^4-3x^2)'(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)[(x^2-1)^2]'}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)[(4x^3-6x)(x^2-1) - 4x(x^4-3x^2)]}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{4x^5-6x^3-4x^3+6x-4x^5+12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}. \end{aligned}$$

Решим уравнение $\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0$ и получим единственный корень $x = 0$.

Нанесем значение корня уравнения и точки разрыва функции на числовую ось и укажем знаки второй производной на полученных промежутках.



На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ вторая производная функции принимает отрицательные значения, следовательно, является выпуклой, а интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ вторая производная знакоположительна, а значит, вогнута.

В точке $x = 0$ вогнутость функции меняется на выпуклость, таким образом, точка $x = 0$ является точкой перегиба.

На несем на график с асимптотами точки минимума и максимума и, учитывая интервалы знакопостоянства функции, ее возрастание и убывание, промежутки вогнутости и выпуклости построим эскиз графика.

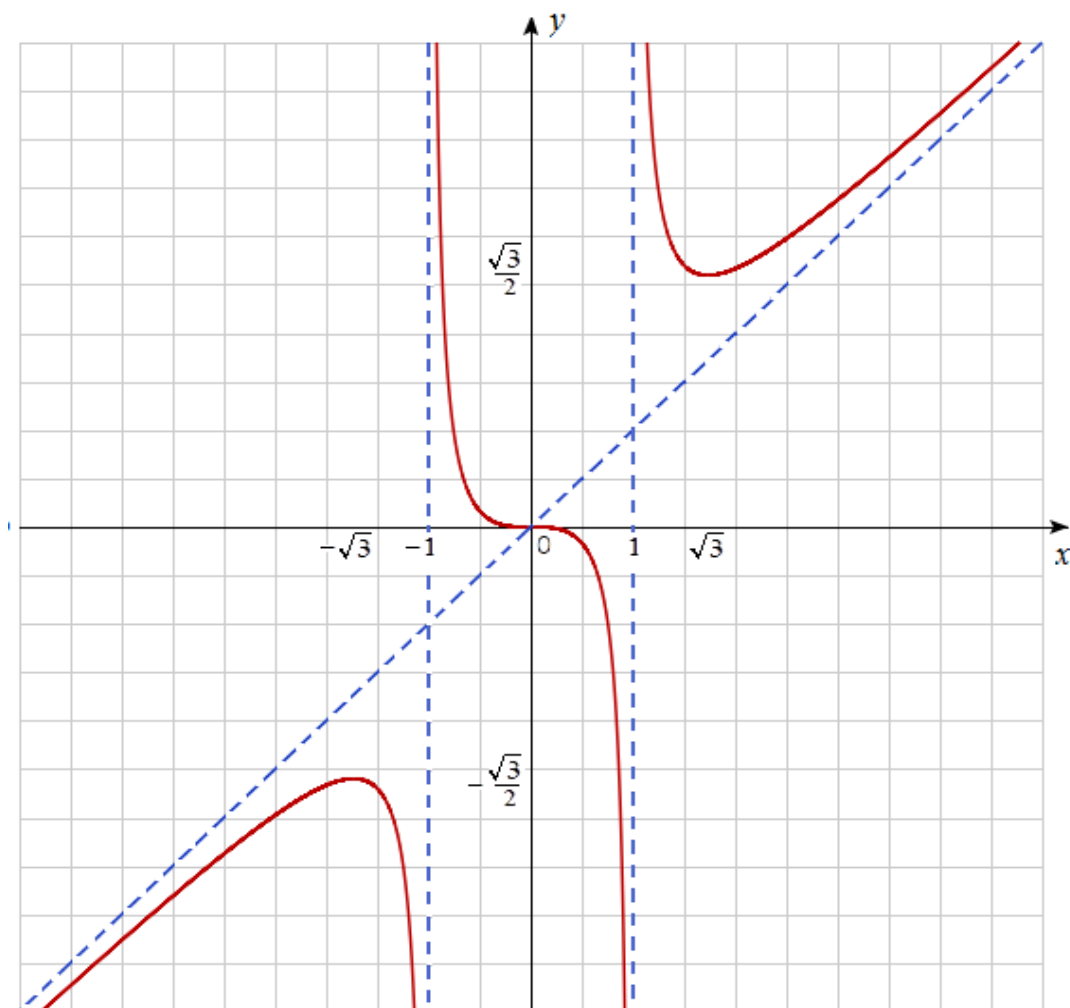


Рис. 4.6. Эскиз графика функции.

Глава 5. Функции нескольких переменных

Функции одной независимой переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Многим явлениям, в том числе физическим, экономическим и социальным присуща многофакторная зависимость. Исследование таких зависимостей потребовало совершенствования математического аппарата, в частности введения понятия функции нескольких переменных.

5.1. Понятие функции нескольких переменных

Определение. Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z . Тогда говорят, что задана функция нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются независимыми переменными (аргументами); z – зависимой переменной (функцией), а символ f означает закон соответствия.

Множество X называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется областью изменения этой функции, обозначается $E(f)$.

Исследование функций нескольких переменных является достаточно сложная и трудоемкая задача. Далее в этой главе для простоты будем рассматривать функции двух переменных $z = f(x, y)$. Все определения, свойства и принципы решения задач с поправками можно будет перенести и на случай функций трех и более переменных.

Пример. Найдем область определения функции: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Так как подкоренное выражение должно быть больше или равно нулю, то область определения задается условием: $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$. Таким образом, $D(f)$ представляет собой единичный круг с центром в начале координат (рис 5.1).

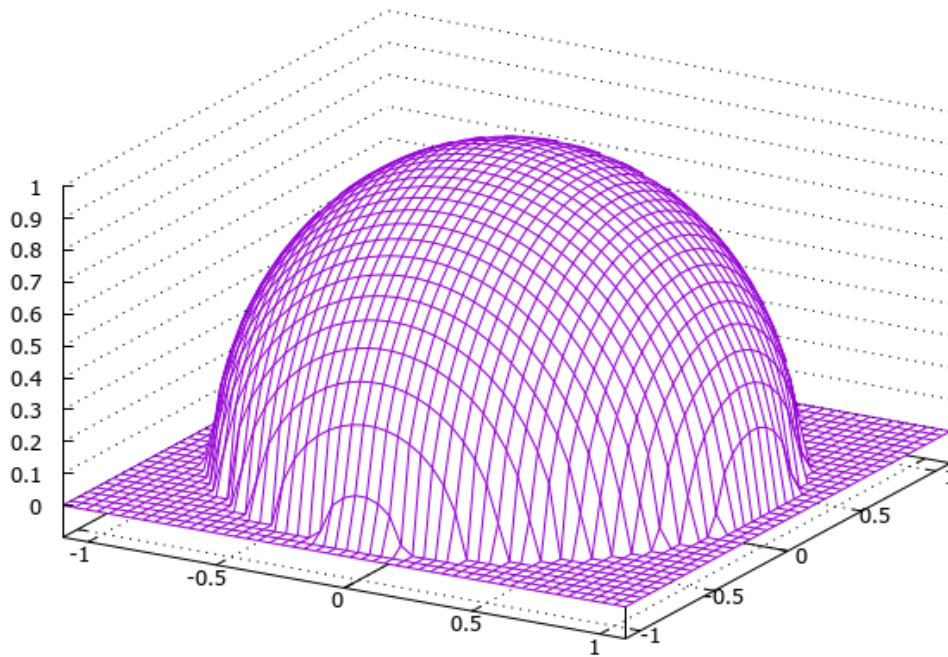


Рис. 5.1. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Большая часть, определенных для функции одной переменной, может быть перенесена на случай двух переменных.

Определение. Число A называется пределом функции $z=f(x,y)$ при $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$ (или в точке (x_0, y_0)), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε ; $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех точек (x, y) , отстоящих от точки (x_0, y_0) на расстояние ρ , меньшее, чем δ (т.е. при $0 < \rho < \delta$), выполняется неравенство: $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Обозначается предел: $A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.

Пример. Найдем предел функции: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Для нахождения предела сделаем замену: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а затем вычислим получившийся предел одной переменной, используя Правило Лопиталя:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - z^2)}{z} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\ln(1 - z^2))'}{z'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 - z^2}(-2z)}{1} = 1.$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0) , если $z = f(x, y)$ определена в точке (x_0, y_0) , имеет конечный предел $A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ и этот предел равен значению функции в точке (x_0, y_0) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области. Точки, в которых не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции, называются точками разрыва этой функции.

Пример. Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна в каждой точке пространства R^2 .

Пример. Функция $z = \frac{2x+1}{y-3}$ претерпевает разрыв во всех точках, лежащих на прямой $y-3=0$, поскольку в этой области функция не определена.

График функции, непрерывной в некоторой области, представляет собой сплошную, без разрывов и расслоений, поверхность (рис. 5.2).

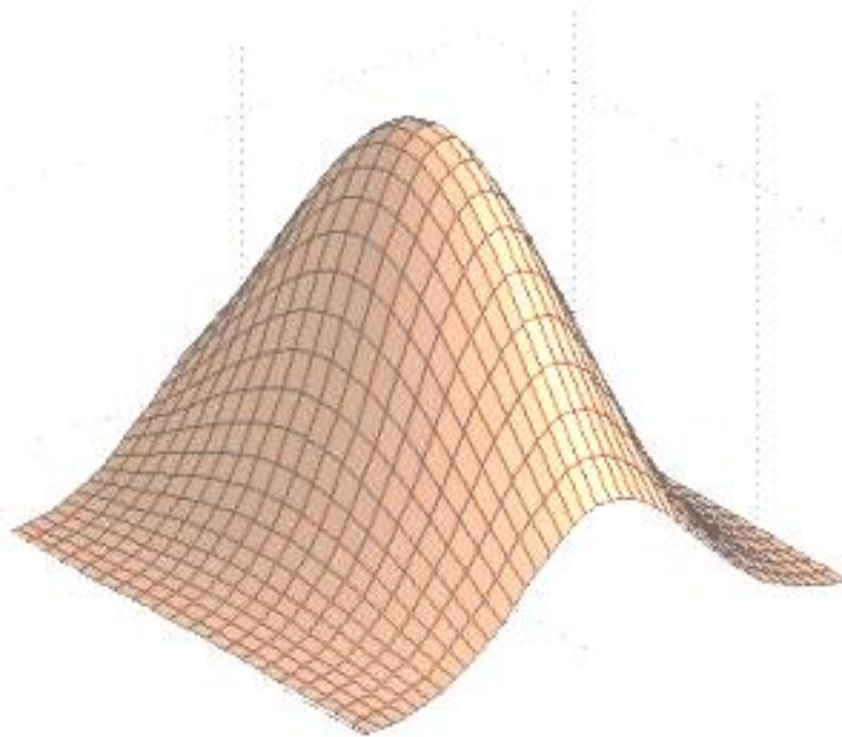


Рис. 5.2. График функции, непрерывной в прямоугольной области.

5.2. Производные функции нескольких переменных

5.2.1 Частные производные первого порядка

Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Так как аргументы функции x и y независимы, то можно только одну из них изменить, а у другой оставить ее значение неизменным. Дадим аргументу x приращение Δx , не меняя значение переменной y . Тогда функция z получит приращение, которое назовем *частным приращением z по x* :

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Таким же образом можно получить и частное приращение z по y :

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если дать приращение обоим аргументам функции z одновременно, то получим полное приращение Δz функции z :

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$, то он называется частной производной функции $z = f(x; y)$ в точке $(x; y)$ по переменной x .

Аналогично, предел: $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$, называется частной производной функции $z = f(x; y)$ в точке $(x; y)$ по переменной y .

Определение. Частной производной функции нескольких переменных по одной из переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Частные производные могут обозначаться следующим образом:

$$z'_x, \quad z'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad f'_x(x, y), \quad f'_y(x, y).$$

Частные производные функций по какому-либо аргументу находят по формулам и правилам, использовавшимся нами для дифференцирования

функции одной переменной, причем все остальные переменные считаются постоянными величинами.

Пример. Найдем частные производные функции $z = x^2 - 2xy^2 + y^3$.

Для нахождения частной переменной по аргументу x , представим, что переменная y является константой:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - 2xy^2 + y^3)'_x = 2x - 2y^2.$$

Таким же образом, считая x постоянной величиной, найдем частную производную по y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - 2xy^2 + y^3)'_y = -4xy + 3y^2.$$

5.2.2 Частные производные высших порядков

Если продифференцировать по переменным x и y частные производные z'_x и z'_y , то получим частные производные второго порядка.

Определяются они следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x; y); & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x; y); \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x; y); & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x; y). \end{aligned}$$

Если продифференцировать частные производные второго порядка, то получим восемь частных производных третьего порядка. Дифференцируя дальше – 16 частных производных четвертого порядка, затем 32 производные пятого, и т.д.

Частная производная второго или более высокого порядков, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной*.

Пример. Найдем все частные производные второго порядка функции $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$.

Найдем сначала первые частные производные z'_x и z'_y :

$$z'_x = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_x = 4x^3 + 8xy^3 + 7y;$$

$$z'_y = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_y = 12x^2y^2 + 7x.$$

Затем обе полученные частные производные z'_x и z'_y продифференцируем еще раз по каждому аргументу. Получим четыре частных производных второго порядка:

$$z''_{xx} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_x = 12x^2 + 8y^3; \quad z'_{yx} = (12x^2y^2 + 7x)'_x = 24xy^2 + 7;$$

$$z''_{xy} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_y = 24xy^2 + 7; \quad z'_{yy} = (12x^2y^2 + 7x)'_y = 24x^2y.$$

Заметим, что вторые частные производные z''_{xy} и z''_{yx} равны. Действительно, для непрерывных смешанных частных производных одного порядка, отличающихся только порядком дифференцирования, всегда можно сказать, что они равны между собой.

5.3. Производные по направлению. Градиент

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, вектор $l^0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$ – единичный вектор, задающий направление прямой L , проходящей через точку $M(x, y)$ (рис. 5.3).

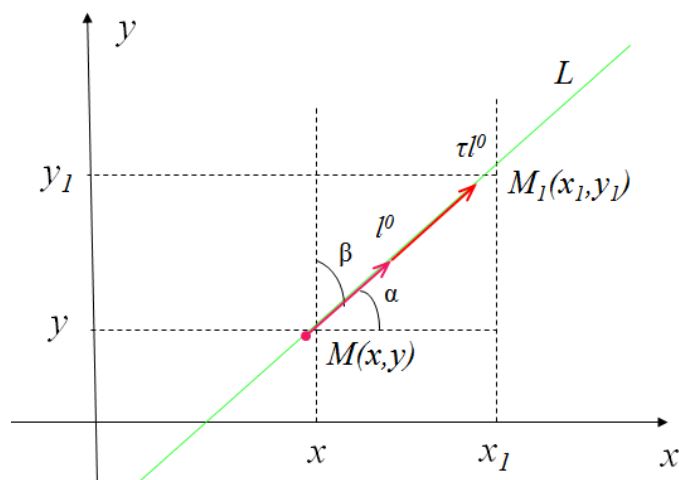


Рис. 5.3. Производная по направлению.

Выберем на прямой L точку $M_1(x_1, y_1) = M(x, y) + \tau \cdot l^0$ и рассмотрим приращение $\Delta z = z(M_1) - z(M) = f(x + \tau \cos\alpha, y + \tau \cos\beta) - f(x, y)$ в точке $M(x, y)$.

Определение. Предел отношения $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x + \tau \cos \alpha, y + \tau \cos \beta) - f(x, y)}{\tau}$,

если он существует, называется производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по направлению $l^0 = (\cos \alpha, \cos \beta)$.

Обозначается производная функции по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$.

Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке непрерывные частные производные, то в этой точке существует и производная по любому направлению, исходящему из точки $M(x, y)$.

Производную функции по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$ можно вычислить следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta.$$

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$ в точке $M(1; 1)$ по направлению вектора $l = (3; 4)$.

Сначала определим единичный вектор l^0 , совпадающий с направлением вектора l : $l^0 = \frac{l}{|l|} = \left(\frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}}; \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right)$, следовательно, направляющие векторы будут равны $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos \beta = \frac{4}{5}$.

Найдем частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y + 2$.

Подставим в частные производные координаты точки $M(1; 1)$ и получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 1 + 1 + 2 = 5 \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + 2 \cdot 1 + 2 = 5.$$

Тогда значение производной функции $z = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$ в точке $M(1; 1)$ по направлению вектора $l = (3; 4)$ будет равно: $\frac{\partial z}{\partial l} = 5 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{4}{5} = 7$.

Определение. Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется вектор с началом в точке M_0 , координаты которого равны соответствующим частным производным z'_x и z'_y , вычисленным в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Обозначается градиент:
$$\text{grad } z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Геометрически градиент представляет собой вектор, указывающий направление, в котором из точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ возрастает наибольшим образом.

Пример. Найти градиент функции $u = x^2 + 3xy^2 - y$ в точке $M(2, -1)$.

Для решения задачи найдем частные производные представленной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y^2 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 1.$$

Подставим в частные производные координаты точки $M(2, -1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)^2 = 4 - 3 = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 = -12 - 1 = -13.$$

Таким образом, градиент функции $u = x^2 + 3xy^2 - y$ в точке $M(2, -1)$ представляет собой вектор $(1, -13)$. Именно в этом направлении наша функция будет возрастать наибольшим образом.

5.4. Экстремумы функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, что для каждой точки $M(x, y)$, отличной от точки $M_0(x_0, y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) > f(x_0, y_0)$).

Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум функции называют ее экстремумами.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, т.е. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, называется *стационарной точкой* функции z .

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называют *критическими точками*.

Пример. Найдем точки возможного экстремума функции $z = -2x^2 + y^2 + 32x$ и значения функции в этих точках.

Для решения задачи продифференцируем функцию $z = -2x^2 + y^2 + 32x$ по аргументам x и y :

$$z'_x = (-2x^2 + y^2 + 32x)'_x = -4x + 32; \quad z'_y = (-2x^2 + y^2 + 32x)'_y = 2y$$

Приравняем каждую из частных производных к нулю и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} -4x + 32 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}.$$

Решая ее, получим координаты стационарной точки $\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases}$.

Найдем значение функции в этой точке: $z(8; 0) = -2 \cdot 8^2 + 0^2 + 32 \cdot 8 = 128$.

Пример. Для функции $z = x^3 + 18x^2 - 2y^2 + 105x - 4y$ определим стационарные точки и значение функции в этих точках.

Найдем частные производные z'_x и z'_y :

$$z'_x = (x^3 + 18x^2 - 2y^2 + 105x - 4y)'_x = 3x^2 + 36x + 105;$$

$$z'_y = (x^3 + 18x^2 - 2y^2 + 105x - 4y)'_y = -4y - 4.$$

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x^2 + 36x + 105 = 0 \\ -4y - 4 = 0 \end{cases}.$$

Первое квадратное уравнение системы имеет 2 решения $x_1 = -7$ и $x_2 = -5$. Второе – одно: $y = 0$. Очевидно, функция $z = x^3 + 18x^2 - 2y^2 + 105x - 4y$ будет иметь две стационарные точки с координатами: $(-7; 0)$ и $(-5; 0)$.

Для определения значений функции подставим в функцию значения аргументов стационарных точек:

$$z_1(-7; -1) = (-7)^3 + 18 \cdot (-7)^2 - 2(-1)^2 + 105 \cdot (-7) - 4 \cdot (-1) = -194;$$

$$z_1(-5; -1) = (-5)^3 + 18 \cdot (-5)^2 - 2(-1)^2 + 105 \cdot (-5) - 4 \cdot (-1) = -198.$$

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Вычислим определитель:
$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{xy}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда в зависимости от значения определителя Δ возможны три случая.

1-й случай $\Delta > 0$. Если $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0$; то функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет максимум, если $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то минимум.

2-й случай $\Delta < 0$. Функция в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума не имеет.

3-й случай $\Delta = 0$. В этом случае нельзя с определенностью сказать о наличии экстремума исследуемой функции.

Пример. Исследуем функцию $z = x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 3$ на экстремумы.

Найдем частные производные функции:

$$z'_x = (x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 3)'_x = 2x + 4;$$

$$z'_y = (x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 3)'_y = -8y - 8.$$

Для определения критических точек решим систему:
$$\begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ -8y - 8 = 0 \end{cases}$$

В результате решения получим единственную точку возможного экстремума: $(-2, -1)$.

Продифференцируем функцию еще один раз. Получим: $z''_{xx} = (2x + 4)'_x = 2$;
 $z''_{xy} = z''_{yx} = (2x + 4)'_y = 0$; $z''_{yy} = (-8y - 8)'_y = -8$.

Вычислим определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -16$. Поскольку

$\Delta < 0$, то функция $z = x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 3$ экстремумов не имеет.

Пример. Найдем экстремумы функции $z = x^3 + 6x^2 - 2y^2 + 9x - 4y + 2$.

Определим критические точки функции $z = x^3 + 6x^2 - 2y^2 + 9x - 4y + 2$. Для этого найдем частные производные нашей функции:

$$z'_x = (x^3 + 6x^2 - 2y^2 + 9x - 4y + 2)'_x = 3x^2 + 12x + 9;$$

$$z'_y = (x^3 + 6x^2 - 2y^2 + 9x - 4y + 2)'_y = -4y - 4.$$

Решая систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x^2 + 12x + 9 = 0 \\ -4y - 4 = 0 \end{cases}$$
, получим две критические точки: $(-3; -1)$ и $(-1; -1)$.

Найдем частные производные функции второго порядка и рассчитаем их значения в найденных критических точках: $z''_{1xx} = (3x^2 + 12x + 9)'_x = 6x + 12$;
 $z''_{1xy} = z''_{1yx} = (3x^2 + 12x + 9)'_y = 0$; $z''_{1yy} = (-4y - 4)'_y = -4$.

Рассчитаем определители Δ_1 и Δ_2 для соответствующих критических точек.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_1, y_1) & f''_{xy}(x_1, y_1) \\ f''_{xy}(x_1, y_1) & f''_{yy}(x_1, y_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 24 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_2, y_2) & f''_{xy}(x_2, y_2) \\ f''_{xy}(x_2, y_2) & f''_{yy}(x_2, y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -24 < 0.$$

Так как $\Delta_1 > 0$, а $f''_{xx}(x_1, y_1) < 0$, то в точке $(-3; -1)$ наблюдается локальный максимум. Однако в силу того, что $\Delta_2 < 0$, точка $(-1; -1)$ не является экстремумом.

Глава 6. Интегральное исчисление

Задачи интегрирования функций одной или нескольких переменных являются широко востребованными при решении многих прикладных научных и технических задач в различных областях математики, физики, астрономии, химии, биологии, медицине, технике, производстве, строительстве.

Начиная с классических задач, поставленных в XII – XIX веках, по определению перемещений, массы тел, центра тяжести, длин дуг, площадей поверхностей, объема фигур, количества работы, вычислению электрического заряда, количества теплоты, давления в жидкостях и газах до сложнейших расчетов в производстве современных автомобилей, самолетов, морских судов, космических кораблей, проектирования компьютерных систем, сложных технических приборов, строительства атомных электростанций и небоскребов – нигде невозможно обойтись без интегрального исчисления.

6.1. Понятие неопределенного интеграла

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала данной функции. Интегральное исчисление решает обратную задачу – нахождение самой функции по ее производной или дифференциалу.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функцией для функции $f(x)$ на промежутке X , если в каждой точке x этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Пример. Первообразной для функции $f(x) = x^2$ является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$. Однако первообразными для $f(x) = x^2$ будут и любые функции вида $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, поскольку продифференцировав $\frac{x^3}{3} + C$ мы также получим x^2 .

Теорема. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке X , то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C – постоянное число.

Учитывая все сказанное выше, дадим определение неопределенного интеграла:

Определение. Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для заданной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом от $f(x)$* .

Обозначается неопределенный интеграл $\int f(x) dx$. В данной записи $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x) dx$ – подынтегральным выражением, а x – переменной интегрирования.

Операция отыскания неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $F(x) + C$, где каждому числовому значению C соответствует определенная кривая. График первообразной называется интегральной кривой (Рис. 6.1)

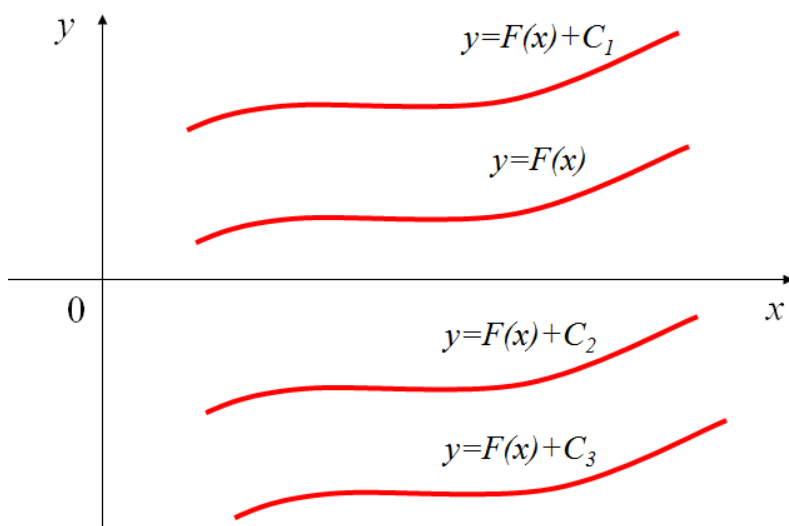


Рис. 6.1. Семейство кривых $F(x) + C$.

Из определения непосредственно следуют его основные свойства.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной

функции:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx \text{ и } \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) dx = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx;$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы (разности) двух функций равен алгебраической сумме (разности) интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

5. Инвариантность формулы интегрирования. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u) du = F(u) + C$.

Путем обращения формул дифференцирования основных элементарных функций можно получить табличные интегралы:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad (x \neq 0);$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1);$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm k} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

6.2. Основные методы интегрирования

Нахождение интегралов – это сложный, творческий и иногда непредсказуемый процесс, однако в ряде стандартных случаев можно выделить основные методы интегрирования, выбираемые в зависимости от вида интегрируемых выражений.

6.2.1. Непосредственное интегрирование:

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

Пример. Найдем интеграл $\int (10x^{10} + 3^x) dx$.

Используя табличные формулы интегрирования степенной и показательной функций, свойство интеграла суммы двух функций получим:

$$\int (10x^{10} + 3^x) dx = 10 \int x^{10} dx + \int 3^x dx = 10 \cdot \frac{x^{11}}{11} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int (2x^2 + 1)^2 dx$.

Для нахождения интеграла раскроем скобки в записи функции, а затем разобьем интеграл на три элементарных слагаемых:

$$\begin{aligned} \int (2x^2 + 1)^2 dx &= \int (4x^4 + 4x^2 + 1) dx = 4 \int x^4 dx + 4 \int x^2 dx + \int dx = \\ &= \frac{4}{5} x^5 + \frac{4}{3} x^3 + x + C. \end{aligned}$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

В этом примере разложим $\cos 2x$ на разность $\cos^2 x - \sin^2 x$, а затем разобьем функцию на две дроби, которые проинтегрируем с помощью табличных интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \\ &= -\operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx} + C. \end{aligned}$$

6.2.2. Внесение под знак дифференциала

При сведении заданного интеграла к табличному часто используются преобразования, использующие внесение под знак дифференциала интегрируемых выражений.

Метод основан на определении дифференциала: $f'(x)dx = d(f(x))$. Он используется, если в произведении подынтегральной функции и дифференциала можно увидеть произведение другой функции и дифференциала от нее.

При внесении под знак дифференциала можно использовать некоторые преобразования дифференциала:

$$\begin{aligned} du &= d(u \pm a), a - \text{const}; & du &= \frac{1}{a} d(au), a - \text{const}; \\ u^n du &= \frac{1}{n+1} d(u^{n+1}); & \frac{du}{u} &= d(\ln u); \\ \sin u du &= -d(\cos u); & \cos u du &= d(\sin u); \dots \end{aligned}$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{x-4}$.

Воспользуемся формулой $du = d(u \pm a)$ и внесем под знак дифференциала выражение $x-4$:

$$\int \frac{dx}{x-4} = \int \frac{d(x-4)}{x-4} = \ln|x-4| + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int (2x+3)^{17} dx$.

Для нахождения интеграла используем преобразования дифференциала степенной функции:

$$\begin{aligned} \int (2x+3)^{17} dx &= \int (2x+3)^{17} \cdot \frac{1}{2} d(2x+3) = \frac{1}{2} \int (2x+3)^{17} d(2x+3) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{18}}{18} + C = \frac{(2x+3)^{18}}{36} + C. \end{aligned}$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

Внесем под знак дифференциала логарифмическую функцию:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \ln(\ln x) + C.$$

6.2.3. Метод замены переменных

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.

Для нахождения неопределенного интеграла сделаем подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получим *формулу интегрирования подстановкой*:

$$\int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Следует запомнить, что после нахождения интеграла следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x .

Пример. Найдем интеграл $\int (3x+2)^5 dx$.

Введем новую переменную $t=3x+2$, выразим аргумент x через t , продифференцируем равенство $x=\frac{t-2}{3}$, а затем, перейдя к новой переменной, найдем новый интеграл:

$$\begin{aligned} \int (3x+2)^5 dx &= \left[t=3x+2, x=\frac{t-2}{3}, dx=\frac{dt}{3} \right] = \int t^5 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int t^5 dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{18} (3x+2)^6 + C. \end{aligned}$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{x^3}{x^8+1} dx$.

Выполняя замену $t=x^4$ найдем интеграл методом замены переменных:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^8+1} dx &= \left[t=x^4, dt=4x^3 dx, x^3 dx=\frac{dt}{4} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4} \arctgt + C = \\ &= \frac{1}{4} \arctgx^4 + C. \end{aligned}$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{5x dx}{5x^2-3}$.

При нахождении неопределенного интеграла сделаем замену $5x^2-3$:

$$\int \frac{5x dx}{5x^2 - 3} = \left[5x^2 - 3 = t, \quad 10x dx = dt, \quad 5x dx = \frac{dt}{2} \right] = \int \frac{dt}{2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|5x^2 - 3| + C.$$

6.2.4. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две функции дифференцируемые функции от аргумента x . Тогда по правилу дифференцирования произведения $d(uv) = u dv + v du$ или $u dv = d(uv) - v du$.

Интегрируя левую и правую части последнего равенства, получим:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Полученная формула называется формулой интегрирования по частям. Она дает возможность свести вычисление сложного интеграла $\int u dv$ к возможно более простому интегралу $\int v du$.

Существует три типа интегралов, интегрируемых по частям.

1-й тип. К этому типу относятся интегралы вида: $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, где $P(x)$ – многочлен произвольной степени, k – константа.

В этом случае можно взять $u = P(x)$, а за dv обозначить остальные сомножители.

Пример. Найдём методом интегрирования по частям интеграл $\int x \sin 2x dx$.

Положим $u = x$, а все остальные множители подынтегрального выражения $\sin 2x dx$ обозначим, как $dv = \sin 2x dx$. Продифференцируем равенство $u = x$, тогда $du = dx$. Интегрируя уравнение $dv = \sin 2x dx$, получим $v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x$. Используя формулу интегрирования по частям, получим решение:

$$\int x \sin 2x dx = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

2-й *тип*. Здесь находятся интегралы вида: $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \arctg x dx$, $\int P(x) \operatorname{arccotg} x dx$.

Для нахождения интеграла необходимо за $P(x)dx$ определить dv , а за u взять все остальные множители подынтегрального выражения.

Пример. Методом интегрирования по частям найдем интеграл $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Для решения задачи положим $u = \ln x$ и $dv = \frac{dx}{x^2}$. Учитывая это, получим

$$du = \frac{dx}{x} \quad \text{и} \quad v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Подставляя выражения du и v в формулу интегрирования по частям найдем неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} = -\ln x \cdot \frac{1}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

3-й *тип*. К этому типу относятся интегралы вида: $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$, где a и b – константы.

В этом случае за u можно принять тригонометрические функции $\sin bx$ или $\cos bx$, а все остальное в подынтегральном выражении обозначить, как dv .

Пример. Найдем интеграл $\int e^x \sin 3x dx$, интегрируя его по частям.

Введем обозначения: $u = \sin 3x$ и $dv = e^x dx$. Тогда $du = 3 \cos 3x dx$, а $v = \int e^x dx = e^x$. Подставив полученные выражения в интеграл получим:

$$\int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x - \int e^x \cdot 3 \cos 3x dx = e^x \sin 3x - 3 \int e^x \cos 3x dx.$$

В результате преобразований мы снова получили интеграл третьего типа. Еще раз применим метод интегрирования по частям. Введем новые обозначения: $u = \cos 3x$ и $dv = e^x dx$. Тогда $du = -3 \sin 3x dx$, а $v = \int e^x dx = e^x$. И снова подставим полученные выражения в интеграл:

$$e^x \sin 3x - 3 \int e^x \cos 3x dx = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x - 9 \int e^x \sin 3x dx.$$

Заметим, что в полученном выражении содержится начальное значение интеграла. Запишем уравнение, в левую часть которого поместим исходный интеграл, а в правую его преобразованный на последнем шаге вид:

$$\int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x - 9 \int e^x \sin 3x dx.$$

Решим это уравнение:

$$10 \int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x$$

Разделив обе части уравнения на 10 получим значение интеграла:

$$\int e^x \sin 3x dx = \frac{1}{10} e^x \sin 3x - \frac{3}{10} e^x \cos 3x + C.$$

6.2.5. Интегрирование рациональных дробей

В части первой курса лекций «Математика. Часть 1. Элементы общей алгебры» мы уже рассматривали вопросы разложения рациональных дробей.

Для интегрирования дробно-рациональных функций часто достаточно привести дробь к правильной, разделив числитель и на знаменатель с остатком.

Пример. Проинтегрируем дробно-рациональную функцию $\int \frac{2x^2 - 9x - 34}{2x + 5} dx$.

Разделим числитель дроби на знаменатель: $\frac{2x^2 - 9x - 34}{2x + 5} = x - 7 + \frac{1}{2x + 5}$,

а затем проинтегрируем полученное выражение. В результате получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 9x - 34}{2x + 5} dx &= \int \left(x - 7 + \frac{1}{2x + 5} \right) dx = \int x dx - 7 \int dx + \int \frac{dx}{2x + 5} = \\ &= \frac{x^2}{2} - 7x + \frac{1}{2} \int \frac{d(2x + 5)}{2x + 5} = \frac{x^2}{2} - 7x + \frac{1}{2} \ln|2x + 5| + C. \end{aligned}$$

Для упрощения интегрирования сложных правильных дробей их можно разложить в сумму элементарных дробей, а затем проинтегрировать полученные слагаемые.

Теорема. Правильную рациональную дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$, в которой знаменатель

разложен $Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_1x + g_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + g_m)^{r_m}$, а

$x^2 + p_ix + g_i$ – трехчлен с отрицательным дискриминантом, можно

единственным образом разложить на сумму элементарных делителей:

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \dots \\ & \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 2px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + 2px + q)^2} + \dots + \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + 2px + q)^l} + \dots, \end{aligned}$$

где $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_l, N_l, \dots$ – некоторые вещественные числа.

Пример. Найдем интеграл от правильной дроби $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6} dx$.

Выполним преобразования подынтегрального выражения. Разложим знаменатель дроби на множители, предварительно отыскав корни квадратного трехчлена $x^2 + 5x - 6$. Разобьем получившуюся дробь на сумму двух дробей, числители которых представим в виде переменных А и В и, приводя к общему знаменателю, сложим их:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2+5x-6} &= \frac{x+2}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} = \frac{A(x+6) + B(x-1)}{(x-1)(x+6)} = \\ &= \frac{(A+B)x + 6A - B}{(x-1)(x+6)}. \end{aligned}$$

Заметим, что $x+2 = (A+B)x + 6A - B$. Тогда $\begin{cases} A+B=1 \\ 6A-B=2 \end{cases}$.

Решая систему, получим: $A = \frac{3}{7}, B = \frac{4}{7}$.

Отсюда следует: $\frac{x+2}{x^2+5x-6} = \frac{\frac{3}{7}}{x-1} + \frac{\frac{4}{7}}{x+6}$.

Найдем интеграл от преобразованного выражения:

$$\int \frac{x+2}{x^2+5x-6} dx = \frac{3}{7} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{4}{7} \int \frac{dx}{x+6} = \frac{3}{7} \ln|x-1| + \frac{4}{7} \ln|x+6| + C.$$

6.3. Определенные интегралы

6.3.1 Понятие определенного интеграла

Исторически задача нахождения определенного интеграла сводится к задаче об определении площади P криволинейной трапеции.

Определение. Криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$.

Рассмотрим криволинейную трапецию $ABCD$. Разделим основание AB нашей фигуры произвольным образом на части и проведем ординаты, соответствующие точкам деления. Тогда криволинейная трапеция разобьется на ряд полосок:

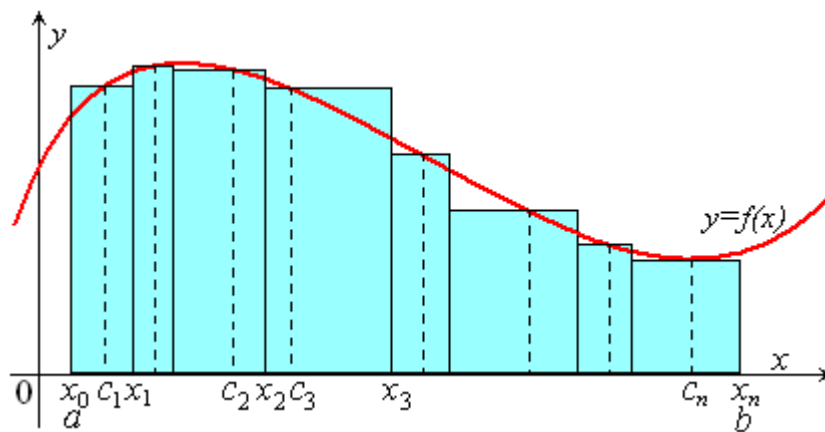


Рис. 6.2. Разбиение интеграла.

Заменяем теперь приблизительно каждую полоску некоторым прямоугольником, основание которого то же, что и у полоски, а высота совпадает с одной из ординат полоски, скажем, с крайней слева. Таким образом, криволинейная фигура заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из отдельных прямоугольников.

Обозначим абсциссы точек деления через

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Основание i -того прямоугольника ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), очевидно, равно разности $x_{i+1} - x_i$, которую будем обозначать Δx_i . Высота, исходя из сказанного, будет равна $y_i = f(x_i)$. Поэтому площадь i -того прямоугольника

будет $y_i \Delta x_i = f(x_i) \Delta x_i$. Просуммировав площади всех прямоугольников, получим приближенное значение площади P криволинейной трапеции:

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i \text{ или } P = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

Погрешность этого равенства при увеличении количества разбиений отрезка $[a, b]$ стремится к нулю, т.е. при безграничном убывании всех Δx_i точное значение площади получится равным пределу

$$P = \lim \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i$$

в предположении что все длины Δx_i стремятся к нулю одновременно.

Для обозначения предельного значения суммы $\sum y \Delta x$ Готфрид Лейбниц ввел символ $\int y dx$, где $y dx$ напоминает типичное слагаемое суммы, а $\int$ - это стилизованная буква S (от лат. "Summa" - сумма). Так как площадь, представляющая это предельное значение, в то же время является первообразной для функции $f(x)$, то тот же символ сохранился и для обозначения первообразной функции.

Возвращаясь к выше сказанному, выберем в каждом из отрезков Δx_i произвольно точку ξ_i , $(x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1})$ и образуем сумму

$$\sigma = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

которая называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, соответствующая данному разбиению $[a, b]$ на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек ξ_i . При этом сохранился геометрический смысл: σ есть сумма площадей прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$, если $f(x) \geq 0$.

Обозначим через λ длину наибольшего отрезка разбиения Δx_i , т.е.

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}.$$

Определение. Если существует конечный предел I интегральной суммы

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

при $\lambda \rightarrow 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

или

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a, b]$, числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределом интегрирования, $f(x)$ - подынтегральной функцией, x - переменной интегрирования.

6.3.2 Формула Ньютона-Лейбница

Вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм как правило связано с некоторыми трудностями. Наряду с этим методом, существует более удобный метод вычисления определенных интегралов, который основывается на ранее установленной связи между определенным и неопределенным интегралами.

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке первообразные, причем одной из них является функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Пусть $F(x)$ – любая другая первообразная для функции $f(x)$ на том же отрезке $[a, b]$. Имеет место равенство:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \quad a \leq x \leq b,$$

где C – некоторое число.

Подставляя в него значение $x = a$, получим:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a).$$

Т.е. для любого $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$, получаем основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

которая называется *формулой Ньютона – Лейбница*.

Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать так:

$$F(x) \Big|_a^b \text{ или } [F(x)]_a^b.$$

Отметим, что в формуле Ньютона – Лейбница в качестве $F(x)$ можно взять любую первообразную для $f(x)$ на $[a, b]$. Эта формула дает простой метод вычисления определенного интеграла:

Теорема. Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной, вычисленных для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Пример. Найдём определенный интеграл $\int_a^b \sin x dx$.

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

Пример. Найдём определенный интеграл $\int_a^b \sin x dx$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 3 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 \right) = \\ &= \frac{8}{3} - 4 + 6 - \left(\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Заметим, что при использовании формулы Ньютона – Лейбница задача вычисления определенного интеграла сводится к нахождению неопределенного интеграла. При этом здесь оказывается удобным использование табличных интегралов.

6.3.3. Свойства определенного интеграла

Рассмотрим наиболее общие свойства, используемые для вычисления определенных интегралов.

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и k – постоянное

число, то

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

3. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования

равен нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

4. При перемене мест верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

5. Если функции $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

6. *Теорема о «среднем».* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $c \in [a; b]$, такая что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

7. Если функции $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

8. Оценка интеграла. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, ($a < b$), то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

6.3.4. Особенности вычисления определенного интеграла

Для вычисления определенного интеграла используется формула Ньютона-Лейбница и все методы для нахождения неопределенных интегралов, описанные выше.

При вычислении определенных интегралов методом замены переменной следует иметь в виду, что возвращаться к старой переменной, как это было в случае с неопределенными интегралами, не требуется, кроме того, не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

Пример. Вычислим определенный интеграл $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

Сделаем замену $1 + \ln x = t$, тогда $dt = \frac{dx}{x}$. Заменяем пределы интегрирования, подставляя значения пределов в нашу замену. Если $x_1 = 1$ и $x_2 = e$ то нижний и верхний пределы станут равны $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Выполним дальнейшие преобразования и применяя формулу Ньютона-Лейбница вычислим интеграл:

$$\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx = \int_1^2 t dt = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Пример. Вычислим определенный интеграл $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

В этом случае применим замену $t = \sqrt{x}$. Продифференцируем выражение $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$, тогда $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, а пределы интегрирования станут равны $t_1 = \frac{\pi}{3}$ и $t_2 = \pi$. Теперь вычислим определенный интеграл:

$$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos t dt = 2 \sin t \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 2(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}.$$

Использование методов замены переменных и интегрирования рациональных дробей для определенных интегралов отличается только использованием Формулы Ньютона-Лейбница, замены пределов

интегрирования здесь не требуется.

Пример. Вычислим интеграл $\int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.

Для решения задачи положим $u = x$ и $dv = \sin 2x dx$. Тогда выражения для du и v будут следующими: $du = dx$, $v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x$. Используя эти факты рассчитаем значение определенного интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin 2x dx &= x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2x dx = \pi \left(-\frac{1}{2} \cos 2\pi \right) - \\ &- 0 \left(-\frac{1}{2} \cos 0 \right) + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

6.4. Геометрические приложения определенного интеграла

Основным геометрическим приложением определенного интеграла является вычисление площадей плоским фигур.

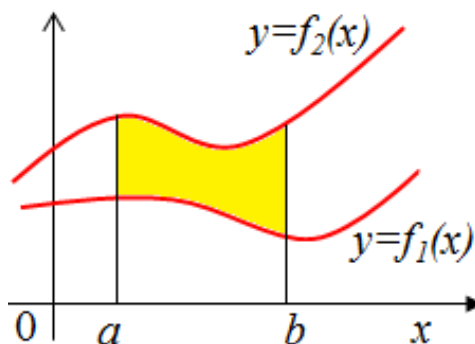


Рис. 6.3. Ограниченная плоская фигура.

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 6.3), при условии, что $f_1(x) \leq f_2(x)$, можно найти по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2$ и $y = x$.

Построим графики параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = x$.

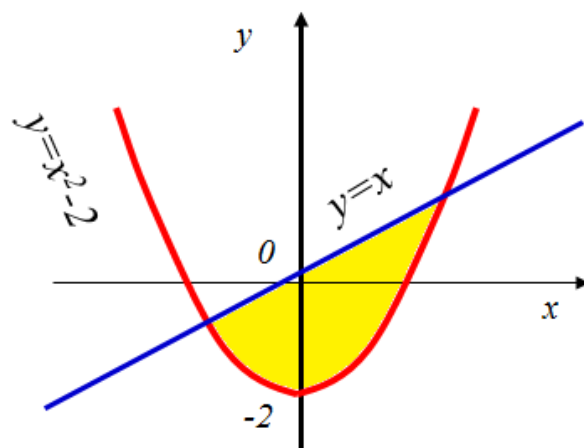


Рис. 6.4. Графики функций $y = x^2 - 2$ и $y = x$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases}$, найдем координаты точек пересечения параболы и прямой $(-1, 2)$ и $(2, 2)$. Полагая, что нижняя функция верхняя $f_1 = x^2 - 2$, а верхняя $f_1 = x$, найдем площадь фигуры:

$$S = \int_{-1}^2 (x - (x^2 - 2)) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \right) = 4.5.$$

Таким образом площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2$ и $y = x$ равна 4,5.

Если плоская фигура имеет «сложную» фигуру необходимо разбить ее на части, найти площади составных частей, а затем их сложить.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$ и имеет непрерывную производную $f'(x)$, то длину этой дуги можно вычислить по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пример. Вычислим длину дуги функции $y = \sqrt{x^3}$, определенной на промежутке $[0; 4]$.

Подставим в формулу для нахождения длины дуги аналитическое выражение функции и пределы интегрирования определенного интеграла.

Найдем определенный интеграл и получим длину дуги кривой $y = \sqrt{x^3}$.

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + ((x^{3/2})')^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \sqrt{x} \right)^2} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x \right)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

Литература

1. Астафьев Е.В. Основы функционального анализа: учеб.-метод. пособие / Е.Р. Астафьев, В.В. Василенко, Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарская академия МВД России, 2004. – 97 с.
2. Астафьев Е.Р. Математика: курс лекций / Е.Р. Астафьев, В.В. Василенко, Е.В. Михайленко, И.Н. Старостенко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2006. – 347 с.
3. Богомолов, Н.В. Математика: учебник / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2013.
4. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. – М.: Юрайт, 2013.
5. Дорофеева, А.В. Высшая математика для гуманитарных направлений: учебник / А.В. Дорофеева. – М.: Юрайт, 2012.
6. Зенков А.В., Численные методы: учеб. пособие / А. В. Зенков. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 124 с.
7. Михайленко Е.В. Введение в высшую математику: лекция / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2008. – 30 с.
8. Михайленко Е.В. Дискретная математика: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2016. – 104 с.
9. Михайленко Е.В. Информатика и математика: учеб. пособие / под общ. ред. Е.В. Михайленко / Е.В. Михайленко, С.В. Гуде, И.Н. Старостенко, Ю.Н. Сопильняк, П.В. Арбузов. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2007. Ч. 2: Информатика. – 330 с.
10. Михайленко Е.В. Математика и информатика: курс лекций / Е.В. Михайленко, И.Н. Старостенко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2009. – 420 с.

11. Михайленко Е.В. Математический анализ и дифференциальные уравнения: учеб. пособие / Е.В. Михайленко М.А. Швецова. - Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2010. – 126 с.
12. Михайленко Е.В. Прикладная математика: курс лекций / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2014. – 192 с.
13. Михайленко Е.В. Элементы математического анализа: лекция / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2007. – 40 с.
14. Михайленко, Е.В. Методы оптимизации: сборник задач / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 140 с.
15. Пирумов У.Г., Численные методы: теория и практика: учеб. пособие для бакалавров / У.Г. Пирумов и [др.]. – 5-е изд., перераб. И доп. –М.: Издательство Юрайт, 2012. – 421 с.
16. Путилов, А. О. Интегральное исчисление: учеб. пособие / А.О. Путилов. – М.: Московский университет МВД России, 2015.
17. Шипачев, В.С. Высшая математика: учеб. и практикум для бакалавров / В.С. Шипачев; ред. А.Н. Тихонова. – 8-е изд., доп. и перераб. – М.: Юрайт, 2014.

Учебное издание

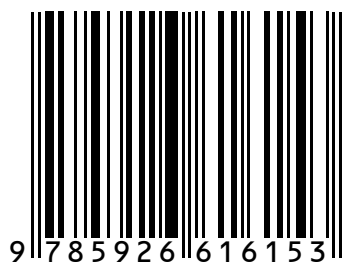
Михайленко Евгений Владимирович

МАТЕМАТИКА
Часть 3
Математический анализ

Курс лекций

В авторской редакции

ISBN 978-5-9266-1615-3



Подписано в печать 04.08.2020. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 5,5. Тираж 70 экз. Заказ 73.

Краснодарский университет МВД России.
350005, г. Краснодар, ул. Ярославская, 128.