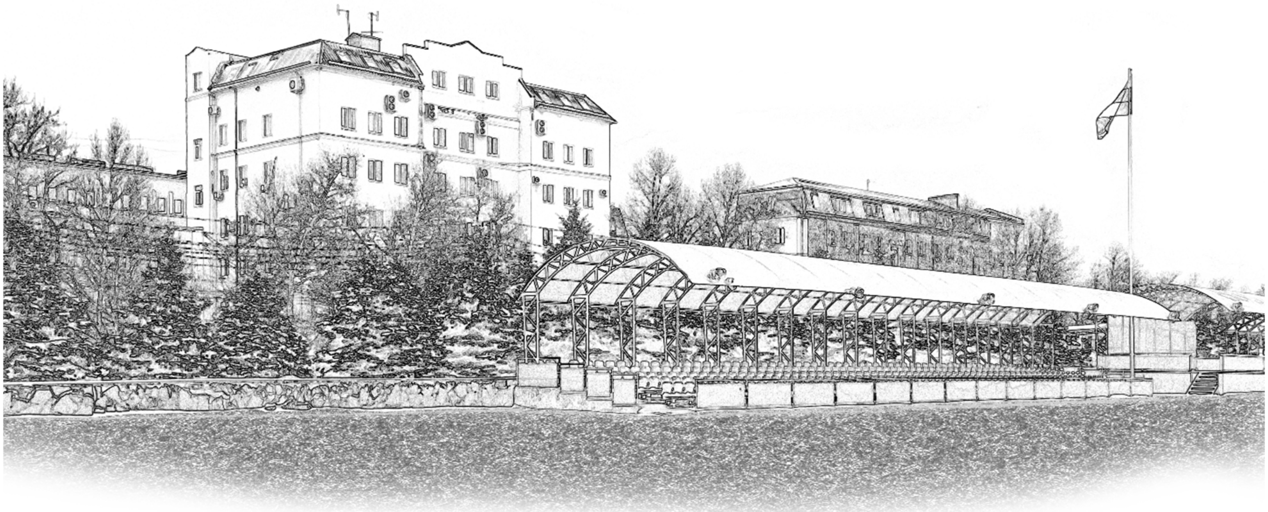
Краснодарский университет МВД России

И. Н. Старостенко
А. А. Хромых

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ



Краснодар
2021

Краснодарский университет МВД России

И. Н. Старостенко
А. А. Хромых

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-практическое пособие

Краснодар
2021

УДК 512.64
ББК 22.143
С773

Одобрено
редакционно-издательским советом
Краснодарского университета
МВД России

Рецензенты:

А. Н. Прокопенко, кандидат технических наук, доцент (Белгородский юридический институт МВД России имени И.Д. Путилина);

А. Г. Карпика, кандидат технических наук, доцент (Ростовский юридический институт МВД России).

Старостенко И. Н.

С773 Высшая математика для экономистов. Элементы линейной алгебры : учебно-практическое пособие / И. Н. Старостенко, А. А. Хромых. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2021. – 76 с.

ISBN 978-5-9266-1726-6

Учебно-практическое пособие содержит теоретические аспекты и типовые задачи линейной алгебры. Рассмотрены основные понятия теории матриц и определителей, методы вычисления обратной матрицы. Изучены способы нахождения решения систем линейных алгебраических уравнений.

Для профессорско-преподавательского состава, адъюнктов, курсантов, слушателей образовательных организаций МВД России и сотрудников органов внутренних дел Российской Федерации.

УДК 512.64
ББК 22.143

ISBN 978-5-9266-1726-6

Содержание

Введение

Линейная алгебра – область математики, имеющая исключительное значение при решении многих прикладных вопросов. Поэтому ее изучение составляет важнейшую часть естественно-научного образования. Те понятия и объекты, которые изучаются в рамках этого предмета (матрицы, определители, системы линейных алгебраических уравнений и т.д.) входят в фундамент математического образования. Их использование, дальнейшее развитие и обобщение тесно связано с наиболее важными направлениями развития современной математики и прикладных наук.

Данное пособие посвящено изучению матриц, определителей и систем линейных алгебраических уравнений.

Впервые матрицы упоминались еще в древнем Китае, называясь тогда «*волшебным квадратом*». Основным применением матриц было решение линейных уравнений. Также волшебные квадраты были известны чуть позднее у арабских математиков, примерно тогда появился принцип сложения матриц. После развития теории определителей в конце 17-го века, Габриэль Крамер начал разрабатывать свою теорию в 18-м столетии и опубликовал «правило Крамера» в 1751 году. Примерно в этом же промежутке времени появился «метод Гаусса». Теория матриц начала свое существование в середине XIX века в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Вейерштрассу, Жордану, Фробениусу. Термин «матрица» ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г.

Системы линейных уравнений являются универсальным математическим аппаратом, применяемым в различных сферах профессиональной деятельности. Они используются для исследования больших массивов наблюдений, качественных и количественных показателей.

1. Матрицы

1.1. Понятие матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица элементов (чисел, функций или алгебраических выражений), содержащая m строк и n столбцов. Матрицу принято записывать в виде:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, функции или алгебраические выражения a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$), составляющие матрицу и находящиеся в i-ой строке и в j-м столбце, называются *элементами матрицы*.

Матрицу принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, ….

Числа m и n определяют размер матрицы A и записывают $A_{m\times n}$.

Например, $A=\begin{pmatrix} \cos x & 1 \\ -1 & \sin x \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x^2 & 1 & x \\ 3x & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$.

Матрицу A, содержащую элементы a_{ij}, сокращенно обозначают $A=(a_{ij})$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$.

Пример. Для матрицы $A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \\ 11 & -9 \end{pmatrix}$ указать элемент a_{22}.

Решение. Элемент a_{22} матрицы A находится во второй строке и во втором столбце, т.е. $a_{22}=7$.

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \\ 11 & -9 \end{pmatrix}$$

Строка матрицы называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю.

Если хотя бы один из элементов строки матрицы не равен нулю, то строка называется *ненулевой*.

Столбец матрицы называется *нулевым*, если все его элементы равны нулю.

Если хотя бы один из элементов столбца матрицы не равен нулю, то столбец называется *ненулевым*.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов (т.е. $m = n$), то матрица называется *квадратной*, а число строк – *порядком* этой матрицы.

Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют *матрицей* n*-го порядка*.

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы квадратной матрицы, для которых $i = j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называются *диагональными,* а диагональ матрицы, на которой они находятся, называется *главной диагональю* этой матрицы.

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, проведенная из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Пример. Выписать элементы главной и побочной диагоналей матрицы

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -3 & 0 & 5 & 8 \\ 11 & -4 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Главную диагональ матрицы $A_{4\times 4}$ образуют числа: 1, 0, 7 и 5. Числа 6, -4, 5 и 7 образуют побочную диагональ матрицы $A_{4\times 4}$.

главная диагональ →

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -3 & 0 & 5 & 8 \\ 11 & -4 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

побочная диагональ →

Следом матрицы (*следом квадратной матрицы*) называется сумма диагональных элементов квадратной матрицы и обозначается trA, т.е. $trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Пример. Найти след матрицы $A_{3\times3}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 5 & -7\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Решение. След матрицы $A_{3\times3}$ равен $trA=a_{11}+a_{22}+a_{33}=2+5+(-1)=6$.

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 5 & -7\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Две матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ ($i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$) называются *равными*, если матрицы имеют одинаковую размерность и равны элементы, расположенные на соответствующих местах этих матриц. Т.е. для матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$, $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$ ($i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$).

Матрица называется *нулевой* порядков m и n, если все ее элементы равны нулю и обозначается символом O.

Например, $O_{3\times3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $O_{2\times3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ – нулевые матрицы.

Если для элементов матрицы $A_{n\times n}=(a_{ij})$ выполняется условие $a_{ij}=a_{ji}$ ($i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,n$), то матрица называется *симметрической*.

Например, $A_{3\times3}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 6\\ 5 & 6 & 4\end{pmatrix}$ – симметрическая матрица, т.к.

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 6\\ 5 & 6 & 4\end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, находящиеся под главной диагональю, равны нулю, называется *верхнетреугольной*.

Например, $A_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная матрица, т.к.

$$A_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, находящиеся над главной диагональю, равны нулю, называется *нижнетреугольной*.

Например, $A_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная матрица, т.к.

$$A_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица – это квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Например, $A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – диагональная матрица, т.к.

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны единице, называется *единичной* и обозначается E.

Например, $E_{3\times3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ – единичная матрица, т.к.

$$E_{3\times3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Матрица, содержащая один столбец, называется *вектором*, или *вектором-столбцом*.

Матрица, содержащая одну строку, называется *вектором*, или *вектором-строкой*.

Например, $A_{3\times1}=\begin{pmatrix}3\\4\\-7\end{pmatrix}$ – вектор-столбец, $B_{1\times4}=\begin{pmatrix}3&0&-2&5\end{pmatrix}$ – вектор-строка.

Пример. Указать размерность и определить тип матриц.

$$D=\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2&-3&-1&0\\0&5&7&4\\0&0&-1&1\\0&0&0&3\end{pmatrix};\quad M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&7&0&0\\10&8&4&0\\-3&1&0&-2\end{pmatrix};\quad E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};$$

$$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\0&9&-2\end{pmatrix}.$$

Решение.

Матрицы D имеет размерность 3×3 и является квадратной, диагональной.

Матрицы B имеет размерность 4×4 и является квадратной, верхнетреугольной.

Матрицы M имеет размерность 4×4 и является квадратной, нижнетреугольной.

Матрицы E имеет размерность 2×2 и является квадратной, единичной.

Матрицы E имеет размерность 2×2 и является квадратной, нулевой.

Матрицы A имеет размерность 2×3 и является прямоугольной.

1.2. Операции над матрицами и их свойства

1.2.1. Транспонирование матриц

Транспонированная матрица A^T *– это матрица, полученная из исходной матрицы* A *с помощью замены строк на столбцы.*

Матрица

$$A_{n\times m}^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

является транспонированной к матрице

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n)$ имеет размерность $m\times n$, то транспонированная матрица $A^T=(a_{ij}^T)$ имеет размерность $n\times m$.

Например, матрица $A_{3\times 2}^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ является транспонированной к матрице $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Если исходная матрица A и транспонированная матрица A^T равны (т.е. $A=A^T$), то матрица A является симметричной.

1.2.2. Сложение матриц

Суммой двух матриц $A_{mn}=(a_{ij})$ *и* $B_{mn}=(b_{ij})$ *называется матрица* $C_{mn}=(c_{ij})$, *элементы которой вычисляются по формуле* $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ *(*$i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$*).*

Для обозначения суммы двух матриц используется запись $C=A+B$. Операция нахождения суммы матриц называется их *сложением*.

По определению имеем

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти сумму матриц $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 4 & -12 & 5 \end{pmatrix}$ и $B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} -6 & 20 & 8 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix}$.

Решение.

По определению имеем

$$A+B=\begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 4 & -12 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 20 & 8 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11+(-6) & 3+20 & -2+8 \\ 4+5 & -12+2 & 5+14 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 23 & 6 \\ 9 & -10 & 19 \end{pmatrix}.$$

Операция сложения матриц обладает теми же свойствами, что и операция сложения вещественных чисел, а именно:

1) коммутативность (переместительное свойство):

$$A+B=B+A;$$

2) ассоциативность (сочетательное свойство):

$$(A+B)+C=A+(B+C);$$

3) существование нуля:

$$A+O=O+A.$$

1.2.2. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A_{mn}=(a_{ij})$ *на число* k $(k \neq 0)$ *называется матрица* $B_{mn}=(b_{ij})$, *элементы которой вычисляются по формуле* $b_{ij}=k \cdot a_{ij}$ $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$.

Для обозначения произведения матрицы на число используется запись $C=kA$. Операция составления произведения матрицы на число называется *умножением* матрицы на это число.

По определению имеем

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \ldots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \ldots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $3A$.

Решение.

По определению имеем

$$3\cdot A=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 0 & 3\cdot(-2) \\ 3\cdot 8 & 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 12 & 0 & -6 \\ 24 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

1) коммутативность:

$$kA=Ak;$$

2) ассоциативность относительно числового множителя:

$$(kp)A=k(pA);$$

3) дистрибутивность (распределительное свойство) относительно суммы матриц:

$$k(A+B)=kA+kB;$$

4) дистрибутивность относительно суммы чисел:

$$(k+p)A=kA+pA.$$

Замечание. *Разностью двух матриц* $A_{mn} = (a_{ij})$ *и* $B_{mn} = (b_{ij})$ *называется такая матрица* $C_{mn} = (c_{ij})$, *которая в сумме с матрицей* $B_{mn} = (b_{ij})$ *дает матрицу* $A_{mn} = (a_{ij})$ $(i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n)$. Для обозначения разности двух матриц используется естественная запись: $C = A - B$.

Из определения следует, что разность $C_{mn} = (c_{ij})$ двух матриц $A_{mn} = (a_{ij})$ и $B_{mn} = (b_{ij})$ может быть получена по правилу $c_{ij} = a_{ij} + (-1) \cdot b_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,m, \ j = 1,2,\ldots,n)$.

Пример. Найти разность матриц $A - B$, если $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$,

$B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

По определению имеем

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -3-5 \\ 5-0 & 1-(-6) \\ 0-(-3) & 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 5 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2.3. Умножение матриц

Произведением матрицы $A_{mn} = (a_{ij})$ *на матрицу* $B_{np} = (b_{jk})$ *называется матрица* $C_{mp} = (c_{ik})$ *такая, что* $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, *(*$i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$*).*

Матрицу A можно умножить на матрицу B только в том случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Словесно определение можно сформулировать так: *элемент* c_{ij}, *стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы* $C = AB$, *равен* *сумме попарных произведений соответствующих элементов i-и строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.*

В качестве примера применения указанного правила приведем формулу перемножения следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения произведения матрицы A на матрицу B используют запись $C = AB$. Операция произведения матрицы A на матрицу B называется *перемножением* этих матриц.

Размерность матрицы C, полученной с помощью произведения матриц A и B определяется по следующему правилу: *число строк матрицы – произведения совпадает с числом строк первой, а число столбцов – с числом столбцов второй из перемножаемых матриц.*

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B} = \underset{m\times k}{C}$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти произведение AB этих матриц.

Решение.

Матрица A имеет размерность 2×3, а матрица B – 3×3, следовательно, матрица C будет иметь размерность 2×3.

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 0 \quad 1} \\ 0 \quad -1 \quad 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{2\cdot 4 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0} & \boxed{2\cdot 1 + 0\cdot 3 + 1\cdot 1} & \boxed{2\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0} \\ 0\cdot 4 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 0 & 0\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 1 & 0\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение AB и BA матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 4+0\cdot(-2)+1\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 2\\ 2\cdot 4+(-1)\cdot(-2)+3\cdot 3 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 0+3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 19 & 8\end{pmatrix},$$

однако

$$BA=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 1+1\cdot 2 & 4\cdot 0+1\cdot(-1) & 4\cdot 1+1\cdot 3\\ -2\cdot 1+0\cdot 2 & -2\cdot 0+0\cdot(-1) & -2\cdot 1+0\cdot 3\\ 3\cdot 1+2\cdot 2 & 3\cdot 0+2\cdot(-1) & 3\cdot 1+2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -1 & 7\\ -2 & 0 & -2\\ 7 & -2 & 9\end{pmatrix}.$$

Для того чтобы произведения матриц AB и BA были определены и имели одинаковый порядок, необходимо и достаточно, чтобы обе матрицы A и B были квадратными матрицами одного и того же порядка.

Справедливы следующие свойства произведения матрицы A на матрицу B:

1) ассоциативность относительно произведения матриц:

$$(AB)C=A(BC);$$

2) *дистрибутивность* относительно суммы матриц:

$$(A+B)C=AC+BC \text{ или } A(B+C)=AB+AC;$$

3) существование единицы:

$$AE=EA=A.$$

Вопрос о коммутативности произведения двух матрицы можно ставить только для квадратных матриц одинакового порядка. Однако в общем случае произведение двух квадратных матриц одинакового порядка не обладает, перестановочным свойством.

Две матрицы, для произведения которых справедливо перестановочное свойство, принято называть *коммутирующими*.

Пример. Найти произведение AB и BA матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix},$$

однако

$$BA=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot1+6\cdot3 & 5\cdot2+6\cdot4\\ 7\cdot1+8\cdot3 & 7\cdot2+8\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix}.$$

1.2.4. Возведение матрицы в степень

Операцию возведения матрицы в целую положительную степень можно определить только для квадратных матриц.

Под нулевой степенью квадратной матрицы понимается единичная матрица того же порядка что и матрица А, т.е. $A^0=E$.

Целой положительной степенью A^m $(m>0)$ *квадратной матрицы* A *называется произведение* m *матриц, равных* A*, т.е.*

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\ раз}.$$

Пример. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Найти произведение A^2.

Решение.

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+1\cdot(-1) & 2\cdot1+1\cdot3\\ (-1)\cdot2+3\cdot(-1) & (-1)\cdot1+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие свойства степеней матриц:

1) $A^mA^k=A^{m+k}$;

2) $\left(A^m\right)^k=A^{mk}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Выполнить действия над матрицами.

1.1. $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$;

1.2. $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 10 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$;

1.3. $-3 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -7 & -1 & -9 \end{pmatrix}$;

1.4. $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$;

1.5. $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -6 & -7 \\ -5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

1.6. $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

1.7. $\begin{pmatrix} -5 & 8 & -4 \\ 4 & 4 & -5 \\ 10 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$;

1.8. $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \\ 5 & -6 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$;

1.9. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

1.10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

1.11. $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -4 & -8 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} + 19 \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -6 & -1 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$;

1.12. $4 \cdot \begin{pmatrix} -9 & 8 & 10 & 10 \\ -1 & -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 7 & 7 \\ -2 & 10 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Найти значение матричного выражения $A^2 - 4A + 9E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание 3. Найти значение матричного выражения $5A+4B^T$, если

$$A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 4 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Выполнить действия над матрицами $A(B-2C)D$.

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 6\\ 8 & -8 & -3\\ 4 & -8 & -3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 6 & -8\\ 8 & 8 & 8\\ -3 & 7 & 2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -7\end{pmatrix}.$$

Задание 5. Выполнить действия над матрицами FGH.

$$F=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\ -0{,}7 & 0{,}9\\ -0{,}5 & -0{,}6\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}700\\ -500\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 0{,}2 & -0{,}8\end{pmatrix}.$$

Ответы:

Задание 1.

1.1. $\begin{pmatrix}4 & 8\\ 7 & 11\end{pmatrix}$; 1.2. $\begin{pmatrix}5 & 2\\ -12 & -13\\ 8 & 0\end{pmatrix}$; 1.3. $\begin{pmatrix}-18 & -18 & -9\\ 21 & 3 & 27\end{pmatrix}$;

1.4. $\begin{pmatrix}7 & -32\\ -11 & 25\end{pmatrix}$; 1.5. $\begin{pmatrix}-40 & 32 & 40\\ -30 & 12 & 12\end{pmatrix}$; 1.6. $\begin{pmatrix}-36 & 6 & 30\\ -24 & 4 & 20\\ -12 & 2 & 10\end{pmatrix}$;

1.7. $\begin{pmatrix}-69\\ -58\\ 72\end{pmatrix}$; 1.8. $\begin{pmatrix}65 & 6\\ 67 & -6\\ -62 & -2\\ -7 & -24\end{pmatrix}$; 1.9. $\begin{pmatrix}40 & -3 & -19\end{pmatrix}$;

1.10. $\begin{pmatrix}-4 & 17\\ 9 & 7\end{pmatrix}$; 1.11. $\begin{pmatrix}-83 & -76\\ -100 & -71\\ -100 & -117\end{pmatrix}$; 1.12. $\begin{pmatrix}52 & 584\\ -38 & -5\end{pmatrix}$.

Задание 2. $\begin{pmatrix}2 & 9\\ -3 & 11\end{pmatrix}$.

Задание 3. $\begin{pmatrix} 35 & 31 & 13 \\ 45 & 21 & 31 \end{pmatrix}$.

Задание 4. $A(B-2C)D=(1024)$.

Задание 5. $FGH=\begin{pmatrix} -175 & 70 & -280 \\ 470 & -188 & 752 \\ 25 & -10 & 40 \end{pmatrix}$.

2. Определители

2.1. Понятие определителя

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A_{n\times n}$:

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

С каждой такой матрицей свяжем вполне определенную ее численную характеристику, называемую *определителем* (*детерминантом*) этой матрице. Для обозначения определителя употребляют прямые скобки, а перед буквенным выражением указывается слово $\det$.

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель обозначается: $\det A$, $|A|$, Δ.

2.2. Вычисление определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков

2.2.1. Определитель первого порядка

Определителем $|A|$ матрицы первого порядка $A_{1\times 1}=(a_{11})$, или просто *определителем первого порядка*, называется число, равное матричному элементу a_{11}:

$$|A|=|a_{11}|=a_{11}.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы первого порядка $A=(-5)$.

Решение. $|A|=|-5|=-5$.

2.2.2. Определитель второго порядка

Пусть дана квадратная матрица второго порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем $|A|$ матрицы второго порядка A, или просто *определителем второго порядка*, называется число, определяемое формулой:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Таким образом, *определитель второго порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали этой матрицы, и произведения элементов, стоящих на побочной ее диагонали*.

Пример. Вычислить определитель матрицы второго порядка $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-(-2)\cdot 3=4+6=10$.

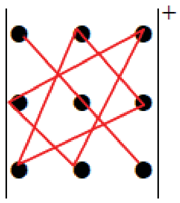
2.2.3. Определитель третьего порядка

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

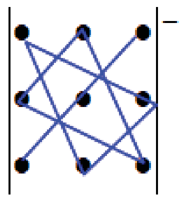
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем $|A|$ матрицы третьего порядка A, или просто *определителем третьего порядка*, называется число, вычисляемое по правилу Саррюса (*правило треугольника*):

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$



Произведения этих элементов
берем со своими знаками



Произведения этих элементов
берем с противоположными знаками

При вычислении определителя третьего порядка можно воспользоваться следующим правилом:

1) переносим элементы первых двух строк матрицы A вниз;

2) первые три слагаемых в формуле представляют собой произведение элементов, стоящих на главной диагонали и произведение элементов, находящихся на двух диагоналях параллельных главной. Четвертое, пятое и шестое слагаемые представляют собой произведения элементов, находящихся на побочной диагонали матрицы, и элементов, находящихся на двух диагоналях параллельных побочной, взятые с противоположным знаком.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 4\cdot8\cdot3 + 7\cdot2\cdot6 - 3\cdot5\cdot7 - 6\cdot8\cdot1 - 9\cdot2\cdot4 =$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

$$= 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

2.3. Вычисление определителей *n*-ого порядка

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} *определителя матрицы* A *порядка* n называется определитель порядка $(n-1)$, полученный из определителя матрицы A вычеркиванием i -ой строки и j -ого столбца.

Пример. Вычислить минор M_{23} для элемента a_{23} матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Решение. Вычиркнем элементы стоящие во второй строке и в третьем столбце матрицы A, получим:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-2-4=-6.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} для любого элемента a_{ij} определителя матрицы A называется число

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

где M_{ij} – минор для элемента a_{ij}.

Пример. Вычислить алгебраическое дополнение A_{32} для элемента a_{32} матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Решение. Вычиркнем элементы стоящие в третьей строке и во втором столбце матрицы A, получим:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(1-6)=$$

$$=(-1)\cdot(-5)=5.$$

Пример. Найти минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{32} для элемента a_{32} матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычиркнем элементы стоящие в третьей строке и во втором столбце матрицы A, получим:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 15 - 8 - 0 = -21;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -1 \cdot (-21) = 21.$$

Теорема Лапласа (1749-1827). *Определитель любой квадратной матрицы можно вычислить как сумму произведений элементов любой строки или любого столбца на их алгебраические дополнения*:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель матрицы с помощью разложения по элементам первой строки:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (45 - 48) + 2 \cdot (-1) \cdot (36 - 42) + 3 \cdot 1 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы четвертого порядка
$$A=\begin{pmatrix}2&2&0&1\\2&1&3&4\\1&1&0&2\\5&2&1&0\end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель разложением по третьему столбцу.

$$\det A=\begin{vmatrix}2&2&0&1\\2&1&3&4\\1&1&0&2\\5&2&1&0\end{vmatrix}=a_{13}\cdot A_{13}+a_{23}\cdot A_{23}+a_{33}\cdot A_{33}+a_{43}\cdot A_{43}=\qquad A=\begin{pmatrix}2&2&0&1\\2&1&3&4\\1&1&0&2\\5&2&1&0\end{pmatrix}$$

$$=0\cdot(-1)^{1+3}\cdot M_{13}+3\cdot(-1)^{2+3}\cdot M_{23}+0\cdot(-1)^{3+3}\cdot M_{33}+1\cdot(-1)^{4+3}\cdot M_{43}=$$

$$=-3\cdot\begin{vmatrix}2&2&1\\1&1&2\\5&2&0\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2&2&1\\2&1&4\\1&1&2\end{vmatrix}=-3\cdot9-(-3)=-24.$$

2.4. Свойства определителей

Рассмотрим свойства, которыми обладает произвольный определитель n-го порядка.

1. При транспонировании матрицы определитель не меняет свой знак.

Например, для матриц второго порядка $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ и $A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}$ имеем

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\det A^T=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\det A.$$

2. Если все элементы какой-нибудь строки (или столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

Например, для матрицы второго порядка $A=\begin{pmatrix}a_{11}&0\\a_{21}&0\end{pmatrix}$ имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - a_{21} \cdot 0 = 0 .$$

3. При перестановке двух любых строк (или столбцов) определитель меняет свой знак на противоположный.

Например, для матриц второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$ имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\det A .$$

4. Если две строки (или столбца) определителя одинаковы, то он равен нулю.

Например, для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}$ имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{21} - a_{21} \cdot a_{11} = 0 .$$

5. Если все элементы одной строки (или столбца) определителя умножить на одно и тоже число, то и весь определитель умножится на это число. Другими словами, общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно выносить за знак определителя.

Например, для матриц второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\det B = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\det A.$$

6. Если все элементы одной строки (или столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой строки (или столбца), то определитель равен нулю.

Например, для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} ka_{21} & ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{21}a_{22} - ka_{22}a_{21} = k(a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21}) = k \cdot 0 = 0.$$

7. Если к одной строке (или столбцу) определителя прибавить одну или несколько строк (столбцов), умноженных на любые числа, то значение определителя не изменится.

Например, для матриц второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}(a_{11} + ka_{21}) - a_{21}(a_{12} + ka_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22} + ka_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - ka_{21}a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A.$$

8. Если хотя бы одна строка (или столбец) определителя линейно выражается через другие строки (столбцы), то он равен нулю.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Вычислить определители.

1.1. $|5|$

1.2. $|-12|$

1.3. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

1.4. $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

1.5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ 1.6. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 8 & 6 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

1.7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ 1.8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Задание 2. Для матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ вычислить миноры и алгебраические дополнения M_{11}, M_{23}, M_{31}, A_{11}, A_{23}, A_{32}.

Задание 3. Вычислить определители третьего порядка, используя их свойства.

3.1. $\det A = \begin{vmatrix} -9 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}$ 3.2. $\det B = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

3.3. $\det C = \begin{vmatrix} -5 & -9 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 3.4. $\det D = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 8 & 24 & -8 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

Задание 4. Вычислить определители четвертого порядка, используя их свойства:

4.1. $\det A = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 9 & -6 & 7 \\ -1 & -1 & -8 & 0 \\ 8 & 9 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ 4.2. $\det B = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 9 & -1 & 9 \\ -7 & -6 & -8 & 3 \\ -8 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

4.3. $\det C = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 7 \\ -3 & -1 & -7 & -8 \\ 8 & 9 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ 4.4. $\det D = \begin{vmatrix} -8 & -1 & -1 & 0 \\ -6 & 9 & 0 & 7 \\ -7 & -1 & -3 & -8 \\ 3 & 9 & 8 & -4 \end{vmatrix}$

4.5. $\det E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 7 \\ -1 & -1 & -8 & 0 \\ 8 & 9 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ 4.6. $\det F = \begin{vmatrix} -9 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 9 & -6 & 7 \\ -3 & -1 & -8 & 0 \\ 24 & 9 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

Задание 5. Вычислить определители пятого порядка:

5.1. $\det A = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 8 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ 5.2. $\det B = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 & -6 & 7 \\ -1 & -4 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Ответы:

Задание 1.

1.1. 5	1.2. -12	1.3. 11	1.4. -6
1.5. 67	1.6. 0	1.7. 45	1.8. -4

Задание 2.

$M_{11} = 44$, $M_{23} = 1$, $M_{31} = -103$,

$A_{11} = 44$, $A_{23} = -1$, $A_{32} = 11$.

Задание 3.

3.1. $\det A = 142$ 3.2. $\det B = -142$

3.3. $\det C = -142$ 3.4. $\det D = -568$

Задание 4.

4.1. $\det A = -5977$ 4.2. $\det B = -5977$ 4.3. $\det C = 5977$

4.4. $\det D = -5977$ 4.5. $\det E = 0$ 4.6. $\det F = -17931$

Задание 5.

5.1. $\det A = -1536$ 5.2. $\det B = -448$

3. Обратная матрица

3.1. Понятие обратной матрицы

Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной к матрице А*, если в результате умножения матрицы A на матрицу A^{-1} как справа, так и слева, получается единичная матрица того же порядка, что и матрица A, т.е.

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Квадратная матрица A, определитель которой отличен от нуля ($\det A \neq 0$), называется *невырожденной*; в противном случае (т.е. когда $\det A = 0$) матрица называется *вырожденной*.

Теорема. Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная.

3.2. Нахождение обратной матрицы

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Для исходной матрицы A находим ее определитель $\det A$. Если $\det A = 0$, то матрица A вырожденная, следовательно, обратная матрица A^{-1} не существует. Если $\det A \neq 0$, то матрица A невырожденная, следовательно, обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} для всех элементов a_{ij} матрицы A.

3. Из найденных алгебраических дополнений составляем матрицу.

4. Транспонируем матрицу, составленную из алгебраических дополнений, получаем присоединенную матрицу $\widetilde{A}$.

5. Находим обратную матрицу A^{-1}, умножив присоединенную матрицу $\widetilde{A}$ на число $\dfrac{1}{\det A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

6. Проверяем правильность нахождения обратной матрицы, используя ее определение.

Пример. Для матрицы второго порядка $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ найти обратную A^{-1}.

Решение.

1. Находим определитель исходной матрицы: $\det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2+3=5$.

2. Вычисляем алгебраические дополнения для всех элементов исходной матрицы: $A_{11}=1$, $A_{12}=-(-1)=1$, $A_{21}=-3$, $A_{22}=2$.

3. Из алгебраических дополнений составляем матрицу: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

4. Находим присоединенную матрицу $\widetilde{A}$, для этого транспонируем матрицу, составленную из алгебраических дополнений: $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5. Умножаем присоединенную матрицу $\widetilde{A}$ на число $\dfrac{1}{\det A}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\widetilde{A}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}6\\ 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}.$$

6. Выполняем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}6\\ 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}2 & 2\cdot(-0{,}6)+3\cdot 0{,}4\\ (-1)\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}2 & (-1)\cdot(-0{,}6)+1\cdot 0{,}4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы третьего порядка $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ -2 & -1 & 2\\ -6 & 7 & -2\end{pmatrix}$.

Решение.

1. Вычисляем определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -3 & 4\\ -2 & -1 & 2\\ -6 & 7 & -2\end{vmatrix}=2+36-56-24-14+12=-44.$$

2. Находим алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 7 & -2\end{vmatrix}=2-14=-12;\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -6 & -2\end{vmatrix}=-(4+12)=-16$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -6 & 7\end{vmatrix}=-14-6=-20;\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 7 & -2\end{vmatrix}=-(6-28)=22;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ -6 & -2\end{vmatrix}=-2+24=22;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ -6 & 7\end{vmatrix}=-(7-18)=11;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-6+4=-2;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-(2+8)=-10;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-1-6=-7.$$

3. Из найденных алгебраических дополнений составляем матрицу:

$$\begin{pmatrix}-12 & -16 & -20\\ 22 & 22 & 11\\ -2 & -10 & -7\end{pmatrix}.$$

4. Находим присоединенную матрицу $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-12 & 22 & -2\\ -16 & 22 & -10\\ -20 & 11 & -7\end{pmatrix}.$$

5. Умножаем присоединенную матрицу $\widetilde{A}$ на число $\dfrac{1}{\det A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = -\frac{1}{44}\begin{pmatrix} -12 & 22 & -2 \\ -16 & 22 & -10 \\ -20 & 11 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{44} & -\frac{22}{44} & \frac{2}{44} \\ \frac{16}{44} & -\frac{22}{44} & \frac{10}{44} \\ \frac{20}{44} & -\frac{11}{44} & \frac{7}{44} \end{pmatrix}.$$

6. Выполняем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{12}{44} & -\frac{22}{44} & \frac{2}{44} \\ \frac{16}{44} & -\frac{22}{44} & \frac{10}{44} \\ \frac{20}{44} & -\frac{11}{44} & \frac{7}{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -6 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Для нахождения обратной матрицы рассмотрим *метод элементарных преобразований строк матрицы*, который в дальнейшем будем называть *методом Гаусса*.

Этот метод значительно уменьшает количество арифметических операций по сравнению с традиционным методом, связанных с нахождением определителя матрицы, и вычисления алгебраических дополнений для всех ее элементов.

Для нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований над строками матрицы необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Слева к матрице A приписываем единичную матрицу такой же размерности, что и матрица A, т.е. $(A \mid E)$.

2. Выполняем «*прямой ход*». С помощью элементарных преобразований обнуляем все элементы левой матрицы, стоящие под ее главной диагональю, т.е. приводим левую матрицу к верхнетреугольному виду.

3. Выполняем «*обратный ход*». С помощью элементарных преобразований обнуляем все элементы полученной левой матрицы, стоящие над ее главной диагональю, т.е. приводим левую матрицу к диагональному виду.

4. Элементы главной диагонали левой матрицы, преобразуем в единицы, т.е. приводим левую матрицу к единичной.

5. В правой части полученной матрицы будет находиться обратная матрица, т.е. $\left(E \mid A^{-1}\right)$.

К *элементарным* (*эквивалентным*) преобразованиям относятся следующие операции:

1) перестановка двух любых строк (или столбцов) местами;

2) умножение строки (или столбца) на число отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число отличное от нуля.

Пример. С помощью элементарных преобразований найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -12 \\ -1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & -11 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Справа к матрице A припишем единичную матрицу E такого же размера, как и матрица A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. «*Прямой ход*». Обнулим все элементы первого столбца, стоящие под главной диагональю. Для этого элементы второй строки умножим на 3 и сложим с элементами первой строки (коротко запишем так: $3c_2 + c_1$). Затем, из элементов третьей строки отнимем элементы первой строки (т.е. $c_3 - c_1$). В результате получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Обнулим элементы второго столбца, стоящие под главной диагональю. Для этого от элементов второй строки отнимем элементы третьей строки, умноженные на 5 (т.е. $5c_3 - c_2$). В результате слева получим верхнетреугольную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

3. «*Обратный ход*». Обнулим элементы третьего столбца, стоящие над главной диагональю. Для этого элементы третьей строки умножим на 12 и сложим с элементами первой строки (т.е. $12c_3 + c_1$). Затем, элементы третьей строки умножим на (-6) и сложим с элементами второй строки (т.е. $-6c_3 + c_2$). В результате получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 73 & 36 & -60 \\ 0 & 5 & 0 & -35 & -15 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

Обнулим элементы второго столбца, стоящие над главной диагональю. Для этого от элементов первой строки, умноженных на 5, отнимем элементы второй строки, умноженные на 2 (т.е. $5c_1 - 2c_2$). В результате слева получим диагональную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 435 & 210 & -360 \\ 0 & 5 & 0 & -35 & -15 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

4. Приведем левую матрицу к единичной, для этого элементы первой строки разделим на 15, элементы второй строки разделим на 5. Получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 29 & 14 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

Находящаяся справа матрица и является обратной для матрицы A, т.е.
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 29 & 14 & -24 \\ -7 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

3.4. Решение матричных уравнений

Понятие обратной матрицы позволяет найти решения следующих матричных уравнений:

$$AX = C, \quad XB = C, \quad AXB = C.$$

Решением этих уравнений являются матрицы, вычисляемые по формулам:

$$X = A^{-1}C, \quad X = CB^{-1}, \quad X = A^{-1}CB^{-1}$$

при условии, что A и B имеют обратные матрицы.

Пример. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Для нахождения решения воспользуемся формулой: $X = A^{-1}C$.

Найдем обратную матрицу:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\det A = -1$, $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда

$X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Найти обратную матрицу. Сделать проверку.

1.1. $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

1.2. $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$

1.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ 1.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

Задание 2. Выполнить действия над матрицами.

2.1. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -22 & -5 \end{pmatrix}$ 2.2. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} + 2\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

2.3. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ 2.4. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$

2.5. $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{2}$ 2.6. $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-2}$

Задание 3. Найти значение матричного выражения $8A^{-1} - 3AB$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 4. Найти значение матричного выражения $A^2 + 6A^{-1} - 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 5. Решить матричные уравнения:

5.1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

5.2. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

5.3. $X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

5.4. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

5.5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ответы:

Задание 1.

1.1. $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ 1.2. $\begin{pmatrix} -0{,}6 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

1.3. $\begin{pmatrix} -0{,}3 & -0{,}2 & 0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 1{,}7 & -0{,}2 & -0{,}7 \end{pmatrix}$ 1.4. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ -3 & 6 & -5 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

Задание 2.

2.1. $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ 2.2. $\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ 2.3. $\begin{pmatrix} -18 & 51 \\ -11 & 31 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}$

2.4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 11 & -6 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ 2.5. $\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -3 & -14 \end{pmatrix}$ 2.6. $\begin{pmatrix} 11 & -35 \\ -5 & 16 \end{pmatrix}$

Задание 3. $\begin{pmatrix} 34 & 3 \\ 20 & 7 \end{pmatrix}$.

Задание 4. $\begin{pmatrix} 51 & -20 & -12 \\ -36 & 3 & -4 \\ 80 & -8 & -25 \end{pmatrix}$.

Задание 5.

5.1. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 5.2. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 20 \\ -1 & -3 & 28 \\ -2 & -1 & 17 \end{pmatrix}$ 5.3. $\begin{pmatrix} 18 & -3 \\ 9 & -6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$

5.4. $\begin{pmatrix} -7 & -13 \\ -10 & -19 \end{pmatrix}$ 5.5. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -6 \\ 1 & 7 & -5 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

4. Ранг матрицы

4.1. Понятие ранга матрицы

Минором k-го порядка матрицы A называется определитель k-го порядка с элементами, расположенными на пересечении любых k строк и любых k столбцов матрицы A.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы A обозначается $rang\ A$ или $rk(A)$.

Следствия из определения

1. Ранг матрицы A_{mn} не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $rk(A)\leq min(m;n)$.

2. $rk(A)=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю.

3. Для квадратной матрицы n-го порядка $rk(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная.

Пример. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Для ранга исходной матрицы выполняется следующее условие: $0<rk(A)\leq min(3;4)$, т.е. $rk(A)\leq 3$.

Проверим, равен ли ранг 3, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка равны нулю, то $rk(A)\leq 2$. Т.к. существует минор второго порядка отличный от нуля, например:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-7$, то $rk(A)=2$.

4.2. Метод окаймляющих миноров

Ранг матрицы можно вычислить методом окаймляющих миноров. Метод использует достаточно простой алгоритм.

Следует отметить, что ранг матрицы не меньше единицы, если матрица содержит хотя бы один ненулевой элемент.

При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков.

Если найден минор *k*-го порядка, определитель которого отличен от нуля, то требуется вычислить миноры (*k*+1)-го порядка, окаймляющие этот минор.

Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен *k*.

Пример. Методом окаймляющих миноров вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 & 4 \\ -5 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как исходная матрица содержит ненулевые элементы, то $0 < rk(A) \leq 3$.

Найдем хотя бы один минор второго порядка отличный от нуля.

Рассмотрим минор, составленный из первой, второй строк и первого, второго столбцов исходной матрицы A:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 & 4 \\ -5 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Полученный минор отличен от нуля: $M_2=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=6\neq 0$.

Следовательно, $rk(A) \geq 2$.

Рассмотрим окаймляющие миноры третьего порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -5 & 4 \end{matrix} & 7 \end{vmatrix} = 0,\; M_3 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -5 & 4 \end{matrix} & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры, окаймляющие минор M_2, равны нулю. Следовательно, $rk(A) = 2$.

4.3. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований

Матрица A_{mn} называется *трапецеидальной*, если она имеет вид

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ отличны от нуля.

Каждую матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести в трапецеидальную форму.

Элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы и *ранг трапецеидальной матрицы равен числу ненулевых строк*.

Для нахождения ранга матрицы необходимо выполнить следующие действия:

1) с помощью элементарных преобразований привести исходную матрицу к трапецеидальному виду (для квадратной матрицы – это верхнетреугольная матрица);

2) количество ненулевых строк будет равняться рангу исходной матрицы.

Пример. С помощью элементарных преобразований вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 & 4 \\ -5 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение. Умножим все элементы первой строки исходной матрицы на (-3) и сложим с соответствующими элементами второй строки (т.е. $-3c_1 + c_2$). Далее, умножим все элементы первой строки исходной матрицы на (-5) и сложим с соответствующими элементами третьей строки (т.е. $-5c_1 + c_3$). Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отнимем от каждого элемента второй строки соответствующие элементы третьей строки, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таком образом, получили трапецеидальную матрицу, которая содержит одну нулевую строку и две ненулевые строки.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $rk(A) = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Найти все окаймляющие миноры для выделенного минора второго порядка:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 & -3 \\ 3 & 8 & -5 & 2 \\ 8 & 7 & -5 & 8 \\ -7 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Найти ранг матрицы.

2.1. $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ 2.2. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.3. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ:

Задание 1.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 3 & 8 & -5 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 8 & 7 & -5 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 8 & -5 & 8 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задание 2.

2.1. rk=1, 2.2. rk=3, 2.3. $rkA=3$, 2.4. $rkA=3$.

5. Системы линейных алгебраических уравнений

5.1. Основные понятия систем линейных уравнений

5.1.1. Линейное уравнение

Линейным уравнением относительно неизвестных x_1, x_2, x_3, …, x_n называется выражение вида:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n=b,$$

где a_1, a_2, a_3, …, a_n – коэффициенты при неизвестных, b – свободный член.

Представленную форму записи уравнений принято называть общей.

Набор чисел $(k_1;k_2;k_3;\ldots;k_n)$ является решением уравнения, если при подстановке этих чисел в уравнение выполняется равенство:

$$a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3+\ldots+a_nk_n=b.$$

Таких решений может быть либо бесчисленное множество, либо ни одного. Например, решением уравнения

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 5$$

являются наборы чисел (2; 0; 3; 1), (-1; 4; -2; 0), (0; 0; 0; 1), …

Линейные уравнения иногда удобно представить в следующем виде:

$$x_i = a_1 x_1 + \ldots + a_{i-1} x_{i-1} + a_{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_n x_n + b\,.$$

Записанные подобным образом уравнения называют *разрешенными* относительно переменной x_i. В отличие от общей формы записи левая часть разрешенного уравнения содержит только одну переменную x_i с коэффициентом равным единице, а в правую часть переносятся все другие слагаемые. Любое линейное уравнение можно записать в виде разрешенного уравнения.

Пример. Уравнение $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 7$ разрешить относительно переменной x_3.

Решение. Для того чтобы исходное уравнение разрешить относительно переменной x_3, необходимо все слагаемые, кроме x_3, перенести в правую часть и разделить все коэффициенты уравнения на –2. В результате получим следующее уравнение:

$$x_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - 4x_4 + \frac{7}{2}\,.$$

Среди линейных уравнений можно выделить некоторые типы уравнений:

1. *Противоречивое уравнение*

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = b, \quad (b \neq 0)\,.$$

Противоречивые уравнения не имеют решений. Действительно, левая часть противоречивого уравнения при любых значениях переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n$ равна нулю, а правая часть, содержащая свободный член $b \neq 0$, отлична от нуля. Примером противоречивого уравнения может служить уравнение:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 3.$$

2. *Тривиальное уравнение*

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = 0.$$

Этот тип уравнений отличается от противоречивого уравнения тем, что свободный член b равен нулю. Решением тривиальных уравнений является любой набор из n чисел. Например, присвоив произвольные значения переменным x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 в уравнении

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0,$$

всегда получим верное равенство.

3. *Однородное уравнение*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_n x_n = 0.$$

Однородные уравнения имеют бесконечное множество решений. Например, решением однородного уравнения

$$2x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

являются наборы чисел (1; 1; 0; 1), (1; 1; 6; 3), (1; 1; 3; 2), …

5.1.2. Понятие системы линейных уравнений

Система алгебраических уравнений вида

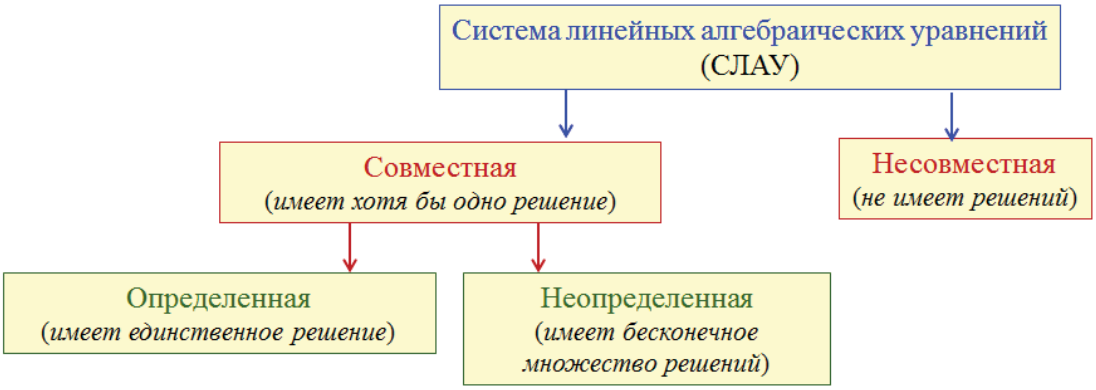
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

называется системой из *m* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{mn}$ называются коэффициентами при неизвестных x_1, x_2, x_3, x_n, а числа $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ – свободными членами.

Набор чисел $(k_1; k_2; k_3; \ldots; k_n)$ называется решением системы уравнений, если он удовлетворяет этой системе, т.е. при подстановке этих чисел в систему каждое из уравнений обращается в верное равенство.

По количеству решений выделяют четыре вида систем.



Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместные системы линейных уравнений могут иметь либо одно, либо бесконечное множество решений. В первом случае системы называются *определенными*, во втором – *неопределенными*. Например, система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$$

имеет единственное решение (1; 2; -1). Следовательно, данная система является определенной.

Система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

является неопределенной, так как имеет бесконечное множество решений {(1; 0; 0), (-4; 6; 7), …}.

Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*. Примером несовместной системы может служить система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Очевидно, что данная система не может иметь ни одного решения.

Системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одно и тот же множество решений. Например, системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 36 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases}, \qquad \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -12 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases}$$

являются эквивалентными, так как имеют единственное решение (3; -1; -5).

Любую из систем линейных уравнений можно получить из другой эквивалентной системы с помощью *элементарных преобразований*.

К элементарным преобразованиям над уравнениями системы относятся следующие операции:

1) перестановка уравнений в системе;

2) добавление или вычеркивание тривиального уравнения;

3) умножение уравнения на отличное от нуля число;

4) прибавление к обеим частям уравнения соответственных частей другого уравнения системы.

Все остальные эквивалентные преобразования можно представить как комбинации четырех вышеперечисленных операций над уравнениями системы.

Не сложно заметить, что в примере вышеуказанных эквивалентных систем первая система получается из второй, при умножении первого уравнения второй системы на -3:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -12 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -3c_1 \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 36 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases}.$$

5.1.3. Матричная форма записи системы линейных уравнений

Любую систему из m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

можно представить в матричном виде:

$$AX = B,$$

где $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – *матрица свободных членов,* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ – *матрица неизвестных,* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – *общая матрица системы.*

Пример. Представить систему линейных уравнений в матричном виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение. Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда исходная система примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Еще один способ записи систем линейных уравнений состоит в дополнении общей матрицы системы столбцом свободных членов.

$$A_B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Пример. Записать расширенную матрицу системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица имеет следующий вид:

$$A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & -8 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right).$$

5.1.4. Необходимое и достаточное условие совместности системы линейных уравнений

Расширенная матрица имеет определяющее значение для установления совместности системы линейных алгебраических уравнений. Основным методом решения данного вопроса является использование следующей теоремы.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг общей матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

Пример. Определить, является ли совместной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранги общей и расширенной матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \ rang(A) = 3,$$

$$A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & -8 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right), \ rang(A_B) = 3.$$

Т.к. $rang(A) = rang(A_B) = 3$, то исходная система линейных уравнений является совместной.

5.2. Методы решения систем линейных уравнений

5.2.1. Метод обратной матрицы

Рассмотрим систему, состоящую из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Такие системы принято называть квадратными. Общая матрица системы также является квадратной.

Запишем систему в матричном виде:

$$AX = B.$$

Предположим, что общая матрица системы является невырожденной, т.е. определитель основной матрицы отличен от нуля. Для таких матриц существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части матричного уравнения слева на A^{-1}.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Учитывая, что $A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица, получим формулу:

$$X = A^{-1}B.$$

Если общая матрица A вырождена, то система линейных алгебраических уравнений будет либо несовместной, либо совместной, но неопределенной.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -13 \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -38 \\ -3x_1 + x_2 + 7x_3 = -45 \end{cases}.$$

Решение.

1. Выпишем общую матрицу системы A, матрицу свободных членов B,

матрицу неизвестных *X*:

$$A=\begin{pmatrix}1&5&-3\\8&3&2\\-3&1&7\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-13\\-38\\-45\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

2. Найдем обратную матрицу A^{-1}, используя формулу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}&\dots&A_{n2}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}&\dots&A_{n3}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&A_{3n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Для этого вычислим определитель матрицы системы и алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы *A*:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&5&-3\\8&3&2\\-3&1&7\end{vmatrix}=-342;\qquad A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&2\\1&7\end{vmatrix}=19;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8&2\\-3&7\end{vmatrix}=-62;\qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}8&3\\-3&1\end{vmatrix}=17;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&-3\\1&7\end{vmatrix}=-38;\qquad A_{12}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&-3\\-3&7\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&5\\-3&1\end{vmatrix}=-16;\qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&-3\\3&2\end{vmatrix}=19;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-3\\8&2\end{vmatrix}=-26;\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&5\\8&3\end{vmatrix}=-37.$$

Таким образом, обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=-\frac{1}{342}\begin{pmatrix}19&-38&19\\-62&-2&-26\\17&-16&-37\end{pmatrix}.$$

3. Подставив найденную обратную матрицу в формулу для нахождения решения системы, получим:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-342}\begin{pmatrix} 19 & -38 & 19 \\ -62 & -2 & -26 \\ 17 & -16 & -37 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 \\ -38 \\ -45 \end{pmatrix} = \frac{1}{-342}\begin{pmatrix} 342 \\ 2052 \\ 2052 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решением исходной системы уравнений является $(-1; -6; -6)$.

5.2.2. Метод Крамера

Рассмотрим квадратную систему, состоящую из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

Общая матрица системы A и матрица-столбец свободных членов B для исходной системы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Заменим первый столбец общей матрицы системы A на столбец свободных членов B, тогда получим дополнительную матрицу X_1:

$$X_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Заменим второй столбец общей матрицы системы A на столбец свободных членов B, тогда получим дополнительную матрицу X_2:

$$X_2 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Аналогично получим все остальные дополнительные матрицы $X_3, \ \dots, X_n$

Таким образом, для решения системы линейных алгебраических уравнений справедливы следующие формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\det X_1}{\det A}; \quad x_2 = \frac{\det X_2}{\det A}; \quad \dots \quad x_n = \frac{\det X_n}{\det A}.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 9; \\ -2x - y + 2z = 5; \\ -6x + 7y - 2z = 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Для исходной системы выпишем общую матрицу системы A и матрицу-столбец свободных членов B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -6 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найдем определитель матрицы системы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 36 - 56 - 24 - 14 + 12 = -44.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

3. Заменим соответствующие столбцы матрицы A на столбец свободных членов B и выпишем дополнительные матрицы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ -6 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -2 & -1 & 5 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Для нахождения решения по формулам Крамера найдем определители дополнительных матриц:

$$\det X_1 = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 18 - 6 + 140 + 4 - 126 - 30 = 0;$$

$$\det X_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ -6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 108 - 8 + 120 - 2 - 36 = -44;$$

$$\det X_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -2 & -1 & 5 \\ -6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 90 - 126 - 54 - 35 - 6 = -132.$$

Таким образом, получаем:

$$x = \frac{\det X_1}{\det A} = \frac{0}{-44} = 0; \quad y = \frac{\det X_2}{\det A} = \frac{-44}{-44} = 1; \quad z = \frac{\det X_3}{\det A} = \frac{-132}{-44} = 3.$$

Решение системы имеет вид: (0; 1; 3).

Пример. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -106 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_4 = 20 \\ 5x_1 - 4x_3 - x_4 = -16 \\ -4x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -10 \end{cases}.$$

Решение.

1. Для исходной системы выпишем общую матрицу системы A и матрицу-столбец свободных членов B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -6 & -5 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} -106 \\ 20 \\ -16 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

2. Заменим соответствующие столбцы матрицы A на столбец свободных членов B и выпишем дополнительные матрицы:

$$X_1=\begin{pmatrix}-106 & -5 & 6 & 0\\ 20 & 4 & 0 & 7\\ -16 & 0 & -4 & -1\\ -10 & -4 & -6 & -5\end{pmatrix};\qquad X_2=\begin{pmatrix}3 & -106 & 6 & 0\\ 5 & 20 & 0 & 7\\ 5 & -16 & -4 & -1\\ 0 & -10 & -6 & -5\end{pmatrix};$$

$$X_3=\begin{pmatrix}3 & -5 & -106 & 0\\ 5 & 4 & 20 & 7\\ 5 & 0 & -16 & -1\\ 0 & -4 & -10 & -5\end{pmatrix};\qquad X_4=\begin{pmatrix}3 & -5 & 6 & -106\\ 5 & 4 & 0 & 20\\ 5 & 0 & -4 & -16\\ 0 & -4 & -6 & -10\end{pmatrix}.$$

3. Найдем определители основной и дополнительных матриц

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & -5 & 6 & 0\\ 5 & 4 & 0 & 7\\ 5 & 0 & -4 & -1\\ 0 & -4 & -6 & -5\end{vmatrix}=-1228;$$

$$\det X_1=\begin{vmatrix}-106 & -5 & 6 & 0\\ 20 & 4 & 0 & 7\\ -16 & 0 & -4 & -1\\ -10 & -4 & -6 & -5\end{vmatrix}=9824;\quad \det X_2=\begin{vmatrix}3 & -106 & 6 & 0\\ 5 & 20 & 0 & 7\\ 5 & -16 & -4 & -1\\ 0 & -10 & -6 & -5\end{vmatrix}=-9824;$$

$$\det X_3=\begin{vmatrix}3 & -5 & -106 & 0\\ 5 & 4 & 20 & 7\\ 5 & 0 & -16 & -1\\ 0 & -4 & -10 & -5\end{vmatrix}=8596;\quad \det X_4=\begin{vmatrix}3 & -5 & 6 & -106\\ 5 & 4 & 0 & 20\\ 5 & 0 & -4 & -16\\ 0 & -4 & -6 & -10\end{vmatrix}=-4912.$$

4. Подставив найденные значения определителей в формулы Крамера, получим

$$x_1=\frac{\det X_1}{\det A}=\frac{9824}{-1228}=-8;\qquad x_2=\frac{\det X_2}{\det A}=\frac{-9824}{-1228}=8;$$

$$x_3=\frac{\det X_1}{\det A}=\frac{8596}{-1228}=-7;\qquad x_2=\frac{\det X_2}{\det A}=\frac{-4912}{-1228}=4.$$

Решение системы имеет вид: (-8; 8; -7; 4).

5.2.3 Метод Гаусса

Наиболее универсальным алгоритмом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса.

Если метод обратной матрицы и метод Крамера можно использовать только для квадратных систем линейных уравнений, то метод Гаусса применим для любой системы. Кроме того, в ходе решения этим методом можно определить совместность исходной системы.

Рассмотрим систему линейных уравнений общего вида и соответствующую ей расширенную матрицу:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad A_B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Первая часть метода Гаусса называется «прямым ходом». Она заключается в том, чтобы, используя элементарные преобразования над уравнениями системы, привести расширенную матрицу системы к виду, когда под элементами с одинаковыми индексами располагаются только нулевые элементы:

$$A'_B = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \ldots & a'_{1m} & a'_{1m+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \ldots & a'_{2m} & a'_{2m+1} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \ldots & a'_{3m} & a'_{3m+1} & \ldots & a'_{3n} & b'_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a'_{mm} & a'_{mm+1} & \ldots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right).$$

Если система несовместна, то полученная путем преобразований матрица будет содержать хотя бы одну строку вида:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,\big|\, b'_j \qquad (b'_j \neq 0).$$

Если таких строк нет, то система уравнений является совместной.

В преобразованной матрице соответствующей совместной системе линейных уравнений могут появиться строки вида:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,\big|\, 0.$$

Этого означает, что соответствующие таким строкам уравнения представляют собой линейную комбинацию других уравнений системы. Эти строки в матрице необходимо удалить.

Предположим, что в преобразованной матрице осталось k ненулевых строк из m. Тогда в случае совместности системы линейных уравнений используется вторая часть метода Гаусса, называемая «обратный ход». С помощью элементарных преобразований полученная матрица преобразуется к виду:

$$A''_B = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a''_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & a''_{1,k+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 & \dots & 0 & a''_{2,k+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & 0 & a''_{3,k+1} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{kk} & a''_{k,k1} & \dots & a''_{kn} & b''_k \end{array}\right).$$

Если $k<n$, то система линейных уравнений будет неопределенной, и иметь бесконечное множество решений. Переменные x_1, …, x_k, называются базисными, а неизвестные x_{k+1}, …, x_n, соответственно, – свободными. Затем свободные переменные вместе с соответствующими коэффициентами переносятся в правую часть уравнений системы. Таким образом, решение системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b''_1 - a''_{1,k+1}x_{k+1} - \ldots - a''_{1n}x_n}{a''_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b''_2 - a''_{2,k+1}x_{k+1} - \ldots - a''_{2n}x_n}{a''_{22}} \\ x_3 = \dfrac{b''_3 - a''_{3,k+1}x_{k+1} - \ldots - a''_{3n}x_n}{a''_{33}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = \dfrac{b''_k - a''_{k,k+1}x_{k+1} - \ldots - a''_{kn}x_n}{a''_{kk}} \end{cases}.$$

В случае если $k=n$, решаемая система линейных уравнений является определенной, а матрица, полученная «обратным ходом» будет иметь вид:

$$A''_B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a''_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 & \dots & 0 & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & 0 & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{nn} & b''_n \end{array}\right).$$

Следовательно, единственное решение системы уравнений можно записать в виде:

$$\left\{\frac{b_1''}{a_{11}''};\frac{b_2''}{a_{22}''};\frac{b_3''}{a_{33}''};\ldots;\frac{b_n''}{a_{nn}''}\right\}.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases}5x_1-6x_2+x_3-6x_4=-57\\3x_1+4x_2-2x_3+5x_4=24\\-2x_1-x_2+x_3+6x_4=34\\-4x_1+6x_2+7x_3-4x_4=4\end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}5&-6&1&-6&-57\\3&4&-2&5&24\\-2&-1&1&6&34\\-4&6&7&-4&4\end{array}\right).$$

Применяя элементарные преобразования, добьемся того, чтобы все элементы матрицы, находящиеся ниже элемента a_{11} были равны нулю. Для обнуления элемента a_{21} достаточно из произведения второй строки на 5 вычесть первую строку, умноженную на 3. Для того чтобы $a_{31}=0$, к первой строке, умноженной на пять, прибавить вторую, умноженную на 2, а для того, чтобы a_{41} равнялся нулю, можно сложить первую и третью строки, увеличенные в 5 и 4 раз соответственно:

$$\begin{array}{r}\\5c_2-3c_1\\5c_3+2c_1\\5c_4+4c_1\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}5&-6&1&-6&-57\\5\cdot3-3\cdot5&5\cdot4-3\cdot(-6)&5\cdot(-2)-3\cdot1&5\cdot5-3\cdot(-6)&5\cdot24-3\cdot(-57)\\5\cdot(-2)+2\cdot5&5\cdot(-1)+2\cdot(-6)&5\cdot1+2\cdot1&5\cdot6+2\cdot(-6)&5\cdot34+2\cdot(-57)\\5\cdot(-4)+4\cdot5&5\cdot6+4\cdot(-6)&5\cdot7+4\cdot1&5\cdot(-4)+4\cdot(-6)&5\cdot4+4\cdot(-57)\end{array}\right).$$

В результате арифметических действий получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}5&-6&1&-6&-57\\0&38&-13&43&291\\0&-17&7&18&56\\0&6&39&-44&-208\end{array}\right).$$

Теперь, добьемся того, чтобы под элементом a_{22} оставались только нулевые элементы, для этого выполним соответствующие элементарные преобразования с системой. Первая и вторая строки остаются без изменений, преобразуются только третья и четвертая строки:

$$\begin{array}{r} \\ \\ 38c_3+17c_2 \\ 19c_4-3c_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & & 291 \\ 0 & 38\cdot(-17)+17\cdot 38 & 38\cdot 7+17\cdot(-13) & 38\cdot 18+17\cdot 43 & & 38\cdot 56+17\cdot 291 \\ 0 & 19\cdot 6-3\cdot 38 & 19\cdot 39-3\cdot(-13) & 19\cdot(-44)-3\cdot 43 & & 19\cdot(-208)-3\cdot 291 \end{array}\right).$$

В получившейся системе коэффициенты третьей и четвертой строк можно сократить на 5:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 45 & 1415 & 7075 \\ 0 & 0 & 780 & -965 & -4825 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ c_3/5 \\ c_4/5 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 156 & -193 & -965 \end{array}\right).$$

Далее, с помощью элементарных преобразований системы обнуляем элемент a_{43}, изменяя при этом всю четвертую строку:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ 3c_4-52c_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 3\cdot 156-52\cdot 9 & 3\cdot(-193)-52\cdot 283 & 3\cdot(-965)-52\cdot 1415 \end{array}\right).$$

Произведем соответствующие расчеты и сократим на 15295 элементы четвертой строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 0 & 15295 & 76475 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ c_4/15295 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Таким образом, исходная общая матрица решаемой системы приведена к верхнему треугольному виду. Полученная путем преобразований матрица не содержит ни одной строки вида:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,\big|\, b'_j \quad (b'_j \neq 0).$$

На основании этого заключим, что система уравнений является совместной.

Продолжим модификацию матрицы «обратным ходом». Для этого выполним преобразования первой, второй и третьей строк таким образом, чтобы все элементы, находящиеся выше элемента a_{44}, были равны нулю:

$$\begin{array}{r} c_1+6c_4 \\ c_2-43c_4 \\ c_3-283c_4 \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6+6\cdot 1 & -57+6\cdot 5 \\ 0 & 38 & -13 & 43-43\cdot 1 & 291-43\cdot 5 \\ 0 & 0 & 9 & 283-283\cdot 1 & 1415-283\cdot 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Выполнив действия, сократим на 9 элементы третьей строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & 0 & -27 \\ 0 & 38 & -13 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ c_3/9 \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & 0 & -27 \\ 0 & 38 & -13 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Аналогично добьемся того, чтобы элементы a_{13} и a_{23} были равны нулю:

$$\begin{array}{r} c_1-c_3 \\ c_2+13c_3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1-1 & 0 & -27+0 \\ 0 & 38 & -13+13\cdot 1 & 0 & 76+13\cdot 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Произведем расчеты и разделим на 38 элементы второй строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 38 & 0 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ c_2/38 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

К первой строке прибавим, умноженную на 6, вторую строку:

$$\begin{array}{r} c_1+6c_2 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6+6\cdot 1 & 0 & 0 & -27+6\cdot 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right),$$

выполним действия и разделим на 5 коэффициенты первой строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} c_1/5 \\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Таким образом, в результате элементарных преобразований получили систему:

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 5 \end{cases},$$

которой соответствует единственное решение (-3; 2; 0; 5).

С помощью метода Гаусса можно решать и неопределенные системы.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -2 \\ -3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 11 \\ x_1 + 6x_2 + 16x_3 - 4x_4 = 9 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 11 \\ 1 & 6 & 16 & -4 & 9 \end{array}\right).$$

Выполним «прямой ход» метода Гаусса.

Используя обратные преобразования со второй и четвертой строками, добьемся того, чтобы все элементы первого столбца матрицы, кроме верхнего были равны нулю:

$$\begin{array}{c} \\ 2c_2 - c_1 \\ \\ 2c_4 - c_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 2\cdot 1-2 & 2\cdot 4-0 & 2\cdot 1-(-3) & 2\cdot(-5)-1 & 2\cdot(-2)-7 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 11 \\ 2\cdot 1-2 & 2\cdot 6-0 & 2\cdot 16-(-3) & 2\cdot(-4)-1 & 2\cdot 9-7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 11 \\ 0 & 12 & 35 & -9 & 11 \end{array}\right).$$

Аналогично, преобразуя систему, работаем со вторым столбцом:

$$\begin{array}{r} \\ \\ 8c_3+3c_2 \\ 2c_4-3c_2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 8\cdot(-3)+3\cdot 8 & 8\cdot 5+3\cdot 5 & 8\cdot 6+3\cdot(-11) & 8\cdot 11+3\cdot(-11) \\ 0 & 2\cdot 12-3\cdot 8 & 2\cdot 35-3\cdot 5 & 2\cdot(-9)-3\cdot(-11) & 2\cdot 11-3\cdot(-11) \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 55 & 15 & 55 \\ 0 & 0 & 55 & 15 & 55 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & -11 \end{array}\right).$$

И, наконец, обнуляем элемент, находящийся на пересечении четвертой строки и третьего столбца:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ c_4-c_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 11-11 & 3-3 & 11-11 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вычеркнем из матрицы получившееся тривиальное уравнение, находящееся в четвертой строке:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ c_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

Таким образом, система является совместной. Следовательно, можно выполнить «обратный ход».

Преобразуем матрицу так, чтобы в третьем столбце первой и второй строк появились нулевые элементы:

$$\begin{array}{l} 11c_1+3c_3 \\ 11c_2-5c_3 \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 11\cdot 2+3\cdot 0 & 11\cdot 0+3\cdot 0 & 11\cdot(-3+3)\cdot 11 & 11\cdot 1+3\cdot 3 & 11\cdot 7+3\cdot 11 \\ 0 & 11\cdot 8-5\cdot 0 & 11\cdot 5-5\cdot 11 & 11\cdot(-11)-5\cdot 3 & 11\cdot(-11)-5\cdot 11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Делим элементы первой и второй строк соответственно на 2 и 8:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 22 & 0 & 0 & 20 & 110 \\ 0 & 88 & 0 & -136 & -176 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} c_1/2 \\ c_2/8 \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 0 & 0 & 10 & 55 \\ 0 & 11 & 0 & -17 & -22 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

Таким образом, количество оставшихся после преобразования строк k меньше количества неизвестных n:

$$\begin{cases} 11x_1+10x_4=55 \\ 11x_2-17x_4=-22. \\ 11x_3+3x_4=11 \end{cases}$$

Следовательно, система линейных уравнений является неопределенной, и имеет бесконечное множество решений. Переменные системы x_1, x_2, x_3 являются базисными, а неизвестная x_4 – свободной. Свободные переменные вместе с соответствующими коэффициентами переносим в правую часть уравнений системы, а затем каждое уравнение делим на коэффициенты при базисных переменных.

Таким образом, решение системы будет выглядеть как система разрешенных уравнений относительно базисных переменных:

$$\begin{cases} 11x_1=-10x_4+55 \\ 11x_2=+17x_4-22 \\ 11x_3=-3x_4+11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{10}{11}x_4+5 \\ x_2=\dfrac{17}{11}x_4-2 \\ x_3=-\dfrac{3}{11}x_4+1 \end{cases}.$$

Поскольку x_4 принимает бесконечное множество решений, то решением системы можно представить в виде множества: $\left\{-\dfrac{10}{11}x_4;\ \dfrac{17}{11}x_4;\ -\dfrac{3}{11}x_4;\ x_4\right\}$.

5.3. Однородные системы линейных уравнений

5.3.1. Условия совместности однородных систем

Рассмотрим систему, содержащую только однородные линейные алгебраические уравнения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Такая система называется однородной системой линейных уравнений. Однородная система всегда совместна, поскольку ранг ее общей матрицы будет равен рангу расширенной матрицы:

$$rang\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = rang\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, что у каждой однородной системы линейных уравнений обязательно существует нулевое решение (0; 0; 0; …;0). Например, можно с уверенностью сказать, что для системы однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

одним из решений будет (0; 0; 0; 0).

Следует отметить, что у систем однородных уравнений могут быть и другие решения, отличные от нуля. Такие однородные системы называются *нетривиально совместными*.

Существование нетривиального решения однородной системы эквивалентно линейной зависимости столбцов общей матрицы системы, а это возможно только при вырожденности этой матрицы. Из этого заключения вытекает следующая теорема.

Теорема. Однородная система линейных алгебраических уравнений нетривиально совместна тогда и только тогда, когда ранг ее общей матрицы меньше числа ее столбцов.

Пример. Проверить существование нетривиальных решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг общей матрицы:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

Поскольку ранг матрицы равен трем и меньше числа столбцов, то данная система имеет нетривиальные решения.

Из этой теоремы вытекают следующие свойства.

Свойство 1. Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа ее неизвестных, то эта система имеет нетривиальные решения.

Это свойство очень удобно для использования. Например, все ниже перечисленные однородные системы являются нетривиально совместными:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ {}_1{-}5x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Свойство 2. Квадратная однородная система линейных уравнений имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда общая матрица системы вырождена.

Данное свойство применимо только для однородных систем, в которых количество уравнений равно количеству неизвестных. Рассмотрим две квадратные однородные системы линейных уравнений:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Первая система является нетривиально совместной, поскольку определитель общей матрицы равен нулю. Вторая система имеет только тривиальное решение, так как е определитель ее общей матрицы равен шести.

5.3.2. Решение однородных систем

Рассмотрим однородную систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными и соответствующую ей расширенную матрицу:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Для нахождения нетривиальных решений однородных систем линейных уравнений можно воспользоваться методом Гаусса.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Используя алгоритм «прямого хода» метода Гаусса, выполним следующие преобразования системы:

$$\begin{array}{r} \\ c_2-2c_1 \\ \\ c_4-c_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 2-2\cdot 1 & 1-2\cdot(-1) & -2-2\cdot 1 & 0-2\cdot 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 1-1 & -2+1 & 0-1 & 2-1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 3c_3-c_2 \\ 3c_4+c_2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 3\cdot 1-3 & 3\cdot 1+4 & 3\cdot(-1)+2 & 0\\ 0 & 3\cdot(-1)-3 & 3\cdot(-1)-4 & 3\cdot 1-2 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 7 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 3c_3-c_2 \\ c_4+c_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 7 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -7+7 & 1-1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 7 & -1 & 0\end{array}\right).$$

Поскольку количество оставшихся уравнений в системе меньше, чем количество неизвестных, будем считать переменные x_1, x_2, x_3 базисными, а неизвестную x_4 – свободной. Перенесем коэффициенты свободной переменной с противоположным знаком в правые части равенств и выполним преобразования системы «обратным ходом» метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 7 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} 7c_1-c_3 \\ 7c_2+4c_3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 7\cdot 1-0 & 7\cdot(-1)-0 & 7\cdot 1-7 & 7\cdot(-1)-1\\ 0 & 7\cdot 3+0 & 7\cdot(-4)+4\cdot 7 & 7\cdot 2+4\cdot 1\\ 0 & 0 & 7 & 1\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -7 & 0 & -8\\ 0 & 21 & 0 & 18\\ 0 & 0 & 7 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} c_1+c_2 \\ c_2/3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -7+7 & 0 & 7\cdot(-1)-6\\ 0 & 21/3 & 0 & 18/3\\ 0 & 0 & 7 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 7 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 7 & 1\end{array}\right).$$

Полученная матрица соответствует однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 = -2x_4 \\ 7x_2 = 6x_4 \\ 7x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{7}x_4 \\ x_2 = \dfrac{6}{7}x_4 \\ x_3 = \dfrac{1}{7}x_4 \end{cases}.$$

Следовательно, общее решение системы можно получить в виде:

$$\left\{-\frac{2}{7}x_4; \frac{6}{7}x_4; =\frac{1}{4}x_4; x_4\right\}.$$

5.3.3. Фундаментальная система решений

Однородная система уравнений обладает следующими свойствами:

1. Если набор чисел $\{k_1, k_2, k_3, ..., k_n\}$ – решение системы, то и $\{pk_1, pk_2, pk_3, ..., pk_n\}$ также решение системы.

2. Если наборы чисел $\{k'_1, k'_2, k'_3, ..., k'_n\}$ и $\{k''_1, k''_2, k''_3, ..., k''_n\}$ являются решениями системы, то и $\{k'_1 + k''_1, k'_2 + k''_2, k'_3 + k''_3, ..., k'_n + k''_n\}$ также является решением данной системы.

Из этих свойств следует, что любая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы. Следовательно, можно найти такую совокупность линейно независимых решений однородной системы, линейная комбинация которых порождает все решения системы.

Совокупность линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений (ФСР)*, если каждое решение системы уравнений является линейной комбинацией выбранных решений.

Теорема. Если ранг r однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных n, то всякая ее фундаментальная система решений состоит из $n - r$ решений.

Если найдено общее решение однородной системы линейных уравнений и все базисных переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ линейно выражены через свободные переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ x_3 = \alpha_{3,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{3n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,n}x_n \end{cases},$$

то для построения фундаментальной совокупности решений необходимо найти частные решения однородной системы.

Для нахождения первого решения примем значения свободных переменных

$$x_{r+1}=1,\quad x_{r+2}=0,\quad x_{r+3}=0,\quad \ldots\ ,\quad x_n=0.$$

Тогда первое частное решение примет вид:

$$F_1=\left\{\alpha_{1,r+1},\alpha_{2,r+1},\alpha_{3,r+1},\ldots,\alpha_{r,r+1},1,0,0,\ldots,0\right\}.$$

Для второго решения свободные переменные будут равны

$$x_{r+1}=0,\quad x_{r+2}=1,\quad x_{r+3}=0,\quad \ldots\ ,\quad x_n=0,$$

Следовательно, второе частное решение

$$F_2=\left\{\alpha_{1,r+2},\alpha_{2,r+2},\alpha_{3,r+2},\ldots,\alpha_{r,r+2},0,1,0,\ldots,0\right\}.$$

$$\ldots,\quad \ldots,\quad \ldots,\quad \ldots,\quad \ldots,\quad \ldots$$

для последнего решения возьмем значения

$$x_{r+1}=0,\quad x_{r+2}=0,\quad x_{r+3}=0,\quad \ldots\ ,\quad x_n=1,$$

соответственно, последнее частное решение

$$F_{n\text{-}r}=\left\{\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},\alpha_{3,n},\ldots,\alpha_{r,n},1,0,0,\ldots,0\right\}.$$

Полученные частные решения $F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots,\ F_{n\text{-}r}$ и образуют фундаментальную систему решений.

Пример. Найти решение однородной системы.

$$\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3-x_4+2x_5=0\\ x_1+3x_2-x_3-3x_4+6x_5=0.\\ x_2-x_4+2x_5=0\end{cases}$$

Решение. Для получения фундаментального решения системы линейных уравнений найдем ее общее решение. Используя алгоритм «прямого хода» метода Гаусса, выполним следующие преобразования системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&1&-2&-1&2&0\\1&3&-1&-3&6&0\\0&1&0&-1&2&0\end{array}\right)\Rightarrow 2c_2-c_1\left(\begin{array}{ccccc|c}2&1&-2&-1&2&0\\0&5&0&-5&10&0\\0&1&0&-1&2&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 5c_3-c_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ c_2/5 \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Переменные x_1, x_2 являются базисными, а неизвестные x_3, x_4, x_5 – свободными. Перенесем коэффициенты свободной переменной с противоположным знаком в правые части равенств и выполним преобразования системы «обратным ходом» метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} c_1-c_2 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} c_1/2 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Полученная матрица соответствует однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 - 2x_5 \end{cases},$$

следовательно, общее решение системы можно записать следующим образом: $\{x_3;\, x_4 - 2x_5,\, x_3,\, x_4,\, x_5\}$.

Поскольку ранг однородной системы равен двум, а число неизвестных – пяти, то ее фундаментальная система решений состоит из 5-2=3 решений. Взяв последовательно для свободных переменных значения $\{1{,}0{,}0\}$, $\{0{,}1{,}0\}$, $\{1, 0, 0\}$, получим совокупность фундаментальных решений:

$$F_1 = \{1, 0, 1, 0, 0\};\ F_2 = \{0, 1, 0, 1, 0\};\ F_1 = \{1, -2, 0, 0, 1\}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера и матричным методом.

1.1. $\begin{cases} 5x + 4y = 43, \\ 7x + 4y = 49. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -12, \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 = 40, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -71. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 4a - 7b + 3c + 8d = 30, \\ -b - 4c + 2d = -10, \\ -7a - 2c + 6d = 7, \\ -3a - 7b - d = -57. \end{cases}$

Задание 2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

2.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} 2x + y + z = 2; \\ x + 3y + z = 5; \\ x + y + 5z = -7. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} a + 5b + c - 3d = 33, \\ -5b + 4c - 6d = -38, \\ 5a - 2c - 5d = 28, \\ -3a + b - 7d = -32. \end{cases}$ 2.4. $\begin{cases} -3a - 5b + 8c = 3, \\ -6a - 6b - 3d = 15, \\ 2a - 7c + d = 19, \\ 7b - 6c + 7d = -16. \end{cases}$

Задание 3. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

3.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ 3.2. $\begin{cases} x + 2y + z = 4; \\ 3x + 3z - 5y = 1; \\ -z + 2x + 7y = 8. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 15. \end{cases}$ 3.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 8, \\ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 10, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 13. \end{cases}$

Задание 4. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

4.1. $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ 4.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ -x_3 + 2x_1 + 7x_2 = 8. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} a - b + c + 2d = -1; \\ 3a - 2b + 3c - d = 7; \\ -3b + 2c + 3d = 3; \\ 2a + 4b - 5c + 2d = -3. \end{cases}$

Задание 5. Найти общие и фундаментальные решения систем однородных уравнений:

5.1. $\begin{cases} -7x_1 - 21x_2 + 21x_3 = 0, \\ -7x_1 - 21x_2 + 21x_3 = 0. \end{cases}$ 5.2. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 47x_3 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 43x_3 = 0, \\ -5x_1 - 3x_2 - 19x_3 = 0. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 26x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 45x_3 + 22x_4 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 - 27x_3 - 22x_4 = 0, \\ 7x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 40x_4 = 0. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 6x_4 + 18x_5 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 30x_4 - 36x_5 = 0, \\ -2x_1 - 8x_2 - 6x_3 + 20x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

Ответы:

Задание 1.

1.1. $(3;\ 7)$ 1.2. $(2;\ 7;\ -7)$ 1.3. $(3;\ 6;\ 4;\ 6)$

Задание 2.

2.1. $(3;4;5)$, 2.2. $(1;2;-2)$, 2.3. $(8;\ 6;\ 1;\ 2)$, 2.4. $(2;\ -5;\ -2;\ 1)$,

Задание 3.

3.1. $(1;2;1)$, 3.2. $(1;1;1)$, 3.3. $(1;\ 6;\ -2;\ -1)$ 3.4. $(3;\ -5;\ 1;\ 7)$

Задание 4.

4.1. $x = 2; y = 1$ 4.2. $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$

4.3. $a = \frac{91}{46}; b = -\frac{303}{46}; c = -\frac{222}{46}; d = -\frac{109}{46}$

Задание 5.

5.1. Общее решение: $(-3x_2 + 3x_3;\ x_2;\ x_3),\ x_2, x_3 \in R.$

Фундаментальное решение: $(-3;\ 1;\ 0), (3;\ 0;\ 1).$

5.2. Общее решение: $(x_3; -8x_3;\ x_3),\ x_3 \in R.$

Фундаментальное решение: $(1; -8; 1).$

5.3. Общее решение: $(6x_3 - 4x_4; -9x_3 - 2x_4;\ x_3;\ x_4),\ x_3, x_4 \in R.$

Фундаментальное решение: $(6; -9; 1; 0), (-4; -2; 0; 1).$

5.4. Общее решение: $(x_3 - 6x_4 - 9x_5; -x_3 + 4x_4 + 3x_5;\ x_3;\ x_4;\ x_5),\ x_3, x_4, x_5 \in R.$

Фундаментальное решение: $(1; -1; 1; 0; 0), (-6; 4; 0; 1; 0), (-9; 3; 0; 0; 1).$

Литература

1. Белоусов, И.В. Матрицы и определители [Текст]: учебное пособие по линейной алгебре. /И.В. Белоусов. – Кишинев, 2006.

2. Богомолов, Н.В. Математика [Текст]: учебник / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2013.

3. Данович Л.М. Линейная алгебра [Текст]: метод. указания по изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Л.М. Данович, О.В. Пергун, Н.О. Чубырь. – Краснодар, 2013.

4. Ильин, В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд., стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с.

5. Красс, М.С. Математика для экономистов [Текст]: учеб. пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2008.

6. Михайленко, Е.В. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Е.В. Михайленко. – Электрон. текстовые дан. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2017. – эл. опт. диск (CD-ROM).

7. Михайленко, Е.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Текст]: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, М.А. Жукова. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2010. – 163 с.

8. Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений: методические указания по выполнению самостоятельной работы для студентов I курса дневной формы обучения / сост. И.М. Степанова. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2008.

9. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006.

10. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФА-М, 2005. – 575 с.

11. Старостенко, И.Н. Цикл типовых расчетов по разделам: линейная алгебра и аналитическая геометрия, математический анализ и дифференциальные уравнения [Текст]: учеб.-практ. пособие / И.Н. Старостенко, Ю.Н. Сопильняк. – Краснодар: Краснодарский

университет МВД России, 2013. – То же [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Электронная библиотека КрУ МВД России, требуется авторизация: http://libkrumvd.ru.

12. Шипачев, В.С. Высшая математика [Электронный ресурс]: учеб. и практикум для бакалавров / В.С. Шипачев; ред. А.Н. Тихонова. – 8-е изд., доп. и перераб. – М.: Юрайт, 2014. – Режим доступа: Электронная библиотека КрУ МВД России, требуется авторизация: http://libkrumvd.ru.

Учебное издание

Старостенко Игорь Николаевич
Хромых Анна Алексеевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-практическое пособие

В авторской редакции

ISBN 978-5-9266-1726-6

Подписано в печать 11.10.2021. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 6,0. Тираж 30 экз. Заказ 171.

Краснодарский университет МВД России.
350005, Краснодар, ул. Ярославская, 128.