МИНИСТЕРСТВО ВНУТРЕННИХ ДЕЛ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КРАСНОДАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.В Михайленко

МАТЕМАТИКА

Часть 2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Курс лекций

Краснодар
2021

УДК 512.64, 514.742, 514.123
ББК 22.1
М 69

Одобрено редакционно-издательским советом Краснодарского университета МВД России

Рецензенты:

Жукова П. Н., доктор физико-математических наук, профессор (Белгородский юридический институт МВД России им. И.Д. Путилина;

Бубнова О. Ю., кандидат физико-математических наук, доцент (Нижегородская академия МВД России).

Михайленко Е.В.

М69 Математика. Ч. 2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: курс лекций / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2021. – 96 с.

ISBN

Во второй части курса лекций рассматриваются основные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии, предлагаются алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений, описываются методы векторной алгебры, исследуются плоскости и прямые в трехмерном пространстве.

Для курсантов и слушателей образовательных организаций МВД России, обучающихся по информационно-техническим, судебно-экспертным и экономическим направлениям (специальностям).

УДК 512.64, 514.742, 514.123
ББК 22.1

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Вторая часть курса лекций «Математика» посвящена математическим понятиям, методам и алгоритмам, рассматриваемым в линейной алгебре и аналитической геометрии. Издание подготовлено на основе лекций по дисциплине математика, читаемых автором для курсантов Краснодарского университета МВД России, обучающихся по специальностям информационно-технического, экономического и судебно-экспертного направлений.

Линейная алгебра – это раздел алгебры, изучающий объекты линейной природы. К ним относятся такие структуры, как матрицы и определители, системы линейных алгебраических уравнений, векторы, линии и поверхности первого порядка, векторные пространства, тензоры, квадратичные и билинейные формы, линейные отображения. Геометрические линейные структуры: векторы, плоскости и прямые исследуются также средствами аналитической геометрии.

В первой части курса лекций «Математика» мы уже имели дело с матрицами и определителями, инструментарий которых мы будем активно использовать в описания методов и алгоритмов решения практических задач.

В представляемой книге рассматриваются основные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии: предлагаются алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений, описываются методы векторной алгебры, исследуются плоскости и прямые в трехмерном пространстве.

В первой главе данного издания отражены основные аспекты теории линейных алгебраических уравнений. Представленный теоретический материал содержит основные понятия линейных уравнений и их систем, приводится их классификация, предлагаются общая и расширенная матричные формы записи линейных систем, рассматриваются условия совместности систем. В главе подробно описываются методы нахождения решений квадратных систем линейных уравнений: метод обратной матрицы и метод Крамера. Как универсальный инструмент для нахождения общего решения любых систем рассматривается метод Гаусса. Особое внимание уделяется исследованию нетривиальной совместности однородных систем, описываются методы нахождения их решений, представлен алгоритм нахождения фундаментальной системы решений.

Вторая глава курса лекций посвящена методам векторной алгебры. В ней даются основные понятия векторной алгебры, вводятся линейные операции над векторами, особое внимание уделяется методу координат для выполнения операций над векторами, сравнения векторов, определения их коллинеарности, нахождения модуля и направляющих косинусов векторов. Большое место в главе посвящено определению, свойствам, методам вычисления и приложениям скалярного, векторного и смешенного произведений векторов.

В третьей главе издания мы изучим линии и поверхности первого порядка в трехмерном пространстве. Здесь представлены различные формы записи плоскостей: общее уравнение плоскости, уравнение плоскости, проходящей через две точки, уравнение плоскости в отрезках, нормальное уравнение плоскости, определяются угол между двумя плоскостями, взаимное расположение плоскостей. Также в главе описаны общие уравнения прямой в пространстве, канонические уравнения прямой, уравнения прямой, проходящей через две точки, параметрические уравнения прямой, методы преобразования уравнений, взаимное расположение прямых и плоскостей, определение расстояний между точками, плоскостями и прямыми.

Для лучшего восприятия учебного материала все вводимые понятия, определения, теоремы, формулы и вычислительные методы поясняются рисунками и примерами решения задач с подробным описанием хода решений.

Глава 1. Системы линейных алгебраических уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) являются универсальным математическим аппаратом, применяемым в различных сферах профессиональной деятельности. Они используются для исследования больших массивов наблюдений, обработки качественных и количественных показателей изучаемых явлений.

Системы линейных уравнений, являясь частью линейной алгебры, имеют существенное значение не только с точки зрения линейных преобразований. Они востребованы во всех современных разделах высшей математики, в практических приложениях большинства естественнонаучных, технических, экономических и социальных наук.

Решение систем линейных алгебраических уравнений – одна из важнейших задач классической математики. Вопросы решения СЛАУ были сформированы еще в конце XVII века выдающимся немецким ученым Готфридом Лейбницем (1646 – 1716), а один из наиболее популярных методов решения определенных систем, метод Крамера, был опубликован в 1750 году швейцарским математиком Габриэлем Крамером (1704 – 1752) в трактате «Введение в анализ алгебраических кривых».

Метод Крамера получил дальнейшее развитие в работах французских ученых Этьена Безу (1730 – 1783), Александра Вандермонда (1735 – 1796), Огюстена Коши (1789 – 1857), которые внесли огромный вклад в становление линейной алгебры. В это время также был разработан метод обратной матрицы и получил научное обоснование классический метод последовательного исключения переменных, выполняемый с помощью элементарных преобразований, позже названый в честь выдающегося математика Карла Гаусса (1777 – 1855).

В настоящее время задача решения систем линейных алгебраических уравнений не потеряла актуальность и нередко применяется в классической или численной реализации в научных, инженерных, статистических и эконометрических расчетах.

1.1. Линейное уравнение

Линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ называется выражение вида:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = b, \qquad (1.1)$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – коэффициенты при неизвестных, b – свободный член.

Представленную форму записи уравнений принято называть общей.

Набор чисел $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$ является решением уравнения, если при подстановке этих чисел в уравнение выполняется равенство:

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \ldots + a_n k_n = b.$$

Таких решений может быть либо бесчисленное множество, либо ни одного. Например, решением уравнения

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 5$$

являются наборы чисел {2; 0; 3; 1}, {-1; 4; -2; 0}, {0; 0; 0; 1}, …

Иногда линейные уравнения записывают в виде

$$x_i = a_1 x_1 + \ldots + a_{i-1} x_{i-1} + a_{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_n x_n + b. \qquad (1.2)$$

Таким образом, записанные уравнения называются *разрешенными* относительно переменной x_i. В отличие от общей формы записи левая часть разрешенного уравнения содержит только одну переменную x_i с коэффициентом равным единице, а в правую часть переносятся все другие слагаемые. Любое линейное уравнение можно записать в виде разрешенного уравнения.

Например, для разрешения уравнения

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 7$$

относительно переменной x_3, достаточно все другие слагаемые перенести в правую часть и разделить все коэффициенты уравнения на –2. После выполнения вышеперечисленных операций получим уравнение:

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1 - \frac{3}{2}\boldsymbol{x}_2 - 4\boldsymbol{x}_4 + \frac{7}{2}.$$

Среди линейных уравнений можно выделить некоторые типы уравнений:

1. *Противоречивое уравнение*

$$0\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2 + 0\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{...} + 0\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b}, \quad (\boldsymbol{b} \neq 0). \qquad (1.3)$$

Противоречивые уравнения не имеют решений. Действительно, левая часть противоречивого уравнения при любых значениях переменных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}$ равна нулю, а правая часть, содержащая свободный член $\boldsymbol{b} \neq 0$, отлична от нуля. Примером противоречивого уравнения может служить уравнение

$$0\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2 + 0\boldsymbol{x}_3 + 0\boldsymbol{x}_4 = 3.$$

2. *Тривиальное уравнение*

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = 0. \qquad (1.4)$$

Этот тип уравнений отличается от противоречивого уравнения тем, что свободный член $\boldsymbol{b}$ равен нулю. Решением тривиальных уравнений является любой набор из n чисел. Например, присвоив произвольные значения переменным $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5$ в уравнении

$$0\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2 + 0\boldsymbol{x}_3 + 0\boldsymbol{x}_4 + 0\boldsymbol{x}_5 = 0,$$

всегда получим левую и правую части равными нулю.

3. *Однородное* уравнение

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = 0. \qquad (1.5)$$

Однородные уравнения имеют бесконечное множество решений. Например, решением однородного уравнения

$$2\boldsymbol{x}_1 - 5\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 + 3\boldsymbol{x}_4 = 0$$

являются наборы чисел {1; 1; 0; 1}, {1; 1; 6; 3}, {1; 1; 3; 2}, …

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

1.2.1. Основные понятия и определения

Система алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.6)$$

называется системой из m линейных уравнений с n неизвестными.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{mn}$ называются коэффициентами при неизвестных x_1, x_2, x_3, x_n, а числа $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ – свободными членами.

В краткой записи с помощью знаков суммирования систему уравнений можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Набор чисел $\{k_1, k_2, k_3, k_n\}$ называется решением системы уравнений, если они удовлетворяет этой системе, то есть при подстановке этих чисел в систему каждое из уравнений обращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Совместные системы линейных уравнений могут иметь либо одно, либо бесконечное множество решений. В первом случае системы называются *определенными*, во втором – *неопределенными*. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Пример. Система уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 6 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_3 = -8 \\ -\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 = 7 \end{cases}$$

имеет единственное решение {1; 2; -1}. Следовательно, данная система является определенной.

Пример. Система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

является неопределенной, так как имеет бесконечное множество решений ({1; 0; 0}, {-4; 6; 7}, …).

Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*. Примером несовместной системы может служить система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Очевидно, что данная система не может иметь ни одного решения.

Системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одно и тот же множество решений. Например, системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 36 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -12 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases}$$

являются эквивалентными, так как каждая из этих систем имеет единственное решение {3; -1; -5).

1.2.2. Элементарные преобразования

Любую из систем линейных уравнений можно получить из другой эквивалентной системы с помощью *элементарных преобразований*.

К элементарным преобразованиям относятся:

1) Перестановка уравнений в системе;

2) Добавление или вычеркивание тривиального уравнения;

3) Умножение уравнения на отличное от нуля число;

4) Прибавление к обеим частям уравнения соответственных частей другого уравнения системы.

Все остальные эквивалентные преобразования можно представить, как комбинации четырех вышеперечисленных операций над системами линейных уравнений.

Пример. Легко увидеть, что первая система получается из второй, если умножить первую строку второй системы на –3:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -12 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} -3c_1 \\ \\ \\ \end{array} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 36 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases}.$$

Первую систему можно получить также из третьей. К третьей строке третьей системы прибавим ее четвертую строку, а к четвертой строке прибавим третью.

$$\begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ c_3 + c_4 \\ c_4 + c_3 \end{array} \begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 + 9 \\ x_2 - 2x_3 + x_1 = 9 + 3 \end{cases}.$$

Из четвертой строки вычтем третью и полученное тривиальное уравнение вычеркнем.

$$\begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ \\ c_4 - c_3 \end{array} \begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}.$$

Третью строку умножим на 3 и поставим ее на первое место в системе, сдвинув все остальные уравнения вниз:

$$\begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 120x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} 3c_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{array} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 36 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases}.$$

1.2.3. Матричная форма записи системы линейных уравнений

Выпишем коэффициенты при неизвестных в прямоугольную матрицу **A** порядков m×n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.7)$$

Полученная матрица называется матрицей системы линейных уравнений или общей матрицей системы.

Введем еще две матрицы, каждая из которых состоит из одного столбца:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{.m} \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Матрица *B* содержит коэффициенты $b_1, b_2, b_3, ..., b_m$ и называется *матрицей свободных членов.*

Матрица *X* включает неизвестные x_1, x_2, x_3, x_n и называется *матрицей неизвестных.*

Тогда систему линейных уравнений можно записать в виде

$$AX = B. \qquad (1.9)$$

Пример. Для системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$$

выпишем общую матрицу *A*, матрицу свободных членов *B* и матрицу неизвестных *X*:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6\\ -8\\ 7\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, система в матричной форме примет вид:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -8\\ 7\end{pmatrix}.$$

Еще один способ записи систем линейных уравнений состоит в дополнении общей матрицы системы столбцом свободных членов.

$$A_B=\left(\begin{array}{ccccc|c}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m\end{array}\right). \qquad (1.10)$$

Такая матрица называется *расширенной*.

Пример. Для системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=6\\ 2x_1-3x_2+4x_3=-8\\ -x_1+3x_2-2x_3=7\end{cases}$$

расширенная матрица выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{A_B}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 6\\ 2 & -3 & 4 & -8\\ -1 & 3 & -2 & 7\end{array}\right).$$

1.3. Теорема Кронекера-Капелли

Расширенная матрица имеет определяющее значение для установления совместности системы линейных алгебраических уравнений. Основным методом решения данного вопроса является использование следующей теоремы.

Теорема (*Кронекера-Капелли*). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг общей матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

Пример. Определим, является ли совместной система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}.$$

Для разрешения вопроса найдем ранги общей и расширенной матриц.

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3; \qquad rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & -8 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right) = 3.$$

Ранг общей матрицы и ранг расширенной матрицы в нашем случае совпадают и равны трем, следовательно, представленная система линейных уравнений является совместной.

Пример. Система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

является несовместной, поскольку ранг общей матрицы равен двум, а ранг расширенной матрицы равен трем:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} = 2; \; rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & -8 \\ -1 & 5 & -5 & 3 \end{array}\right) = 3.$$

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие утверждения.

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, то есть $r = n$, то система определенная и имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, то есть $r < n$, то система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пример. Определим количество решений системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}.$$

Найдем ранги общей и расширенной матриц данной системы

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3; \quad rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & -8 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right) = 3.$$

Система является совместной, так как ранг матрицы и ранг расширенной матрицы совпадают.

Так как ранг матрицы равен числу переменных, то система определенная и имеет единственное решение.

Пример. Определим количество решений системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Найдем ранги общей и расширенной матриц данной системы

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2; \quad rang\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) = 2.$$

Система является совместной, так как ранг матрицы и ранг расширенной матрицы совпадают.

Так как ранг матрицы меньше числа переменных, то система является неопределенной и имеет бесконечное множество решений.

1.4. Методы решения определенных систем

1.4.1. Метод обратной матрицы

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{1.11}$$

Такие системы принято называть квадратными. Соответствующая системе общая матрица также является квадратной.

Данную систему можно записать в матричном виде:

$$AX = B. \tag{1.12}$$

Предположим, что общая матрица системы является невырожденной, то есть определитель основной матрицы отличен от нуля. Для таких матриц существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения слева на A^{-1}.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Учитывая, что $A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица, получим формулу

$$X = A^{-1}B. \tag{1.13}$$

В случае вырожденности общей матрицы A, система линейных алгебраических уравнений будет либо несовместной, либо совместной, но неопределенной.

Пример. Решим систему линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 5\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_3 = -13 \\ 8\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 = -38 \\ -3\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 7\boldsymbol{x}_3 = -45 \end{cases}.$$

Сначала выпишем общую матрицу A, матрицу свободных членов B, матрицу неизвестных X:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 8 & 3 & 2\\ -3 & 1 & 7\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}-13\\ -38\\ -45\end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}, используя формулу

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Для этого вычислим определитель и алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 5 & -3\\ 8 & 3 & 2\\ -3 & 1 & 7\end{vmatrix}=-342; \qquad A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 7\end{vmatrix}=19;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8 & 2\\ -3 & 7\end{vmatrix}=-62; \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}8 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix}=17;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5 & -3\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-38; \qquad A_{12}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & 7\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 5\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-16; \qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=19;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 8 & 2\end{vmatrix}=-26; \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 8 & 3\end{vmatrix}=-37.$$

Подставив полученные значения в формулы 1.12 и 1.13, получим

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{-342}\begin{pmatrix}19 & -38 & 19\\ -62 & -2 & -26\\ 17 & -16 & -37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-13\\ -38\\ -45\end{pmatrix}=\frac{1}{-342}\begin{pmatrix}342\\ 2052\\ 2052\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -6\\ -6\end{pmatrix}.$$

Таким образом, решением системы уравнений является набор чисел {-1; -6; -6}.

1.4.2. Метод Крамера

Рассмотрим квадратную систему из n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

которой соответствуют квадратная общая матрица A и матрица-столбец свободных членов B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Заменив первый столбец матрицы A на столбец B, получим дополнительную матрицу X_1

$$X_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Заменив второй столбец матрицы A на столбец B, получим дополнительную матрицу X_2

$$X_2 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Аналогично получим все другие дополнительные матрицы $X_3, \ ..., X_n$.

Тогда для решения системы линейных алгебраических уравнений справедливы формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\det X_1}{\det A}; \quad x_2 = \frac{\det X_2}{\det A}; \quad \dots \quad x_n = \frac{\det X_n}{\det A}. \tag{1.15}$$

Пример. Решим систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -106 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_4 = 20 \\ 5x_1 - 4x_3 - x_4 = -16 \\ -4x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -10 \end{cases}.$$

Данной системе соответствуют квадратная общая матрица A и матрица-столбец свободных членов B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -6 & -5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -106 \\ 20 \\ -16 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Заменим соответствующие столбцы матрицы A на столбец свободных членов B и выпишем дополнительные матрицы:

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} -106 & -5 & 6 & 0 \\ 20 & 4 & 0 & 7 \\ -16 & 0 & -4 & -1 \\ -10 & -4 & -6 & -5 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -106 & 6 & 0 \\ 5 & 20 & 0 & 7 \\ 5 & -16 & -4 & -1 \\ 0 & -10 & -6 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -106 & 0 \\ 5 & 4 & 20 & 7 \\ 5 & 0 & -16 & -1 \\ 0 & -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{X}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -106 \\ 5 & 4 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & -4 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Найдем определители основной и дополнительных матриц

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -6 & -5 \end{vmatrix} = -1228;$$

$$\det \boldsymbol{X}_1 = \begin{vmatrix} -106 & -5 & 6 & 0 \\ 20 & 4 & 0 & 7 \\ -16 & 0 & -4 & -1 \\ -10 & -4 & -6 & -5 \end{vmatrix} = 9824; \quad \det \boldsymbol{X}_2 = \begin{vmatrix} 3 & -106 & 6 & 0 \\ 5 & 20 & 0 & 7 \\ 5 & -16 & -4 & -1 \\ 0 & -10 & -6 & -5 \end{vmatrix} = -9824;$$

$$\det \boldsymbol{X}_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -106 & 0 \\ 5 & 4 & 20 & 7 \\ 5 & 0 & -16 & -1 \\ 0 & -4 & -10 & -5 \end{vmatrix} = 8596; \quad \det \boldsymbol{X}_4 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 & -106 \\ 5 & 4 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & -4 & -6 & -10 \end{vmatrix} = -4912.$$

Теперь, согласно методу Крамера, подставляя вычисленные определители в формулы (2.5) получим решение.

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\det \boldsymbol{X}_1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{9824}{-1228} = -8; \qquad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\det \boldsymbol{X}_2}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{-9824}{-1228} = 8;$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{\det \boldsymbol{X}_1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{8596}{-1228} = -7; \qquad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\det \boldsymbol{X}_2}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{-4912}{-1228} = 4.$$

Таким образом, получили следующее решение системы {-8; 8; -7; 4}.

1.5. Метод Гаусса

Наиболее эффективным инструментом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса. Если вышеперечисленные метод обратной матрицы и метод Крамера можно использовать только для определенных систем линейных уравнений, то метод Гаусса применим для любой системы. Кроме того, в ходе решения этим методом определяется также совместность решаемой системы.

1.5.1. Описание метода Гаусса

Рассмотрим систему линейных уравнений общего вида и соответствующую ей расширенную матрицу:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad A_B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} & b_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Первая часть метода Гаусса называется «прямым ходом». Она заключается в том, чтобы, используя элементарные преобразования систем линейных уравнений, привести расширенную матрицу системы к виду, когда под элементами с одинаковыми индексами располагаются только нулевые элементы:

$$A'_B = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \ldots & a'_{1m} & a'_{1m+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \ldots & a'_{2m} & a'_{2m+1} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \ldots & a'_{3m} & a'_{3m+1} & \ldots & a'_{3n} & b'_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a'_{mm} & a'_{mm+1} & \ldots & a'_{mn} & b'_m \end{array} \right). \qquad (1.16)$$

Если система несовместна, то полученная путем преобразований матрица будет содержать хотя бы одну строку вида

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,\big|\, b'_j \qquad (b'_j \neq 0).$$

Если таких строк нет, то система уравнений является совместной.

В преобразованной матрице соответствующей совместной системе линейных уравнений могут появиться строки вида

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,\big|\, 0.$$

Этого означает, что соответствующие таким строкам уравнения представляют собой линейную комбинацию других уравнений системы. Эти строки в матрице необходимо удалить.

Предположим, что в преобразованной матрице осталось k строк из m. Тогда в случае определения совместности системы линейных уравнений используется вторая часть метода Гаусса, называемая «обратный ход», и все теми же элементарными преобразованиями полученная матрица преобразуется в вид:

$$A''_B = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a''_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & a''_{1,k+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 & \dots & 0 & a''_{2,k+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & 0 & a''_{3,k+1} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{kk} & a''_{k,k1} & \dots & a''_{kn} & b''_k \end{array}\right). \tag{1.17}$$

Если $k < n$, то система линейных уравнений будет неопределенной, и иметь бесконечное множество решений. Переменные $x_1, \dots, x_k$, можно объявить базисными, а неизвестные $x_{k+1}, \dots, x_n$, соответственно, – свободными. Затем свободные переменные вместе с соответствующими коэффициентами переносятся в правую часть уравнений системы. Таким образом, решение системы будет выглядеть так:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b''_1 - a''_{1,k+1}x_{k+1} - \dots - a''_{1n}x_n}{a''_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b''_2 - a''_{2,k+1}x_{k+1} - \dots - a''_{2n}x_n}{a''_{22}} \\ x_3 = \dfrac{b''_3 - a''_{3,k+1}x_{k+1} - \dots - a''_{3n}x_n}{a''_{33}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = \dfrac{b''_k - a''_{k,k+1}x_{k+1} - \dots - a''_{kn}x_n}{a''_{kk}} \end{cases}. \tag{1.18}$$

В случае если $k = n$, решаемая система линейных уравнений является определенной, а матрица, полученная «обратным ходом» будет иметь вид:

$$A''_B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a''_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 & \dots & 0 & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & 0 & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{nn} & b''_n \end{array}\right). \tag{1.19}$$

Следовательно, единственное решение системы уравнений можно записать в виде:

$$\left\{ \frac{b''_1}{a''_{11}}; \frac{b''_2}{a''_{22}}; \frac{b''_3}{a''_{33}}; \dots; \frac{b''_n}{a''_{nn}} \right\}. \tag{1.20}$$

1.5.2. Решение определенных систем

С помощью метода Гаусса можно находить решение определенных систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим пример.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 5\boldsymbol{x}_1 - 6\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - 6\boldsymbol{x}_4 = -57 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 + 5\boldsymbol{x}_4 = 24 \\ -2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 + 6\boldsymbol{x}_4 = 34 \\ -4\boldsymbol{x}_1 + 6\boldsymbol{x}_2 + 7\boldsymbol{x}_3 - 4\boldsymbol{x}_4 = 4 \end{cases}.$$

Этой системе соответствует расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 3 & 4 & -2 & 5 & 24 \\ -2 & -1 & 1 & 6 & 34 \\ -4 & 6 & 7 & -4 & 4 \end{array}\right).$$

Применяя элементарные преобразования, добьемся того, чтобы все элементы матрицы, находящиеся ниже элемента a_{11} были равны нулю. Для обнуления элемента a_{21} достаточно из произведения второй строки на 5 вычесть первую строку, умноженную на 3. Для того чтобы $a_{31} = 0$, к первой строке, умноженной на пять, прибавить вторую, умноженную на 2, а для того, чтобы a_{41} равнялся нулю, можно сложить первую и третью строки, увеличенные в 5 и 4 раз соответственно:

$$\begin{array}{r} \\ 5c_2 - 3c_1 \\ 5c_3 + 2c_1 \\ 5c_4 + 4c_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 5\cdot 3 - 3\cdot 5 & 5\cdot 4 - 3\cdot(-6) & 5\cdot(-2) - 3\cdot 1 & 5\cdot 5 - 3\cdot(-6) & 5\cdot 24 - 3\cdot(-57) \\ 5\cdot(-2) + 2\cdot 5 & 5\cdot(-1) + 2\cdot(-6) & 5\cdot 1 + 2\cdot 1 & 5\cdot 6 + 2\cdot(-6) & 5\cdot 34 + 2\cdot(-57) \\ 5\cdot(-4) + 4\cdot 5 & 5\cdot 6 + 4\cdot(-6) & 5\cdot 7 + 4\cdot 1 & 5\cdot(-4) + 4\cdot(-6) & 5\cdot 4 + 4\cdot(-57) \end{array}\right).$$

В результате арифметических действий получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & -17 & 7 & 18 & 56 \\ 0 & 6 & 39 & -44 & -208 \end{array}\right).$$

Теперь, добьемся того, чтобы под элементом a_{22} оставались только нулевые элементы, для этого мы выполняем соответствующие элементарные преобразования с системой. Первая и вторая строки остаются без изменений, преобразуются только третья и четвертая строки:

$$\begin{array}{r} \\ \\ 38c_3+17c_2 \\ 19c_4-3c_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 38\cdot(-17)+17\cdot 38 & 38\cdot 7+17\cdot(-13) & 38\cdot 18+17\cdot 43 & 38\cdot 56+17\cdot 291 \\ 0 & 19\cdot 6-3\cdot 38 & 19\cdot 39-3\cdot(-13) & 19\cdot(-44)-3\cdot 43 & 19\cdot(-208)-3\cdot 291 \end{array}\right).$$

Вычислив, получим систему, в которой коэффициенты третьей и четвертой строк которой можно сократить на 5:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 45 & 1415 & 7075 \\ 0 & 0 & 780 & -965 & -4825 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ c_3/5 \\ c_4/5 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 156 & -193 & -965 \end{array}\right).$$

И, наконец, с помощью элементарных преобразований системы обнуляем элемент a_{43}, изменяя при этом всю четвертую строку:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ 3c_4-52c_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 3\cdot 156-52\cdot 9 & 3\cdot(-193)-52\cdot 283 & 3\cdot(-965)-52\cdot 1415 \end{array}\right).$$

Произведем соответствующие расчеты и сократим на 15295 элементы четвертой строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 0 & 15295 & 76475 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ c_4/15295 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Таким образом, исходная общая матрица решаемой системы приведена к верхнему треугольному виду. Полученная путем преобразований матрица не содержит ни одной строки вида

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \left| \, b'_j \right. \quad (b'_j \neq 0).$$

На основании этого заключим, что система уравнений является совместной.

Продолжим модификацию матрицы «обратным ходом». Для этого выполним преобразования первой, второй и третьей строк таким образом, чтобы все элементы, находящиеся выше элемента a_{44}, были равны нулю:

$$\begin{array}{r} c_1+6c_4 \\ c_2-43c_4 \\ c_3-283c_4 \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6+6\cdot 1 & -57+6\cdot 5 \\ 0 & 38 & -13 & 43-43\cdot 1 & 291-43\cdot 5 \\ 0 & 0 & 9 & 283-283\cdot 1 & 1415-283\cdot 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Выполнив действия, сократим на 9 элементы третьей строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & 0 & -27 \\ 0 & 38 & -13 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ c_3/9 \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & 0 & -27 \\ 0 & 38 & -13 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Аналогично добьемся того, чтобы элементы a_{13} и a_{23} были равны нулю:

$$\begin{array}{r} c_1-c_3 \\ c_2+13c_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1-1 & 0 & -27+0 \\ 0 & 38 & -13+13\cdot 1 & 0 & 76+13\cdot 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Произведем расчеты и разделим на 38 элементы второй строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 38 & 0 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ c_2/38 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

К первой строке прибавим, умноженную на 6, вторую строку:

$$\begin{array}{r} c_1+6c_2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6+6\cdot 1 & 0 & 0 & -27+6\cdot 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right),$$

выполним действия и разделим на 5 коэффициенты первой строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} c_1/5 \\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Таким образом, в результате элементарных преобразований мы получили систему:

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 5 \end{cases},$$

которой соответствует единственное решение {-3; 2; 0; 5}.

1.5.3. Решение неопределенных систем

С помощью метода Гаусса можно решать и неопределенные системы.

Пример. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений и соответствующую ей расширенную матрицу:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -2 \\ -3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 11 \\ x_1 + 6x_2 + 16x_3 - 4x_4 = 9 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 11 \\ 1 & 6 & 16 & -4 & 9 \end{array}\right).$$

Выполним соответствующие шаги «прямого хода» метода Гаусса.

Используя обратные преобразования со второй и четвертой строками, добьемся того, чтобы все элементы первого столбца матрицы, кроме верхнего были равны нулю:

$$\begin{array}{c} \\ 2c_2 - c_1 \\ \\ 2c_4 - c_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 4 - 0 & 2\cdot 1 - (-3) & 2\cdot(-5) - 1 & 2\cdot(-2) - 7 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 11 \\ 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 6 - 0 & 2\cdot 16 - (-3) & 2\cdot(-4) - 1 & 2\cdot 9 - 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 11 \\ 0 & 12 & 35 & -9 & 11 \end{array}\right).$$

Аналогично, преобразуя систему, работаем со вторым столбцом:

$$\begin{array}{r} \\ \\ 8c_3+3c_2 \\ 2c_4-3c_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 8\cdot(-3)+3\cdot 8 & 8\cdot 5+3\cdot 5 & 8\cdot 6+3\cdot(-11) & 8\cdot 11+3\cdot(-11) \\ 0 & 2\cdot 12-3\cdot 8 & 2\cdot 35-3\cdot 5 & 2\cdot(-9)-3\cdot(-11) & 2\cdot 11-3\cdot(-11) \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 55 & 15 & 55 \\ 0 & 0 & 55 & 15 & 55 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & -11 \end{array}\right).$$

И, наконец, обнуляем элемент, находящийся на пересечении четвертой строки и третьего столбца:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ c_4-c_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 11-11 & 3-3 & 11-11 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вычеркнем из матрицы получившееся тривиальное уравнение, находящееся в четвертой строке:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ c_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

Полученный результат выявил, что система является совместной, значит можно переходить ко второй части метода – «обратному ходу».

Преобразуем матрицу так, чтобы в третьем столбце первой и второй строк появились нулевые элементы:

$$\begin{array}{l} 11c_1+3c_3 \\ 11c_2-5c_3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 11\cdot 2+3\cdot 0 & 11\cdot 0+3\cdot 0 & 11\cdot(-3+3)\cdot 11 & 11\cdot 1+3\cdot 3 & 11\cdot 7+3\cdot 11 \\ 0 & 11\cdot 8-5\cdot 0 & 11\cdot 5-5\cdot 11 & 11\cdot(-11)-5\cdot 3 & 11\cdot(-11)-5\cdot 11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Разделим элементы первой и второй строк соответственно на 2 и 8:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 22 & 0 & 0 & 20 & 110 \\ 0 & 88 & 0 & -136 & -176 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} c_1/2 \\ c_2/8 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 0 & 0 & 10 & 55 \\ 0 & 11 & 0 & -17 & -22 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

В нашем случае количество оставшихся после преобразования строк k меньше количества неизвестных n:

$$\begin{cases} 11x_1+10x_4=55 \\ 11x_2-17x_4=-22. \\ 11x_3+3x_4=11 \end{cases}$$

Поэтому система линейных уравнений будет неопределенной, и иметь бесконечное множество решений. Переменные системы $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$ можно объявить базисными, а неизвестную $\boldsymbol{x_4}$ – свободной. Свободные переменные вместе с соответствующими коэффициентами переносим в правую часть уравнений системы, а затем каждое уравнение делим на коэффициенты при базисных переменных.

Таким образом, решение системы будет выглядеть как система разрешенных уравнений относительно базисных переменных:

$$\begin{cases} 11x_1=-10x_4+55 \\ 11x_2=+17x_4-22 \\ 11x_3=-3x_4+11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{10}{11}x_4+5 \\ x_2=\dfrac{17}{11}x_4-2 \\ x_3=-\dfrac{3}{11}x_4+1 \end{cases}.$$

Поскольку $\boldsymbol{x_4}$ принимает бесконечное множество решений, то решением системы можно представить в виде множества: $\left\{-\dfrac{10}{11}x_4;\ \dfrac{17}{11}x_4;\ -\dfrac{3}{11}x_4;\ x_4\right\}$.

1.6. Однородные системы линейных алгебраических уравнений

1.6.1. Основные понятия систем однородных уравнений

Рассмотрим систему, содержащую только однородные линейные алгебраические уравнения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}\,x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}\,x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}\,x_n = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}\,x_n = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Такая система называется однородной системой линейных алгебраических уравнений. Однородная система всегда совместна, поскольку ранг ее общей матрицы будет равен рангу расширенной матрицы:

$$rang\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = rang\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, что у каждой однородной системы линейных уравнений обязательно существует нулевое решение {0; 0; 0; …;0}.

Пример. Можно с уверенностью сказать, что для системы однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

одним из решений будет {0; 0; 0; 0}.

Однако, у однородных уравнений могут быть и другие решения. Возникает вопрос о том, при каких условиях однородная система имеет, кроме указанного тривиального решения, еще и другие, нетривиальные решения. Такие однородные системы называются *нетривиально совместными*.

1.6.2. Условия совместности однородных систем

Существование нетривиального решения однородной системы эквивалентно линейной зависимости столбцов общей матрицы системы, а это возможно только при вырожденности этой матрицы. Из этого заключения вытекает следующая теорема.

Теорема. Однородная система линейных алгебраических уравнений нетривиально совместна тогда и только тогда, когда ранг ее общей матрицы меньше числа ее столбцов.

Пример. Проверим существование нетривиальных решений в вышеуказанном примере. Найдем ранг общей матрицы:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

Поскольку ранг матрицы равен трем и меньше числа столбцов, то данная система имеет нетривиальные решения.

Из этой теоремы вытекают следующие свойства.

Свойство 1. Если число уравнений однородной системы линейных алгебраических уравнений меньше числа ее неизвестных, то эта система имеет нетривиальные решения.

Это свойство очень удобно для использования. Например, все ниже перечисленные однородные системы являются нетривиально совместными:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ -5x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Свойство 2. Квадратная однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда общая матрица системы вырождена.

Данное свойство применимо только для однородных систем, в которых количество уравнений равно количеству неизвестных.

Рассмотрим две квадратные однородные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Первая система является нетривиально совместной, поскольку определитель общей матрицы равен нулю. Вторая система имеет только тривиальное решение, так как е определитель ее общей матрицы равен шести.

1.6.3. Решение однородных систем линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными и соответствующую ей расширенную матрицу:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Для отыскания нетривиальных решений однородных систем линейных уравнений можно воспользоваться методом Гаусса.

В качестве примера рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ей соответствует расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Используя алгоритм «прямого хода» метода Гаусса, выполним следующие преобразования системы:

$$\begin{array}{r} \\ c_2-2c_1 \\ \\ c_4-c_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 2-2\cdot1 & 1-2\cdot(-1) & -2-2\cdot1 & 0-2\cdot1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 1-1 & -2+1 & 0-1 & 2-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 3c_3-c_2 \\ 3c_4+c_2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 3\cdot1-3 & 3\cdot1+4 & 3\cdot(-1)+2 & 0\\ 0 & 3\cdot(-1)-3 & 3\cdot(-1)-4 & 3\cdot1-2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 7 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 3c_3-c_2 \\ c_4+c_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 7 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -7+7 & 1-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Поскольку количество оставшихся уравнений в системе меньше, чем количество неизвестных, будем считать переменные x_1, x_2, x_3 базисными, а неизвестную x_4 – свободной. Перенесем коэффициенты свободной переменной с противоположным знаком в правые части равенств и выполним преобразования системы «обратным ходом» метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} 7c_1-c_3 \\ 7c_2+4c_3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 7\cdot1-0 & 7\cdot(-1)-0 & 7\cdot1-7 & 7\cdot(-1)-1\\ 0 & 7\cdot3+0 & 7\cdot(-4)+4\cdot7 & 7\cdot2+4\cdot1\\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -7 & 0 & -8\\ 0 & 21 & 0 & 18\\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} c_1+c_2 \\ c_2/3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -7+7 & 0 & 7\cdot(-1)-6\\ 0 & 21/3 & 0 & 18/3\\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 7 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right).$$

Полученная матрица соответствует однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 = -2x_4 \\ 7x_2 = 6x_4 \\ 7x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{7}x_4 \\ x_2 = \dfrac{6}{7}x_4 \\ x_3 = \dfrac{1}{7}x_4 \end{cases}.$$

Следовательно, общее решение системы можно получить в виде:

$$\left\{-\frac{2}{7}x_4;\ \frac{6}{7}x_4;\ = \frac{1}{4}x_4;\ x_4\right\}.$$

1.7. Фундаментальная система решений

1.7.1. Понятие фундаментальной системы

Однородная система уравнений обладает следующими свойствами:

1. Если набор чисел $\{k_1, k_2, k_3, ..., k_n\}$ – решение системы, то и $\{pk_1, pk_2, pk_3, ..., pk_n\}$ также решение системы.

2. Если наборы чисел $\{k'_1, k'_2, k'_3, ..., k'_n\}$ и $\{k''_1, k''_2, k''_3, ..., k''_n\}$ являются решениями системы, то и $\{k'_1 + k''_1, k'_2 + k''_2, k'_3 + k''_3, ..., k'_n + k''_n\}$ также является решением данной системы.

Из этих свойств следует, что любая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы. Следовательно, можно найти такую совокупность линейно независимых решений однородной системы, линейная комбинация которых порождает все решения системы.

Совокупность линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений*, если каждое решение системы уравнений является линейной комбинацией выбранных решений.

Теорема. Если ранг r однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных n, то всякая ее фундаментальная система решений состоит из $n - r$ решений.

Если найдено общее решение однородной системы линейных уравнений и все базисных переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ линейно выражены через свободные переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ x_3 = \alpha_{3,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{3n}x_n \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,n}x_n \end{cases},$$

то для построения фундаментальной совокупности решений необходимо найти частные решения однородной системы.

Для нахождения первого решения примем значения свободных переменных

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \quad x_{r+3} = 0, \quad \ldots. \quad , \quad x_n = 0.$$

Тогда первое частное решение примет вид:

$$F_1 = \left\{ \alpha_{1,r+1}, \alpha_{2,r+1}, \alpha_{3,r+1}, \ldots, \alpha_{r,r+1}, 1, 0, 0, \ldots, 0 \right\}.$$

Для второго решения свободные переменные будут равны

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 1, \quad x_{r+3} = 0, \quad \ldots. \quad , \quad x_n = 0,$$

Следовательно, второе частное решение

$$F_2 = \left\{ \alpha_{1,r+2}, \alpha_{2,r+2}, \alpha_{3,r+2}, \ldots, \alpha_{r,r+2}, 0, 1, 0, \ldots, 0 \right\}.$$

$$\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \ldots$$

для последнего решения возьмем значения

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \quad x_{r+3} = 0, \quad \ldots. \quad , \quad x_n = 1,$$

соответственно, последнее частное решение

$$F_{n\text{-}r} = \left\{ \alpha_{1,\boldsymbol{n}}, \alpha_{2,\boldsymbol{n}}, \alpha_{3,\boldsymbol{n}}, \ldots, \alpha_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}}, 1, 0, 0, \ldots, 0 \right\}.$$

Полученные частные решения F_1, F_2, F_3, ..., F_{n-r} и образуют фундаментальную систему решений.

1.7.2. Построение фундаментальной системы решений

Пример. Рассмотрим однородную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

Для получения фундаментального решения системы линейных уравнений найдем ее общее решение. Используя алгоритм «прямого хода» метода Гаусса, выполним следующие преобразования системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2c_2 - c_1 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$5c_3 - c_2 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow c_2/5 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Будем считать переменные x_1, x_2 базисными, а неизвестные x_3, x_4, x_5 – свободными. Перенесем коэффициенты свободной переменной с противоположным знаком в правые части равенств и выполним преобразования системы «обратным ходом» метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow c_1 - c_2 \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow c_1/2 \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Полученная матрица соответствует однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 - 2x_5 \end{cases},$$

следовательно, общее решение системы можно записать следующим образом:

$$\{x_3;\, x_4 - 2x_5,\, x_3,\, x_4,\, x_5\}.$$

Поскольку ранг однородной системы равен двум, а число неизвестных – пяти, то ее фундаментальная система решений состоит из 5 – 2 = 3 решений. Взяв последовательно для свободных переменных значения $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$, получим совокупность фундаментальных решений:

$$F_1 = \{1, 0, 1, 0, 0\};$$

$$F_2 = \{0, 1, 0, 1, 0\};$$

$$F_3 = \{1, -2, 0, 0, 1\}.$$

Глава 2. Векторная алгебра

Векторная алгебра – это прикладной раздел математики, изучающий линейные операции над векторами и их свойства. Векторная алгебра является мощным инструментом для исследований и расчетов в аналитической геометрии, математическом анализе, математической статистике, физике, астрономии, химии, экономике, технических науках.

Векторная алгебра оперирует с понятием вектора. Обычно вектор связывают с геометрическим понятием, но часто в практических приложениях векторы задаются только численно с помощью координат, и все вычисление производят, не прибегая к графической интерпретации вектора.

Скалярными величинами или *скалярами* называют величины, полностью определяемые с помощью действительных чисел.

Пример. Площадь фигуры, длина объекта, масса тела, температура окружающей среды, работа, сопротивление металла – все это скалярные величины.

Величины, у которые важно не только числовое значением, но и направление называют *векторными*.

Пример. Перемещение тела, его скорость, импульс, ускорение, сила, напряженность поля, магнитная индукция, градиент – векторные величины.

Отметим, что направления здесь могут быть определены в геометрическом смысле не только в двумерном, трехмерном, но и четырехмерном, пятимерном, …, n-мерном пространствах.

Пример. При исследовании функции пяти переменных можно построить пятимерный вектор-градиент.

Следует отметить, что если векторы по физическим или иным причинам привязаны к какому-то объекту или месту и их нельзя никуда переносить, то такие векторы называются *связанными*. Векторы, которые можно двигать вдоль прямых, на которых они расположены, называют *скользящими*. А если векторы можно переносить с помощью параллельного переноса в любое место пространства, то они называются *свободными*.

В данной главе мы будем рассматривать свободные векторы в трехмерном пространстве.

2.1. Основные понятия векторной алгебры

Вектором называется направленный отрезок *AB*, у которого определены начало – точка *A* и конец – точка *B* (рис. 1).

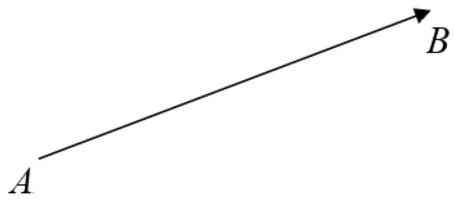


Рис. 1. Геометрическое изображение вектора.

Обозначения векторов такое же, как и у отрезов с использованием двух прописных или одной строчной буквы, но при этом для записи используется надчеркивание или верхняя стрелка, а иногда выделение жирным шрифтом и курсивом.

Пример. Обозначения векторов: $\bar{i}$, $\overline{PQ}$, $\vec{a}$, $\overrightarrow{DF}$, ***r***, ***KM***.

Модулем $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ называется скаляр, определяющий длину данного вектора.

Пример. Если начало *L* и конец *M* вектора $\vec{v}$ имеют координаты $(1; -2; 4)$ и $(-2; -2; 8)$, тогда для определения длины вектора по теореме Пифагора найдем расстояние между точками *L* и *M*:

$$|\vec{r}| = |LM| = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2+2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Вектор $\vec{b}$, называется *противоположным* к вектору $\vec{a}$, если он имеет длину $|\vec{a}|$ и направление противоположное к вектору $\vec{a}$. В таком случае можно записать $\vec{b} = -\vec{a}$.

Пример. Противоположным к вектору $\overline{AB}$ является вектор $\overline{CD}$ (Рис. 2). Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ имеют одинаковую длину и противоположные направления.

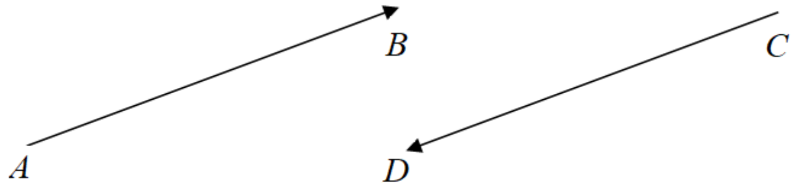


Рис. 2. Противоположные векторы.

Вектор, начало и конец которого совпадают, а длина равна нулю, называется *нулевым вектором.* Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором. Часто такой вектор обозначают $\vec{e}$. Если направление единичного вектора $\vec{e}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, то такой вектор называют ортом вектора $\vec{a}$ и записывают $\vec{a}^o$.

Если два или более векторов лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то такие вектора называются *коллинеарными*. Если вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$, то пишут $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Коллинеарные вектора могут иметь разные длины, быть направлены как в одну сторону, так и иметь противоположные направления.

Если векторы коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины, то их называют *равными*. Если вектор $\vec{a}$ равен вектору $\vec{b}$, то можно записать $\vec{a} = \vec{b}$.

Пример. На рисунке 3 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{e}$ являются коллинеарными, кроме того, коллинеарными являются векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{e}$ равны. Вектор $\vec{f}$ является нулевым вектором, его длина равна нулю, а направление не определено. Пусть длина вектора $\vec{e}$ равна единице, тогда вектор $\vec{e}$ является единичным вектором, кроме того, вектор $\vec{e}$ будет ортом вектора $\vec{b}$.

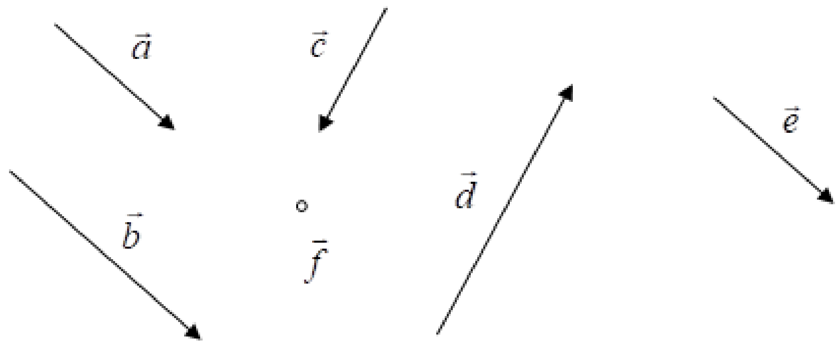


Рис. 3. Коллинеарные и равные векторы.

Три и более векторов в пространстве называются *компланарными,* если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие три вектора можно считать компланарными.

Пример. На рисунке 4 расположены три компланарных вектора: $\vec{r}$, $\vec{q}$ $\vec{s}$. Векторы $\vec{r}$ и $\vec{q}$ лежат в одной плоскости α, а вектор $\vec{s}$ в параллельной плоскости β .

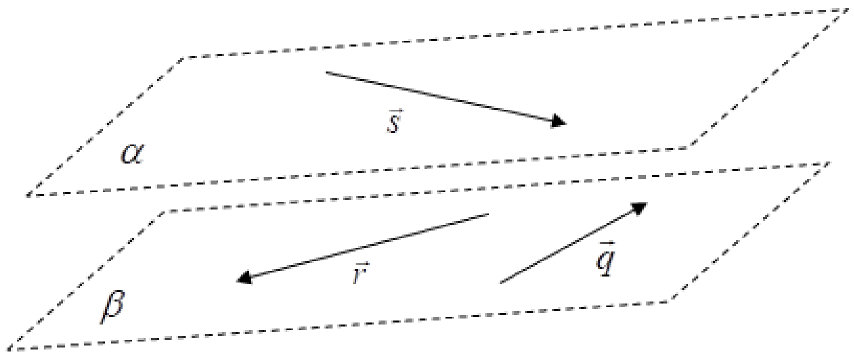


Рис. 4. Компланарные векторы.

2.2. Линейные операции над векторами

Рассмотрим линейные операции над векторами. К ним относятся сложение векторов, вычитание векторов, умножение вектора на число.

Сумой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+\vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 5.а). Данное определение называется *правилом треугольника*.

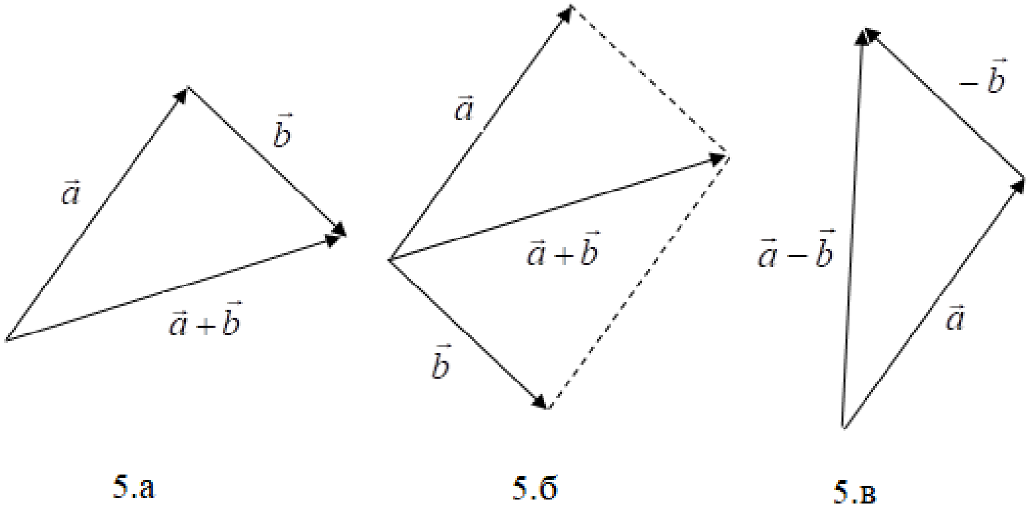


Рис. 5. Сумма и разность векторов.

Сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно также представить, как вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Начало вектора $\vec{a}+\vec{b}$ совпадает с началами векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а конец – с противоположной вершиной параллелограмма (рис. 5.б).

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}-\vec{b}$, представляющий собой сумму вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, противоположного вектору $\vec{b}$ (рис. 5.в). Таким образом, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda|\cdot|a|$ и направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$ и противоположное направление, если $\lambda<0$.

Пример. На рисунке 6 изображены вектор $\vec{a}$, вектор $2\vec{a}$, полученный, как произведение вектора $\vec{a}$ на два, и вектор $-3\vec{a}$, представляющий собой произведение вектора $\vec{a}$ на число -3. Видно , что векторы $2\vec{a}$ и $-3\vec{a}$ коллинеарны вектору $\vec{a}$, вектор $2\vec{a}$ имеет направление вектора $\vec{a}$, а вектор $-3\vec{a}$ – направление противоположное вектору $\vec{a}$.

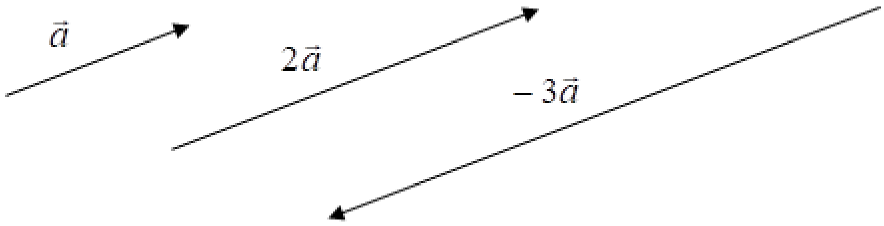


Рис. 6. Умножение вектора на число.

Если вектор $\vec{a}$ можно представить, как произведение вектора $\vec{b}$ на число λ, то есть $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Верно и обратное утверждение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, причем, $|\vec{a}| \neq 0$, то вектор $\vec{b}$ можно представить, как произведение вектора $\vec{a}$ на некоторое число λ: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

В силу вышеизложенного можно определить произвольный ненулевой вектор $\vec{a}$, как произведение модуля $|\vec{a}|$ на его орт: $\vec{a} = |a| \cdot \vec{a}^0$.

Определим свойства линейных операций над векторами.

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – коммутативность сложения;
2. $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$ – коммутативность умножения на число;
3. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – ассоциативность сложения;
3. $(\lambda_1\lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2\vec{a})$ – ассоциативность умножения на число;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$ – дистрибутивность суммы коэффициентов;
5. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ – дистрибутивность относительно суммы векторов.

2.3. Метод координат.

2.3.1. Разложение вектора по ортам координатных осей.

В декартовой системе координат любой свободный вектор можно представить в виде линейной комбинации орт координатных осей.

С помощью параллельного переноса поместим начало произвольного вектора $\vec{a}$ в начало прямоугольной декартовой системы координат (рис. 7). Пусть векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ являются ортами координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz*, а числа a_x, a_y, a_z – проекциями конца вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси координат. Тогда вектор $\vec{a}$ можно получить в виде суммы произведений орт координатных осей $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ на его проекции a_x, a_y, a_z:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}. \qquad (2.1)$$

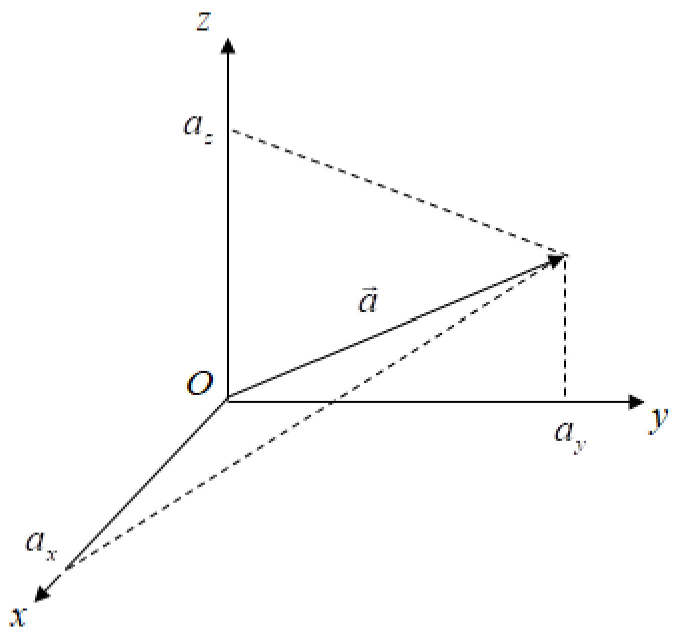


Рис. 7. Проекции вектора $\vec{a}$.

Числа a_x, a_y, a_z принято называть координатами вектора $\vec{a}$. В этом случае разложение вектора $\vec{a}$ можно записать в следующим виде:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}.$$

Пример. Если проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси *Ox*, *Oy*, *Oz* равны соответственно 4, 1 и –7, то говорят, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты (4; 1; –7), а его разложение можно представить в виде:

$$\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}.$$

В случае, если известны координаты начала $(x_1; y_1; z_1)$ и координаты конца $(x_2; y_2; z_2)$ вектора $\vec{a}$, то координаты вектора этого вектора можно получить, вычитывая из координат конца вектора соответствующие координаты его начала: $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Пример. Найдем координаты вектора $\vec{p}$, если известны координаты его начала $(3;-8;5)$ и его конца $(2;0;11)$.

Для нахождения координат вектора $\vec{p}$ найдем разности его координат:

$$(2-3;0-(-8);11-5)=(-1;8;6).$$

2.3.2. Модуль вектора.

Мы уже давали определение модуля вектора, как числа, определяющего длину вектора. Снова перенесем начало вектора $\vec{a}$ в начало координат. Тогда длину вектора $\vec{a}$ можно получить по теореме Пифагора, взяв квадратный корень из суммы квадратов проекций вектора $a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}$.

Таким образом, модуль вектора получим по формуле:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}. \qquad (2.2)$$

Пример. Найдем модуль вектора k, имеющего координаты (4, 1, –7).

Используя вышеприведенную формулу получим:

$$|\vec{k}|=\sqrt{4^2+1^2+(-7)^2}=\sqrt{16+1+49}=\sqrt{66}\approx 8{,}124038.$$

2.3.3. Направляющие косинусы

Для определения направления векторов можно использовать углы α, β, γ, которые вектор образует с осями координат (рис. 8). Данные углы полностью определяют направление вектора.

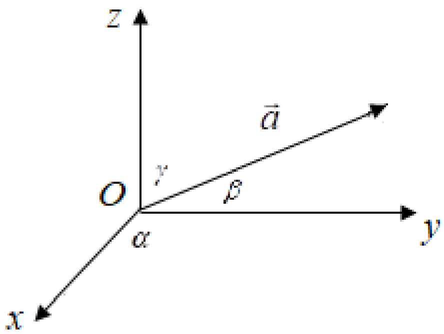


Рис. 8. Направляющие косинусы.

Косинусы этих углов называют *направляющими косинусами* вектора. Направляющие косинусы можно найти, как отношения соответствующих координат к модулю вектора:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}. \tag{2.3}$$

Найдем сумму квадратов направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^{\ 2}}{|a|^2} + \frac{a_y^{\ 2}}{|a|^2} + \frac{a_z^{\ 2}}{|a|^2} = \frac{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}{|a|^2}.$$

Так как сумма квадратов координат равна квадрату модуля вектора, то значение дроби равно 1. Следовательно, сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.4}$$

Пример. Найти направляющие векторы вектора $\vec{p}$, если заданы координаты его начала и конца: $P_1(5;\ 3;\ 0)$, $P_2(1;\ 7;\ -2)$.

Вычислим координаты вектора $\vec{p}$:

$$p_x = 1 - 5 = -4; \ p_y = 7 - 3 = 4; \ p_z = -2 - 0 = -2.$$

Теперь определим модуль вектора $\vec{p}$:

$$|\vec{p}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

Следовательно, направляющие косинусы вектора $\vec{p}$ будут равны:

$$\cos\alpha = \frac{-4}{6}; \quad \cos\beta = \frac{4}{6}; \quad \cos\gamma = \frac{-2}{6}.$$

Сократив дроби, окончательно получим:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}; \quad \cos\beta = \frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = -\frac{1}{3}.$$

2.3.4. Равенство и коллинеарность векторов

Два вектора считаются *равными*, если их координаты равны:

$$\vec{a}=\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}. \tag{2.5}$$

Пример. Векторы $\vec{m}(-8;3;17)$ и $\vec{n}(-8;3;17)$ равны, так равны их координаты.

Рассмотрим два коллинеарных вектора: вектор $\vec{a}$ с координатами a_x, a_y, a_z и вектор $\vec{b}$, координаты которого равны b_x, b_y, b_z. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены в одну сторону, тогда их направляющие косинусы будут равны.

Из определения направляющих косинусов выразим координаты векторов:

$$a_x = |a|\cos\alpha; \quad a_y = |a|\cos\beta; \quad a_z = |a|\cos\gamma.$$

$$b_x = |b|\cos\alpha; \quad b_y = |b|\cos\beta; \quad b_z = |b|\cos\gamma.$$

Разделим теперь все координаты вектора $\vec{a}$ на соответствующие координаты вектора $\vec{b}$:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{|a|\cos\alpha}{|b|\cos\alpha} = \frac{|a|}{|b|}; \quad \frac{a_y}{b_y} = \frac{|a|\cos\beta}{|b|\cos\beta} = \frac{|a|}{|b|}; \quad \frac{a_z}{b_z} = \frac{|a|\cos\gamma}{|b|\cos\gamma} = \frac{|a|}{|b|}.$$

Как видно, отношение любых координат сонаправленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно отношению их модулей.

Нетрудно понять, что в случае противоположно направленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направляющие косинусы будут отличаться только знаком и отношение любых координат противонаправленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно отношению их модулей, взятому со знаком минус:

$$\frac{a_x}{b_x} = -\frac{|a|}{|b|}; \quad \frac{a_y}{b_y} = -\frac{|a|}{|b|}; \quad \frac{a_z}{b_z} = -\frac{|a|}{|b|}.$$

Таким образом, можно сказать, что координаты коллинеарных векторов пропорциональны. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты являются коллинеарными:|

$$\vec{a} \parallel \vec{\mathrm{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{2.6}$$

Пример. Векторы $\vec{q}(4; -8; 2)$ и $\vec{r}(-6; 12; -3)$ являются коллинеарными, поскольку их координаты пропорциональны:

$$\frac{4}{-6} = \frac{-8}{12} = \frac{2}{-3}.$$

2.4. Скалярное произведение

2.4.1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{\mathrm{b}} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\mathrm{b}}| \cos\varphi, \tag{2.7}$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Иногда скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записывают $(\vec{a}; \vec{b})$.

Ввиду того, что $|\vec{a}|$, $|\vec{\mathrm{b}}|$ и $\cos\varphi$ являются действительными числами, то для скалярного произведения выполняются следующие основные свойства:

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – коммутативность скалярного произведения;
2. $\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ – ассоциативность умножения на скаляр;
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \cdot\vec{a} \cdot \vec{c})$ – дистрибутивность скалярного произведения.

Кроме того, можно заметить, что квадрат вектора равен квадрату его модуля: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Пример. Найдем скалярные квадраты ортов осей координат.

Вследствие того, что длины ортов равны единице, получим:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Пример. Найдем скалярные произведение различных ортов осей координат.

Так как углы между ортами равно нулю, получим:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

2.4.2. Выражение скалярного произведения через координаты

Возьмем два произвольных вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$. Представим эти векторы в виде суммы произведений их координат на соответствующие орты:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}; \qquad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x\vec{i}\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\vec{k}.$$

В силу того, что произведения $\vec{i}\cdot\vec{j}$, $\vec{i}\cdot\vec{k}$, $\vec{j}\cdot\vec{k}$, $\vec{j}\cdot\vec{i}$, $\vec{k}\cdot\vec{i}$ и $\vec{k}\cdot\vec{j}$ равны нулю, слагаемые , содержащие эти множители также будут равны нулю, и, следовательно, скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет равно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x\vec{i}\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\vec{k}$$

Учитывая, что скалярные произведения $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, окончательно получим:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{2.8}$$

Таки образом, можно утверждать: скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат.

Пример. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{p}(-2;1;5)$ и $\vec{q}(4;8;3)$.

Для нахождения произведения $\vec{p}\cdot\vec{q}$ рассчитаем сумму произведений соответствующих координат векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z = -2\cdot 4 + 1\cdot 8 + 5\cdot 3 = -8 + 8 + 15 = 15.$$

2.4.3. Приложения скалярного произведения

Рассмотрим наиболее употребляемые приложения скалярного произведения.

Определение угла между векторами

Возьмем два ненулевых вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$. Выпишем формулу нахождения скалярного произведения этих векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.$$

Выразим из уравнения $\cos\varphi$. Для этого разделим обе части уравнения на произведение модулей векторов $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Подставим вместо произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$ сумму произведений координат $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, а вместо модулей векторов – их представления через координаты и таким образом получим формулу нахождения косинуса угла между указанными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}. \qquad (2.9)$$

Пример. Определим косинус угла между векторами $\vec{g}(6;-3;11)$ и $\vec{h}(-3;0;1)$.

Сначала найдем скалярное произведение векторов $\vec{g}$ и $\vec{h}$:

$$\vec{g}\cdot\vec{h}=6\cdot(-3)+(-3)\cdot 0+11\cdot 1=-18+0+11=-7\,.$$

Найдем модули векторов $\vec{g}$ и $\vec{h}$:

$$|\vec{g}|=\sqrt{6^2+(-3)^2+11^2}=\sqrt{36+9+121}=\sqrt{166}.$$

$$|\vec{h}|=\sqrt{(-3)^2+0^2+1^2}=\sqrt{9+0+1}=\sqrt{10}.$$

Теперь для нахождения косинуса угла между векторами $\vec{g}$ и $\vec{h}$ осталось найти отношение $\vec{g}\cdot\vec{h}$ на произведение модулей $|\vec{g}|\cdot|\vec{\mathrm{h}}|$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{g}\cdot\vec{\mathrm{h}}}{|\vec{g}|\cdot|\vec{\mathrm{h}}|}=\frac{-7}{\sqrt{166}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{7}{2\cdot\sqrt{415}}.$$

Определение перпендикулярности векторов

Из формулы векторного произведения органично следует условие перпендикулярности векторов.

Два ненулевых вектора $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ и $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ будут взаимно перпендикулярными тогда и только тогда, когда скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0\,.$$

Пример. Определим, являются ли векторы $\vec{e}(4;1;9)$ и $\vec{f}(-3;3;1)$ перпендикулярными?

Для определения перпендикулярности найдем скалярное произведение векторов $\vec{e}$ и $\vec{f}$:

$$\vec{e}\cdot\vec{f}=4\cdot(-3)+1\cdot 3+9\cdot 1=-12+3+9=0\,.$$

Ввиду того, что скалярное произведение векторов $\vec{e}$ и $\vec{f}$ равно нулю, следовательно, векторы $\vec{e}$ и $\vec{f}$ являются взаимно перпендикулярными.

2.5. Векторное произведение

2.5.1. Определение и свойства векторного произведения

Три некомпланарных упорядоченных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют *левую тройку*, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся по часовой стрелки, и *правую* , если против часовой (рис. 9).

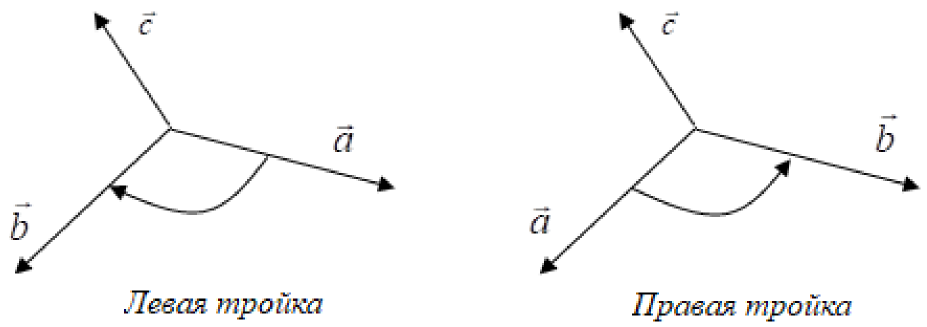


Рис. 9. Ориентация векторов.

Дадим теперь определение векторного произведения.

Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

1. Перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2. Имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi, \text{ где } \varphi = \angle(\vec{a}; \vec{b}) \text{ (рис. 10);}$$

3. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

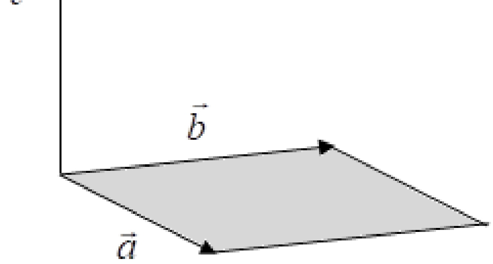


Рис. 10. Векторное произведение.

Векторное произведение обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$ или $[\vec{a};\vec{b}]$.

Пример. Определим векторные произведение ортов осей координат.

Вследствие того, что углы между ортами равны 90º, длины ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ равны единице и они образуют правую тройку получим:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

Однако, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i};\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$.

Рассмотрим основные свойства векторного произведения.

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ – антикоммутативность векторного произведения;
2. $\alpha\vec{a}\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$ – ассоциативность умножения на скаляр;
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\cdot\vec{a}\times\vec{c})$ – дистрибутивность векторного произведения.

Рассмотрим два коллинеарных ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По определению длина векторного произведения $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ равна произведению модулей векторов $|\vec{a}|\cdot|\vec{\mathrm{b}}|$ на синус угла между ними. Так как вектора коллинеарны, то синус угла между ними будет равен нулю, а, следовательно, векторное произведение будет равно нулевому вектору. Очевидно, верно и обратное утверждение: если векторное произведение двух векторов равно нулю, то векторы коллинеарны.

Пример. Векторные квадраты ортов осей координат равны нулевому вектору:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}.$$

2.5.2. Векторное произведение в координатной форме

Возьмем два произвольных вектора $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ и $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$. Представим эти векторы в виде суммы произведений их координат на соответствующие орты:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Найдем векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x\vec{i}\times\vec{i} + a_x b_y\vec{i}\times\vec{j} + a_x b_z\vec{i}\times\vec{k} +$$

$$+ a_y b_x\vec{j}\times\vec{i} + a_y b_y\vec{j}\times\vec{j} + a_y b_z\vec{j}\times\vec{k} + a_z b_x\vec{k}\times\vec{i} + a_z b_y\vec{k}\times\vec{j} + a_z b_z\vec{k}\times\vec{k}.$$

Как мы уже определили, векторные квадраты ортов осей координат равны нулевому вектору:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}.$$

Найдем оставшиеся векторные произведения ортов (рис. 11).

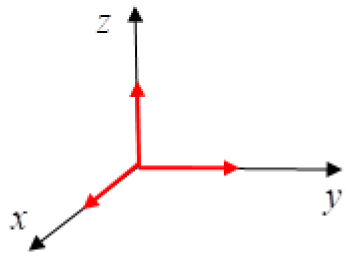


Рис. 11. Орты осей координат.

Результат вычисления векторных произведений поместим в таблицу:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Подставляя значения таблицы в выражение векторного произведения, получим:

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_x b_x\vec{0} + a_x b_y\vec{k} - a_x b_z\vec{j} - a_y b_x\vec{k} + a_y b_y\vec{0} + a_y b_z\vec{i} + a_z b_x\vec{j} - a_z b_y\vec{i} + a_z b_z\vec{0}.$$

Уберем из суммы нулевые векторы:

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_x b_y\vec{k} - a_x b_z\vec{j} - a_y b_x\vec{k} + a_y b_z\vec{i} + a_z b_x\vec{j} - a_z b_y\vec{i}.$$

Приведем подобные слагаемые относительно ортов:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Выражения в скобках можно представить в виде определителей второго порядка:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Как видно, последнее выражение является разложение определителя по теореме Лапласа:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.10}$$

Таким образом, векторное произведение можно представить в виде определителя третьего порядка, в первая строка которого содержит орты осей координат, а во второй и третьей строках находятся координаты перемножаемых векторов.

Пример. Найти координаты векторного произведения векторов $\vec{a}\,(3;\ -1;\ 2)$ и $\vec{b}\,(0;\ 5;\ 4)$.

Будем использовать полученную формулу, поместим в определитель координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}=$$

Разложим определитель по первой строке и вычислим определители второго порядка:

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=-14\vec{i}+12\vec{j}+15\vec{k}.$$

Таким образом, мы получили вектор с координатами (-14; 12; 15).

2.5.3. Некоторые приложения векторного произведения

Рассмотрим наиболее употребляемые приложения векторного произведения.

Установление коллинеарности векторов

Возьмем два ненулевых вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными, то координаты этих векторов пропорциональны $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ и пропорциональными будут строки определителя $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, а значит этот определитель будет равен нулю и произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ будет равно нулевому вектору.

Это рассуждение можно провести и в обратную сторону: если векторное произведение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю, то указанные векторы будут коллинеарными.

Пример. Проверим векторы $\vec{c}\,(6; 12; -9)$ и $\vec{d}\,(4; 8; -6)$ на коллинеарность.

Найдем произведение $\vec{c} \times \vec{d}$:

$$\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 12 & -9 \\ 4 & 8 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}.$$

Так как векторное произведение $\vec{c} \times \vec{d}$ равно нулевому вектору, то векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ являются коллинеарными.

Нахождение площадей параллелограммов и треугольников

Вспомним, что в определении векторного произведения указано, что вектор, полученный в результате векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Тогда для нахождения площади параллелограмма достаточно найти модуль векторного произведения векторов, совпадающих со смежными сторонами:

$$S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \qquad (2.11)$$

Если взять только половину параллелограмма, разделенного диагональю, то для определения площади полученного треугольника достаточно площадь параллелограмма разделить на два:

$$S_{\Delta} = \frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{2}. \qquad (2.12)$$

Пример. Найдем площадь треугольника с вершинами в точках $E(-2; 2; -4);\ F(-4; -8; -8);\ G(1; 4; 8)$.

Для решения задачи определим координаты двух векторов, исходящих из одной вершины, например, вершины *E*.

$$\overrightarrow{EF} = (-4-(-2);\ -8-2;\ -8-(-4)) = (-2; -10; -4);$$

$$\overrightarrow{EG} = (1-(-2);\ 4-2;\ 8-(-4)) = (3; 2; -12).$$

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{EG}$:

$$\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -10 & -4 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -112\vec{i} + 12\vec{j} + 26\vec{k}.$$

А теперь найдем половину длины полученного векторного произведения:

$$S_{\Delta EFG} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-112)^2 + 12^2 + 26^2} = \sqrt{13364} \approx 115{,}6028.$$

Следовательно, площадь треугольника *EFG* приближенно равна 115,6028.

2.6. Смешанное произведение векторов

2.6.1. Определение и свойства смешанного произведения

Возьмем три произвольных ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Определим тернарную операцию умножения этих векторов следующим образом: векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ скалярно умножим на вектор $\vec{c}$. Так как результат векторного произведения, являющийся вектором, второй раз мы умножаем скалярно, то в итоге получим числовое значение. Таким образом составленное произведение трех векторов называют *смешанным* или реже *векторно-скалярным*.

Геометрически смешанное произведение можно интерпретировать, как объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, образующих правую тройку (рис. 12).

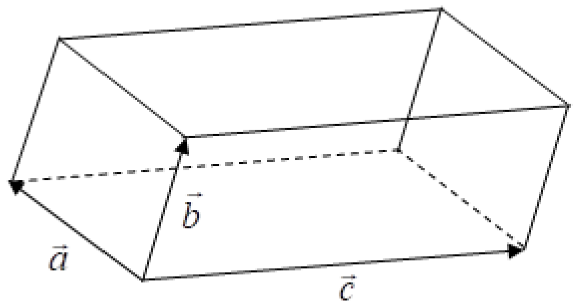


Рис. 12. Геометрическое представление смешанного произведения.

Ввиду антикоммутативности векторного произведения для векторов, образующих левую тройку, смешанное произведение будет иметь отрицательное значение.

Пример. Смешанное произведение ортов осей координат равны нулевому единице:

$$(\vec{i}\times\vec{j})\cdot\vec{k}=1.$$

Рассмотрим основные свойства смешанного произведения.

Свойства смешанного произведения

1. Для смешанного произведения не важен порядок векторного и скалярного произведений:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Важно, что сначала выполняется векторное произведение, а потом скалярное. Учитывая это свойство, можно вообще не указывать знаки векторного и скалярного произведений:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

2. При циклической перестановке значение смешанного произведения не изменится:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}.$$

3. При перемене мест двумя любыми векторами значение смешанного произведения меняет знак:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

4. Смешанное произведение трех ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

2.6.2. Смешанное произведение в координатах

Возьмем три произвольных ненулевых вектора $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ и $\vec{c}(c_x;c_y;c_z)$. Представим эти векторы в виде суммы произведений их координат на соответствующие орты:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k};\qquad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k};\qquad \vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}.$$

Найдем смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, представив векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ в виде определителя третьего порядка:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

Разложим определитель по первой строке:

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

Теперь выполним скалярное произведение векторов в координатной форме:

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z .$$

Снова воспользуемся теоремой Лапласа и свернем полученное выражение в определитель третьего порядка. Окончательно получим:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

Таким образом, смешанное произведение произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно определителю, составленному из координат указанных векторов.

Пример. Найдем смешанное произведение трех векторов $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(4;0;6)$ и $\vec{c}(0;10;7)$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} =$$
$$= -4\cdot(-44) + 0 - 6\cdot 10 = 116.$$

Пример. Найдем смешанное произведение трех векторов $\vec{c}(2;-1;8)$, $\vec{d}(3;-5;0)$ и $\vec{e}(8;-11;8)$.

$$\vec{c}\vec{d}\vec{e} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & -5 & 0 \\ 8 & -11 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -11 & 8 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -11 \end{vmatrix} = -80 + 24 + 56 = 0.$$

2.6.3. Некоторые приложения смешанного произведения

Определение взаимной ориентации векторов

Как мы уже отмечали, смешанное произведение векторов, образующих правую тройку, является положительным числом, а для векторов, образующих левую тройку, – отрицательное. Использование знака смешанного произведения позволяет определять взаимную ориентацию векторов в пространстве.

Пример. Определим взаимную ориентацию трех векторов $\vec{k}(5; -1; 8)$, $\vec{l}(3; 2; 1)$ и $\vec{m}(-7; 0; 12)$, взятых в указанном порядке.

Для определения ориентации векторов, найдем их смешанное произведение:

$$\vec{k}\,\vec{l}\,\vec{m} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 12 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 20 + 43 + 112 = 275.$$

Так как смешанное произведение положительно, векторы $\vec{k}$, $\vec{l}$ и $\vec{m}$ образуют правую тройку.

Пример. Три вектора $\vec{r}(6; 0; 4)$, $\vec{s}(-5; -2; 0)$ и $\vec{t}(0; 0; 4)$, взятые в указанном порядке, образуют левую тройку, так как их смешанное произведение имеет отрицательный знак.

$$\vec{r}\,\vec{s}\,\vec{t} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -48 + 0 + 0 = -48.$$

Установление компланарности векторов

Возьмем три ненулевых вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ и $\vec{c}(c_x; c_y; c_z)$. Указанные векторы будут компланарны, тогда и только тогда, если их смешанное произведение будут равно нулю. На этом утверждении и основано установлении компланарности векторов.

Пример. Определим, являются ли компланарными векторы $\vec{f}(0; 3; 0)$, $\vec{g}(5; 4; 0)$ и $\vec{h}(0; 0; 6)$.

Для определения компланарности найдем смешанное произведение векторов:

$$\vec{f}\,\vec{g}\,\vec{h}=\begin{vmatrix}0&3&0\\5&4&0\\0&0&6\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}4&0\\0&4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}5&0\\0&6\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}5&4\\0&0\end{vmatrix}=0-90+0=-90.$$

Так как произведение не равно нулю, то векторы $\vec{f}$, $\vec{g}$ и $\vec{h}$ являются компланарными.

Пример. Векторы $\vec{d}(2;1;1)$, $\vec{e}(3;2;2)$ и $\vec{f}(1;1;1)$ будут компланарными, поскольку их смешанное произведение равно нулю:

$$\vec{d}\,\vec{e}\vec{f}=\begin{vmatrix}2&1&1\\3&2&2\\1&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=0-1+1=0.$$

Вычисление объемов многогранников

Важным приложением смешанного произведения является вычисление объема различных многогранников. Достаточно просто вычисляется объем параллелепипеда, три любые грани которого совпадают с некомпланарными векторами (рис. 13).

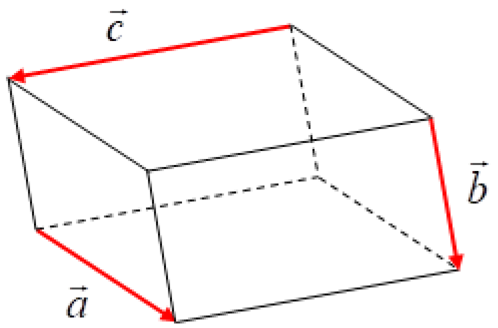


Рис. 13. Объем параллелепипеда.

Объем такого параллелепипеда будет численно равен абсолютному значению смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V_{пар}=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|. \qquad (2.14)$$

Пример. Определить объем параллелепипеда $AA_1BB_1CC_1DD_1$ (рис. 14), если известны координаты его вершин: $A(3;8;1)$, $B(5;13;1)$, $C(6;10;3)$, $C_1(6;12;3)$.

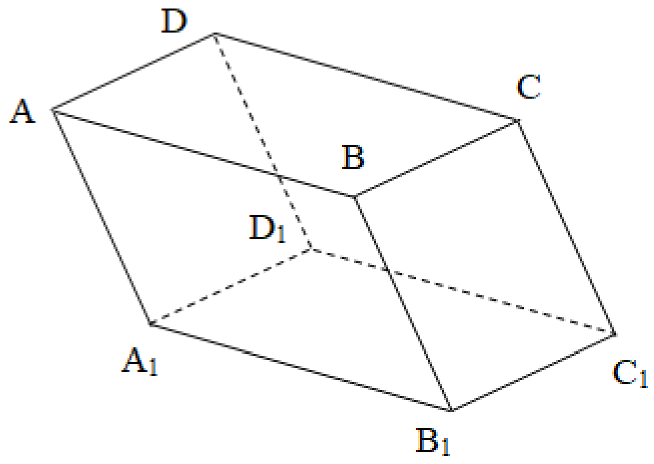


Рис. 14. Параллелепипед $AA_1BB_1CC_1DD_1$.

Для расчета объема параллелепипеда найдем смешанное произведение трех некомпланарных векторов $\vec{a}(2;5;0)$, $\vec{b}(1;-3;2)$ и $\vec{c}(0;2;0)$, совпадающих с ребрами параллелепипеда AB, BC и CC_1 соответственно.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

Следовательно, объем параллелепипеда $AA_1BB_1CC_1DD_1$ будет равен 8.

Объем треугольной пирамиды, построенной на трех некомпланарных векторах (рис. 15), можно легко получить, учитывая, что пирамида является шестой частью параллелограмма:

$$V_\Delta = \frac{\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|}{6}. \tag{2.15}$$

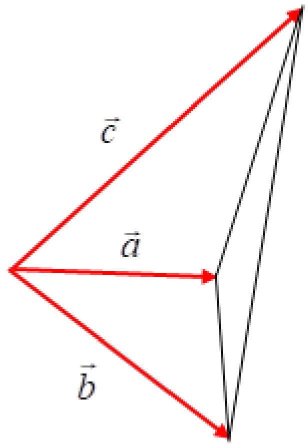


Рис. 15. Треугольная призма.

Пример. Вершинами пирамиды служат точки: $O(8;-4;0)$, $P(-4;-5;-7)$, $R(0;-1;7)$, $Q(1;5;7)$. Найдем объем этой пирамиды.

Для расчета объема построим некомпланарные векторы: $\overrightarrow{OP}(-12;-1;-7)$, $\overrightarrow{OR}(-8;3;7)$ и $\overrightarrow{OQ}(-7;9;7)$. Затем найдем смешанное произведение этих векторов:

$$V_{пир} = \begin{vmatrix} -12 & -1 & -7 \\ -8 & 3 & 7 \\ -7 & 9 & 7 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -8 & 7 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = 854.$$

Разделив 854 на 6, получим искомый объем:

$$V_{пир} = \frac{854}{6} \approx 142{,}33.$$

Глава 3. Прямые и плоскости в пространстве

3.1. Плоскости в пространстве

3.1.1. Общее уравнение плоскости

Возьмем точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащую плоскости π и произвольный вектор $\vec{n}(A; B; C)$, ортогональный указанной плоскости (рис. 16). Как мы увидим, эта пара – точка плоскости и ортогональный вектор полностью определяют плоскость π. Ортогональный к плоскости π вектор $\vec{n}$ будем называть *нормальным* вектором.

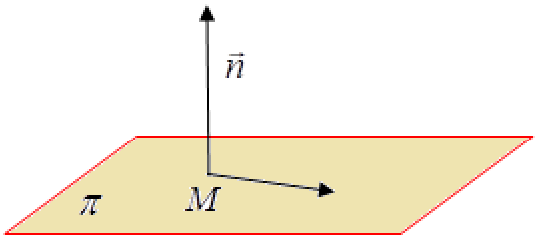


Рис. 16. Определение общего уравнения.

На плоскости π отметим также произвольную точку $M(x; y; z)$ и построим вектор $\overline{M_0M}$. Координаты вектора $\overline{M_0M}$ будут соответственно равны $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

Так как векторы $\vec{n}$ и $\overline{M_0M}$ ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0.$$

Выразим скалярное произведение векторов $\vec{n}(A; B; C)$ и $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ в координатной форме, для этого возьмем сумму произведений соответствующих координат данных векторов:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Раскроем скобки

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0,$$

а затем сгруппируем слагаемые:

$$Ax + By + Cz \underline{- Ax_0 - By_0 - Cz_0} = 0 .$$

Обозначив выражение $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ буквой D, получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \qquad (3.1)$$

Пример. Определим общее уравнение плоскости α, проходящей через точку $P(1; -3; 4)$, если ей ортогонален вектор $\vec{n}(6; 2; -1)$.

Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$. Найдем скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overline{PM}$ и приравняем его к нулю:

$$6(x-1) + 2(y+3) - 1(z-4) = 0 .$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые получим общее уравнение плоскости α:

$$6x - 6 + 2y + 6 - z + 4 = 0$$

$$6x + 2y - z + 4 = 0 .$$

Пример. Найдем общее уравнение плоскости β, проходящей через точку $Q(2;1;1)$, если ей параллельна плоскость $5x - z + 7 = 0$.

На плоскости β отметим произвольную точку $M(x; y; z)$ и построим вектор $\overline{QM}$. Решим уравнение $\vec{n} \cdot \overline{QM} = 0$ в координатной форме:

$$5(x-2) + 0(y-1) - 1(z-1) = 0$$

$$5x - 10 - z + 1 = 0$$

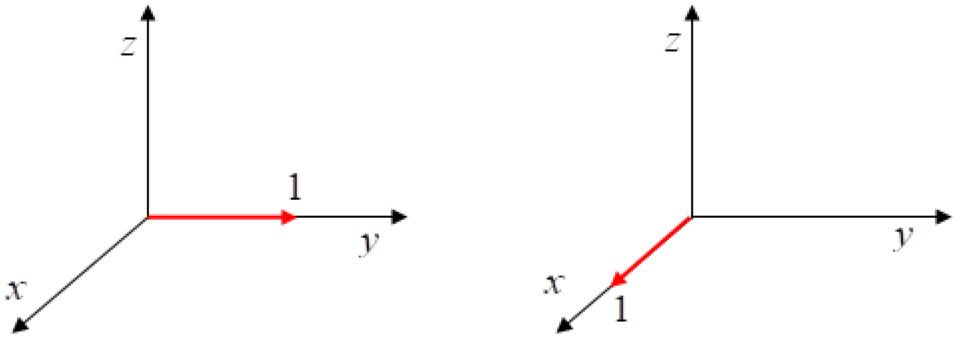
Таким образом, общее уравнение плоскости β будет иметь вид:

$$5x - z - 9 = 0.$$

Рассмотрим частные случаи построения плоскостей, перпендикулярных осям координат или, что тоже самое, параллельных плоскостям, образованным осями координат.

Пример. Определим общее уравнение плоскости γ, проходящей через точку $R(8; 2; 3)$, если она перпендикулярна оси Oy.

На плоскости γ отметим произвольную точку $M(x; y; z)$, а в качестве нормального можно использовать любой вектор, лежащий на оси *Oy* или на любой прямой, параллельной этой оси. Возьмем, например, единичный вектор с координатами $(0;1;0)$, лежащий на оси *Oy* (рис. 17.а).



17.а 17.б

Рис. 17. Орты осей координат.

Решим уравнение $\vec{n} \cdot \overline{RM} = 0$: 17.б

$$0(x-8)+1(y-2)+0(z-3)=0.$$

Раскроем скобки в левой части уравнения и приведем подобные слагаемые. В результате получим общее уравнение плоскости γ:

$$y-2=0.$$

Пример. Найдем общее уравнение плоскости χ, проходящей через точку $S(-3;1;21)$, если ей параллельна плоскость *yOz*.

На плоскости χ отметим произвольную точку $M(x; y; z)$, а в качестве нормального можно использовать любой вектор, лежащий на оси *Ox* или на любой прямой, параллельной этой оси. Возьмем единичный вектор с координатами $(1;0;0)$, лежащий на оси *Ox* (рис. 17.б).

Решим уравнение $\vec{n} \cdot \overline{SM} = 0$:

$$1(x+3)+0(y-1)+0(z-21)=0.$$

Решая уравнение, получим общее уравнение плоскости χ:

$$x+3=0.$$

3.1.2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Построим плоскость π, проходящую через три фиксированных точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ (рис. 18).

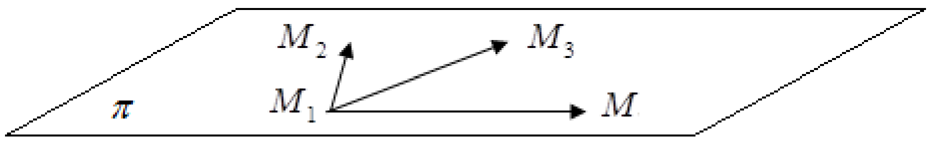


Рис. 18. Плоскость, проходящая через три точки.

Определим произвольную точку $M(x; y; z)$, принадлежащую плоскости π. Зная координаты точек M, M_1, M_2, M_3, построим три вектора с началом в точке M_1: $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$. В силу того, что все три вектора компланарны, то их смешанное произведение будет равно нулю. Запишем смешанное произведение векторов $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ в координатной форме, получим:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Таким образом, мы получили уравнение плоскости, проходящей через три точки, в матричной форме.

Пример. Найдем общее уравнение плоскости, проходящей через точки $F_1(1; -1; 2)$, $F_2(5; 2; 6)$, $F_3(4; 0; 9)$.

Подставим в уравнение плоскости, проходящей через три точки, координаты точек F_1, F_2, F_3:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 5-1 & 2+1 & 6-2 \\ 4-1 & 0+1 & 9-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Выполним действия в определителе:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по теореме Лапласа:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определители второго порядка и раскроем скобки:

$$(x-1)\cdot 17 - (y+1)\cdot 16 + (z-2)\cdot(-5) = 0$$

$$17x - 17 - 16y - 16 - 5z + 10 = 0.$$

Приведем подобные слагаемые и в итоге получим общее уравнение плоскости, проходящей через три точки F_1, F_2, F_3:

$$17x - 16y - 5z - 23 = 0.$$

3.1.3. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость π пересекает оси координат *Ox*, *Oy*, *Oz* в точках M_1, M_2, M_3, откладывая на них значения a, b и c соответственно (рис. 19).

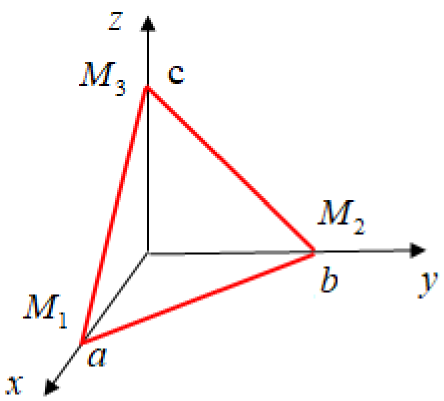


Рис. 19. Пересечение плоскости π с осями координат.

Точки $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$, $M_3(0;0;c)$ принадлежат плоскости π, следовательно, их координаты можно использовать в уравнении плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по первой строке:

$$(x-a)\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Найдем определители второго порядка, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$(x-a)bc + yac + zab = 0$$

$$xbc - abc + yac + zab = 0$$

$$xbc + yac + zab = abc.$$

Разделим обе части уравнения на произведение abc и окончательно получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.3)$$

Полученное уравнение плоскости носит название *уравнения плоскости в отрезках*.

Пример. Определим общее уравнение плоскости, отсекающей на осях координат *Ox*, Oy, *Oz* значения 5, -4, 12.

Построим уравнение плоскости в отрезках. Мы уже знаем коэффициенты этого уравнения: a = 5, b = -4, c = 12. Учитывая это, получим:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{12} = 1$$

Для того, чтобы избавиться от знаменателей, умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное чисел 5; 4; 12:

$$12x - 15y + 5z = 60.$$

Для получения общего уравнения плоскости осталось только перенести число 60 в левую часть уравнения:

$$12x - 15y + 5z - 60 = 0.$$

Пример. Найдем значения, отсекаемые на осях координат *Ox, Oy, Oz* плоскостью, заданной общим уравнением $2x-6y+4z-5=0$.

Провеем преобразования уравнения, приводящие его к виду уравнения плоскости в отрезках. Перенесем в правую часть уравнения свободный член:

$$2x-6y+4z=5.$$

Разделим обе части уравнения на 5, перенесем в знаменатели коэффициенты при неизвестных и получим уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{-\frac{5}{6}}+\frac{z}{\frac{5}{4}}=1.$$

Таким образом, значения, отсекаемые на осях координат *Ox, Oy, Oz* плоскостью $2x-6y+4z-5=0$, равны $\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{6}$ и $\frac{5}{4}$.

3.1.4. Нормальное уравнение плоскости

Частным случаем общего уравнения плоскости является нормальное уравнение Его можно получить, используя в качестве нормального вектора единичный вектор.

Пусть $\vec{n}$ – единичный нормальный вектор плоскости π. Умножим общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ на число, обратное длине вектора $\vec{n}$. Данное число принято называть нормирующим множителем:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.4)$$

Тогда координаты нового нормального вектора плоскости π будут представлены в виде направляющих косинусов вектора $\vec{n}$, а уравнение плоскости будет записано в виде:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \qquad (3.5)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормального вектора плоскости π, а p – расстояние от плоскости до начала координат.

Пример. Приведем уравнение плоскости $2x-2y+z-18=0$ к нормальному виду.

Рассчитаем нормирующий множитель:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}.$$

Для получения нормального уравнения плоскости умножим коэффициенты общего уравнения на нормирующий множитель:

$$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-6=0.$$

Направляющие косинусы нормального вектора будут равны:

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

А расстояние от плоскости до начала координат будет равно шести.

3.2. Взаимное расположение плоскостей

3.2.1. Угол между двумя плоскостями

Пусть две плоскости π_1 и π_2 заданы общими уравнениями:

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\qquad \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Для нахождения одного из двугранных углов φ или смежного угла $180^o-\varphi$ между плоскостями π_1 и π_2 достаточно рассмотреть угол между нормальными векторами данных плоскостей (рис. 20):

$$\cos(\vec{n}_1\hat{;}\vec{n}_2)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$

Из уравнений плоскостей мы видим, что координаты векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ соответственно равны A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2. Тогда косинус угла φ между плоскостями π_1 и π_2 будет равен

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{3.6}$$

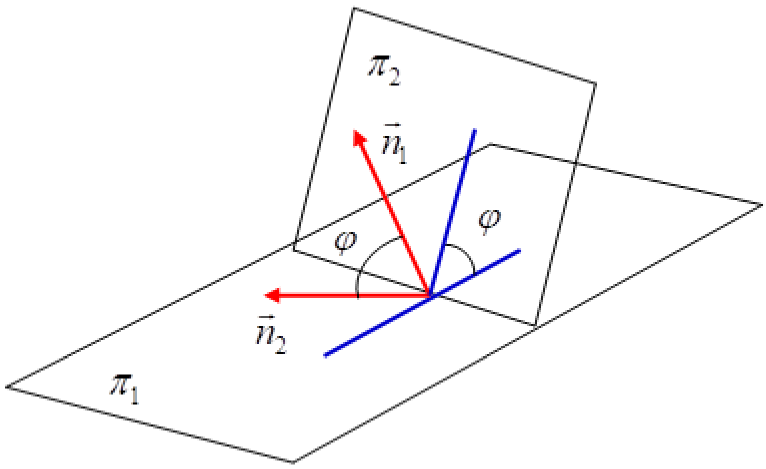


Рис. 20. Угол между плоскостями.

Со знаком плюс возьмем острый угол между плоскостями, а со знаком минус – смежный к нему тупой.

Пример. Определим угол между двумя плоскостями, заданными общими уравнениями:

$$x+2y-3z+4=0 \text{ и } 2x+3y+z-15=0.$$

Найдем косинус строго угла между плоскостями:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3-3\cdot 1}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{4+9+1}}=\frac{5}{14}.$$

Следовательно, величину угла между плоскостями можно определить, как

$$\varphi=\arccos\left(\frac{5}{14}\right)\approx 69^o.$$

Пример. Найдем угол между плоскостями

$$4x+10y-14z-12=0 \text{ и } 6x+15y-21z+18=0.$$

Вычислим косинус угла между плоскостями:

$$\varphi=\frac{4\cdot 6+10\cdot 15+14\cdot 21}{\sqrt{16+100+196}\sqrt{36+225+441}}=\frac{468}{\sqrt{312}\sqrt{702}}=\frac{468}{468}=1.$$

Ввиду того, что косинус угла равен единице, угол между плоскостями равен нуля, а заданные плоскости – параллельны.

Пример. Найдем угол между двумя плоскостями

$$x+3y-4z-10=0 \text{ и } -2x+2y+z-7=0.$$

Вычислим косинус угла между плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot(-2)+3\cdot 2-4\cdot 1}{\sqrt{1+9+16}\sqrt{4+4+1}} = \frac{0}{\sqrt{26}\sqrt{9}} = 0.$$

Косинус угла между плоскостями равен нулю, следовательно, плоскости перпендикулярны.

3.2.2. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей можем напрямую связывать с параллельностью и перпендикулярностью их нормальных векторов.

Рассмотрим две плоскости:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Плоскости π_1 и π_2 будут параллельны тогда и только тогда, когда координаты их нормальных векторов $\vec{n}_1\,(A_1;B_1;C_1)$ и $\vec{n}_2\,(A_2;B_2;C_2)$ будут пропорциональными:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Пример. Составим уравнение плоскости α, проходящей через точку $M(-2;1;4)$ параллельно плоскости $3x+2y-7z+9=0$.

Согласно условию параллельности плоскостей, первые три параметра нашей плоскости должны быть пропорциональны соответственным коэффициентам плоскости $3x+2y-7z+9=0$:

$$\frac{A_1}{3} = \frac{B_1}{2} = \frac{C_1}{-7}.$$

В качестве коэффициентов общего уравнения плоскости α можно взять любые числа, удовлетворяющие пропорции, но проще взять $A_1 = 3,\ B_1 = 2,\ C_1 = -7.$ Присвоив эти значения коэффициентам, получим:

$$3x+2y-7z+D=0.$$

Однако мы еще не учли, что на плоскости находится точка M с координатами $(-2;1;4)$. Подставляя координаты точки M в уравнение легко найти значение параметра D:

$$3\cdot(-2)+2\cdot 1-7\cdot 4+D=0,$$

$$D=32.$$

Учитывая полученное значение коэффициента D, можно окончательно записать общее уравнение плоскости α:

$$3x+2y-7z+32=0..$$

Рассмотрим теперь условие перпендикулярности двух плоскостей.

Снова возьмем две плоскости:

$$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Поскольку нормальные векторы плоскостей $\vec{n}_1\,(A_1;B_1;C_1)$ и $\vec{n}_2\,(A_2;B_2;C_2)$ определяют взаимную ориентацию плоскостей, то достаточно рассмотреть случай, когда нормальные векторы ортогональны. В этом случае сумма произведений их координат будет равна нулю:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Пример. Составим общее уравнение плоскости π, проходящей через точку $M(-2;3;6)$ перпендикулярно плоскостям $\beta_1 : 2x+3y-2z-4=0$ и $\beta_2 : 3x+5y+z=0$.

В следствии того, что исследуемая плоскость π перпендикулярна плоскостям β_1 и β_2, составим систему двух линейных уравнений, в которой переменные *A*, *B* и *C* являются параметрами плоскости π:

$$\begin{cases} 2A+3B-2C=0 \\ 3A+5B+C=0 \end{cases}.$$

Выразим переменные системы *A* и *B*:

$$\begin{cases} 2A+3B=2C \\ 3A+5B=-C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+3B=2C \\ B=-8C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=13C \\ B=-8C \end{cases}.$$

Возьмем для определенности значение $C=1$. Тогда общее уравнение плоскости π будет выглядеть так:

$$13x-8y+z+D=0.$$

Подставим в полученное уравнение координаты точки $M(-2;3;6)$ и найдем недостающий параметр *D*:

$$13\cdot(-2)-8\cdot3+6+D=0$$

$$D=44.$$

Тогда окончательная запись общего уравнение плоскости π, проходящей через точку $M(-2;3;6)$ перпендикулярно плоскостям $\beta_1: 2x+3y-2z-4=0$ и $\beta_2: 3x+5y+z=0$ будет следующей:

$$13x-8y+z+44=0.$$

Пример. Составим уравнение плоскости π, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(0;1;-1)$ перпендикулярно плоскости $\gamma: x+2y-z-6=0$.

Пусть уравнение плоскости π задана уравнением: $Ax+By+Cz+D=0$.

В нашей задаче три условия:

- плоскость проходит через точку M_1;
- плоскость проходит через точку M_2;
- она перпендикулярна плоскости γ.

Эти условия можно задать системой из трех линейных уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} \mathrm{A}\cdot1+\mathrm{B}\cdot1+\mathrm{C}\cdot1+\mathrm{D}=0 \\ \mathrm{A}\cdot0+\mathrm{B}\cdot1+\mathrm{C}\cdot(-1)+\mathrm{D}=0 \\ A\cdot1+B\cdot2+C\cdot(-1) = 0 \end{cases}.$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} A+B+D = -C \\ B+D = C \\ A+2B = C \end{cases}.$$

Для определенности положим $C=1$, тогда

$$\begin{cases} A+B+D=-1 \\ B+D=1 \\ A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=1-D \\ A-2D=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=1 \\ D=0 \end{cases}$$

Подставляя найденные коэффициенты в общее уравнения плоскости π, получим:

$$-2x+y+z=0$$

3.2.3. Расстояние между точкой и плоскостью

Изучая нормальное уравнение плоскости, мы уже рассматривали расстояние от плоскости до начала координат.

Расстоянием между точкой и плоскостью принято считать длину наикратчайшего отрезка между заданной точкой и плоскостью, то есть длину перпендикуляра, опущенного из точки к плоскости.

Пусть заданы точка $M(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость π, заданная уравнением $Ax+By+Cz+D=0$.

Тогда расстояние между точкой *M* и плоскостью π можно определить по формуле:

$$\rho(M,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.7)$$

Пример. Найдем расстояние между точкой $M(1;5;-4)$ и плоскостью $\pi: 2x-2y+z-3=0$.

Используя вышеприведенную формулу, произведем расчет:

$$\rho(M,\pi)=\frac{|2\cdot1-2\cdot5+1\cdot(-4)-3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|2-10-4-3|}{\sqrt{9}}=\frac{15}{3}=5.$$

Таким образом, расстояние между точкой *M* и плоскостью π равно пяти.

3.3. Уравнения прямой в пространстве

3.3.1. Общие уравнения прямой в пространстве

Пусть заданы общие уравнения двух непараллельных плоскостей π_1 и π_2:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Результатом их пересечения будет являться прямая L (рис. 21).

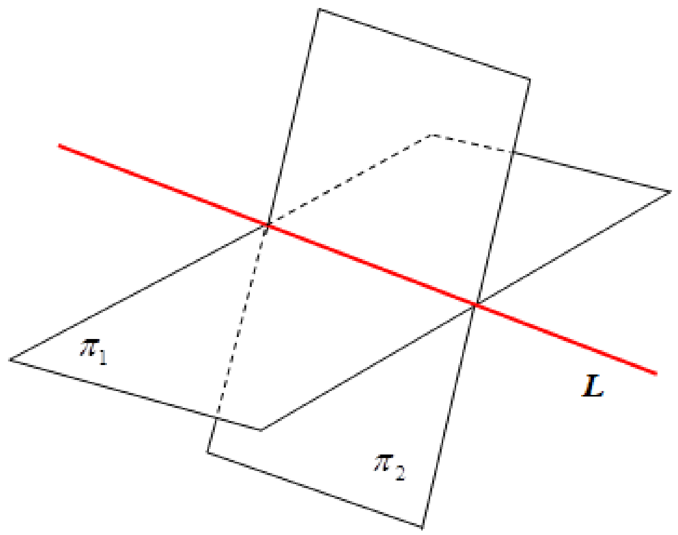


Рис. 21. Пересечение плоскостей.

Если заданы две непараллельные плоскости π_1 и π_2, то их пересечением будет прямая L, каждая точка которой принадлежит плоскости π_1 и плоскости π_2 одновременно. Таким образом прямую можно задать системой из двух линейных уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \tag{3.8}$$

Такая форма записи прямой называется общими уравнениями прямой в пространстве.

Пример. Пересечением плоскостей $\pi_1 : 2x + 7y - 12z + 15 = 0$ и $\pi_2 : -x + 6y + 4z - 18 = 0$ является прямая

$$\begin{cases} 2x + 7y - 12z + 15 = 0 \\ -x + 6y + 4z - 18 = 0 \end{cases}.$$

3.3.2. Канонические уравнения прямой

Рассмотрим ненулевые векторы, лежащие на прямой или на параллельных прямых к данной. Такие векторы называются *направляющими векторами* выбранной прямой. Направляющие векторы могут быть направлены в противоположные стороны.

Пусть для прямой L известен один из направляющих векторов $\vec{s}\,(l;m;n)$ и задана точка $M_0\,(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащая этой прямой (рис. 22).

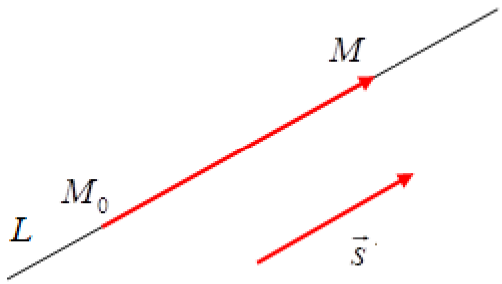


Рис. 22. Направляющий вектор.

Возьмем еще одну произвольную точку $M\,(x;y;z)$ прямой L и определим вектор $\overline{M_0M}\,(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Векторы $\vec{s}$ и $\overline{M_0M}$ являются коллинеарными векторами, а значит, координаты этих векторов будут пропорциональными:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{3.9}$$

Полученное двойное равенство называется каноническими уравнениями прямой L. В канонических уравнениях допускаются нули в знаменателях дробей.

Пример. Если для прямой L известен один из направляющих векторов $\vec{s}\,(4;-6;3)$ и известна точка $M_0\,(8;-12;7)$, лежащая на этой прямой, тогда каноническое уравнение прямой $\boldsymbol{L}$ будет иметь вид:

$$\frac{x-8}{4}=\frac{y+12}{-6}=\frac{z-7}{3}.$$

3.3.3. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Рассмотрим прямую L, заданную каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, и две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, лежащие на указанной прямой.

В каноническом уравнении прямой L в качестве направляющего вектора возьмем вектор $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, а вместо точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$. В этом случае уравнение прямой L будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.10)$$

Такое уравнение принято называть *уравнениями прямой, проходящей через две точки*.

Пример. Построим канонические уравнения прямой, проходящей через две точки $Q(3;0;-1)$ и $R(4;-2;7)$.

Для построения канонических уравнений воспользуемся формулой:

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-0}{-2-0}=\frac{z-(-1)}{7-(-1)}.$$

Выполнив все действия, окончательно получим канонические уравнения:

$$\frac{x-3}{1}=-\frac{y}{2}=\frac{z+1}{8}.$$

3.3.4. Параметрические уравнения прямой в пространстве

Рассмотрим прямую L, заданную каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Пусть каждое из отношений равно некоторой скалярной величине t. Тогда уравнения прямой L можно записать следующим образом:

$$t=\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Число t в дальнейшем будем называть *параметром*.

Данное выражение можно также записать в виде системы из трех уравнений:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{l} \\ t = \dfrac{y - y_0}{m} \\ t = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}.$$

Преобразовав каждое из уравнений системы окончательно получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}. \tag{3.11}$$

Последняя записанная система получила название параметрических уравнений прямой.

Пример. Определим параметрические уравнения прямой L, если известны направляющий вектор $\vec{s}\,(-1; 6; 2)$ и точка $F\,(3; -3; 5)$, лежащая на этой прямой.

Подставим в систему координаты вектора $\vec{s}$ и точки F и получим параметрические уравнения прямой L.

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -3 + 6t \\ z = 5 + 2t \end{cases}.$$

3.3.5. Преобразования уравнений

Часто для удобства использования необходимо перевести уравнения прямой из одной формы в другую. Чаще всего требуется преобразить уравнения прямой из общих уравнений в канонические, ведь с каноническими уравнениями работать легче, а с аналогичными действиями требуется меньше трудозатрат.

Для перехода из общей формы в каноническую достаточно определить произвольную точку прямой, а затем вычислить координаты одного из направляющих векторов.

Пример. Преобразуем систему общих уравнений $\begin{cases} x+y+2z-20 \\ x-2y+z+16=0 \end{cases}$ в каноническую форму.

Для преобразования системы определим произвольную точку прямой L. Зафиксируем значение переменной $z=0$. Тогда система общих уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x+y-20=0 \\ x-2y+16=0 \end{cases}.$$

Решая систему, получим

$$\begin{cases} x=8, \\ y=12 \end{cases}.$$

Таким образом, мы нашли точку прямой с координатами $(8;12;0)$.

В качестве направляющего вектора прямой L возьмем векторное произведение направляющих векторов $\vec{n}_1\,(1;1;2)$ и $\vec{n}_2\,(1;-2;1)$:

$$\overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5i + j - 3k.$$

Подставив координаты направляющего вектора и точки прямой в каноническое уравнение, получим:

$$\frac{x-8}{5} = \frac{y-12}{1} = \frac{z}{-3}.$$

3.4. Взаимное расположение прямых и плоскостей

3.4.1. Угол между прямыми

Рассмотрим две прямые L_1 и L_2, ориентация которых в трехмерном пространстве задана направляющими векторами $\vec{s}_1(l_1;m_1;n_1)$ и $\vec{s}_2=(l_2;m_2;n_2)$ (рис. 23).

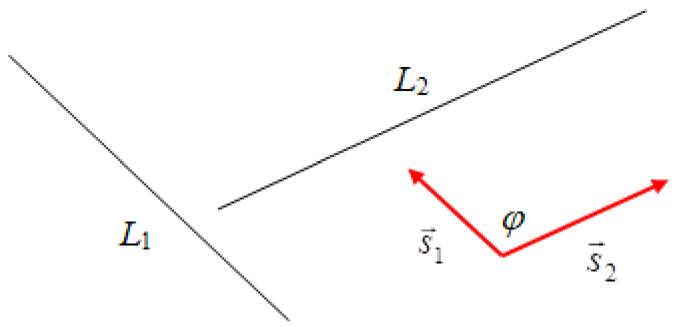


Рис.23. Угол между прямыми.

Принято считать, что острый угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами или является дополнительным к нему, если угол между векторами тупой.

Как мы уже знаем, косинус угла между двумя векторами можно получить, разделив скалярное произведение этих векторов на произведение их модулей:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}.$$

Однако, согласно представленной формуле, косинус угла φ может принимать, как положительные, так и отрицательные значения, то есть угол может быть острым или тупым. Значит, для получения острого угла между прямыми L_1 и L_2 необходимо взять абсолютное значение произведения векторов $\vec{s}_1$и $\vec{s}_2$:

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}.$$

В координатной форме данную формулу можно представить в виде:

$$\cos\varphi = \frac{\left|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\right|}{\sqrt{l_1^{\,2} + m_1^{\,2} + n_1^{\,2}} \cdot \sqrt{l_2^{\,2} + m_2^{\,2} + n_2^{\,2}}}. \qquad (3.12)$$

Пример. Найти угол между прямыми L_1 и L_2, заданных каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x+10}{1} = \frac{y-5}{3} = -\frac{z}{4} \text{ и } L_2: -\frac{x-12}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+7}{1}.$$

Для прямых L_1 и L_2 направляющими векторами будут $\vec{s}_1(1;3;4)$ и $\vec{s}_2(-2;2;1)$. Следовательно, косинус угла между прямыми будет равен:

$$\cos\varphi = \frac{\left|1\cdot(-2) + 3\cdot 2 - 4\cdot 1\right|}{\sqrt{1+9+16}\sqrt{4+4+1}} = \frac{0}{\sqrt{26}\sqrt{9}} = 0.$$

Таким образом, мы видим, что прямые L_1 и L_2 перпендикулярны.

3.4.2. Взаимное расположение прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Рассмотрим всевозможные случаи и признаки взаимного расположения этих прямых.

1-й случай. Если координаты направляющих векторов прямых L_1 и L_2 пропорциональны, $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$, то эти *прямые параллельны*.

Пример. Прямые $\frac{x-2}{4} = -\frac{y+1}{10} = \frac{z}{8}$ и $\frac{x+1}{6} = -\frac{y-3}{15} = \frac{z+2}{12}$ параллельны, так как координаты их направляющих векторов пропорциональны. Действительно, $\frac{4}{6} = \frac{-10}{-15} = \frac{8}{12}$, а коэффициент пропорциональности равен $\frac{2}{3}$.

2-й случай. Если кроме условия пропорциональности координат направляющих векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, им будет коллинеарен вектор $\overline{M_1 M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, то прямые L_1 и L_2 совпадают.

Пример. Прямые $\frac{x+7}{4}=\frac{y+7}{3}=\frac{z-21}{7}$ и $\frac{x-5}{12}=\frac{y-2}{9}=\frac{z}{21}$ совпадают, поскольку вектора $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ коллинеарны, кроме того им будет коллинеарен вектор $\overline{M_1M_2}(5+7;2+7;0+21)$.

Проверим коллинеарность векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$: $\frac{4}{12}=\frac{3}{9}=\frac{7}{21}$ – двойное равенство выполняется. Также коллинеарны векторы $\vec{s}_1$ и $\overline{M_1M_2}$, поскольку координаты их направляющих векторов пропорциональны: $\frac{12}{4}=\frac{9}{3}=\frac{21}{7}$.

3-й случай. Если не выполняется условие коллинеарности направляющих векторов, а три вектора $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ являются компланарными, то прямые L_1 и L_2 *пересекаются*. Компланарность векторов можно определить с помощью смешанного произведения векторов:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

Пример. Прямые $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{7}$ и $\frac{x-3}{3}=\frac{y-15}{8}=\frac{z-6}{8}$ пересекаются, так как не выполняется условие коллинеарности направляющих векторов: $\frac{4}{3}\neq\frac{3}{8}\neq\frac{7}{8}$, а смешанное произведение векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ равно нулю: $\begin{vmatrix} 3-2 & 15+3 & 6+4 \\ 4 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 18 & 10 \\ 4 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix}=0$.

4-й случай. Если не выполняется условие коллинеарности направляющих векторов, и векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ не являются компланарными, то прямые L_1 и L_2 *скрещиваются*.

Пример. Прямые $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+1}{6}$ и $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ скрещиваются, так как не выполняется условие коллинеарности направляющих векторов: $\frac{4}{3}\neq\frac{5}{2}=\frac{6}{1}$, а смешанное произведение векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ не равно нулю:

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 0+2 & -1+1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Рассмотрим теперь две прямые, заданные общими уравнениями:

$$L_1:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}.$$

Тогда количество решений системы линейных алгебраически уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases},$$

составленной из общих уравнений прямых, будет определять взаимное расположение L_1 и L_2.

1-й случай. Если система неопределенная и имеет бесконечное количество решений, то прямые L_1 и L_2 совпадают.

Пример. Определим взаимную ориентацию прямых

$$L_1:\begin{cases} x-y+3z+5=0 \\ 3x+4y+2z+1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2:\begin{cases} 2x+4z+6=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}.$$

Для этого составим систему уравнений $\begin{cases} x-y+3z+5=0 \\ 3x+4y+2z+1=0 \\ 2x+4z+6=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$.

Найдем ранги общей матрицы и ранг расширенной матриц системы:

$$rang\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 2 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=2; \quad rang\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 4 & 6\\ 2 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix}=2.$$

Поскольку ранг общей матрицы равен рангу расширенной матрицы, но меньше количества переменных, то система линейных алгебраических уравнений является совместной и неопределенной, следовательно, прямые L_1 и L_2 совпадают.

2-й случай. Если система уравнений определенная и имеет только одно решение, то прямые L_1 и L_2 пересекаются.

Пример. Определим взаимную ориентацию прямых

$$L_1:\begin{cases}4x+2y+3z+9=0\\ 2x-y+6z+11=0\end{cases} \quad \text{и} \quad L_2:\begin{cases}5x+4z+14=0\\ 3x+8y+9z+7=0\end{cases}.$$

Для этого составим систему уравнений $\begin{cases}4x+2y+3z+9=0\\ 2x-y+6z+11=0\\ 5x+4z+14=0\\ 3x+8y+9z+7=0\end{cases}.$

Найдем ранги общей и расширенной матриц:

$$rang\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 6\\ 5 & 0 & 4\\ 3 & 8 & 9\end{pmatrix}=3; \quad rang\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & 9\\ 2 & -1 & 6 & 11\\ 5 & 0 & 4 & 14\\ 3 & 8 & 9 & 7\end{pmatrix}=3.$$

Поскольку ранг общей матрицы равен рангу расширенной матрицы и количеству переменных, то система линейных алгебраических уравнений является совместной и определенной, следовательно, прямые L_1 и L_2 пересекаются.

3-й случай. Если система является несовместной, то есть не имеет решений, то прямые параллельны или скрещиваются.

Пример. Определим взаимную ориентацию прямых, заданных общими уравнениями $L_1:\begin{cases} x+6z+3=0 \\ 3x+7y+2z+4=0 \end{cases}$ и $L_2:\begin{cases} 2x+3y+2=0 \\ 2x+y+8z+5=0 \end{cases}$.

Составим систему линейных уравнений $\begin{cases} x+6z+3=0 \\ 3x+7y+2z+4=0 \\ 2x+3y+2=0 \\ 2x+y+8z+5=0 \end{cases}$.

Найдем ранги общей и расширенной матриц системы:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}=3; \quad rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}=4.$$

Поскольку ранг общей матрицы не равен рангу расширенной матрицы, то система уравнений несовместна, а значит прямые L_1 и L_2 параллельны или скрещиваются.

3.4.3. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть прямая L задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, а плоскость π общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Исследуя взаимное расположение прямой L и плоскости π, следует отметить, что здесь существует четыре возможных случая.

1-й случай. Если заданная точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ принадлежит плоскости π, а нормальный вектор плоскости $\vec{n}\,(A;B;C)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}\,(l;m;n)$ ортогональны, то *прямая L принадлежит плоскости* π.

На практике эти условия описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}.$$

Пример. Пусть прямая L задана каноническими уравнениями $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{3}$, а плоскость π – уравнением $2x-y+3z-9=0$.

Прямая L принадлежит плоскости π, так как заданная точка $M_0(1;2;3)$ принадлежит плоскости π, а нормальный вектор плоскости $\vec{n}\,(2;-1;3)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}\,(-2;5;3)$ ортогональны:

$$\begin{cases} 2\cdot 1+(-1)\cdot 2+3\cdot 3-9=0 \\ 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 5+3\cdot 3=0 \end{cases}.$$

2-й случай. Если заданная точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ не принадлежит плоскости π, а нормальный вектор плоскости $\vec{n}\,(A;B;C)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}\,(l;m;n)$ ортогональны, то *прямая L параллельна плоскости π.*

Эти условия можно описать системой:

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}.$$

Пример. Пусть прямая L задана каноническими уравнениями $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{5}=\frac{z-3}{3}$, а плоскость π – уравнением $2x-y+3z-9=0$.

Прямая L параллельна плоскости π, так как заданная точка $M_0(1;2;3)$ не принадлежит плоскости π, а нормальный вектор плоскости $\vec{n}\,(2;-1;3)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}\,(-2;5;3)$ ортогональны:

$$\begin{cases} 2\cdot 2+(-1)\cdot 0+3\cdot 3-9=4\neq 0 \\ 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 5+3\cdot 3=0 \end{cases}.$$

3-й случай. Если нормальный вектор плоскости $\vec{n}\,(A;B;C)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}\,(l;m;n)$ не ортогональны, то прямая L пересекается с плоскостью π.

Пример. Пусть прямая L задана каноническими уравнениями $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{3}$, а плоскость π – уравнением $2x-y+3z-9=0$.

Прямая L пересекает плоскость π, поскольку нормальный вектор плоскости $\vec{n}(2;-1;3)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}(2;1;3)$ ортогональными не являются: $2\cdot 2+(-1)\cdot 1+3\cdot 3=12\neq 0$.

4-й случай. Если нормальный вектор плоскости $\vec{n}(A;B;C)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}(l;m;n)$ коллинеарны, то прямая L перпендикулярна плоскости *π*. Координаты векторов $\vec{n}$ и $\vec{s}$ в этом случае будут пропорциональны: $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

Пример. Пусть прямая L задана каноническими уравнениями $\frac{x-2}{6}=\frac{y}{8}=\frac{z-3}{4}$, а плоскость π – уравнением $3x+4y+2z+1=0$.

Прямая L перпендикулярна плоскости π, поскольку нормальный вектор плоскости $\vec{n}(3;4;2)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}(6;8;4)$ являются коллинеарными и их координаты пропорциональны: $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$.

3.5. Определение расстояний

3.5.1. Расстояние от точки до прямой

Рассмотрим точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и прямую L, заданную каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$.

Тогда расстояние между точкой M_1 и прямой L можно вычислить по формуле:

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{3.13}$$

Пример. Найдем расстояние между точкой $P(2;\ 0;\ 7)$ и прямой L, заданной каноническими уравнениями $\frac{x-5}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{1}$.

Воспользуемся формулой, подставим в нее координаты точки P и параметры прямой L:

$$\rho(P,L)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}0-2 & 7-0\\ 4 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2-5 & 7-0\\ 3 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2-5 & 0-2\\ 3 & 4\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}}=\frac{\sqrt{32^2+24^2+18^2}}{\sqrt{26}}\approx 8{,}6023$$

Таким образом, расстояние между точкой P и прямой L приближенно равно 8,6023.

3.5.2. Расстояние между прямыми

Рассмотрим две прямые, заданные каноническими уравнениями:

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\ \text{ и }\ L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}\ .$$

В случае параллельных прямых расстояние между ними можно вычислить по формуле:

$$\rho(L_1,L_2)=\sqrt{\frac{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ l_1 & n_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ l_1 & m_1\end{vmatrix}^2}{\sqrt{l_1^{\,2}+m_1^{\,2}+n_1^{\,2}}}}\ .\qquad(3.14)$$

Пример. Найдем расстояние между параллельными прямыми

$$L_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{6}=\frac{z}{4}\ \text{ и }\ L_2:\frac{x}{3}=\frac{y+1}{9}=\frac{z-2}{6}\ .$$

Подставляя в формулу коэффициенты уравнений прямых L_1 и L_2,

получим: $$\rho(L_1,L_2)=\sqrt{\frac{\begin{vmatrix}-1-3 & 2-0\\ 6 & 4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0-3 & 2-0\\ 2 & 4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0-3 & -1-3\\ 2 & 6\end{vmatrix}^2}{\sqrt{2^2+6^2+4^2}}}=$$

$$\rho(L_1,L_2)=\sqrt{\frac{(-28)^2+(-16)^2+(-10)^2}{\sqrt{2^2+6^2+4^2}}}=\sqrt{\frac{1140}{56}}\approx 4{,}511889.$$

Если прямые L_1 и L_2 скрещиваются, то расстояние определяется следующим образом:

$$\rho(L_1, L_2) = \left| \frac{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \right|. \tag{3.15}$$

Пример. Найдем расстояние между скрещивающимися прямыми

$$L_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3} \text{ и } L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-5}{4}.$$

Подставим параметры уравнений прямых L_1 и L_2 в формулу:

$$\rho(L_1, L_2) = \left| \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3+1 & 1-0 & 5-4 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2}} \right| = \left| \frac{-12}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 2^2}} \right| = 0{,}5.$$

Таким образом, расстояние между прямыми L_1 и L_2 равно 0,5.

3.5.3. Расстояние между прямой и плоскостью

Рассмотрим прямую L, заданную каноническими уравнениями $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ и плоскость π, определяемую общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

В случае пересечения прямой L и плоскости π определение расстояния между ними смысла не имеет. Однако, если прямая L параллельна плоскости π, то достаточно определить расстояние между любой точкой прямой L и плоскостью π. Если взять фиксированную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащую прямой L, координаты которой можно взять из уравнения прямой, то расстояние можно получить из формулы:

$$\rho(L, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.16}$$

Пример. Пусть прямая L задана каноническими уравнениями $\frac{x+6}{5}=\frac{y-3}{0}=-\frac{z}{4}$, а плоскость π – уравнением $x-2y+3z-20=0$.

Прямая L пересекает плоскость π, поскольку нормальный вектор плоскости $\vec{n}(1;-2;3)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}(5;0;-4)$ ортогональными не являются: $1\cdot 5+(-2)\cdot 0+3\cdot(-4)=-7\neq 0$.

Таким образом, расстояние между прямой L и плоскостью π равно нулю.

Пример. Найдем расстояние между прямой $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-5}{6}$ и плоскостью $\pi:12y-2z+7=0$.

Прямая L параллельна плоскости π. Действительно, нормальный вектор плоскости $\vec{n}(0;12;-2)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}(2;1;6)$ являются ортогональными: $0\cdot 2+12\cdot 1+(-2)\cdot 6=0$.

Теперь можно использовать формулу расстояния между точкой и плоскостью:

$$\rho(L,\pi)=\frac{|0\cdot 1+12\cdot(-2)-2\cdot 5+7|}{\sqrt{0^2+12^2+(-2)^2}}=\frac{|-27|}{\sqrt{144+4}}=\frac{27}{\sqrt{148}}\approx 2{,}219386.$$

Таким образом, расстояние между параллельными прямой L и плоскостью π приближенно равно 2,219386.

Заключение

Линейная алгебра и аналитическая геометрия – это два тесно связанных классических раздела математики. Они играют важную роль в фундаментальных и прикладных исследованиях, как универсальный инструмент для расчета и математической обработки большого объема количественных результатов опытов и наблюдений, теоретических расчетов значений предполагаемых результатов и параметров, автоматизации вычислений сложных многофакторных процессов.

В курсе лекций мы рассмотрели только элементарные понятия и методы систем линейных алгебраических уравнений, векторной алгебры и основ аналитической геометрии, изучаемых в дисциплине математика.

Методы и алгоритмы, рассматриваемые в курсе лекций, в дальнейшем будут использованы в различных разделах математики и других математических дисциплинах: математическом анализе, дифференциальных уравнениях, теории вероятностей, математической статистике, исследовании операций, при решении задач математического программирования и регрессионного анализа. Это малая, но необходимая часть математических знаний для дальнейшего освоения не только разделов математики, но и других естественнонаучных, технических и социально-экономических дисциплин, использования математических методов в будущей профессиональной деятельности.

Литература

1. Астафьев, Е. Р. Математика: курс лекций / Е.Р. Астафьев, В.В. Василенко, Е.В. Михайленко, И.Н. Старостенко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2006. –347 с.
2. Богомолов, Н. В. Математика: учебник / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2013. – 396 с.
3. Бубнова, О. Ю. Математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб.-метод. пособие / О.Ю. Бубнова, Т.Е. Чикина, С.В. Крыгин. // Труды сотрудников Нижегородской академии МВД России. – Н. Новгород : Нижегородская академия МВД России, 2017. – 86 с.
4. Михайленко, Е. В. Введение в высшую математику: лекция / Е.В. Михайленко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2008. – 30 с.
5. Михайленко, Е. В. Введение в общую алгебру : учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 400 с.
6. Михайленко, Е. В. Дискретная математика: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2016. – 104 с.
7. Михайленко, Е. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб. пособие / Е. В. Михайленко, М. А. Жукова. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2010. – 163 с.
8. Михайленко, Е. В. Математика : курс лекций. Ч. 1. Элементы общей алгебры / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2019. – 120 с.
9. Михайленко, Е. В. Математика : курс лекций. Ч. 3. Математический анализ / Е. В. Михайленко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2020. – 90 с.

10. Михайленко, Е. В. Математика и информатика : курс лекций / Е.В. Михайленко, И.Н. Старостенко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2009. – 420 с.
11. Михайленко, Е. В. Матрицы и определители : лекция / Е. В. Михайленко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2008. – 28 с.
12. Михайленко, Е. В. Методы оптимизации : сборник задач / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 140 с.
13. Михайленко, Е. В. Прикладная математика: курс лекций / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2014. – 192 с.
14. Михайленко, Е. В. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие / Е.В. Михайленко, М.А. Жукова, Ф.Ф. Бараненко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2011.