Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство внутренних дел Российской Федерации

Московский университет Министерства внутренних дел
Российской Федерации имени В.Я. Кикотя

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Москва
Московский университет
МВД России имени В.Я. Кикотя

2021

УДК 512
ББК 22.12
М34

Рецензенты:
начальник кафедры информационно-компьютерных технологий
в деятельности ОВД Белгородского юридического института
МВД России имени И.Д. Путилина, кандидат технических наук, доцент
А. Н. Прокопенко; доцент кафедры трасологии и баллистики
УНК ЭКД Волгоградской академии МВД России,
кандидат юридических наук **А. А. Нурушев**

Коллектив авторов:
Н. М. Дубинина, В. В. Бубнов, А. А. Страхов, Н. В. Задохина

М34 **Математика** : учебное пособие/ [Н. М. Дубинина и др.] – М. : Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя, 2021. – 91 с.
ISBN 978-5-9694-1013-8

Учебное пособие содержит справочные сведения, необходимые для решения иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств с одним неизвестным, тригонометрических уравнений, решения основных типов задач на составление уравнений.

Учебное пособие предназначено для курсантов и слушателей Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя, обучающихся по дисциплинам: «Основы математики», «Математика».

УДК 512
ББК 22.12

ISBN 978-5-9694-1013-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В Московском университете МВД России имени В.Я. Кикотя изучение математических дисциплин ведется на факультете подготовки сотрудников для подразделений экономической безопасности и противодействия коррупции, в институте психологии служебной деятельности органов внутренних дел, в институте судебной экспертизы, факультете подготовки специалистов в области информационной безопасности и на факультете подготовки иностранных специалистов.

Настоящее учебное пособие предназначено для общематематической подготовки курсантов и слушателей Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя, обучающихся по дисциплинам: «Основы математики», «Математика». Содержит справочные сведения, необходимые для решения иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств с одним неизвестным, тригонометрических уравнений, решения основных типов задач на составление уравнений.

В каждом параграфе учебного пособия приведен краткий теоретический материал, помогающий обучаемому вспомнить и повторить основные формулы по изучаемой теме, подробно разобраны решения типовых примеров и задач. В конце каждого параграфа имеются задания для самостоятельного решения.

§ 1. НЕРАВЕНСТВА

При решении неравенств необходимо внимательно следить за равносильностью осуществляемых преобразований, так как проверка получившегося решения по условию задачи, как правило, очень трудоемка или невозможна.

Два неравенства называются равносильными (эквивалентными), если они имеют одно и то же множество решений.

Основные факты о равносильности неравенств

$f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow f_2(x) < f_1(x)$.

$f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) - f_2(x) > 0$.

Если функция $\varphi(x)$ определена на области определения исходного неравенства, то:

$f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) + \varphi(x) > f_2(x) + \varphi(x)$.

Если $\varphi(x) > 0$ для всех *x* из области определения неравенства, то:

$f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) \cdot \varphi(x) > f_2(x) \cdot \varphi(x)$.

Если $\varphi(x) < 0$, то:

$f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) \cdot \varphi(x) < f_2(x) \cdot \varphi(x)$.

Если $f_1(x) < f_2(x)$ и $f_2(x) < f_3(x)$, то:

$f_1(x) < f_3(x)$.

Если $f_1(x) < f_2(x)$ и $f_3(x) < f_4(x)$, то:

$f_1(x) + f_3(x) < f_2(x) + f_4(x)$ (неравенства одинакового смысла можно складывать почленно).

Если $f_1(x) < f_2(x)$ и $f_3(x) > f_4(x)$, то

$f_1(x) - f_3(x) < f_2(x) - f_4(x)$ (неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать).

Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ одного знака и $f_1(x) < f_2(x)$, то :

$$\frac{1}{f_1(x)} > \frac{1}{f_2(x)}.$$

$$\left(f_1(x)\right)^{2n} > \left(f_2(x)\right)^{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \left|f_1(x)\right| > \left|f_1(x)\right|.$$

При решении неравенств часто используются следующие утверждения:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_1(x) \cdot f_2(x) < 0, \\ f_2(x) \neq 0. \end{cases}$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x) < 0, \\ f_2(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x) < 0, \\ f_2(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Показательные неравенства

Если $a > 1$, то неравенство:

$$a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) > f_2(x).$$

Если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется на противоположный:

$$a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) < f_2(x).$$

Логарифмические неравенства

Если $a > 1$ и $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$, то $\log_a f_1(x) < \log_a f_2(x) \Leftrightarrow$ $f_1(x) < f_2(x)$.

Если *0 < a < 1* и $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$, то $\log_a f_1(x) < \log_a f_2(x)$ $\Leftrightarrow f_1(x) > f_2(x)$.

Иррациональные неравенства

Метод решения: найти область допустимых значений (ОДЗ), возвести обе части неравенства в натуральную степень. При этом нужно помнить, что при возведении в четную степень может получиться неравенство, неравносильное исходному. Поэтому внимательно смотрите, при каких значениях неизвестного левая или правая части неравенства принимают положительное или отрицательное значение.

Если $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$ и $f_1(x) > f_2(x)$, то $\left(f_1(x)\right)^n > \left(f_2(x)\right)^n$ $\left(n \in N\right)$, т. е. обе части неравенства можно возвести в натуральную степень (*n=1,2,3…*).

Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут иметь разные знаки и $f_1(x) < f_2(x)$, то $\left(f_1(x)\right)^{2n+1} < \left(f_2(x)\right)^{2n+1}$, т. е. обе части неравенства можно возвести в нечетную натуральную степень.

а) $\sqrt[2n]{f_1(x)} < \sqrt[2n]{f_2(x)}$, $n \in N \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) \ge 0, \\ f_1(x) < f_2(x). \end{cases}$

б) $\sqrt[2n+1]{f_1(x)} < \sqrt[2n+1]{f_2(x)}$, $n \in N \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) < f_2(x).$

в) $\sqrt[2n]{f_1(x)} < f_2(x)$, $n \in N \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) \ge 0, \\ f_2(x) > 0, \\ f_1(x) < \left(f_2(x)\right)^{2n}. \end{cases}$

г) $\sqrt[2n]{f_1(x)} > f_2(x)$, $n \in N$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_2(x) < 0, \\ f_1(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x) \geq 0, \\ f_1(x) > \left(f_2(x)\right)^{2n}. \end{cases} \end{array}\right.$

д) $\sqrt[2n+1]{f_1(x)} < f_2(x)$, $n \in N$ $\Leftrightarrow$ $f_1(x) < \left(f_2(x)\right)^{2n+1}$.

е) $\sqrt[2n+1]{f_1(x)} > f_2(x)$, $n \in N$ $\Leftrightarrow$ $f_1(x) > \left(f_2(x)\right)^{2n+1}$.

Неравенства с неизвестным под знаком абсолютной величины (модуля)

Основной метод решения. Область допустимых значений неравенства разбивается на интервалы, на которых выражение, стоящее под знаком модуля, сохраняет знак. Для каждого интервала неравенство записывается и решается без модуля. После чего, объединяя решения, найденные на каждом из интервалов, записывается общий ответ.

1. $f_1(|x|) < f_2(x)$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ f_1(-x) < f_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ f_1(x) < f_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$

2. $|f_1(x)| < f_2(x)$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_2(x) > 0, \\ -f_2(x) < f_1(x) < f_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x) \leq 0, \\ x \in \varnothing. \end{cases} \end{array}\right.$

3. $|f_1(x)| > f_2(x)$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_2(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f_1(x) > f_2(x), \\ f_1(x) < -f_2(x) \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x) > 0, \\ x \in \text{ОДЗ исходногонеравенства}. \end{cases} \end{array}\right.$

4. $\left|f_1\left(|x|\right)\right| < f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad -f_2(x) < f_1\left(|x|\right) < f_2(x)$

или $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ \left|f_1(-x)\right| < f_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{x} \geq 0, \\ \left|f_1(x)\right| < f_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$

5. $\left|f_1\left(|x|\right)\right| > f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) < f_1\left(|x|\right) < -f_2(x)$

или $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ \left|f_1(-x)\right| > f_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{x} \geq 0, \\ \left|f_1(x)\right| > f_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Приведем несколько примеров решения задач.

Пример 1

Решите неравенство: $\dfrac{4(x+3)}{x^2+x-2} \geq \dfrac{-3(x+3)}{2x^2-3x-5}$.

Решение:

Перенесем все члены неравенства в левую часть

$$\frac{4(x+3)}{(x+2)(x-1)} + \frac{3(x+3)}{2(x+1)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)} \geq 0 \cdot$$

Приведем к общему знаменателю:

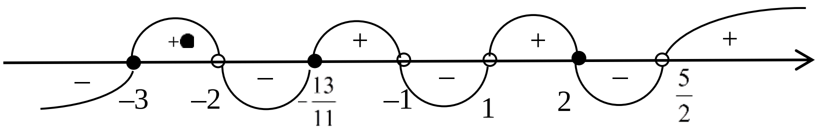
$$\frac{8(x+3)(x+1)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)+3(x+3)(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)\cdot 2(x+1)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)} \geq 0\,;$$

$$\frac{11(x+3)(x-2)\left(x+\frac{13}{11}\right)}{2(x+2)(x-1)(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)} \geq 0.$$

Полученное в результате преобразований неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 22(x+3)(x-2)\left(x+\frac{13}{11}\right)(x+2)(x-1)(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right) \geq 0, \\ 2(x+2)(x-1)(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right) \neq 0. \end{cases}$$

Решим неравенство методом интервалов. Отметим на числовой оси точки $-3,\ 2,\ -\frac{13}{11},\ -2,\ 1,\ -1,\ \frac{5}{2}$, являющиеся корнями многочлена.



Ответ: $x \in [-3; 2) \cup \left[-\frac{13}{11}; -1\right) \cup (1; 2] \cup \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$.

Пример 2

Решите иррациональное неравенство: $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$.

Решение:

Применим основной метод решения иррациональных неравенств. Перейдем от исходного иррационального неравенства к равносильной системе рациональных неравенств.

$$\begin{cases} x^2-3x-10\ge 0, \\ 8-x>0, \\ x^2-3x-10<(8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-5)\ge 0, \\ x<8, \\ 13x-74<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -2, \\ x\ge 5, \end{array}\right. \\ x<8, \\ x<\dfrac{74}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -2, \\ 5\le x<\dfrac{74}{13}. \end{cases}$$

Ответ: $x\in(-\infty;-2]\cup\left[5;\dfrac{74}{13}\right)$.

Пример 3

Решите иррациональное неравенство:

$$\sqrt{x^2-5x+4}>x-3.$$

Решение:

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств [п. 18 г)]:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3<0, \\ x^2-5x+4\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3\ge 0, \\ x^2-5x+4>(x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<3, \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 4, \\ x\le 1, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3, \\ x>5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 1, \\ x>5. \end{array}\right.$$

Решением неравенства являются все числа из промежутков $(-\infty;1]$ *и* $(5;\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;1]\cup(5;\infty)$.

Пример 4

Решите иррациональное неравенство:

$$\sqrt{4x+6}-\sqrt{x-2}>\sqrt{x+4}.$$

Решение:

ОДЗ $\begin{cases} 4x+6\ge 0, \\ x-2\ge 0, \\ x+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2\cdot$

Перепишем неравенство в виде:

$$\sqrt{4x+6} > \sqrt{x-2} + \sqrt{x+4}\,.$$

Обе части неравенства (при $x \in$ОДЗ) неотрицательны, возведем их в квадрат и запишем систему, равносильную исходному неравенству:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 4x+6 > x-2+2\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+4}+x+4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+4} < x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x+2>0, \\ (x-2)(x+4) < (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2+2x-8 < x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ 2x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x>-6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

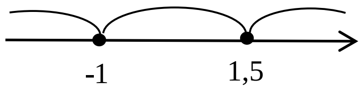
Ответ: $x \in [2; \infty)$.

Пример 5

Решите неравенство: $x + |3-2x| > |x+1| - 1$.

Решение:

Критические точки $(x=-1,\ x=1{,}5)$ разбивают числовую ось на три интервала. Решим неравенство на каждом из них.



а) Если $x \in (-\infty; -1)$, тогда:

$$3-2x>0 \quad \Rightarrow \quad |3-2x| = 3-2x;$$

$$x+1<0 \quad \Rightarrow \quad |x+1| = -(x+1).$$

Исходное неравенство примет вид:

$$x+3-2x > -x-1-1 \;\Leftrightarrow\; 3>-2\,.$$

Неравенство верное, следовательно, любое значение x из рассматриваемого интервала является решением исходного неравенства.

б) Если $x \in [-1;\ 1{,}5]$, тогда

$$3-2x>0 \quad \Rightarrow \quad |3-2x| = 3-2x;$$

$$x+1>0 \quad \Rightarrow \quad |x+1| = x+1.$$

Исходное неравенство примет вид:

$$x+3-2x > x+1-1 \;\Leftrightarrow\; -2x+3>0 \;\Leftrightarrow\; x<1{,}5\,.$$

в) Если $x \in (1{,}5;\ \infty)$, тогда:

$$3-2x<0 \quad \Rightarrow \quad |3-2x| = -(3-2x);$$

$$x+1>0 \quad \Rightarrow \quad |x+1| = x+1.$$

Исходное неравенство примет вид:

$$x-3+2x > x+1-1 \;\Leftrightarrow\; 2x>3 \;\Leftrightarrow\; x>1{,}5\,.$$

Ответ: объединяя все три интервала, получим:

$$x \in (-\infty;1{,}5) \cup (1{,}5;\infty)\,.$$

Пример 6

Решите неравенство: $\dfrac{1}{3^x+5} \le \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.

Решение:

Поскольку $3^x+5>0$ при любом x, перепишем исходное неравенство в виде системы:

$$\begin{cases} 3^x+5 \ge 3^{x+1}-1 \\ 3^{x+1}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x+5 \ge 3\cdot 3^x-1 \\ 3^x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot 3^x-6 \le 0 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \le 3^1 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x>-1 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-1;1]$.

Пример 7

Решите неравенство: $5^{2x^2-3x}+5^{4x^2-6x+2}>26$.

Решение:

Перепишем неравенство: $\dfrac{5^{2x^2-3x+1}}{5}+5^{2\left(2x^2-3x+1\right)}>26$.

Пусть $5^{2x^2-3x+1}=t$, $t>0$, тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{t}{5}+t^2>26 \quad \Leftrightarrow \quad 5t^2+t-130>0.$$

Квадратное неравенство относительно t имеет решение: $t\in(-\infty;-5{,}2)\cup(5;\infty)$.

Так как $t>0$ при любом *x*, то для решения исходного неравенства рассмотрим интервал $t\in(5;\infty)$ (т. е. *t* >*5*). Возвращаясь к переменной *x*, получим:

$$5^{2x^2-3x+1}>5^1 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1>1 \Leftrightarrow x(2x-3)>0.$$

Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{3}{2};\infty\right)$.

Пример 8

Решите неравенство: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_5^2 x-\log_5 x^2}>\dfrac{1}{81}\cdot 3^{2\cdot\log_5 x-5}$.

Решение: ОДЗ. *x>0.*

Перепишем неравенство в виде:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_5^2 x-2\log_5 x}>\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(2\log_5 x-5\right)} \quad \Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_5^2 x-2\log_5 x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{9-2\log_5 x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_5^2 - 2\log_5 x < 9 - 2\log_5 x\,.$$

Пусть $\log_5 x = t$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2 < 9 \Leftrightarrow |\,t\,| < 3 \Leftrightarrow -3 < t < 3\,.$$

Возвращаясь к переменной *x*, получим:

$$\begin{cases} \log_5 x > -3, \\ \log_5 x < 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x > \log_5 \dfrac{1}{125}, \\ \log_5 x < \log_5 125, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{125}, \\ x < 125. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{1}{125}; 125\right)$.

Решите следующие примеры самостоятельно:

1. $\left(x^2-3x+2\right)\left(x^3-3x^2\right)\left(4-x^2\right) \le 0$.

Ответ: $x \in [-2; 1] \cup \{2\} \cup [3; \infty)$.

2. $\dfrac{1}{x^2-2x-15} > \dfrac{1}{x^2-x-2}$.

Ответ: $x \in (-13; -3) \cup (-1; 2)$.

3. $\sqrt{2x^2+6x-20} > x+5$. *Ответ:* $x \in (-\infty; -5) \cup (9; \infty)$.

4. $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x^2} > 0$. *Ответ:* $x \in \left[-\sqrt{6}; -2\right) \cup \left(1; \sqrt{6}\right]$.

5. $\sqrt{x^2-x-12} < x-2$. *Ответ:* $x \in \left[4; \dfrac{16}{3}\right)$.

6. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-4} < \sqrt{x+6}$. *Ответ:* $x \in \left(\dfrac{-5+\sqrt{316}}{3}; \infty\right)$.

7. $\dfrac{|2x-1|}{x^2+x-2} \ge 3$.

Ответ: $x \in \left[\frac{-5-\sqrt{109}}{6}; -2\right) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{61}}{6}\right]$.

8. $9^{x+\frac{1}{2}} + 26 \cdot 3^x - 9 < 0$. *Ответ:* $x \in (-\infty; -1)$.

9. $\log^2_{\frac{1}{3}}(x-1) + 3 \geq -\frac{4}{5}\log_{\frac{1}{3}}(x-1)^5$.

Ответ: $x \in (1; 4] \cup [28; \infty)$.

§ 2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Основные свойства и формулы

Показательная функция $y = a^x$ (где a>0):

– определена на множестве R действительных чисел;

– область ее значений (при a≠1) – множество всех положительных чисел;

– возрастает при a>1, убывает при 0<a<1 на всем множестве R;

– непрерывна на всей области определения;

– при любых действительных значениях m и n и всех a>0, b>0 выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad \left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n},$$

а также напомним, что

$a^0 = 1$, где 0^0 – не имеет смысла,

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$), где $n \in R$,

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($a \geq 0$), где m и n – натуральные числа.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ (где a>0, a≠1):

1) определена на множестве всех положительных чисел (т. е. $x > 0$);

2) область ее значений – множество всех действительных чисел;

3) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$;

4) непрерывна на всей области определения.

Логарифмом числа b по основанию a ($a > 0,\ a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Из определения логарифма можно записать следующее тождество, получившее название *основное логарифмическое тождество*:

$$a^{\log_a b} = b \quad (1).$$

Напомним некоторые *свойства логарифмов* (при любом $a > 0,\ a \neq 1$):

1) $\log_a 1 = 0$ (2);

2) $\log_a a = 1$ (3);

3) из равенства $\log_a x_1 = \log_a x_2$ следует $x_1 = x_2$ (и наоборот) (4).

Основные правила логарифмирования:

1) а) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, где $b > 0, c > 0$ (5);

б) $\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a |b_1| + \log_a |b_2| + \ldots + \log_a |b_n|$, где $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n > 0$ (6);

2) а) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, где $b > 0, c > 0$ (7);

б) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$, где $\dfrac{b}{c} > 0$ (8);

3) а) $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$, где $b > 0$ (9);

б) $\log_a b^c = c \cdot \log_a |b|$, где $b^c > 0$ (10).

Формулы перехода от одного основания логарифма к другому

1) а) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (11),

множитель $\dfrac{1}{\log_c a}$ называется модулем перехода,

б) в частности, (при $b = c$), $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (12),

или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;

2) а) $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k} \cdot \log_{|a|} b$, где $a^k > 0$ (13);

б) $\log_{a \cdot c} b = \dfrac{\log_{|a|} b}{1 + \log_{|a|} |c|}$, где $a \cdot c > 0$ (14).

2.2. Решение показательных уравнений

1. Простейшее показательное уравнение:

$$a^x = b \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

а) при $b > 0$ имеет решение $x = \log_a b$;

б) при $b \le 0$ решений не имеет.

2. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0, a \neq 1)$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = g(x)$.

3. $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$ логарифмированием приводится к виду:

$$f(x) \log_c a = g(x) \log_c b \Leftrightarrow f(x) = g(x) \frac{\log_c b}{\log_c a} = g(x) \log_a b.$$

Примечание. Обязательно проверяйте по условию уравнения значения найденных неизвестных.

2.3. Решение логарифмических уравнений

1. Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b \ (a > 0, a \neq 1, b \in R)$$

имеет решение $x = a^b$.

2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

потенцированием приводится к виду: $f(x) = g(x)$ (*).

После решения уравнения (*) оставляются только те корни, которые удовлетворяют условиям: $f(x) > 0,\ g(x) > 0$, т. е. лежащие в области определения исходного уравнения.

3. $f(\log_a g(x)) = 0$ заменой переменной $t = \log_a g(x)$ сводится к уравнению $f(t) = 0$.

Приведем несколько примеров решения задач

Пример 1

Решите уравнение: $5^{-2\cdot\log_{0,04}(3-4x^2)} + \dfrac{3}{2}\log_{\frac{1}{8}} 4^x = 0$.

Решение: О.Д.З. $3 - 4x^2 > 0$ или $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Перепишем уравнение в виде:

$$5^{-2\cdot\log_{5^{-2}}(3-4x^2)} + \frac{3}{2}\log_{2^{-3}} 4^x = 0.$$

Воспользуемся формулой (13)

$$5^{\frac{-2}{-2}\cdot\log_5(3-4x^2)} + \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x \cdot \log_2 4 = 0.$$

Применяя формулу (1) и упрощая уравнение, получим:

$$3 - 4x^2 - x = 0;\ \ 4x^2 + x - 3 = 0;\ \ x_1 = -1,\quad x_2 = \frac{3}{4}.$$

Первый корень не подходит по ОДЗ.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Пример 2

Решите уравнение: $3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}=29$.

Решение:

Перепишем уравнение в виде: $3\cdot 3^{x}+\frac{18}{3^{x}}=29$.

Пусть $3^{x}=t$, тогда

$$3t+\frac{18}{t}=29; \quad 3t^{2}-29t+18=0; \; t_1=9, \quad t_2=\frac{2}{3}.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x}=9, \\ 3^{x}=\frac{2}{3}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\log_3\frac{2}{3}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\log_3 2-1. \end{array}\right.$$

Ответ: $2; \quad \log_3 2-1$.

Пример 3

Решите уравнение: $3^{x-3}=5^{x^{2}-7x+12}$.

Решение: Прологарифмируем по основанию 5 обе части уравнения:

$$(x-3)\log_5 3=x^{2}-7x+12,$$

$$x^{2}-(7+\log_5 3)\cdot x+(12+3\cdot\log_5 3)=0.$$

Вычислим дискриминант получившегося квадратного уравнения:

$$D = (7+\log_5 3)^2 - 4\cdot(12+3\cdot\log_5 3) =$$
$$= 49 + 14\cdot\log_5 3 + \log_5^2 3 - 48 - 12\cdot\log_5 3 =$$
$$= 1 + 2\cdot\log_5 3 + \log_5^2 3 = (\log_5 3 + 1)^2.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{(7+\log_5 3)-(\log_5 3+1)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3;$

$$x_2 = \frac{(7+\log_5 3)+(\log_5 3+1)}{2} = 4 + \log_5 3.$$

Ответ: $3; \quad 4+\log_5 3.$

Пример 4

Решите уравнение: $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$.

Решение:

Перепишем уравнение в виде:

$$5^x + 5\cdot 5^x + 25\cdot 5^x = 3^x + 3\cdot 3^x + 9\cdot 3^x,$$
$$5^x(1+5+25) = 3^x(1+3+9).$$

Разделим обе части уравнения на 3^x, получим:

$$31\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^x = 13; \quad \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{13}{31}.$$

Прологарифмируем по основанию 10 обе части уравнения:

$$x\cdot\lg\frac{5}{3} = \lg\frac{13}{31}; \quad x = \frac{\lg\frac{13}{31}}{\lg\frac{5}{3}} = \frac{\lg 13 - \lg 31}{\lg 5 - \lg 3}.$$

Ответ: $\dfrac{\lg 13 - \lg 31}{\lg 5 - \lg 3}$.

Пример 5

Решите уравнение: $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$.

Решение:

Перепишем уравнение в виде:

$$\log_2(4\cdot 3^x-6)=\log_2 2+\log_2(9^x-6).$$

По формуле (5) $\log_2(4\cdot 3^x-6)=\log_2 2\cdot(9^x-6)$.

Потенцируя, получим уравнение: $4\cdot 3^x-6=2\cdot(9^x-6)$.

Пусть $3^x=t$, тогда

$$4\cdot t-6=2\cdot(t^2-6) \quad\Leftrightarrow\quad t^2-2t-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t_1=3 \\ t_2=-1. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, запишем два уравнения:

$$3^x=3 \text{ и } 3^x=-1.$$

Первое уравнение имеет решение *x=1*. Второе уравнение решений не имеет, так как не существует такой степени, при возведении в которую положительное число становилось бы отрицательным.

Ответ: 1.

Пример 6

Решите уравнение: $\log_{\sqrt[3]{x}}(2x+1)=1+\log_{\sqrt{2x+1}}(2x^4+x^3)$.

Решение: ОДЗ $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ 2x+1>0, \\ 2x+1\neq 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде:

$$\log_{x^{1/3}}(2x+1)=1+\log_{(2x+1)^{1/2}}(x^3\cdot(2x+1)).$$

Преобразуем его по формулам (13) и (5)

$$3\log_x(2x+1)=1+2\cdot(\log_{2x+1}(2x+1)+\log_{2x+1}x^3.$$

По формулам (12) и (9)

$$3\cdot\frac{1}{\log_{2x+1}x}=1+2\cdot\left(1+3\cdot\log_{2x+1}x\right).$$

Пусть $\log_{2x+1}x=t$, тогда уравнение примет вид:

$$\frac{3}{t}=1+2\cdot\left(1+3t\right)\quad\Leftrightarrow\quad 2t^2+t-1=0\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}t_1=-1\\ t_2=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной:

$$\log_{2x+1}x=-1 \text{ или } \log_{2x+1}x=\frac{1}{2}.$$

По определению логарифма

$$\frac{1}{2x+1}=x \text{ или } \sqrt{2x+1}=x.$$

$$2x^2+x-1=0\quad x^2-2x-1=0$$

$$x_1=-1;\ x_2=\frac{1}{2};\ x_3=1+\sqrt{2};\ x_4=1-\sqrt{2}.$$

Корни уравнения $x_1=-1$, $x_4=1-\sqrt{2}$ не подходят по ОДЗ.

Ответ: $\frac{1}{2}$; $1+\sqrt{2}$.

Пример 7

Решите уравнение:

$$\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2.$$

Решение:

$$\text{ОДЗ}\ \begin{cases}1-2x>0,\\ 1-2x\neq 1,\\ 6x^2-5x+1>0,\\ 1-3x>0,\\ 1-3x\neq 1,\\ 4x^2-4x+1>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{1}{3},\\ x\neq 0.\end{cases}$$

$$\log_{1-2x}6\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)-\log_{1-3x}4\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=2;$$

$$\log_{1-2x}6\cdot\frac{1-2x}{2}\cdot\frac{1-3x}{3}-\log_{1-3x}4\cdot\frac{(1-2x)^2}{4}=2.$$

По формулам (5) и (12)

$$\log_{1-2x}(1-2x)+\log_{1-2x}(1-3x)-2\cdot\frac{1}{\log_{1-2x}(1-3x)}=2.$$

Пусть $\log_{1-2x}(1-3x)=t$, тогда уравнение примет вид:

$$1+t-\frac{2}{t}=2;\ t^2-t-2=0.$$

$$t_1=2;\quad t_2=-1.$$

Возвращаясь к исходной переменной,

$$\log_{1-2x}(1-3x)=2 \text{ или } \log_{1-2x}(1-3x)=-1,$$

$$(1-2x)^2=1-3x,\ \frac{1}{1-2x}=1-3x,$$

$$4x^2-x=0,\ 6x^2-5x=0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{5}{6}.$$

Корни уравнения $x_{1,3} = 0$, $x_4 = \frac{5}{6}$ не подходят по ОДЗ.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 8

Решите уравнение: $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \log_3{}^2 x = 1$.

Решение: ОДЗ. $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$

По формуле (14) $\dfrac{\log_3 \frac{3}{x}}{1 + \log_3 x} + \log_3{}^2 x = 1$.

По формуле (7) $\dfrac{\log_3 3 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + \log_3{}^2 x = 1$.

Пусть $\log_3 x = t$, тогда уравнение примет вид:

$$\frac{1-t}{1+t} + t^2 = 1; \qquad t^3 + t^2 - 2t = 0.$$

$$t_1 = 0; \quad t_2 = -2; \quad t_3 = 1.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\log_3 x = 0; \quad \log_3 x = -2; \quad \log_3 x = 1.$$

$$x = 3^0 = 1; \quad x = 3^{-2} = \frac{1}{9}; \quad x = 3^1 = 3.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$; 1; 3.

Решите следующие примеры самостоятельно:

1. $15\cdot 2^{x+1}+15\cdot 2^{2-x}=135$. *Ответ:* 2; -1.
2. $x^{2\lg\frac{100}{x}-3\lg x}=0{,}1$. *Ответ:* 10; $\frac{1}{\sqrt[5]{10}}$.
3. $7^{x}\cdot 5^{x+2}=3^{2x-1}$. *Ответ:* $\left(\log_{75}\frac{9}{35}\right)^{-1}$.
4. $8^{x}+18^{x}=2\cdot 27^{x}$. *Ответ:* 0.
5. $\log_{x+1}(2x^{2}+1)=2$. *Ответ:* 2.
6. $5\log_{\frac{x}{9}}x+\log_{\frac{9}{x}}x^{3}+8\log_{9x^{2}}x^{2}=2$. *Ответ:* $\sqrt{3}$; 3.
7. $\log_{x+1}(1-3x)=\log_{\sqrt{1-3x}}\left(1-2x-3x^{2}\right)-1$. *Ответ:* $-\frac{2}{3}$.

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Решение тригонометрических уравнений сводится в конечном итоге к решению *простейших тригонометрических уравнений*, т. е. уравнений вида:

$\sin x = a,$ $где\,\vert a\vert \le 1,\ т.е. -1 \le a \le 1,$ если $\vert a\vert > 1$, то корней нет	$\cos x = a,$ $где\,\vert a\vert \le 1,\ т.е. -1 \le a \le 1,$ если $\vert a\vert > 1$, то корней нет	$tgx = a$ a – любое

Решения этих уравнений имеют следующий вид:

$\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z,$

$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z,$

$tgx = a, \quad x = arctga + \pi n, \quad n \in Z,$

$ctgx = a, \quad x = arccrcc + \pi n, \quad n \in Z.$

∗ Примечание: (n принадлежит множеству целых чисел, т. е. $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\ldots$).

Последнее уравнение можно не рассматривать, так как при $a \ne 0$ его можно свести к уравнению вида $tgx = \dfrac{1}{a}$,

при $a = 0$ $\left(т.е.\ \dfrac{\cos x}{\sin x} = 0\right)$ – к $\cos x = 0$.

Рассмотрим некоторые частные случаи решения простейших *тригонометрических уравнений*:

sin x = 0 x=πn, n∈Z sin x = 1 x=π/2 + 2πn, n∈Z sin x = –1 x=-π/2 + 2πn, n∈Z	cos x = 0 x=π/2 + πn, n∈Z cos x = 1 x=2πn, n∈Z cos x = -1 x=π+2πn, n∈Z
tg x = 0 x=πn, n∈Z tg x = 1 x=π/4 + πn, n∈Z tg x = –1 x=-π/4 + πn, n∈Z	ctg x = 0 x=π/2 + πn, n∈Z ctg x = 1 x=π/4 + πn, n∈Z ctg x = -1 x=-π/4 + πn, n∈Z

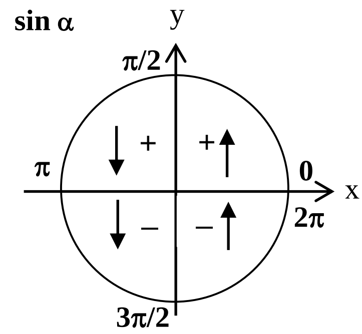
Для записи ответа при решении простейших уравнений необходимо знать значения тригонометрических функций от некоторых основных углов (табл. 3.1).

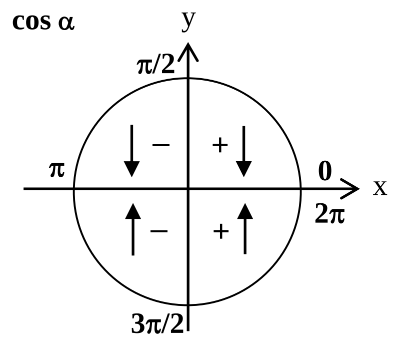
Таблица 3.1

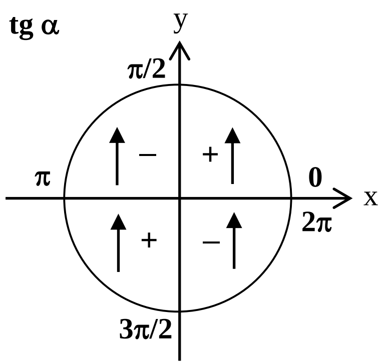
α (градусы, радианы)	**sin α**	**cos α**	**tg α**	**ctg α**
0^0 (0)	0	1	0	∞ (не определен)
30^0 $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45^0 $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0 $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90^0 $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞ (не определен)	0

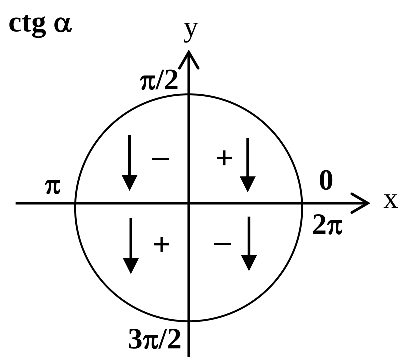
2. Для решения задач по тригонометрии используются следующие **основные формулы**.

2.1. Напомним *знаки тригонометрических функций* : *sin x*, *cos x, tg x, ctg x* в зависимости от принадлежности угла различным четвертям единичной окружности (стрелками указано, возрастает или убывает функция при значениях аргумента из соответствующей четверти):


sin α
y
π/2
+
+
π
0
x
−
−
2π
3π/2


cos α
y
π/2
−
+
π
0
x
−
+
2π
3π/2


tg α
y
π/2
−
+
π
0
x
+
−
2π
3π/2


ctg α
y
π/2
−
+
π
0
x
+
−
2π
3π/2

2.2. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \tag{3.2.1}$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z \tag{3.2.2}$$

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi n,\ n\in Z \tag{3.2.3}$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1,\ \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z \tag{3.2.4}$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z \tag{3.2.5}$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\alpha\neq\pi n,\ n\in Z \tag{3.2.6}$$

2.3. Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{3.2.7}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{3.2.8}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{3.2.9}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{3.2.10}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta},\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \tag{3.2.11}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta},\ \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \tag{3.2.12}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\, ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta},\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi n,\ n\in Z \tag{3.2.13}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\, ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta},\ \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi n,\ n\in Z \tag{3.2.14}$$

Если $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, то углы α и β называются *дополнительными*. Для таких углов cos β=sinα, cos α=sinβ.

2.4. Формулы двойных и тройных аргументов:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{3.2.15}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{3.2.16}$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \tag{3.2.17}$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi k}{2},\ k \in Z,\ \alpha \neq \pi n,\ n \in Z \tag{3.2.18}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \tag{3.2.19}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \tag{3.2.20}$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1),\ n \in Z \tag{3.2.21}$$

$$ctg3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1-3ctg^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi n}{3},\ n \in Z \tag{3.2.22}$$

2.5. Формулы половинного аргумента:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \tag{3.2.23}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} \tag{3.2.24}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\ \alpha\neq\pi(2n+1),\ n\in Z \tag{3.2.25}$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},\ \alpha\neq 2\pi n,\ n\in Z \tag{3.2.26}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi n,\ n\in Z \tag{3.2.27}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\ \alpha\neq\pi n,\ n\in Z \tag{3.2.28}$$

2.6. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{3.2.29}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{3.2.30}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{3.2.31}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \tag{3.2.32}$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^0 - \alpha) \qquad (3.2.33)$$

(3.2.34)

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^0 - \alpha)$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1),\ n \in Z \qquad (3.2.35)$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1),\ n \in Z$$

(3.2.36)

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \alpha, \beta \neq \pi n,\ n \in Z$$

(3.2.37)

$$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \alpha, \beta \neq \pi n,\ n \in Z$$

(3.2.38)

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (3.2.39)$$

(3.2.40)

2.7. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$$

(3.2.41)

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right)$$

(3.2.42)

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right)$$

(3.2.43)

2.8. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента:

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi(2n+1),\ n \in Z \tag{3.2.44}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi(2n+1),\ n \in Z \tag{3.2.45}$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha, \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z \tag{3.2.46}$$

$$ctg\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi n,\ n \in Z \tag{3.2.47}$$

2.9. Формулы приведения:

НАЗВАНИЕ ФУНКЦИИ							
	Сохраняется			Изменяется			
функция	**–α**	**180⁰–α** **π-α**	**180⁰+α** **π+α**	**90⁰–α** $\frac{\pi}{2}-\alpha$	**90⁰+α** $\frac{\pi}{2}+\alpha$	**270⁰–α** $\frac{3\pi}{2}-\alpha$	**270⁰+α** $\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin α	–sin α	sin α	–sin α	cos α	cos α	–cos α	–cos α
cos α	cos α	–cos α	–cos α	sin α	–sin α	–sin α	sin α
tg α	–tg α	–tg α	tg α	ctg α	–ctg α	ctg α	–ctg α
	$\alpha \neq \pi/2+\pi n,\ n \in Z$			$\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$			
ctg α	–ctg α	–ctg α	ctg α	tg α	–tg α	tg α	–tg α
	$\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$			$\alpha \neq \pi/2+\pi n,\ n \in Z$			

3. Рассмотрим наиболее распространенные *способы решения тригонометрических уравнений.*

3.1. Решение уравнений, сводящихся к квадратным

а) Уравнение вида $a \cdot \sin^2 x + b\sin x + c = 0 \quad (a \neq 0)$ (4.3.1)

можно свести к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$ при помощи замены переменной $t = \sin x$.

$$\text{Если } D \geq 0 \text{, то } t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

В этом случае уравнение (4.3.1) равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = t_1 \\ \sin x = t_2 \end{array}\right.$$

Примечание: абсолютное значение $\sin x$ не превышает единицы, т. е. $|\sin x| \leq 1$, следовательно, для нахождения корней исходного уравнения оставляем только те значения *t*, для которых выполняется условие $|t| \leq 1$.

б) К квадратному уравнению можно свести уравнение вида:

$$a \cdot \cos^2 x + b\sin x + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Для этого из основного тригонометрического тождества (3.2.1) выразим $cos^2 x$:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

в) Аналогично решаются уравнения:

$$a \cdot \cos^2 x + b\cos x + c = 0;$$

$$a \cdot \sin^2 x + b\cos x + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Пример

Решить уравнение: $4\sin x = 4 - \cos^2 x$.

Решение: учитывая, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, перепишем исходное уравнение:

$$4\sin x = 4 - \left(1 - \sin^2 x\right),$$

$$4\sin x - 4 + 1 - \sin^2 x = 0,$$

$$\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0.$$

$$\text{Пусть } \sin x = t, \text{ тогда } \quad t^2 - 4t + 3 = 0,$$

$$t_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1; \quad t_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3.$$

$*$ Посторонний корень, так как $|\,t\,| \le 1$.

Найдя корни уравнения $\sin x = 1$, получим решение исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

3.2. Решение уравнений методом разложения на множители, преобразованием суммы (разности) в произведение, преобразованием произведения в сумму, с помощью формул понижения степени

3.2.1. Одним из наиболее часто встречающихся методов решения тригонометрических уравнений является *метод разложения на множители*. Здесь основная трудность заключается в том, чтобы «увидеть», каким способом можно привести исходное уравнение к виду:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0 \qquad (1).$$

Решением уравнения (1) является решение совокупности уравнений $f_1(x)=0;\ f_2(x)=0;\ f_3(x)=0;\ldots;\ f_n(x)=0$ за исключением тех значений неизвестного, которые не входят в область допустимых значений исходного уравнения.

Обратите внимание! При решении уравнений методом разложения на множители наиболее распространенной ошибкой является сокращение обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное. При этом происходит потеря корней. Для того, чтобы этого избежать, необходимо все слагаемые перенести в одну часть уравнения и вынести общий множитель за скобки.

Пример

Решить уравнение: $\sin 2x+\cos 2x+\sin x+\cos x+1=0.$

Решение: Перепишем уравнение в виде:

$$(\sin 2x+1)+(\sin x+\cos x)+\cos 2x=0.$$

Преобразуем первое слагаемое по формулам [3.2.15, 3.2.1], третье – по формуле [3.2.16], получим:

$$2\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x+(\sin x+\cos x)+\cos^2 x-\sin^2 x=0.$$

$$2\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x+(\sin x+\cos x)=0.$$

Разложим получившееся уравнение на два множителя:

$$(\sin x+\cos x)(1+2\cos x)=0.$$

Таким образом, $\sin x+\cos x=0$ или $1+2\cos x=0.$

Решим первое уравнение $\sin x+\cos x=0$. Для этого разделим обе части уравнения на $\sin x\neq 0$. Получим:

$$\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ 1+ctg\,x=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pi n, & n\in Z,\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, & k\in Z.\end{cases}$$

Решим второе уравнение $1+2\cos x=0.$

$$\cos x=-\frac{1}{2}$$

$$x = \pm arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi l, \quad l \in Z.$$

Так как $arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - arc\cos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, то ответ второго уравнения можно записать в следующем виде: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, \quad l \in Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \; k \in Z; \quad \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, \quad l \in Z.$

3.2.2. Для решения некоторых тригонометрических уравнений, например, уравнений вида:

$$\cos(ax + \alpha) \pm \cos(bx + \beta) = 0,$$
$$\sin(ax + \alpha) \pm \sin(bx + \beta) = 0,$$
$$\cos(ax + \alpha) \pm \sin(bx + \beta) = 0$$

используют *формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение* [3.2.29–3.2.40]. Если необходимо применить указанные формулы несколько раз, то группируют члены уравнения таким образом, чтобы после проведенных преобразований появился общий множитель в каждом из произведений. Далее применяется метод разложения на множители.

Пример

Решить уравнение:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x .$$

Решение: перепишем уравнение в следующем виде:

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x .$$

Преобразуем выражения, стоящие в скобках, по формулам [3.2.29, 3.2.31]

$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2}+\sin 2x=2\cos\frac{x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2}+\cos 2x\,.$$

Согласно формулам приведения [2.9] $\cos(-x)=\cos x$, следовательно, $2\sin 2x\cdot\cos x+\sin 2x=2\cos 2x\cdot\cos x+\cos 2x$.

Вынесем общий множитель $\sin 2x$ за скобки в левой части уравнения, $\cos 2x$ – в правой

$$\sin 2x(2\cos x+1)=\cos 2x(2\cos x+1).$$

Обратите внимание: нельзя сокращать обе части уравнения на выражение (2cos x +1). При этом произойдет невосполнимая потеря корней. Чтобы этого избежать, перенесем все слагаемые в левую часть уравнения и вынесем общий множитель за скобки.

$$\sin 2x(2\cos x+1)-\cos 2x(2\cos x+1)=0\,.$$

$$(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=0,\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\sin 2x-\cos 2x=0,\\ 2\cos x+1=0.\end{array}\right.$$

Разделив левую и правую части первого уравнения на cos 2x≠0, получим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ tg\,2x-1=0\end{cases}\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ 2x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\end{cases}\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi l,\ l\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n,\ n\in Z\\ x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in Z\end{cases}\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi l,\ l\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in Z;\quad \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi l,\ l\in Z.$

3.2.3. *Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму* [3.2.41 – 3.2.43] применяются в основном к решению тригонометрических уравнений вида:

$$\sin ax\cdot\sin bx=\sin cx\cdot\sin dx$$

$$\cos ax\cdot\cos bx=\cos cx\cdot\cos dx$$

$$\sin ax\cdot\cos bx=\sin cx\cdot\cos dx.$$

Далее применяется один из методов, описанных выше.

Пример

Решить уравнение: $\sin 5x\cdot\cos 3x-\sin 8x\cdot\cos 6x=0$.

Решение: По формуле [3.2.43] преобразуем произведения тригонометрических функций в суммы:

$$\frac{1}{2}\left(\sin(5x+3x)+\sin(5x-3x)\right)-\frac{1}{2}\left(\sin(8x+6x)+\sin(8x-6x)\right)=0\ .$$

Сократим обе части уравнения на $\frac{1}{2}$ и раскроем скобки

$$\sin 8x+\sin 2x-\sin 14x-\sin 2x=0\ ,$$

$$\sin 8x-\sin 14x=0\ .$$

Применим формулу преобразования разности тригонометрических функций в произведение [3.2.30]

$$2\cos\frac{8x+14x}{2}\cdot\sin\frac{8x-14x}{2}=0\ ,$$

$$\sin(-3x)\cdot\cos 11x=0\ .$$

Согласно формулам приведения [2.9] $\sin(-3x)=-\sin 3x$, тогда исходное уравнение можно записать в виде совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0,\\ \sin 11x=0,\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}3x=\pi n,\ n\in Z,\\ 11x=\pi k,\ k\in Z,\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi n}{3},\ n\in Z,\\ x=\dfrac{\pi k}{11},\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{3},\ n\in Z;\quad \frac{\pi k}{11},\ k\in Z.$

3.2.4. При решении уравнений, содержащих тригонометрические функции (синусы, косинусы) во второй, четвертой степенях, как правило, применяют *формулы понижения степени* [3.2.23, 3.2.24]. При необходимости указанные формулы применяют несколько раз, пока уравнение нельзя решить одним из рассмотренных выше способов.

Пример

Решить уравнение: $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^4 2x+\cos^4 2x$.

Решение: Применим формулы понижения степени [3.2.23, 3.2.24].

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2.$$

Домножим обе части уравнения на 4 и раскроем скобки:

$$1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x=$$

$$=1-2\cos 4x+\cos^2 4x+1+2\cos 4x+\cos^2 4x,$$

$$2\cos^2 2x=2\cos^2 4x,$$

$$\cos^2 2x=\cos^2 4x.$$

Применим формулу понижения степени [3.2.24] еще раз

$$\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1+\cos 8x}{2}.$$

Домножим обе части уравнения на 2 и перенесем все слагаемые в левую часть: $\cos 4x-\cos 8x=0$. Воспользуемся формулой преобразования разности тригонометрических функций в произведение [3.2.32].

$$2\cdot\sin\frac{4x+8x}{2}\cdot\sin\frac{8x-4x}{2}=0,$$

$$\sin 6x\cdot\sin 2x=0.$$

Запишем получившееся после преобразований уравнение в виде совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 6x = 0,\\ \sin 2x = 0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x = \pi k,\ k \in Z,\\ 2x = \pi l,\ l \in Z,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi k}{6},\ k \in Z,\\ x = \dfrac{\pi l}{2},\ l \in Z.\end{array}\right.$$

Объединяя полученные решения, запишем ответ: $x = \dfrac{\pi k}{6},\ k \in Z.$

3.3. Решение однородных тригонометрических уравнений и уравнений, приводящихся к ним

Уравнение вида:

$$a_0 \sin^n kx + a_1 \sin^{n-1} kx \cdot \cos kx + a_2 \sin^{n-2} kx \cdot \cos^2 kx + \ldots +$$
$$+ a_{n-1} \sin kx \cdot \cos^{n-1} kx + a_n \cos^n kx = 0 \quad (3.3.1),$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ действительные числа, n – целое число, называется однородным уравнением степени n относительно $\sin kx$ и $\cos kx$.

Например:

1) $a\sin x + b\cos x = 0$ – однородное уравнение первой степени;

2) $a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$ – однородное уравнение второй степени и т. д.

Метод решения: разделив обе части уравнения (3.3.1) на $\cos^n kx \neq 0$ (или $\sin^n kx \neq 0$) придем к целому *n-ой* степени относительно $tgkx$ (или $ctgkx$) уравнению.

Обратите внимание! При таком преобразовании область определения уравнения сужается на значения $x = \dfrac{\pi}{2}(2n+1),\quad n \in \mathrm{Z}$ для тангенса x (или $x = \pi n,\quad n \in \mathrm{Z}$ для котангенса x). Поэтому необходимо подстановкой в исходное уравнение проверить, являются ли эти значения его решением.

Примечание.

1. К уравнению (3.3.1) можно привести уравнение вида:

$a_0 \sin^n kx + a_1 \sin^{n-1} kx \cdot \cos kx + a_2 \sin^{n-2} kx \cdot \cos^2 kx + \ldots +$
$+ a_{n-1} \sin kx \cdot \cos^{n-1} kx + a_n \cos^n kx = d.$

Для этого воспользуемся тождеством:

$$d = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^k, \quad k \in Z.$$

2. К однородному уравнению второй степени можно привести уравнение вида:

$a_0 \sin^2 kx + a_1 \sin kx \cdot \cos kx + a_2 \cos^2 kx + a_3 \sin 2kx + a_4 \cos 2kx = d$, используя формулы 3.2.15, 3.2.16, 3.2.1.

Пример

Решить уравнение: $\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 0$.

Решение: разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, так как $\cos^2 x \neq 0$.

(Примечание. Если $\cos x=0$, то исходное уравнение примет вид: $\sin^2 x + 5 \cdot 0 \cdot \sin x + 6 \cdot 0^2 = 0, \quad \sin^2 x = 0, \quad \sin x = 0$. Следовательно, если $\cos x=0$, то и $\sin x =0$. Из основного тригонометрического тождества (3.2.1) следует, что одновременно синус и косинус одного и того же аргумента равными нулю быть не могут.)

$$tg^2 x + 5tgx + 6 = 0.$$

Пусть $t=tg\,x$, тогда $t^2 + 5t + 6 = 0$; $t_1 = -3$, $t_2 = -2$.

$$\left[\begin{array}{l} tgx = -3, \\ tgx = -2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = arctg(-3) + \pi n, n \in Z, \\ x = arctg(-2) + \pi k, k \in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -arctg(3) + \pi n, n \in Z, \\ x = -arctg(2) + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $-arctg(3) + \pi n, n \in Z; \quad -arctg(2) + \pi k, k \in Z.$

Пример

Решить уравнение: $\sin^4 \dfrac{x}{3} + \cos^4 \dfrac{x}{3} = \dfrac{5}{8}$.

Решение: Используя формулу (3.2.1), приведем уравнение к однородному. Домножим правую часть уравнения на квадрат «тригонометрической единицы», получим:

$$\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}\left(\sin^2\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}\right)^2,$$

$$8\sin^4\frac{x}{3}+8\cos^4\frac{x}{3}=5\left(\sin^4\frac{x}{3}+2\sin^2\frac{x}{3}\cdot\cos^2\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}\right),$$

$$3\sin^4\frac{x}{3}-10\sin^2\frac{x}{3}\cdot\cos^2\frac{x}{3}+3\cos^4\frac{x}{3}=0.$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^4\frac{x}{3}$, так как $\cos\frac{x}{3}\neq 0$, тогда уравнение примет вид: $3tg^4\frac{x}{3}-10tg^2\frac{x}{3}+3=0$. Пусть $tg^2\frac{x}{3}=t$, тогда $3t^2-10t+3=0$; $t_1=\frac{1}{3}$, $t_2=3.$

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ tg\frac{x}{3}=\pm\sqrt{3}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{3}=\pm arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n, \quad n\in Z, \\ \frac{x}{3}=\pm arctg\sqrt{3}+\pi k, \quad k\in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, \quad n\in Z, \\ \frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, \quad k\in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{2}+3\pi n, \quad n\in Z, \\ x=\pm\pi+3\pi k, \quad k\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: объединив все решения, запишем:

$$x=\pm\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}n, \quad n\in Z.$$

3.4. Решение уравнений, содержащих тригонометрические функции одинакового аргумента

Уравнения вида $R(\sin x, \cos x, tgx, ctgx) = 0$, где R – рациональная функция[1], решаются с помощью формул универсальной тригонометрической подстановки (3.2.44 – 3.2.47).

Обратите внимание! При переходе к уравнению рациональному относительно тангенса половинного аргумента возможна потеря решений, так как $t = tg\frac{x}{2}$ не существует при $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in Z)$. Поэтому наличие или отсутствие решений вида $x = \pi + 2\pi n \quad (n \in Z)$ проверяйте подстановкой в исходное уравнение.

Пример

Решить уравнение: $3\sin x - 2\cos x = 2$.

Решение: Применим формулы (3.2.44, 3.2.45)

$$3 \cdot \frac{2 \cdot tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} - 2 \cdot \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = 2,$$

Пусть $t = tg\frac{x}{2}$, тогда: $\frac{6 \cdot t}{1 + t^2} - \frac{2 - 2t^2}{1 + t^2} = 2$.

Домножим обе части уравнения на $1 + t^2$ и сократим на 2, получим:

[1] Функция $R(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ называется ***рациональной*** относительно функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, если включает в себя конечное число операций (сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с целым показателем, деления).

$$3t-1+t^2-1-t^2=0, \quad 3t-2=0, \quad t=\frac{2}{3}.$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{2}{3}; \quad \frac{x}{2}=arctg\frac{2}{3}+\pi n, n\in Z; \quad x=2arctg\frac{2}{3}+2\pi n, n\in Z.$$

Проверим решение: $x=\pi+2\pi k, k\in Z$ подстановкой в исходное уравнение.

$$3\sin(\pi+2\pi k)-2\cos(\pi+2\pi k)=3\sin\pi-2\cos\pi=0-2\cdot(-1)=2.$$

Таким образом, получили верное числовое равенство: 2=2; следовательно, $x=\pi+2\pi k, k\in Z$ является решением исходного уравнения.

Ответ: $2arctg\frac{2}{3}+2\pi n, n\in Z; \quad \pi+2\pi k, k\in Z$.

3.5. Решение уравнений, рациональных относительно выражений sinx ± cosx и sinx–cosx

1. Уравнения вида:

$$\begin{matrix} a(\sin x\pm\cos x)+b\sin x\cdot\cos x+c=0 \\ (\text{или } a(\sin x\pm\cos x)+b\sin 2x+c=0) \end{matrix} \qquad (3.5.1)$$

решаются при помощи подстановки: $t=\sin x\pm\cos x$.

Чтобы уравнение (3.5.1) свести к рациональному относительно t, необходимо величину $\sin x\cdot\cos x$ (или $\sin 2x$) также выразить через t. Применим формулы [3.2.1, 3.2.15].

а) Для подстановки $t=\sin x+\cos x$.

Возведем обе части равенства в квадрат и преобразуем выражение: $t^2=\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=1+2\sin x\cdot\cos x$.

Отсюда, $2\sin x\cdot\cos x=t^2-1$,

$$\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2-1}{2}.$$

б) Аналогично, для подстановки $t=\sin x-\cos x$ получаем:

$$2\sin x\cdot\cos x=1-t^2, \quad \sin x\cdot\cos x=\frac{1-t^2}{2}.$$

Обратите внимание! При решении уравнения относительно переменной t могут появиться посторонние для исходного тригонометрического уравнения корни. В силу равенств 3.2.33 – 3.2.34 значение $|t|$ не может быть больше, чем $\sqrt{2}$ (так как $|\sin x|\le 1$; $|\cos x|\le 1$), следовательно, оставляем только те корни, для которых выполняется следующее соотношение:

$$\boxed{|t|\le\sqrt{2}}$$

2. Уравнения вида:

$$a\left(\sin^3 x\pm\cos^3 x\right)+b\left(\sin x\pm\cos x\right)+c\cdot\sin 2x+d=0$$

решаются с помощью аналогичных подстановок.

Пример

Решить уравнение: $6\left(\sin x-\cos x-1\right)=\sin x\cdot\cos x$.

Решение: Пусть $\sin x-\cos x=t$, тогда

$$6(t-1)=\frac{1-t^2}{2}, \quad 12t-12-1+t^2=0, \quad t^2+12t-13=0,$$

$t_1=1$; t_2 – посторонний корень, так как не удовлетворяет условию $|t|\le\sqrt{2}$.

Таким образом, получаем уравнение $\sin x-\cos x=1$, которое равносильно исходному. Разделим левую и правую части уравнения на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 45^0 \cdot \sin x - \sin 45^0 \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin(x - 45^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (по формуле 3.2.8),}$$

$$(x - 45^0) = (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n, \quad n \in \mathrm{Z}.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathrm{Z}.$

3.6. Решение уравнений методом введения вспомогательного угла

Уравнения вида $a \cdot \sin kx \pm b \cdot \cos kx = c$ (3.6.1) решаются с помощью введения вспомогательного угла. Найдем в общем виде решение такого уравнения, для чего разделим обе его части на $\sqrt{a^2 + b^2}$, $(a^2 + b^2 > 0)$. Получим:

$$\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sin kx \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos kx.$$

Сумма квадратов коэффициентов при «$\sin x$» и «$\cos x$» равна единице и по абсолютному значению каждый из коэффициентов не превышает единицы, т. е.

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1,$$

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \le 1 \quad \text{и} \quad \left|\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \le 1.$$

Следовательно, опираясь на основное тригонометрическое тождество ($\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$), можем сделать вывод, что существует такой $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда по формулам (3.2.7 или 3.2.8) имеем:

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin kx\cdot\cos\varphi\pm\cos kx\cdot\sin\varphi=\sin(kx\pm\varphi).$$

(*Примечание:* при решении уравнения вида (3.6.1) можно также применять формулы 3.2.9, 3.2.10 сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций.)

Для того, чтобы уравнение $\sin(kx\pm\varphi)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ имело решение, необходимо выполнение следующего условия:

$$\boxed{\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1 \qquad \text{или} \qquad c^2\le a^2+b^2}$$

Тогда решение примет вид:

$$\kappa x\pm\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n,\quad n\in Z.$$

! Если $c^2>a^2+b^2$, то уравнение корней не имеет.

Пример.

Решить уравнение: $3\sin x=2+\cos x$.

Решение: Проверим условие $c^2\le a^2+b^2$.

$2^2\le 3^2+1^2$; $4\le 10$ – неравенство верное, следовательно, уравнение имеет корни. Найдем их. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.

Получим, $\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos x=\frac{2}{\sqrt{10}}$.

Обозначим: $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}$, тогда уравнение примет вид:

$$\cos\varphi\cdot\sin x-\sin\varphi\cdot\cos x=\frac{2}{\sqrt{10}}.$$

$$\sin(x-\varphi)=\frac{2}{\sqrt{10}} \quad \text{(по формуле 3.2.8)},$$

$$x-\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}+\pi n,\quad n\in Z.$$

Величину φ найдем из равенства

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}};\quad \varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}+(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}+\pi n,\quad n\in Z.$

Решите следующие примеры самостоятельно:

1. $\cos^2 x+\sin x-\frac{1}{4}=0.$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z;\quad -\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z.$

2. $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0.$

Ответ: $\frac{\pi}{3}k, k\in Z;\quad \frac{\pi}{7}+\frac{2\pi l}{7}, l\in Z.$

3. $\cos x\cdot\sin 3x-\cos 5x\cdot\sin 7x=\frac{1}{2}\sin 4x.$

Ответ: $\frac{\pi n}{12},\quad n\in Z.$

4. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \dfrac{3}{2}.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4},\ k \in Z;\quad \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi l,\ l \in Z.$

5. $2\cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 1.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ arctg\left(-\dfrac{3}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z.$

6. $1 + \cos x + tg\dfrac{x}{2} = 0.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

7. $2\sin x + 2\cos x + \sin 2x + 1 = 0.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\quad n \in Z.$

8. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\quad n \in Z.$

9. $\cos\sqrt{5}x + 2\sin\sqrt{5}x = 4.$

Ответ: уравнение решений не имеет.

10. $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}.$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{84} + \dfrac{2\pi n}{7},\quad n \in Z;\quad \dfrac{11\pi}{84} + \dfrac{2\pi k}{7},\quad k \in Z.$

§ 4. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

4.1. Задачи на движение

При решении таких задач принято считать, что:

1. Движение на отдельных участках является равномерным, если не оговорено иное. Пройденный путь определяется по формуле: $S = v \cdot t$, где v – скорость, t – время.

2. Скорость движения тела по течению реки (относительно берега) равна $(v+u)$, где v – собственная скорость тела в стоячей воде, u – скорость течения реки. Скорость движения тела против течения реки – $(v-u)$.

Если в задаче говорится о движении плота, то считают, что он движется со скоростью течения реки.

3. Повороты движущихся тел осуществляются без затрат времени (т. е. мгновенно). Если в задаче говорится об изменении скорости тела, то оно также происходит мгновенно.

При решении задач на движение часто встречаются *две ситуации*.

1. Движение *навстречу друг другу*. Время, через которое тела встретятся, определяется по формуле: $t = \dfrac{S}{v_1 + v_2}$, где S – расстояние между двумя точками, v_1, v_2 – скорости движения первого и второго тела.

2. Движение *в одном направлении*. Время, через которое первое тело догонит второе, вычисляется по формуле: $t = \dfrac{S}{v_1 - v_2}$, $(v_1 > v_2)$, где S – расстояние между телами до начала движения, v_1, v_2 – скорости тел.

Примечание. Прежде чем приступать к решению задач на движение, желательно схематично изобразить условие. Хорошо составленный чертеж помогает лучше уяснить содержание задачи, определить необходимое число неизвестных.

Пример

Два поезда отправляются навстречу друг другу из пунктов *A* и *B*. Если поезд из пункта *A* отправится на 1,5 часа раньше, то оба поезда встретятся на середине пути. Если оба поезда выйдут одновременно, то через 6 часов расстояние между ними составит $\frac{1}{10}$ часть от первоначального пути. Сколько часов необходимо каждому поезду на прохождение пути между *A* и *B*.

Решение:

Пусть S – расстояние между *A* и *B*,

v_1 – скорость первого поезда, направляющегося из *A* в *B*,

v_2 – скорость второго поезда, направляющегося из *B* в *A*.

По условию задачи первый поезд за 1,5 ч. прошел бы расстояние равное $1{,}5 \cdot v_1$ и расстояние между поездами стало $(S - 1{,}5 \cdot v_1)$.

Время, через которое поезда встретятся на середине пути из *A* в *B*:

$$t = \frac{S - 1{,}5v_1}{v_1 + v_2}.$$

За это время t второй поезд прошел $\frac{S}{2}$, следовательно,

$$\frac{S}{2} = t \cdot v_2, \; t = \frac{S}{2 \cdot v_2}.$$

Составим первое уравнение: $\frac{S}{2 \cdot v_2} = \frac{S - 1{,}5v_1}{v_1 + v_2}$.

Если поезда выйдут навстречу друг другу одновременно, то за 6 часов они пройдут расстояния $6v_1$ и $6v_2$ соответственно.

Составим второе уравнение: $6v_1 + 6v_2 = 0{,}9 \cdot S$.

Запишем систему, состоящую из двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{v_2} = \dfrac{2 \cdot S - 3v_1}{v_1 + v_2}, \\ 6v_1 + 6v_2 = 0{,}9 \cdot S. \end{cases}$$

Если в ходе решения задачи удалось составить уравнений меньше, чем количество неизвестных, то внимательно прочтите условие, что требуется найти. В данной задаче требуется найти время, за которое первый поезд пройдет расстояние из *A* в *B*, т. е. $\dfrac{S}{v_1}$, и время, за которое второй поезд пройдет расстояние из *B* в *A*, т. е. $\dfrac{S}{v_2}$.

Разделим числитель и знаменатель правой части первого уравнения на v1, и обе части второго уравнения на v2. Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{v_2} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{S}{v_1} - 3}{1 + \dfrac{v_2}{v_1}}, \\ 6\dfrac{v_1}{v_2} + 6 = 0{,}9 \cdot \dfrac{S}{v_2}. \end{cases}$$

Обозначим $\dfrac{S}{v_2} = x$, $\dfrac{v_1}{v_2} = y$, тогда $\dfrac{S}{v_1} = \dfrac{S}{v_2} \cdot \dfrac{v_2}{v_1} = x \cdot \dfrac{1}{y}$. (*)

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{2x}{y} - 3}{1 + \dfrac{1}{y}}, \\ 6y + 6 = 0{,}9x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2x - 3y}{y + 1}, \\ x = \dfrac{2y + 2}{0{,}3}. \end{cases}$$

Подставим выражение для x в первое уравнение и упростим его, получим:

$$2y^2 + 0{,}9y - 2 = 0,$$

$$y_1 = \frac{4}{5},\quad y_2 = -\frac{5}{4}$$ (не подходит по смыслу задачи).

Из второго уравнения системы найдем $x=12$ (т.е. поезд, следующий из A в B, затрачивает на весь путь 12 часов).

Из равенства (*) найдем время для второго поезда:

$$t = \frac{x}{y} = \frac{12}{4/5} = 15 \text{ ч.}$$

Ответ: 12 ч., 15 ч.

4.2. Задачи на совместную работу

В таких задачах, как правило, идет речь о совместной работе (например, заполнение бассейна, перепечатка рукописей, изготовление деталей и т. д.) нескольких человек или механизмов. Производительность p (работа, выполненная за единицу времени) каждого из них считается постоянной.

Задачи на совместную работу аналогичны задачам на движение. При этом, если не указан объем всей работы и он не является искомым, для удобства расчетов его принимают равным единице.

Тогда производительность труда вычисляется по формуле: $p = \frac{1}{t}$.

Пример

Двое рабочих должны выполнить определенную работу. Сначала работал первый $\frac{2}{5}$ того времени, которое требуется второму для выполнения всей работы, затем оставшуюся часть работы они выполнили вместе. Если оба рабочих выполняли бы работу вместе с самого начала, то работа была бы закончена на 2 ч. 15 мин. раньше, причем первый сделал бы в 5 раз больше, чем фактически выполнил второй. Сколько времени требуется каждому рабочему, чтобы выполнить всю работу самостоятельно?

Решение: Весь объем выполненной работы, так как он не является искомым, примем за 1.

Пусть первый рабочий выполнит всю работу за x ч., второй – за y ч. Тогда за 1 час первый рабочий выполнит $\frac{1}{x}$ часть всей работы, второй – $\frac{1}{y}$.

Общая производительность при совместной работе:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{xy}.$$

Время, за которое может быть выполнена вся работа двумя рабочими одновременно, равно $1:\frac{y+x}{xy}=\frac{xy}{y+x}$.

По условию задачи первый работал $\frac{2}{5}\cdot y$ часа и выполнил $\frac{1}{x}\cdot\frac{2y}{5}$ часть работы. Оставшуюся работу $\left(1-\frac{2y}{5x}\right)$ они выполнили вместе за $\left(1-\frac{2y}{5x}\right):\left(\frac{y+x}{xy}\right)$ часа.

Составим первое уравнение:

$$\frac{2}{5}y+\left(1-\frac{2y}{5x}\right)\cdot\frac{xy}{y+x}=\frac{xy}{y+x}+\frac{9}{4}.$$

После упрощения получим: $8xy-45x-45y=0$.

По условию задачи фактически второй рабочий выполнил

$$\frac{1}{y}\cdot\left(1-\frac{2y}{5x}\right)\cdot\frac{xy}{y+x}=\frac{(5x-2y)xy}{y\cdot 5x\cdot(y+x)}=\frac{5x-2y}{5(y+x)}$$

работы, а первый рабочий за $\frac{xy}{x+y}$ ч. выполнит $\frac{1}{x}\cdot\frac{xy}{x+y}$ часть работы.

Составим второе уравнение: $\frac{y}{x+y}=\frac{5x-2y}{5(y+x)}\cdot 5$. После упрощения получим: $5x=3y$. Итак, запишем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}8xy-45x-45y=0,\\ 5x=3y,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=9,\\ y_2=15.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система значений не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 9 ч., 15 ч.

4.3. Задачи на смеси и сплавы

Решая такие задачи, предполагают, что:

– все рассматриваемые смеси, растворы, сплавы однородны;

– при смешивании разных веществ, например, A, B и C с объемами V_1, V_2, V_3 (или с массами m_1, m_2, m_3), получаем новое вещество, объем которого равен $V=V_1+V_2+V_3$ (или массой $m=m_1+m_2+m_3$).

В задачах на смеси и сплавы основными являются понятия «концентрация» и «процентное содержание». Например, если смесь массой m состоит из веществ A и B с массами m_1 и m_2, то величина $\frac{m_1}{m}$ называется *концентрацией вещества A* ($\frac{m_2}{m}$ – концентрацией вещества B).

Величину $\frac{m_1}{m}\cdot 100\%$ (или $\frac{m_2}{m}\cdot 100\%$) называют *процентным содержанием вещества A* (или B соответственно).

Пример.

Имеется сплав серебра с медью. Вычислить его массу и пробу (т.е. найти отношение массы серебра к общей массе сплава), если известно, что при переплавке его со 100 г чистого серебра получают слиток 0,7 пробы, а со 100 г сплава 0,4 пробы получают слиток 0,6 пробы.

Решение: Пусть m г – первоначальная масса сплава, x – его проба. Тогда чистого серебра в первоначальном сплаве ($m\cdot x$) г. После того, как его сплавили со 100 г серебра, получили новый сплав, в котором $(m\cdot x+100)$ г серебра. Общая масса сплава составит $(m+100)$ г. Тогда по условию задачи имеет место следующее соотношение:

$$\frac{m\cdot x+100}{m+100}=0{,}7\ .$$

Аналогичные рассуждения проводим для второго случая:

$$\frac{m\cdot x+40}{m+100}=0{,}6\,.$$

Запишем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}\dfrac{m\cdot x+100}{m+100}=0{,}7,\\[2mm] \dfrac{m\cdot x+40}{m+100}=0{,}6.\end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$\frac{60}{m+100}=0{,}1\ ,\ m=500\text{г.}$$

Подставив в первое уравнение *m*, найдем $x=0{,}64$.

Ответ: 500 г., 0,64.

4.4. Задачи на проценты

1 % – это сотая часть числа.

Например:

а) Найти, сколько процентов составляет число 306 от 680.

Составим пропорцию: $\begin{matrix} 680 & - & 100\% \\ 306 & - & x\% \end{matrix}$, тогда

$$x=\frac{306\cdot 100\%}{600}=45\%\ .$$

б) Найти 45 % от числа 680.

Составим пропорцию: $\begin{matrix} 680 & - & 100\% \\ x & - & 45\% \end{matrix}$, тогда

$$x=\frac{680\cdot 45\%}{100\%}=306\ .$$

Пример

Вкладчик положил в сбербанк некоторую сумму денег. Через год сбербанк начислил 630 руб. процентных денег. Добавив 4 370 руб., вкладчик оставил деньги еще на год. По истечении второго года вновь было произведено начисление процентов, и теперь вклад вместе с процентами составил 16 430 руб. Какая сумма денег была положена первоначально и сколько процентов начисляет ежегодно сбербанк на вклад?

Решение:

Пусть x руб. было положено в сбербанк, y % – годовой процент по вкладу.

Составим пропорцию: $\begin{matrix} x\ руб. & - & 100\% \\ 630\ руб. & - & y\%. \end{matrix}$

Таким образом, годовой процент $y = \frac{630 \cdot 100}{x}\%$.

К концу первого года вклад составил ($x + 630$) руб., а к началу второго – ($x + 630 + 4370$) = ($x + 5000$) руб. Тогда к концу второго года было начислено процентных денег:

$$\begin{matrix} (x + 5000)\ руб. & - & 100\% \\ K\ руб. & - & \frac{630 \cdot 100}{x}\%, \end{matrix}$$

$$K = \frac{(x + 5000) \cdot \frac{630 \cdot 100}{x}}{100} = \frac{(x + 5000) \cdot 63000}{100x} = \frac{(x + 5000) \cdot 630}{x}$$

(руб.).

По условию задачи к концу второго года вклад составил 16 430 руб. Составим уравнение:

$$(x + 5000) + \frac{(x + 5000) \cdot 630}{x} = 16430,$$

$$x^2 - 10800 \cdot x + 3150000 = 0,$$

$x_1 = 10500$, $x_2 = 300$ (не подходит по смыслу задачи).

Таким образом, первоначально в сбербанк вкладчик положил 10500 рублей, а годовой процент по вкладу составил $\frac{630 \cdot 100}{10500} = 6\%$.

Ответ: 10500 руб., 6 %.

4.5. Задачи на состав числа

В десятичной системе счисления любое число можно представить в виде суммы определенного числа единиц, десятков, сотен и т. д.

Например, число $2002 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 1$.

При решении такого типа задач искомыми величинами являются, как правило, число единиц, десятков,

Пример

Если двузначное число разделить на некоторое целое число, то в частном получится 4, а в остатке 6. Если же в делимом поменять местами цифры, а делитель оставить прежним, то в частном получится 3, а в остатке 9. Найдите первоначальное значение делимого.

Решение: Обозначим через x число десятков заданного двузначного число. Через y – число единиц. Тогда исходное число можно записать в таком виде: $(10x + y)$.

Число, на которое делим, обозначим через a. Тогда, по первому условию задачи, запишем: $10x + y = 4a + 6$.

По второму: $10y + x = 3a + 9$.

Сложив первое и второе уравнения, получим:

$$11x + 11y = 7a + 15,\ x + y = \frac{7a + 15}{11}.$$

Так как x – это число десятков, а y – число единиц, то $(x+y)$ может быть только целым числом. Поэтому последнее равенство возможно, если

$$7a + 15 = 99,$$

$$a = 12.$$

Возвращаясь к составленным уравнениям:

$$\begin{cases} 10x + y = 4 \cdot 12 + 6 = 54, \\ 10y + x = 3 \cdot 12 + 9 = 45, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 4. \end{cases}$$

Ответ: 54.

§ 5. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

5.1. Арифметическая прогрессия

Слово «*прогрессия*» в переводе на русский язык с латинского означает «движение вперед».

Арифметической прогрессией называется последовательность чисел a_1, a_2, a_3, … , a_n, если для любого n выполняется условие $a_{n+1} = a_n + d$, где d – любое число, постоянное для данной прогрессии. Число d называется *разностью* прогрессии.

Например, числовая последовательность:

1) 2; 5; 8; 11; 14; …, есть арифметическая прогрессия с разностью d равной 3;

2) 7; 1,3; –4,4; –10,1 … – арифметическая прогрессия, где d = –5,7.

Значение любого члена арифметической прогрессии, если известны ее первый член и разность, можно вычислить по формуле:

$$a_n = a_1 + d(n-1). \qquad (1)$$

Она получила название формулы *общего члена арифметической прогрессии*.

Из соотношения (1) можно вывести формулу для нахождения n – номера взятого члена прогрессии:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1.$$

Свойства членов арифметической прогрессии

1. Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое равноотстоящих от него членов:

$$a_n = \frac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}, \text{ где } n \geq 2, p \text{ – любое число.} \qquad (2)$$

Верно и обратное утверждение. Если для последовательности выполняется условие (2), то такая последовательность является арифметической прогрессией.

2. В конечной арифметической прогрессии сумма двух членов, равноудаленных от ее концов, равна сумме крайних членов, т. е.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1} = \ldots = 2a_1 + d(n-1) .$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n . \qquad (3)$$

5.2. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел a_1, a_2, a_3, …, a_n, если для любого *n* выполняется условие:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q ,$$

где b_1 и q любые отличные от нуля числа. Число q называется *знаменателем* прогрессии.

Геометрическая прогрессия – *возрастающая*, если абсолютная величина ее знаменателя больше 1, т. е. $|q|>1$, если $|q|<1$, то прогрессия – *убывающая*.

Например:

1) 3; 6; 12; 24; 48; 96; … – возрастающая геометрическая прогрессия со знаменателем q равным 2;

2) 3; –6; 12; –24; 48; –96; … – возрастающая геометрическая прогрессия со знаменателем q равным (–2), так как $|-2|>1$;

3) 3; 1,5; 0,75; 0,375; … – убывающая геометрическая прогрессия $\left(q = \frac{1}{2}\right)$;

4) $3; -1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \ldots$ – убывающая геометрическая прогрессия $\left(q = -\frac{1}{3} \right)$.

Значение любого члена геометрической прогрессии можно вычислить по формуле:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (4)$$

Соотношение (4) получило название формулы *общего члена геометрической прогрессии*.

Свойства членов геометрической прогрессии

1. Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению равноотстоящих от него членов:

$$b_n^2 = b_{n-p} \cdot b_{n+p}, \text{ – где } n \geq 2, \text{ p – любое число} \qquad (5).$$

Верно и обратное утверждение. Если для последовательности чисел выполняется условие (5), то такая последовательность является геометрической прогрессией.

Для любой геометрической прогрессии с положительными членами, т. е. $b_n>0$ при всех $n \in N$ ($b_1>0$, $q>0$), верно равенство:

$$b_n = \sqrt{b_{n-p} \cdot b_{n+p}}, \text{ где } n \geq 2.$$

2. В конечной геометрической прогрессии произведение двух членов, равноудаленных от ее концов равно произведению крайних членов, т. е.

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1} = \ldots = b_1^2 \cdot q^{n-1}.$$

3. Для геометрической прогрессии с положительными членами произведение n первых ее членов равно корню квадратному из n-ой степени произведения ее крайних членов, т. е.

$$P_n = \sqrt{(b_1 \cdot b_n)^n}.$$

В общем случае:

$$|P_n| = \sqrt{|b_1 \cdot b_n|^n}.$$

Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии, знаменатель которой не равен единице (т. е. $q \neq 1$), вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q} = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если $q = 1$, то прогрессия состоит из равных между собой членов, при этом

$$S_n = n \cdot b_1.$$

Сумма членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии

Бесконечный числовой ряд $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, образованный из членов убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), сходится и его сумма равна:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Например, дана убывающая геометрическая прогрессия: $12; -6; 3; -\frac{3}{2}; \ldots \quad \left(b_1 = 12,\ q = -\frac{1}{2}\right)$. Сумма ее членов равна: $S = \frac{12}{1-(-1/2)} = 8$, т.е. при неограниченном возрастании n – числа членов геометрической прогрессии, их сумма неограниченно приближается к числу 8.

Приведем несколько примеров решения задач.

Пример 1

В ходе анализа оперативной обстановки в регионе было выявлено, что количество зарегистрированных квартирных краж с 2012 по 2018 г. включительно увеличивалось в среднем на 12 преступлений в год. Зная, что среднее количество квартирных краж за это время составило 169, определить, сколько преступлений было зарегистрировано в 2014 г.

Решение:

По условию задачи количество зарегистрированных преступлений по годам составляет арифметическую прогрессию, где разность прогрессии $d = 12$.

По формуле (3) сумма всех семи членов прогрессии равна $S_7 = \frac{2a_1 + d(7-1)}{2} \cdot 7$.

По условию $\frac{S_7}{7} = 169$, тогда $\frac{2a_1 + 6d}{2} = 169$, $a_1 + 3 \cdot 12 = 169$, $a_1 = 133$.

В 2021 г. зарегистрировано 133 кражи. Для того, чтобы узнать число краж в 2014 г., найдем третий член арифметической прогрессии:

$$a_3 = a_1 + 2d = 133 + 2 \cdot 12 = 157.$$

Ответ: 157 краж.

Пример 2

Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 16, а разность четырнадцатого и пятого членов прогрессии равна 9. Найти второй член арифметической прогрессии и сумму десяти первых ее членов.

Решение:

По условию задачи: $\begin{cases} a_3 + a_7 = 16; \\ a_{14} - a_5 = 9. \end{cases}$

По формуле (1) выразим a_3, a_7, a_{14}, a_5 через a_1 и d :

$a_3 = a_1 + 2d;$ $a_7 = a_1 + 6d;$ $a_{14} = a_1 + 13d;$ $a_5 = a_1 + 4d$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 6d = 16, \\ a_1 + 13d - a_1 - 4d = 9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 8d = 16, \\ 9d = 9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 1. \end{cases}$$

Второе число арифметической прогрессии:

$$a_2 = a_1 + d(n-1) = 4 + 1 \cdot (2-1) = 5 .$$

Сумма первых десяти чисел:

$$S_{10} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (10-1)}{2} \cdot 10 = 85 .$$

Ответ: 5; 85.

Пример 3

Три целых числа образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1. Если ко второму члену прогрессии прибавить 3, а третий возвести в квадрат, то получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

Решение: Пусть разность арифметической прогрессии равна d, тогда

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1 + d; \quad a_3 = 1 + 2d .$$

По условию числа $b_1 = 1,$ $b_2 = (1+d) + 3,$ $b_3 = (1+2d)^2$ составят геометрическую прогрессию. Согласно первому свойству геометрической прогрессии запишем: ${b_2}^2 = b_1 \cdot b_3$, т. е.

$(4+d)^2 = 1 \cdot (1+2d)^2;$ $16 + 8d + d^2 = 1 + 4d + 4d^2;$ $3d^2 - 4d - 15 = 0.$

$d_1 = 3;$ $d_2 = -\dfrac{5}{3}$ (d_2 – не удовлетворяет условию задачи).

Следовательно, $a_1 = 1; \quad a_2 = 1+3 = 4; \quad a_3 = 1+6 = 7$.

Ответ 1; 4; 7.

Пример 4

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 64, а сумма ее первых пяти членов равна $\frac{1025}{16}$. Найти первые четыре члена этой прогрессии.

Решение:

Исходя из условия задачи, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 64, \\ \dfrac{b_1(q^5-1)}{q-1} = \dfrac{1025}{16}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b_1}{q-1} = -64, \\ \dfrac{b_1}{q-1} \cdot (q^5-1) = \dfrac{1025}{16}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 64 \cdot (1-q), \\ q = \sqrt[5]{\dfrac{1025}{16 \cdot (-64)} + 1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 80, \\ q = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

$$b_2 = b_1 \cdot q = 80 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -20; \;\; b_3 = b_1 \cdot q^2 = 80 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 5;$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 = 80 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{5}{4}.$$

Ответ: $80; -20; 5; -\frac{5}{4}$.

Пример 5

Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 8, то эти числа составят арифметическую прогрессию, если затем последнее число увеличить на 64, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

Решение: Из условия задачи числа:

b_1, $b_1 \cdot q$, $b_1 \cdot q^2$ – образуют геометрическую прогрессию;

b_1, $b_1 \cdot q+8$, $b_1 \cdot q^2$ – образуют арифметическую прогрессию;

b_1, $b_1 \cdot q+8$, $b_1 \cdot q^2+64$ – образуют геометрическую прогрессию.

Используя первое свойство членов арифметической прогрессии (2), а также первое свойство членов геометрической прогрессии (5), запишем систему уравнений, состоящую из двух уравнений и двух неизвестных:

$$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q^2 = 2 \cdot (b_1 \cdot q + 8), \\ b_1 \cdot \left(b_1 \cdot q^2 + 64\right) = (b_1 \cdot q + 8)^2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q^2 - 2b_1 \cdot q - 16 = 0, \\ b_1^2 \cdot q^2 + 64 \cdot b_1 - b_1^2 \cdot q^2 - 16 \cdot b_1 \cdot q - 64 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим b_1 -

$$4 \cdot b_1 - b_1 \cdot q - 4 = 0, \quad b_1\left(4 - q\right) - 4 = 0,$$

$$b_1 = \frac{4}{4-q}$$ и подставим в первое уравнение.

$$\frac{4}{4-q} + \frac{4 \cdot q^2}{4-q} - \frac{2 \cdot 4 \cdot q}{4-q} - \frac{16 \cdot \left(4-q\right)}{4-q} = 0,$$

$$4 + 4q^2 - 8q - 64 + 16q = 0,$$

$$q^2 + 2q - 15 = 0,$$

$$q_1 = 3; \quad q_2 = -5.$$

Следовательно, получили два решения системы уравнений:

$$\begin{cases} b_1 = 4, \\ q = 3, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{4}{9}, \\ q = -5. \end{cases}$$

Ответ: 1) $4; 12; 36.$ 2) $\frac{4}{9}; -\frac{20}{9}; \frac{100}{9}$.

Пример 6

Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 20, а сумма первых трех членов равна 26. Найти знаменатель прогрессии.

Решение: по условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q^2 = 20, \\ b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 26, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(1+q^2\right) = 20, \\ b_1\left(1+q+q^2\right) = 26. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение системы на первое:

$$\frac{1+q+q^2}{1+q^2} = \frac{26}{20},$$

$$1+q+q^2 = \frac{13\cdot\left(1+q^2\right)}{10},$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0,$$

$$q_1 = 3; \quad q_2 = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, получили две системы решений:

$$\begin{cases} b_1 = 2, \\ q = 3, \end{cases} \quad \textit{или} \quad \begin{cases} b_1 = 18, \\ q = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $3; \ \frac{1}{3}$.

Решите следующие примеры самостоятельно:

1. Найти арифметическую прогрессию, зная, что сумма трех первых ее членов равна 15, а произведение 80.

Ответ: 1) 2; 5; 8; …; 2) 8; 5; 2; …

2. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Найти знаменатель данной прогрессии.

Ответ: $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$.

3. Найти числа, составляющие арифметическую прогрессию, если известно, что сумма первой четверки этих чисел равна 68, сумма последней четверки равна –36, а сумма всех этих чисел равна 68.

Ответ: 20; 18; 16; 14; 12; 10; 8; 6; 4; 2; 0; –2; –4; –6; –8; –10; –12.

4. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 15, а произведение первых трех членов равно –216. Найти второй член геометрической прогрессии.

Ответ: –6; –6.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

ФОРМУЛЫ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Степени сумм и разностей

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$;

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3 b + 6a^2 b^2 \pm 4ab^3 + b^4$;

$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 4a^4 b + 6a^3 b^2 \pm 6a^2 b^3 + 4ab^4 \pm b^5$.

Формулы сокращённого умножения

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;

$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$;

$a^5 \pm b^5 = (a \pm b)(a^4 \mp a^3 b + a^2 b^2 \mp ab^3 + b^4)$.

***Для более высоких степеней*:**

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,

где n – любое целое число;

$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)(a^{2m} - a^{2m-1} b + a^{2m-2} b^2 - \ldots +$
$+ a^2 b^{2m-2} - ab^{2m-1} + b^{2m})$,

где m – натуральное число.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Уравнение первой степени: $ax + b = c$:

а) если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$;

б) если $a = 0,\ b \neq 0$, то решений нет;

в) если $a = 0,\ b = 0$, то бесконечное множество решений.

2. Квадратные уравнения:

а) $ax^2+bx+c=0$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, где $a\neq 0$;

б) $ax^2+2bx+c=0$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$, где $a\neq 0$.

При этом, если $D>0$, то $x_1\neq x_2$,

$D=0$, то $x_1=x_2$,

$D<0$, то вещественных корней нет.

в) $x^2+px+q=0$, $x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$ ($a=1$).

Разложение на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. Биквадратное уравнение: $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$.

Замена: $x^2=t$. Тогда $t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Если $t_1>0$ и $t_2>0$, то $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$.

4. Теорема Виета:

а) Для квадратного уравнения: $ax^2+bx+c=0$.

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}; \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

б) Для приведенного уравнения: $x^2+px+q=0$.

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p; \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$$

в) Для кубического уравнения: $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}; \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=\dfrac{c}{a}; \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

г) Для уравнения 4-ой степени: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{b}{a}; \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_1\cdot x_4+x_2\cdot x_3+x_2\cdot x_4+x_3\cdot x_4=\dfrac{c}{a}; \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_2\cdot x_4+x_1\cdot x_3\cdot x_4+x_2\cdot x_3\cdot x_4=-\dfrac{d}{a}; \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=\dfrac{e}{a}. \end{cases}$$

д) Для уравнения *n-ой* степени:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0 \quad (a_n\neq 0).$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}; \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+\ldots+x_{n-1}\cdot x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}; \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_2\cdot x_4+\ldots+x_{n-2}\cdot x_{n-1}\cdot x_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}; \\ \vdots \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_{n-1}\cdot x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

СТЕПЕНИ И КОРНИ

$a^0 = 1$, где 0^0 – не имеет смысла;

$(+a)^n = +a^n$; $\qquad (-a)^n = \begin{cases} +a^n, & n - \textit{четное}, \\ -a^n, & n - \textit{нечетное}; \end{cases}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$; $\qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\qquad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$;

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; $\qquad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $\qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$.

ЛОГАРИФМЫ

1. Если $a^x = b$, то $\log_a b = x$, где *$a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.*

2. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

3. Некоторые свойства логарифмов:

а) $\log_a 1 = 0$, так как $a^0 = 1$;

б) $\log_a a = 1$, так как $a^1 = a$;

с) $\log_a x_1 = \log_a x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$ (и наоборот).

4. Основные правила логарифмирования:

а) $\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a |b_1| + \log_a |b_2| + \ldots + \log_a |b_n|$,

где $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n > 0$;

б) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$, где $\dfrac{b}{c} > 0$;

c) $\log_a b^c = c \cdot \log_a |b|$, где $b^c > 0$;

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a |b|, \text{ где } \sqrt[n]{b} > 0.$$

5. Формулы перехода от одного основания логарифма к другому:

а) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, где $\dfrac{1}{\log_c a}$ – модуль перехода;

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (при $b = c$) или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;

б) $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k} \cdot \log_{|a|} b$, где $a^k > 0$;

$\log_{\sqrt[\kappa]{a}} b = \log_{a^{\frac{1}{k}}} b = \kappa \cdot \log_{|a|} b$, где $\sqrt[k]{a} > 0$;

c) $\log_{a \cdot c} b = \dfrac{\log_{|a|} b}{1 + \log_{|a|} |c|}$, где $a \cdot c > 0$.

6. Если логарифм возрастающий, т. е. $a > 1$:

$\log_a b > 0$ при $b > 1$,

$\log_a b < 0$ при $0 < b < 1$;

если логарифм убывающий, т. е. $0 < a < 1$:

$\log_a b > 0$ при $0 < b < 1$,

$\log_a b < 0$ при $b > 1$.

ПРОГРЕССИИ

1. Арифметическая прогрессия: $a_{n+1} = a_n + d$,

где d – разность.

$$a_n = a_1 + d(n-1); \; n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1.$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n .$$

Свойства членов а.п.:

а) $a_n = \dfrac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}$, где n ≥ 2, p – любое число

(для а.п. из трех членов: $a_1 + a_3 = 2a_2$);

б) в конечной а.п.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ... = a_k + a_{n-k+1} = ... = 2a_1 + d(n-1) .$$

2. Геометрическая прогрессия: $b_{n+1} = b_n \cdot q$,

где q – знаменатель.

Г.п. – *возрастающая*, если $|q| > 1$;

убывающая, если $|q| < 1$.

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1};$$

$$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q} = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1);$$

$$S_n = n \cdot b_1 \; (q = 1);$$

$S = \dfrac{b_1}{1-q}$ (бесконечно убывающая г.п. $|q| \cdot < 1$).

Свойства членов г.п.:

а) $b_n^2 = b_{n-p} \cdot b_{n+p}$ – где n ≥ 2, p – любое число (для г.п. из трех членов: $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$);

$b_n = \sqrt{b_{n-p} \cdot b_{n+p}}$, где $b_n>0$ ($b_1>0$, $q>0$);

б) в конечной г.п.

$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = ... = b_k \cdot b_{n-k+1} = ... = b_1^2 \cdot q^{n-1}$.

в) для г.п. с $b_n>0$ произведение *n* первых ее членов:

$P_n = \sqrt{(b_1 \cdot b_n)^n}$.

НЕРАВЕНСТВА

Основные факты о равносильности неравенств

1. $f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow f_2(x) < f_1(x)$.
2. $f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) - f_2(x) > 0$.
3. $f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) + \varphi(x) > f_2(x) + \varphi(x)$.
4. Если $\varphi(x) > 0$, то

$f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) \cdot \varphi(x) > f_2(x) \cdot \varphi(x)$.

Если $\varphi(x) < 0$, то

$f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) \cdot \varphi(x) < f_2(x) \cdot \varphi(x)$.

5. Если $f_1(x) < f_2(x)$ и $f_2(x) < f_3(x)$, то $f_1(x) < f_3(x)$.
6. Если $f_1(x) < f_2(x)$ и $f_3(x) < f_4(x)$, то

$f_1(x) + f_3(x) < f_2(x) + f_4(x)$.

7. Если $f_1(x) < f_2(x)$ и $f_3(x) > f_4(x)$, то

$f_1(x) - f_3(x) < f_2(x) - f_4(x)$.

8. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ одного знака и $f_1(x) < f_2(x)$, то

$\frac{1}{f_1(x)} > \frac{1}{f_2(x)}$.

9. $(f_1(x))^{2n} > (f_2(x))^{2n} \Leftrightarrow |f_1(x)| > |f_1(x)|$.

При решении неравенств часто используются следующие утверждения:

10. $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_1(x)\cdot f_2(x) < 0, \\ f_2(x) \neq 0. \end{cases}$

11. $f_1(x)\cdot f_2(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x) < 0, \\ f_2(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$

12. $f_1(x)\cdot f_2(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x) < 0, \\ f_2(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$

Показательные неравенства

13. Если $a > 1$, то $a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) > f_2(x)$.
14. Если $0 < a < 1$:

$a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) < f_2(x)$.

Логарифмические неравенства

15. Если $a > 1$ и $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$:

$\log_a f_1(x) < \log_a f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) < f_2(x)$.

16. Если $0 < a < 1$ и $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$:

$\log_a f_1(x) < \log_a f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) > f_2(x)$.

Иррациональные неравенства

17. Если $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$ и $f_1(x) > f_2(x)$, то

$\left(f_1(x)\right)^n > \left(f_2(x)\right)^n \; \left(n \in N\right)$.

18. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут иметь разные знаки и

$f_1(x) < f_2(x)$, то $\left(f_1(x)\right)^{2n+1} < \left(f_2(x)\right)^{2n+1}$.

В частности,

а) $\sqrt[2n]{f_1(x)} < \sqrt[2n]{f_2(x)}$, $n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_1(x) < f_2(x). \end{cases}$

б) $\sqrt[2n+1]{f_1(x)} < \sqrt[2n+1]{f_2(x)}$, $n \in N \Leftrightarrow f_1(x) < f_2(x).$

в) $\sqrt[2n]{f_1(x)} < f_2(x)$, $n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) > 0, \\ f_1(x) < \left(f_2(x)\right)^{2n}. \end{cases}$

г) $\sqrt[2n]{f_1(x)} > f_2(x)$, $n \in N \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_2(x) < 0, \\ f_1(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x) \geq 0, \\ f_1(x) > \left(f_2(x)\right)^{2n}. \end{cases} \end{array}\right.$

д) $\sqrt[2n+1]{f_1(x)} < f_2(x)$, $n \in N \Leftrightarrow f_1(x) < \left(f_2(x)\right)^{2n+1}$.

е) $\sqrt[2n+1]{f_1(x)} > f_2(x)$, $n \in N \Leftrightarrow f_1(x) > \left(f_2(x)\right)^{2n+1}$.

Неравенства с неизвестным под знаком абсолютной величины (модуля)

Модуль: $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$

1. $f_1(|x|) < f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ f_1(-x) < f_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ f_1(x) < f_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$

2. $|f_1(x)| < f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_2(x) > 0, \\ -f_2(x) < f_1(x) < f_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x) \le 0, \\ x \in \varnothing. \end{cases} \end{array}\right.$

3. $|f_1(x)| > f_2(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_2(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f_1(x) > f_2(x), \\ f_1(x) < -f_2(x) \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x) > 0, \\ x \in \text{ОДЗ исходного неравенства}. \end{cases} \end{array}\right.$

4. $|f_1(|x|)| < f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad -f_2(x) < f_1(|x|) < f_2(x)$

или $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ |f_1(-x)| < f_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{x} \ge 0, \\ |f_1(x)| < f_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$

5. $|f_1(|x|)| > f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) < f_1(|x|) < -f_2(x)$

или $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ |f_1(-x)| > f_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{x} \ge 0, \\ |f_1(x)| > f_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z;$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \alpha \neq \pi n, n \in Z;$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1, \ \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z;$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z.$$

Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}, \ \alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}, \alpha, \beta, \alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha\, ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}, \ \alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \pi n, \ n \in Z;$$

$$ctg(\alpha-\beta) = \frac{ctg\alpha\, ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}, \alpha, \beta, \alpha-\beta \neq \pi n, n \in Z.$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)).$$

Формулы двойных и тройных аргументов:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$tg\,2\alpha=\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$$

$$ctg\,2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\,\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi k}{2},\ k\in Z,\ \alpha\neq\pi n,\ n\in Z$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$tg\,3\alpha=\frac{3tg\,\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{6}(2n+1),\ n\in Z$$

$$ctg\,3\alpha=\frac{3ctg\,\alpha-ctg^3\alpha}{1-3ctg^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента:

$$\sin\alpha = \frac{2tg\,\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\,\frac{\alpha}{2}}, \ \ \alpha \neq \pi(2n+1), \ \ n \in Z;$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\,\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\,\frac{\alpha}{2}}, \ \ \alpha \neq \pi(2n+1), \ \ n \in Z;$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\,\frac{\alpha}{2}}, \ \ \alpha, \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \ \ n \in Z;$$

$$ctg\alpha = \frac{1-tg^2\,\frac{\alpha}{2}}{2tg\,\frac{\alpha}{2}}, \ \ \alpha \neq \pi n, \ \ n \in Z.$$

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^0 - \alpha);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^0 - \alpha);$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \ \ \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \ \ n \in Z;$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \ \ \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \ \ n \in Z;$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \ \ \alpha, \beta \neq \pi n, \ \ n \in Z;$$

$$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \ \ \alpha, \beta \neq \pi n, \ \ n \in Z;$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Формулы половинного аргумента:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2};$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \ \ \alpha \neq \pi(2n+1), \ \ n \in Z;$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}, \ \ \alpha \neq 2\pi n, \ \ n \in Z;$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \ \alpha \neq \pi n, \ \ n \in Z;$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \ \ \alpha \neq \pi n, \ \ n \in Z.$$

Формулы приведения

<table>
<tr><th colspan="8">НАЗВАНИЕ ФУНКЦИИ</th></tr>
<tr><th></th><th colspan="3">Сохраняется</th><th colspan="4">Изменяется</th></tr>
<tr><th>функция</th><th>-α</th><th>180^0-α
π-α</th><th>180^0+α
π+α</th><th>90^0-α
$\frac{\pi}{2}-\alpha$</th><th>90^0+α
$\frac{\pi}{2}+\alpha$</th><th>270^0-α
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$</th><th>270^0+α
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$</th></tr>
<tr><td>sin α</td><td>-sin α</td><td>sin α</td><td>-sin α</td><td>cos α</td><td>cos α</td><td>-cos α</td><td>-cos α</td></tr>
<tr><td>cos α</td><td>cos α</td><td>-cos α</td><td>-cos α</td><td>sin α</td><td>-sin α</td><td>-sin α</td><td>sin α</td></tr>
<tr><td rowspan="2">tg α</td><td>-tg α</td><td>-tg α</td><td>tg α</td><td>ctg α</td><td>-ctg α</td><td>ctg α</td><td>-ctg α</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\alpha \neq \pi/2+\pi n, \ \ n \in Z$</td><td colspan="4">$\alpha \neq \pi n, \quad n \in Z$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ctg α</td><td>-ctg α</td><td>-ctg α</td><td>ctg α</td><td>tg α</td><td>-tg α</td><td>tg α</td><td>-tg α</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\alpha \neq \pi n, \quad n \in Z$</td><td colspan="4">$\alpha \neq \pi/2+\pi n, \ \ n \in Z$</td></tr>
</table>

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α (градусы, радианы)	**sin α**	**cos α**	**tg α**	**ctg α**
0^0 (0)	0	1	0	∞ (не определен)
30^0 $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45^0 $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0 $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90^0 $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞ (не определен)	0

Решение простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a \qquad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z;$

$\cos x = a \qquad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \qquad n \in Z;$

$tgx = a \qquad x = arctga + \pi n, \qquad n \in Z;$

$ctgx = a \qquad x = arcctga + \pi n, \qquad n \in Z.$

При этом

$\arcsin(-a) = -\arcsin a;$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a;$

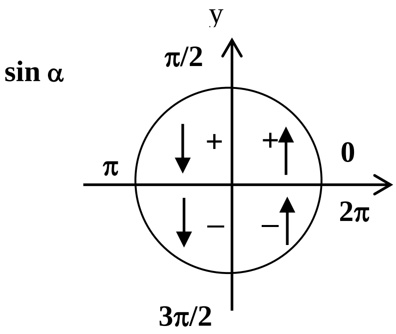
$arctg(-a) = -arctga;$

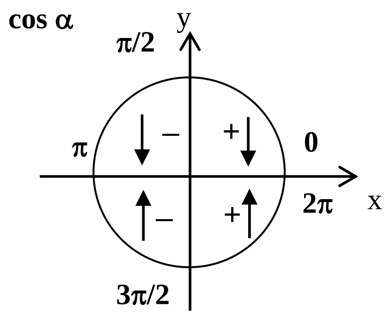
$arcctg(-a) = \pi - arcctga.$

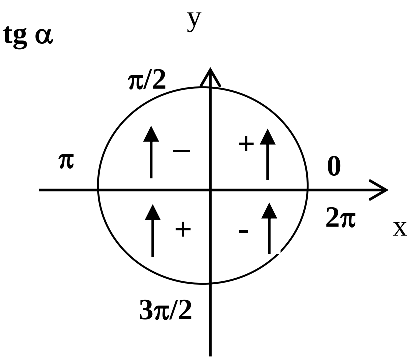
Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений

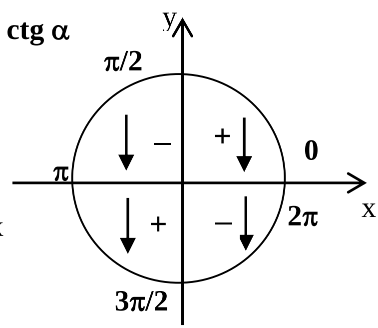
sin x = 0 x=πn, n∈Z	tg x = 0 x=πn, n∈Z
sin x = 1 x=π/2 + 2πn, n∈Z	tg x = 1 x=π/4 + πn, n∈Z
sin x = -1 x=-π/2 + 2πn, n∈Z	tg x = -1 x=-π/4 + πn, n∈Z
cos x = 0 x=π/2 + πn, n∈Z	ctg x = 0 x=π/2 + πn, n∈Z
cos x = 1 x=2πn, n∈Z	ctg x = 1 x=π/4 + πn, n∈Z
cos x = -1 x=π+ 2π n, n∈Z	ctg x = -1 x=-π/4 + πn, n∈Z

Знаки тригонометрических функций sin x, cos x, tg x, ctg x









БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пучков, Н. П. Математика. Входное тестирование первокурсников : учебное пособие для студентов 1 курса инженерных и экономических специальностей / [Н. П. Пучков и др.]. – Тамбов : Тамбовский государственный технический университет; ЭБС АСВ, 2015. – 96 с.

2. Нахман, А. Д. Тригонометрия в упражнениях и задачах : учебное пособие / А. Д. Нахман. – Саратов : Вузовское образование, 2017. – 93 с.

3. Гусак, А. А. Математика : пособие-репетитор / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 2-е изд. – Минск : Тетралит, 2018. – 720 с.

4. Барвенов, С. А. Математика : супертренинг для подготовки к тестированию и экзамену / С. А. Барвенов. – Минск : Тетралит, 2018. – 112 с.

Учебное издание

Дубинина Наталья Михайловна,
кандидат юридических наук, доцент

Бубнов Владимир Валерьевич,
кандидат экономических наук, доцент

Страхов Андрей Александрович,

Задохина Нина Владимировна,
кандидат педагогических наук

Математика

Редактор *Чеботарева С. О.*
Корректор *Абилова Ф. А.*
Компьютерная верстка *Абилова Ф. А.*

Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя
117997, г. Москва, ул. Академика Волгина, д. 12

Подписано в печать 29.11.2021	Формат 60×84 1/16	Тираж 380 экз.
Заказ № 94	Цена договорная	Объем 1,11 уч.-изд. л.
		5,17 усл. печ. л.