

Краснодарский университет МВД России

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ.
ЧАСТЬ 2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Учебное пособие

Краснодар
2022

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
В937

Одобрено
редакционно-издательским советом
Краснодарского университета
МВД России

Составители: *И. Н. Старостенко, А. А. Хромых*

Рецензенты:

М. Б. Руденко, кандидат технических наук, доцент (Восточно-Сибирский институт МВД России);

А. Н. Прокопенко, кандидат технических наук, доцент (Белгородский юридический институт МВД России имени И. Д. Путилина).

Высшая математика для экономистов. Часть 2. Элементы
В937 аналитической геометрии : учебное пособие / сост.: И. Н. Старостенко, А. А. Хромых. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2022. – 76 с.

ISBN 978-5-9266-1814-0

Изложен основной теоретический материал по темам «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Кривые и поверхности второго порядка». Приведены типовые примеры решения задач. Даны задачи для самостоятельного решения.

Для профессорско-преподавательского состава, адъюнктов, курсантов, слушателей образовательных организаций МВД России и сотрудников органов внутренних дел Российской Федерации.

УДК 51(075.8)
ББК 22.14

ISBN 978-5-9266-1814-0

© Краснодарский университет
МВД России, 2022
© Старостенко И. Н., Хромых А. А.,
составление, 2022

Содержание

Введение	4
1. Элементы векторной алгебры	5
1.1. Понятие вектора	5
1.2. Действия над векторами	6
1.3. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис	8
1.4. Проекция вектора на ось	9
1.5. Представление вектора в декартовой системе координат	10
1.6. Координаты точки. Радиус-вектор точки	16
1.7. Скалярное произведение векторов и его свойства	18
1.8. Векторное произведение векторов и его свойства	22
1.9. Смешанное произведение векторов	25
Задания для самостоятельного решения	28
2. Аналитическая геометрия на плоскости	30
2.1. Метод координат на плоскости	30
2.2. Уравнения прямой на плоскости	34
2.3. Взаимное расположение точек и прямых	42
Задания для самостоятельного решения	46
3. Аналитическая геометрия в пространстве	48
3.1. Уравнения плоскости в пространстве	48
3.2. Уравнения прямой в пространстве	53
Задания для самостоятельного решения	60
4. Кривые второго порядка	64
4.1. Уравнение окружности	64
4.2. Каноническое уравнение эллипса	65
4.3. Каноническое уравнение гиперболы	66
4.4. Каноническое уравнение параболы	68
Задания для самостоятельного решения	70
5. Поверхности второго порядка	71
Литература	74

Введение

Аналитическая геометрия, раздел геометрии, который исследует простейшие геометрические объекты средствами элементарной алгебры на основе метода координат. Создание аналитической геометрии обычно приписывают Р. Декарту, изложившему ее основы в последней главе своего трактата «Рассуждение о методе», озаглавленной «Геометрия» (1637). Однако сам метод был известен П. Ферма еще в 1629, о чем свидетельствует его переписка. Аналитическая геометрия стала неоценимым подспорьем для математического анализа, изобретенного вскоре Ньютоном (1665-1666) и Лейбницем (1675-1676).

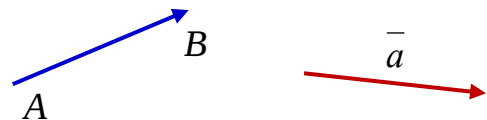
Методы аналитической геометрии применимы к фигурам на плоскости и к поверхностям в трехмерном пространстве, а также допускают естественное обобщение и на пространства более высоких размерностей.

1. Элементы векторной алгебры

1.1. Понятие вектора

Величина, полностью характеризующаяся своим численным значением, называется *скалярной*. Например, площадь, длина, масса, температура, работа. Другие величины, например, сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называют *векторными*.

Вектор – это направленный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.



Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\vec{a}$. Вектор $\overline{BA}$, у которого начало в точке B , а конец в точке A , называется *противоположным* вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

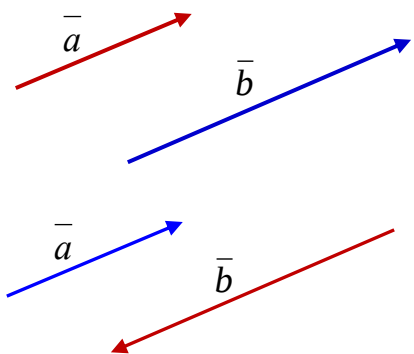
Длиной (модулем или *абсолютной величиной*) вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается через $\vec{e}$.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется *ортом вектора* $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^0$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.



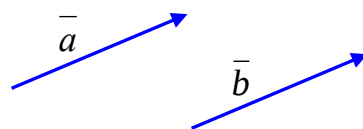
Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково, т.е. быть *сонаправленными* ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$), или быть *противоположно*

направленными ($\vec{a} \updownarrow \vec{b}$).

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными* ($\vec{a} = \vec{b}$), если они:

- 1) коллинеарны;
- 2) одинаково направлены;
- 3) имеют одинаковые длины.



Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора перемещать в любую точку пространства.

Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или хотя бы два коллинеарные, то такие векторы будут компланарны.

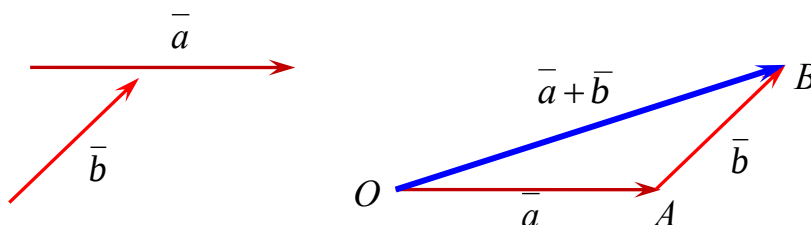
1.2. Действия над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножения вектора на число. Операции над векторами можно производить как в геометрической, так и в координатной форме.

1.2.1. Сложение векторов

Правило треугольника.

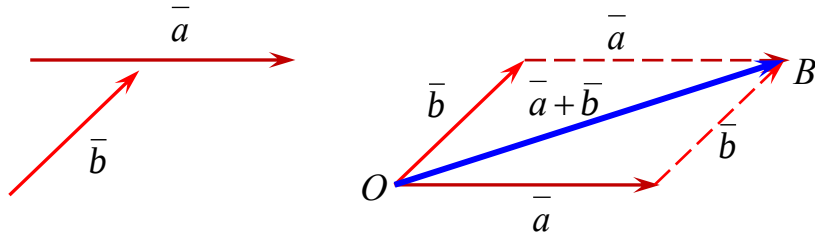
Чтобы сложить два вектора, надо конец первого вектора совместить с началом второго вектора и взять вектор от начала первого до конца второго вектора: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$.



Правило параллелограмма.

Чтобы сложить два вектора, надо совместить их начала и взять вектор, выходящий из общего начала, совпадающий с диагональю параллелограмма,

построенного на этих векторах, как на сторонах: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$.



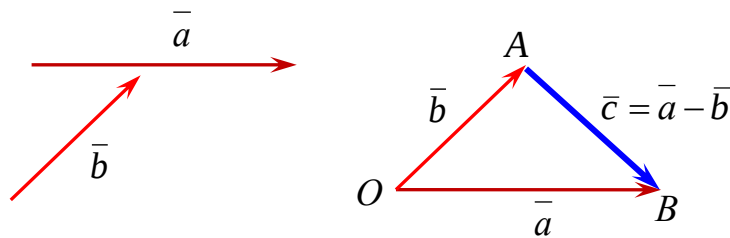
Свойства суммы векторов:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – коммутативность (переместительный закон);
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – ассоциативность (сочетательный закон).

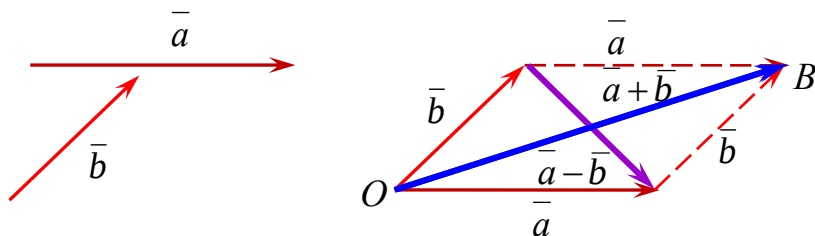
1.2.2. Разность векторов

Под разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Чтобы вычесть два вектора, надо совместить их начала и замкнуть концы в порядке, обратном порядку компонентов (от второго к первому).



Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая – разностью.



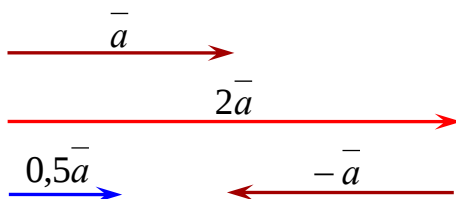
1.2.3. Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр (число) $k \neq 0$ называется вектор $\vec{b} = k\vec{a} = \vec{a}k$, обладающий следующими свойствами:

- 1) $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;

2) $\bar{b} \parallel \bar{a}$, т.е. векторы $\bar{b}$ и $\bar{a}$ коллинеарны;

3) $\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}$, если $k > 0$, $\bar{b} \uparrow\downarrow \bar{a}$, если $k < 0$.



Свойства произведения вектора на скаляр:

1) $k_1 \cdot (k_2 \cdot \bar{a}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \bar{a}$ – ассоциативность умножения (сочетательный закон);

2) $(k_1 + k_2) \cdot \bar{a} = k_1 \cdot \bar{a} + k_2 \cdot \bar{a}$ – дистрибутивность суммы коэффициентов (распределительный закон);

3) $k \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$ – дистрибутивность суммы векторов (распределительный закон).

4) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$;

5) $(-1) \cdot \bar{a} = -\bar{a}$;

6) $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

Теорема. Векторы $\bar{a} \parallel \bar{b}$, тогда и только тогда, когда существует единственное число $k \neq 0$ такое что выполняется соотношение $\bar{b} = k\bar{a}$. Верно и наоборот, если $\bar{b} = k\bar{a}$, то $\bar{a} \parallel \bar{b}$ (вектора коллинеарны).

1.3. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис

Если вектор $\bar{b}$ можно представить в виде $\bar{b} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$, то говорят, что вектор $\bar{b}$ разложен по базису векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Назовем базисом на плоскости любые два неколлинеарных вектора, базисом в пространстве любые три некомпланарных вектора.

Теорема. Любой вектор на плоскости можно разложить по базису и притом единственным способом.

Теорема. Любой вектор в пространстве можно разложить по базису и притом единственным способом.

Векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ называются *линейно независимыми*, если $\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \dots + \alpha_n \overline{e_n} = \overline{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_i = 0$, при $i = 1, 2, \dots, n$ и *линейно зависимыми* в противном случае.

Теорема. Для линейной зависимости двух векторов необходима и достаточна их коллинеарность.

Теорема. Для линейной зависимости трех векторов необходима и достаточна их компланарность.

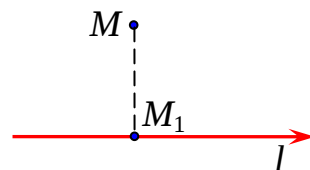
Таким образом, *базис* – совокупность линейно независимых векторов, таких, что любой другой вектор есть их линейная комбинация.

1.4. Проекция вектора на ось

1.4.1. Понятие проекции

Пусть в пространстве задана ось ℓ , т.е. направленная прямая.

Проекцией точки M на ось ℓ называется основание M_1 перпендикуляра MM_1 , опущенного из точки на ось.



Если точка M и ось ℓ находятся в трехмерном пространстве, то точка M_1 есть точка пересечения оси ℓ с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси ℓ .

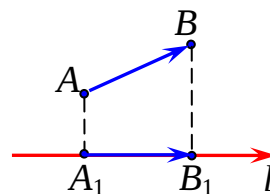
Если точка M лежит на оси ℓ , то проекция точки M на ось совпадает с самой точкой M .

Пусть $\overline{AB}$ – произвольный вектор, причем $\overline{AB} \neq \overline{0}$.

Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось ℓ соответственно начала A и конца B вектора $\overline{AB}$.

Обозначим соответствующие проекции: $pr_\ell A = A_1$,

$pr_\ell B = B_1$.



Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось ℓ называется число, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $pr_\ell \overline{AB} = |\overline{A_1 B_1}|$, если ℓ и $\overline{A_1 B_1}$ сонаправлены;

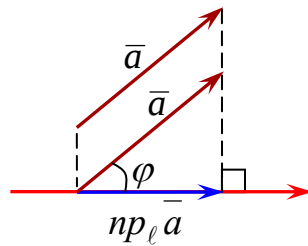
2) $np_{\ell} \overline{AB} = -|\overline{A_1B_1}|$, если ℓ и $\overline{A_1B_1}$ противоположно направлены;

3) $np_{\ell} \overline{AB} = 0$, если $\overline{AB} = \vec{0}$ или $\overline{AB} \perp \ell$.

1.4.2. Свойства проекций

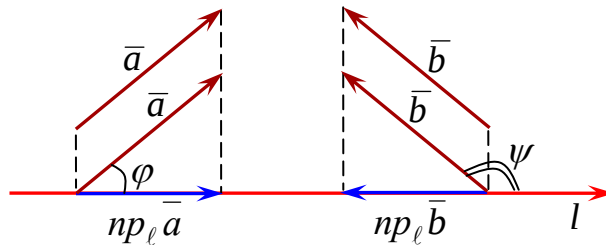
1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось ℓ равна произведению модуля вектора на косинус угла, составленного вектором с осью:

$$np_{\ell} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi. \quad (1.1)$$



Если $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то $np_{\ell} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$ – положительна.

Если $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, то $np_{\ell} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$ – отрицательна.



2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

3. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось: $np_{\ell} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = np_{\ell} \vec{a} + np_{\ell} \vec{b} + np_{\ell} \vec{c}$.

4. При умножении вектора на число, его проекция также умножается на это число: $np_{\ell} (k\vec{a}) = k \cdot np_{\ell} \vec{a}$.

Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

1.5. Представление вектора в декартовой системе координат

1.5.1. Разложение вектора по ортам координатных осей

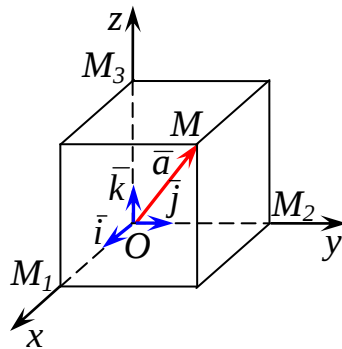
Рассмотрим в трехмерном пространстве декартову систему координат.

Через начало координат – точку O проведены координатные оси: OX , OY , OZ . На осях координат выберем единичные векторы (орты), которые обозначим соответственно: $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, причем $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – взаимно перпендикулярны, $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$. Возьмем произвольный вектор пространства $\bar{a}$ и совместим его начало с началом координат $\bar{a} = \overline{OM}$. Найдем проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси. Для этого через конец вектора $\overline{OM}$, точку M , проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно M_1 , M_2 , M_3 . Получили прямоугольный параллелепипед, одна из диагоналей которого является вектор $\bar{a} = \overline{OM}$, а ребра, выходящие из вершины O являются проекциями вектора на координатные оси. Обозначим проекции вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на оси OX , OY , OZ соответственно через a_x , a_y , a_z .

$$a_x = np_{OX} \bar{a} = |\overline{OM_1}| = |\bar{a}| \cdot \cos \alpha, \text{ где } \alpha \text{ – угол между вектором } \bar{a} \text{ и осью } OX.$$

$$a_y = np_{OY} \bar{a} = |\overline{OM_2}| = |\bar{a}| \cdot \cos \beta, \text{ где } \beta \text{ – угол между вектором } \bar{a} \text{ и осью } OY.$$

$$a_z = np_{OZ} \bar{a} = |\overline{OM_3}| = |\bar{a}| \cdot \cos \gamma, \text{ где } \gamma \text{ – угол между вектором } \bar{a} \text{ и осью } OZ.$$



Так как $\bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$. Полученное векторное равенство записывается в символьном виде: $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Получаем формулу разложения вектора по ортам координатных осей:

$$\bar{a} = (a_x; a_y; a_z) = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.$$

Проекции вектора на соответствующие оси называются *координатами*

вектора $\vec{a}$, причем a_x – абсцисса, a_y – ордината, a_z – аппликата. Два вектора равны, если они имеют равные координаты.

1.5.2. Модуль вектора

Зная координаты вектора, можно вычислить его модуль.

Модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.2)$$

Для того чтобы *нормировать вектор*, т.е. сделать его единичной длины, необходимо разделить каждую координату вектора на его длину:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(a_x; a_y; a_z)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right). \quad (1.3)$$

Пример. Найти длину вектора $\vec{a}(2; -2; 1)$.

Решение. Согласно формуле (1.2), имеем:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3.$$

Ответ. 3.

Пример. Найти орт вектора $\vec{b}(2; 3; -1)$.

Решение. По формуле (1.2) вычислим длину вектора:

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}.$$

Используя формулу (1.3), получаем орт вектора $\vec{b} : \vec{b}^0 \left(\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{1}{\sqrt{14}} \right)$.

Ответ. 3.

1.5.3. Направляющие косинусы

Введем понятие направляющих косинусов вектора.

Направление вектора в пространстве определяется углами α, β, γ , которые вектор образует с осями координат.

Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами* вектора. Направляющие косинусы однозначно задают направление вектора.

В общем случае для вектора с координатами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ направляющие косинусы вычисляются по формуле:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \text{ или } \cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad (1.4)$$

$$a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \text{ или } \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad (1.5)$$

$$a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \text{ или } \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \quad (1.6)$$

Подставим соотношения a_x , a_y и a_z в выражение для модуля вектора (1.2), получим:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2;$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot \cos^2 \alpha + |\vec{a}|^2 \cdot \cos^2 \beta + |\vec{a}|^2 \cdot \cos^2 \gamma;$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma);$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице.

Направляющие косинусы вектора являются координатами нормированного вектора (орт-вектора): $\vec{a}^0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$.

Пример. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \vec{AB} + \vec{CD}$, если заданы координаты точек $A(-3; -5; -5)$; $B(-6; -4; -9)$; $C(-7; -4; 2)$; $D(-7; -7; -2)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = (-6 - (-3))\vec{i} + (-4 - (-5))\vec{j} + (-9 - (-5))\vec{k} = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \text{ или } \vec{AB} = (-3; 1; -4).$$

Найдем координаты вектора $\vec{CD}$:

$$\vec{CD} = (-7 - (-7))\vec{i} + (-7 - (-4))\vec{j} + (-2 - 2)\vec{k} = 0\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k} \text{ или } \vec{CD} = (0; -3; -4).$$

Тогда искомым вектор $\vec{a}$ имеет координаты:

$$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{CD} = (-3 + 0)\vec{i} + (1 + (-3))\vec{j} + (-4 + (-4))\vec{k} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}.$$

Найдем длину вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{9 + 4 + 64} = \sqrt{77}.$$

Зная координаты вектора $\vec{a}$ и его длину, находим направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{-3}{\sqrt{77}}; \cos \beta = \frac{a_y}{a} = \frac{-2}{\sqrt{77}}; \cos \gamma = \frac{a_z}{a} = \frac{-8}{\sqrt{77}}.$$

Ответ: $|\vec{a}| = \sqrt{77}, \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{77}}, \cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{77}}, \cos \gamma = -\frac{8}{\sqrt{77}}.$

1.5.4. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме

Пусть заданы два вектора: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Линейные операции над векторами будут сводиться к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

1. При сложении векторов их одноименные координаты складываются:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z).$$

2. При вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z).$$

3. При умножении вектора на скаляр ($k \neq 0$) координаты вектора умножаются на этот скаляр:

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_x; k \cdot a_y; k \cdot a_z).$$

Равенство векторов

Два вектора равны тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

Коллинеарность векторов

Проекции коллинеарных векторов пропорциональны:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k. \quad (1.7)$$

Доказательство. Так как условие параллельности векторов $\vec{a} \parallel \vec{b}$ можно записать в виде: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ или $a_x = k \cdot b_x, a_y = k \cdot b_y, a_z = k \cdot b_z$. Откуда, выразив параметр k , получаем условие коллинеарности в координатном виде: $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

Верным является и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Пример. Дано разложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$:
 $\vec{a} = -2\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 3, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$. Требуется найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Одна из диагоналей параллелограмма равна $|\vec{a} + \vec{b}|$, другая – $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Найдем $|\vec{a} + \vec{b}|$. Получаем: $\vec{a} + \vec{b} = -2\vec{p} - \vec{q} + 3\vec{p} + \vec{q} = \vec{p}$;
 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{p}| = 4$.

Найдем $|\vec{a} - \vec{b}|$. Получаем: $\vec{a} - \vec{b} = -2\vec{p} - \vec{q} - 3\vec{p} - \vec{q} = -5\vec{p} - 2\vec{q}$,
 $|\vec{a} - \vec{b}| = |-5\vec{p} - 2\vec{q}| = |5\vec{p} + 2\vec{q}| = \sqrt{(5\vec{p} + 2\vec{q})^2} = \sqrt{(5\vec{p} + 2\vec{q})(5\vec{p} + 2\vec{q})} =$
 $= \sqrt{25\vec{p} \cdot \vec{p} + 10\vec{p} \cdot \vec{q} + 10\vec{q} \cdot \vec{p} + 4\vec{q} \cdot \vec{q}} = \sqrt{25|\vec{p}|^2 + 20|\vec{p}||\vec{q}|\cos\frac{\pi}{3} + 4|\vec{q}|^2} =$
 $= \sqrt{25\vec{p}^2 + 20\vec{p} \cdot \vec{q} + 4\vec{q}^2} = \sqrt{25 \cdot 16 + 20 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 9} = \sqrt{200 + 120 + 36} = \sqrt{356} = 2\sqrt{89}.$

Ответ: $|\vec{a} + \vec{b}| = 4; |\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{89}$.

Пример. Разложить вектор $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, если $\vec{a} = \{1; -2; 0\}$,
 $\vec{b} = \{3; -4; 1\}, \vec{c} = \{-2; 5; 1\}, \vec{d} = \{1; -9; -5\}$.

Решение. Найдем разложение вектора $\vec{d}$ по базису трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, то есть $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, где α, β, γ – неизвестные величины. Придадим

этому равенству координатную форму:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - 2\gamma = 1; \\ -2\alpha - 4\beta + 5\gamma = -9; \\ \beta + \gamma = -5. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Первое и третье уравнения системы оставляем без изменения, для получения второго уравнения умножим первое на 2 и сложим со вторым:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta - 2\gamma = 1; \\ -2\alpha - 4\beta + 5\gamma = -9; \\ \beta + \gamma = -5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - 2\gamma = 1; \\ 2\beta + \gamma = -7; \\ \beta + \gamma = -5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - 2\gamma = 1; \\ \beta + \gamma = -5; \\ 2\beta + \gamma = -7. \end{cases}$$

Первых два уравнения оставим без изменения, а для получения третьего умножим второе на (-2) и сложим с третьим:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta - 2\gamma = 1; \\ \beta + \gamma = -5; \\ -\gamma = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - 2\gamma = 1; \\ \beta + \gamma = -5; \\ \gamma = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - 2\gamma = 1; \\ \beta = -2; \\ \gamma = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1; \\ \beta = -2; \\ \gamma = -3. \end{cases}$$

Таким образом, $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

Ответ: $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

1.6. Координаты точки. Радиус-вектор точки

1.6.1. Координаты точки

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Для любой точки M координаты вектора $\overline{OM}$ называются координатами точки M . Вектор $\overline{OM}$ с началом в начале координат и концом в точке M называется радиус-вектором точки M , обозначается $\vec{r}$, т.е. $\vec{r} = \overline{OM}$.

Следовательно, координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора:

$$\vec{r} = (x; y; z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

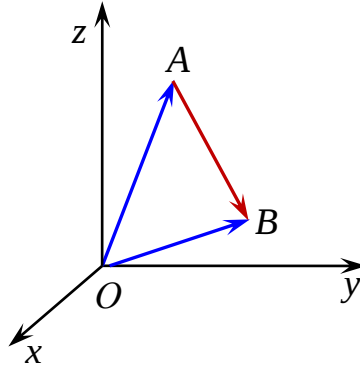
1.6.2. Выражение координат вектора через координаты начала и конца

Пусть известны координаты начала $A(x_1; y_1; z_1)$ и конца $B(x_2; y_2; z_2)$

вектора $\overline{AB}$. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2; y_2; z_2) - (x_1; y_1; z_1) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Для нахождения координат вектора необходимо: от координат конца вектора вычесть координаты его начала.

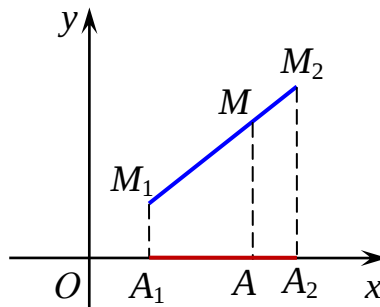


1.6.3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Требуется найти координаты такой точки $M(x; y)$, лежащую на отрезке M_1M_2 и делящую его в

заданном отношении λ , т.е. что $\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \lambda$.

Опустим из точек M_1 , M и M_2 перпендикуляры на ось Ox .



Справедливо следующее соотношение: $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{A_1A}{AA_2}$, причем

$A_1A = x - x_1$, $AA_2 = x_2 - x$. Откуда следует, что $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$. Тогда абсцисса

точки M вычисляется по формуле: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$.

Аналогичным образом, опустив из точек M_1 , M и M_2 перпендикуляры на ось Oy , получим формулу для нахождения ординаты точки M :

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Таким образом, координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок M_1M_2 в заданном отношении λ , вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Если $\lambda = 1$, т.е. при делении отрезка M_1M_2 пополам, получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Пример. Вычислить координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок M_1M_2 между точками $M_1(1; 1)$ и $M_2(4; 7)$ в отношении $\frac{M_1M}{MM_2} = 2$.

Решение. По условию $\lambda = 2$. Согласно формулам (1.8), имеем:

$$x = \frac{1 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 3, \quad y = \frac{1 + 2 \cdot 7}{1 + 2} = 5.$$

Ответ. $M(3; 5)$.

Пример. Вычислить координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок LN , где $L(-4; 9)$ и $N(10; -1)$, в отношении 2:3.

Решение. По условию $\lambda = \frac{2}{3}$. Согласно формулам (1.8), имеем:

$$x = \frac{-4 + \frac{2}{3} \cdot 10}{1 + \frac{2}{3}} = 1,6, \quad y = \frac{9 + \frac{2}{3} \cdot (-1)}{1 + \frac{2}{3}} = 5.$$

Ответ. $M(1,6; 5)$.

1.7. Скалярное произведение векторов и его свойства

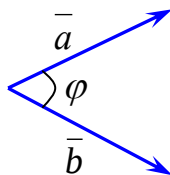
1.7.1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется

число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (1.10)$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается: $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$.

Используя определение проекции вектора на вектор $|\vec{a}| \cdot \cos \varphi = np_{\vec{b}} \vec{a}$, $|\vec{b}| \cdot \cos \varphi = np_{\vec{a}} \vec{b}$, получаем формулу скалярного произведения векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot np_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{b} \cdot np_{\vec{a}} \vec{b}, \quad (1.11)$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.

1.7.2. Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – коммутативность;
2. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ – ассоциативность;
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ – дистрибутивность;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ – скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора;

5. Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны (*ортогональны*), то их скалярное произведение равно нулю, и наоборот, если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

1.7.3. Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z) = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$. Составим таблицу скалярных произведений ортов координатных осей.

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

В силу свойств линейности скалярного произведения, найдем скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены и пользуясь таблицей скалярного произведения орт:

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \cdot (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\bar{i} \cdot \bar{i}) + a_x \cdot b_y \cdot (\bar{i} \cdot \bar{j}) + \\ &+ a_x \cdot b_z \cdot (\bar{i} \cdot \bar{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\bar{j} \cdot \bar{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\bar{j} \cdot \bar{j}) + a_y \cdot b_z \cdot (\bar{j} \cdot \bar{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\bar{k} \cdot \bar{i}) + \\ &+ a_z \cdot b_y \cdot (\bar{k} \cdot \bar{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\bar{k} \cdot \bar{k}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.\end{aligned}$$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \quad (1.12)$$

1.7.4. Некоторые приложения скалярного произведения

Угол между векторами

Определение угла φ между двумя ненулевыми векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (1.13)$$

Отсюда следует условие перпендикулярности двух ненулевых векторов:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0. \quad (1.14)$$

Проекция вектора на заданное направление

Нахождение проекции вектора $\bar{a}$ на направление, заданное вектором $\bar{b}$

$$np_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (1.15)$$

Пример. Дано разложение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по векторам $\bar{p}$ и $\bar{q}$:

$\bar{a} = -2\bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 3$, $(\bar{p} \wedge \bar{q}) = \frac{\pi}{3}$. Требуется найти косинус угла

между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Решение. По формуле (1.13) найдем косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\begin{aligned}\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(-2\vec{p} - \vec{q})(3\vec{p} + \vec{q})}{|-2\vec{p} - \vec{q}| \cdot |3\vec{p} + \vec{q}|} = \frac{-6\vec{p}^2 - 5\vec{p}\vec{q} - \vec{q}^2}{\sqrt{(-2\vec{p} - \vec{q})^2} \cdot \sqrt{(3\vec{p} + \vec{q})^2}} = \\ &= \frac{-6\vec{p}^2 - 5\vec{p}\vec{q} - \vec{q}^2}{\sqrt{4\vec{p}^2 + 4\vec{p}\vec{q} + \vec{q}^2} \cdot \sqrt{9\vec{p}^2 + 6\vec{p}\vec{q} + \vec{q}^2}} = \\ &= \frac{-6 \cdot 16 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} - 9}{\sqrt{4 \cdot 16 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 9} \cdot \sqrt{9 \cdot 16 + 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 9}} = \\ &= \frac{-96 - 30 - 9}{\sqrt{64 + 24 + 9} \cdot \sqrt{144 + 36 + 9}} = \frac{-135}{\sqrt{97} \cdot \sqrt{189}} = \frac{-135}{3\sqrt{2134}} = -\frac{45}{\sqrt{2134}}.\end{aligned}$$

Ответ: $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = -\frac{45}{\sqrt{2134}}.$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{x} = \overrightarrow{KL}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{MN}$ с помощью скалярного произведения, если заданы координаты точек $K(-5; -4; -7)$; $L(1; -7; 4)$; $M(3; -3; -7)$; $N(0; -3; -6)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{KL}$:

$$\overrightarrow{KL} = (1 - (-5))\vec{i} + (-7 - (-4))\vec{j} + (4 - (-7))\vec{k} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 11\vec{k} \text{ или } \overrightarrow{KL} = (6; -3; 11).$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN} = (0 - 3)\vec{i} + (-3 - (-3))\vec{j} + (-6 - (-7))\vec{k} = -3\vec{i} - 0\vec{j} + \vec{k} \text{ или } \overrightarrow{MN} = (-3; 0; 1).$$

Т.к. $\vec{x} \cdot \vec{y} = xy \cos \varphi$, то $\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{xy}$. Имеем

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{MN} = 6 \cdot (-3) + (-3) \cdot 0 + 11 \cdot 1 = -18 + 11 = -7;$$

$$x = |\vec{x}| = |\overrightarrow{KL}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 11^2} = \sqrt{36 + 9 + 121} = \sqrt{166};$$

$$y = |\vec{y}| = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 0 + 1} = \sqrt{10}.$$

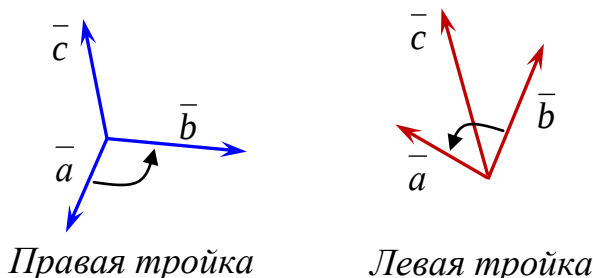
Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{-7}{\sqrt{166} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{7}{2 \cdot \sqrt{415}} \text{ и } \varphi = \arccos\left(-\frac{7}{2 \cdot \sqrt{415}}\right).$$

Ответ: $\varphi = \arccos\left(-\frac{7}{2 \cdot \sqrt{415}}\right).$

1.8. Векторное произведение векторов и его свойства

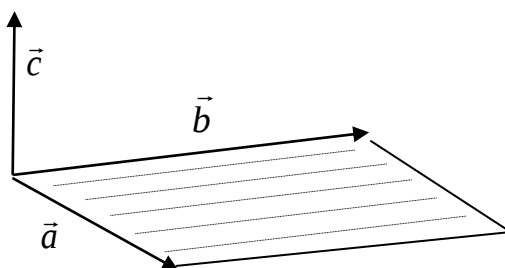
Три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если из конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, если же поворот виден по часовой стрелке, то тройка векторов является левой.



1.8.1. Определение векторного произведения

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который:

- 1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$
- 3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.



Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$. Из определения

векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами координатных осей:

$$\begin{array}{lll} \bar{i} \times \bar{i} = 0 & \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k} & \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j} \\ \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k} & \bar{j} \times \bar{j} = 0 & \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i} \\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} & \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i} & \bar{k} \times \bar{k} = 0 \end{array}$$

1.8.2. Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т.е. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ (антикоммутативность).

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т.е. $k(\bar{a} \times \bar{b}) = (k\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (k\bar{b})$.

3. $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$ (дистрибутивность).

4. Если два ненулевых вектора коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю, и наоборот, из равенства нулю векторного произведения следует коллинеарность векторов: $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0$.

1.8.3. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

Пусть даны два вектора $\bar{a}(a_x, a_y, a_z) = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$.

Найдем их векторное произведение, перемножая их как многочлены, используя свойства векторного произведения:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = a_x b_x (\bar{i} \times \bar{i}) + a_x b_y (\bar{i} \times \bar{j}) + \\ &+ a_x b_z (\bar{i} \times \bar{k}) + a_y b_x (\bar{j} \times \bar{i}) + a_y b_y (\bar{j} \times \bar{j}) + a_y b_z (\bar{j} \times \bar{k}) + a_z b_x (\bar{k} \times \bar{i}) + a_z b_y (\bar{k} \times \bar{j}) + \\ &+ a_z b_z (\bar{k} \times \bar{k}) = (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}. \end{aligned}$$

Полученную формулу можно записать еще короче

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

1.8.4. Приложения векторного произведения

Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения двух его смежных сторон:

$$S_{\text{пар}} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi = |\bar{a} \times \bar{b}|. \quad (1.17)$$

Площадь треугольника, построенного на двух сторонах равна половине модуля векторного произведения:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|. \quad (1.18)$$

Установление коллинеарности векторов

$$\text{Если } \bar{a} \parallel \bar{b}, \text{ то } \bar{a} \times \bar{b} = 0 \text{ и наоборот, т.е. } \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Пример. С помощью векторного произведения найти площадь треугольника с вершинами в точках $E(-2; 2; -4); F(-4; -8; -8); G(1; 4; 8)$.

Решение. Для решения задачи найдем координаты векторов, исходящих из одной точки, например E .

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{EF}$:

$$\overrightarrow{EF} = (-4 - (-2))\bar{i} + (-8 - 2)\bar{j} + (-8 - (-4))\bar{k} = -2\bar{i} - 10\bar{j} - 4\bar{k} \text{ или } \overrightarrow{EF} = (-2; -10; -4).$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{EG}$:

$$\overrightarrow{EG} = (1 - (-2))\bar{i} + (4 - 2)\bar{j} + (8 - (-4))\bar{k} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 12\bar{k} \text{ или } \overrightarrow{EG} = (3; 2; 12).$$

Площадь треугольника EFG равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{EG}$. Поэтому находим векторное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -10 & -4 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -112\vec{i} + 12\vec{j} + 26\vec{k}.$$

Следовательно,

$$S_{EFG} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-112)^2 + 12^2 + 26^2} = \sqrt{13364} \approx 115,6.$$

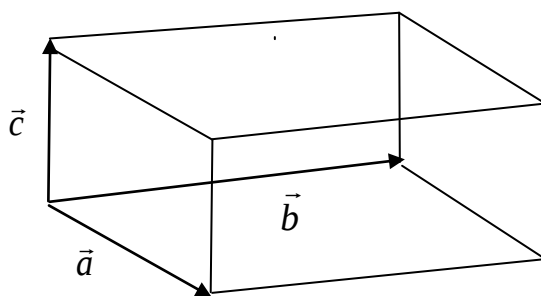
Ответ: $S_{EFG} \approx 115,6$.

1.9. Смешанное произведение векторов

1.9.1. Определения смешанного произведения, его геометрический смысл

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, составленное следующим образом: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется векторно-скалярным или смешанным произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Смешанное произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.



1.9.2. Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер.

2. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т. е. $\overline{\overline{a}\overline{b}\overline{c}} = -\overline{\overline{a}\overline{c}\overline{b}}$, $\overline{\overline{a}\overline{b}\overline{c}} = -\overline{\overline{b}\overline{a}\overline{c}}$.

Действительно, такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении меняющей у произведения знак.

3. Смешанное произведение ненулевых векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

1.9.3. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

Пусть векторы заданы своими координатами:

$$\begin{aligned}\overline{a} &= (a_x, a_y, a_z) = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}, & \overline{b} &= (b_x, b_y, b_z) = b_x \overline{i} + b_y \overline{j} + b_z \overline{k}, \\ \overline{c} &= (c_x, c_y, c_z) = c_x \overline{i} + c_y \overline{j} + c_z \overline{k}.\end{aligned}$$

Найдем их смешанное произведение, используя формулы для выражения векторного и скалярного произведений:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{a}\overline{b}\overline{c}} &= (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x \overline{i} + c_y \overline{j} + c_z \overline{k}) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overline{k} \right) \cdot (c_x \overline{i} + c_y \overline{j} + c_z \overline{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z.\end{aligned}$$

Полученную формулу можно записать короче:

$$\overline{\overline{a}\overline{b}\overline{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.19)$$

Смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

1.9.4. Некоторые приложения смешанного произведения

1. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве. Если $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} > 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая; если $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} < 0$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая тройка.

2. Установление компланарности векторов. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

3. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, как на сторонах, т.е.

$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ – объем параллелепипеда.

Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ численно равен:

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \quad (1.20)$$

Пример. Используя смешанное произведение векторов найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $O(8; -4; 0); P(-4; -5; -7); R(0; -1; 7); Q(1; 5; 7)$.

Решение. Для решения задачи найдем координаты векторов, исходящих из одной точки, например, O .

Найдем координаты вектора $\vec{OP}$:

$$\vec{OP} = (-4 - 8)\vec{i} + (-5 - (-4))\vec{j} + (-7 - 0)\vec{k} = -12\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$$

или $\vec{OP} = (-12; -1; -7)$.

Найдем координаты вектора $\vec{OR}$:

$$\vec{OR} = (0 - 8)\vec{i} + (-1 - (-4))\vec{j} + (7 - 0)\vec{k} = -8\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k} \text{ или } \vec{OR} = (-8; 3; 7).$$

Найдем координаты вектора $\vec{OQ}$:

$$\vec{OQ} = (1 - 8)\vec{i} + (5 - (-4))\vec{j} + (7 - 0)\vec{k} = -7\vec{i} + 9\vec{j} + 7\vec{k} \text{ или } \vec{OQ} = (-7; 9; 7).$$

Найдем смешанное произведение этих векторов

Следовательно, объем пирамиды равен: $V_{nup} = \frac{1}{6} \cdot V_1 = \frac{1}{6} \cdot 854 = 142\frac{1}{3}$.

Задания для самостоятельного решения

28

$\vec{b}(m; 2; 1)$ и $\vec{c}(-2; 1; 4)$ будут компланарны.

Задание 8. По координатам вершин пирамиды $ABCD$, где $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ и $D(4; 1; 3)$, найти:

8.1. S_{ABC} ,

8.2. V_{ABCD} .

Задание 9. Даны три вектора $\vec{a}(9; 4)$, $\vec{p}(2; -3)$, $\vec{q}(1; 2)$. Проверить, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ линейно независимы. Найти разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

Задание 10. Даны четыре вектора $\vec{a}(1; -2; 0)$, $\vec{b}(3; -4; 1)$, $\vec{c}(-2; 5; 1)$, $\vec{d}(1; -9; -5)$. Проверить, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы. Найти разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задание 11. По координатам вершин пирамиды $ABCD$, где $A(3; -2; 2)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 0; 4)$, $D(6; -4; 6)$, найти:

- 1) косинус угла между ребрами AB и AD ;
- 2) площадь треугольника ABC – основания пирамиды;
- 3) объем пирамиды $ABCD$;
- 4) длину высоты пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D .

Задание 12. Вычислить площадь поверхности пирамиды $ABCD$, где $A(-1; 6; 6)$, $B(9; 6; 6)$, $C(0; 8; -5)$, $D(5; 0; 7)$.

Задание 13. Найдите координаты вектора $\vec{p}$, если он коллинеарен вектору $\vec{a}(-4; 3; 2)$ и скалярное произведение его на вектор $\vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ равно 3.

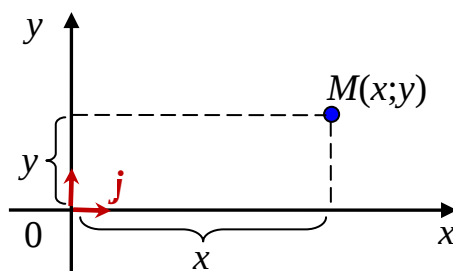
2. Аналитическая геометрия на плоскости

2.1. Метод координат на плоскости

2.1.1. Декартовы прямоугольные координаты

Под системой координат на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости.

Прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми – *осями*, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси называют *осями координат*, точку их пересечения O – *началом координат*. Ось Ox называют *осью абсцисс*, ось Oy – *осью ординат*.



Абсциссу x и ординату y называют *декартовыми прямоугольными координатами точки M* .

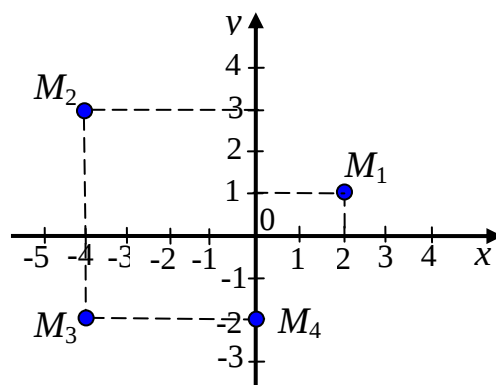
Обозначение $M(x; y)$ означает, что *точка M с абсциссой, равной x , и ординатой, равной y* .

Оси координат делят плоскость на четыре области – *четверти* (или *квадранты*).

Квадранты	I	II	III	IV
x	+	–	–	+
y	+	+	–	–

Единичные векторы осей обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$, причем $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$.

Пример. Определите координаты точек M_1 , M_2 , M_3 , M_4 .



Решение. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 имеют координаты: $M_1(2; 1)$, $M_2(-4; 3)$, $M_3(-4; -2)$ и $M_4(0; -2)$.

Каждой точке плоскости соответствует одна пара действительных чисел x и y .

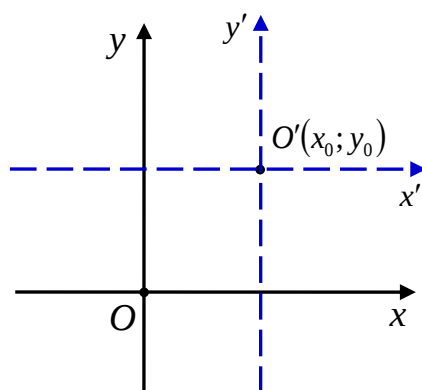
Каждой паре действительных чисел x и y соответствует одна точка плоскости.

Если точка $M(x; y)$ лежит на оси Oy , то $x=0$; если $M(x; y)$ лежит на оси Ox , то $y=0$.

2.1.2. Преобразование декартовых координат

Рассмотрим декартову систему координат Oxy .

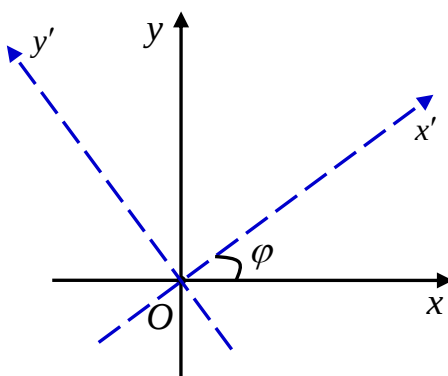
1. Перенесем начало координат $O(0;0)$ в точку $O'(x_0; y_0)$.



Тогда преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном сдвиге осей определяется формулами:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

2. Осуществим поворот осей на угол φ .



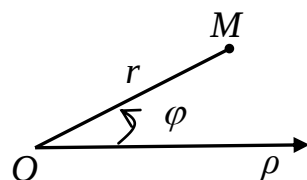
Тогда преобразование декартовых прямоугольных координат при повороте осей на угол φ определяется формулами:

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1.3. Полярные координаты

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O , называемой *полюсом*, луча OA , исходящего из этой точки, называемого *полярной осью*, и масштаба для измерения длин. Кроме того, при задании полярной системы должно быть сказано, какие повороты вокруг точки O считаются положительными (на чертежах обычно положительными считаются повороты против часовой стрелки).

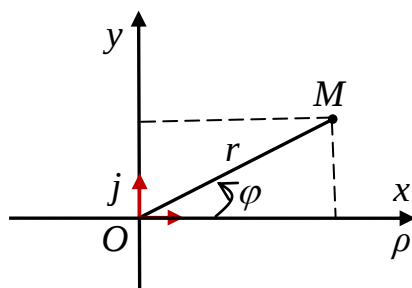
Возьмем на плоскости произвольным образом точку M . Положение точки M определяется двумя числами: ее расстоянием $r=OM$ от полюса O и углом φ , образованным отрезком OM с полярной осью.



Числа r и φ называются полярными координатами точки M , пишут $M(r; \varphi)$, где r – полярный радиус, φ – полярный угол.

Для получения всех точек плоскости достаточно полярный угол ограничить промежутком $(-\pi; \pi]$ или $0 \leq \varphi < 2\pi$, а полярный радиус $r \in [0; \infty)$.

Установим связь между прямоугольными и полярными координатами. Совместим полюс O с началом координат системы Oxy , а полярную ось – с положительной полуосью Ox . Пусть x и y – прямоугольные координаты точки M , а r и φ – ее полярные координаты.



Формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Пример. Даны прямоугольные координаты точки A : $x=1, y=1$. Найти ее полярные координаты.

Решение. По формулам (2.3) находим:

$$\begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 1^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = 1. \end{cases}$$

Из двух значений $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ выбираем $\varphi = \frac{\pi}{4}$ так как точка A лежит в первом квадранте. Итак, полярные координаты данной точки $\rho = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\rho = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Пример. Полярные координаты точки A : $r=2, \varphi = \frac{\pi}{2}$. Найти ее декартовы координаты.

Решение. Применив формулы (2.3), получаем прямоугольные координаты точки:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2}, \\ y = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot 0, \\ y = 2 \cdot 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $x=0, y=2$.

2.2. Уравнения прямой на плоскости

2.2.1. Уравнение линии на плоскости

Линия на плоскости рассматривается, как множество точек, обладающих только им присущим геометрическим свойством. Введение декартовой системы координат на плоскости позволяет определить положение произвольной точки ее координатами, а положение линии на плоскости определяется с помощью уравнения. Если уравнение линии имеет вид $F(x,y)=0$, то любой паре чисел (x,y) , удовлетворяющей данному уравнению, соответствует точка $M(x,y)$, принадлежащая линии, и наоборот, координаты любой точки линии обращают ее уравнение в верное тождество.

Если две линии на плоскости заданы своими уравнениями $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, то задача о пересечении этих линий сводится к решению системы двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$$

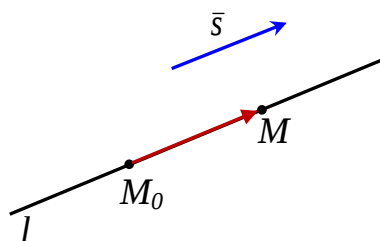
Решениям системы соответствуют точки пересечения заданных линий.

Простейшей из линий является прямая.

2.2.2. Каноническое уравнение прямой

Направляющий вектор – вектор, параллельный данной прямой.

Пусть дана точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{s}(m;n)$. Составим уравнение прямой, проходящей через точку M_0 параллельно ненулевому вектору $\vec{s}$.



На прямой l возьмем произвольную точку $M(x,y)$. Т.к. $\vec{s} \parallel l$, то $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$, где $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0; y-y_0)$, $\vec{s}(m;n)$. Следовательно, выполнено условие коллинеарности двух векторов, т.е. координаты векторов пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (2.4)$$

Данная форма записи уравнения прямой называется *каноническим уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}(m; n)$* .

Пример. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3)$ параллельно вектору $\vec{s}(5; 4)$.

Решение. Воспользуемся каноническим уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3)$ параллельно вектору $\vec{s}(5; 4)$, получим:

$$\frac{x - 2}{5} = \frac{y + 3}{4}.$$

Ответ: $\frac{x - 2}{5} = \frac{y + 3}{4}.$

2.2.3. Параметрическое уравнение прямой

Рассмотрим каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{s}(m; n)$: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$. Введем параметр $t \in R$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t. \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t, \\ \frac{y - y_0}{n} = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ t \in R. \end{cases} \quad (2.5)$$

Получили *параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}(m; n)$* .

Пример. Составить параметрические уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2; 5)$ параллельно вектору $\vec{s}(7; 3)$.

Решение. Воспользуемся параметрическим уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(-2; 5)$ параллельно вектору $\vec{s}(7; 3)$, получим:

$$\begin{cases} x = -2 + 7t, \\ y = 5 + 3t, \\ t \in R. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -2 + 7t, \\ y = 5 + 3t, \\ t \in R. \end{cases}$.

Пример. Дано каноническое уравнение прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-9}{-5}$. Составить параметрическое уравнение.

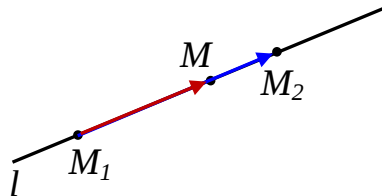
Решение. Приравняем каждую дробь канонического уравнения прямой к параметру t :

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} = t, \\ \frac{y-9}{-5} = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 2t, \\ y-9 = -5t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = -5t + 9, \\ t \in R. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = -5t + 9, \\ t \in R. \end{cases}$

2.2.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, причем M_1 не совпадает с M_2 . Составим уравнение прямой, проходящей через две точки точку M_1 и M_2 .



Рассмотрим вектор $\overline{M_1M_2}$. Т.к. $M_1 \in l$ и $M_2 \in l$, то $\overline{M_1M_2} \parallel l$. Возьмем произвольную точку $M(x; y) \in l$. Т.к. $\overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M}(x - x_1; y - y_1)$, $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ то воспользуемся условием коллинеарности двух векторов:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.6)$$

Получили уравнение прямой, проходящей через две точки точку $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; -2)$ и $B(-3; 5)$.

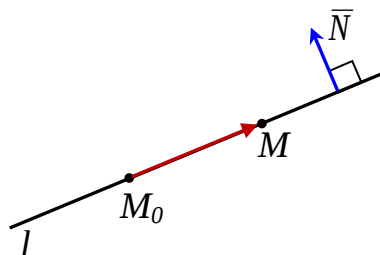
Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - 1}{-3 - 1} = \frac{y - (-2)}{5 - (-2)} \Rightarrow \frac{x - 1}{-4} = \frac{y + 2}{7}.$$

Ответ: $\frac{x - 1}{-4} = \frac{y + 2}{7}.$

2.2.5. Общее уравнение прямой

Пусть дана точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\bar{N}(A; B)$. Составим уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно ненулевому вектору $\bar{N}$.



На прямой l возьмем произвольную точку $M(x; y)$. Т.к. $\bar{N} \perp l$, то $\overline{M_0M} \perp \bar{N}$, где $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$, $\bar{N}(A; B)$. Следовательно, скалярное произведение равно нулю: $\overline{M_0M} \cdot \bar{N} = 0$. В координатной форме выражение примет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Получили уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{N}(A; B)$.

Вектор, перпендикулярный прямой, называется *вектором нормали*.

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0,$$

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

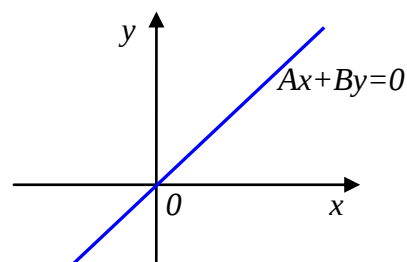
Обозначим $C = -Ax_0 - By_0$, тогда

$$Ax + By + C = 0. \quad (2.7)$$

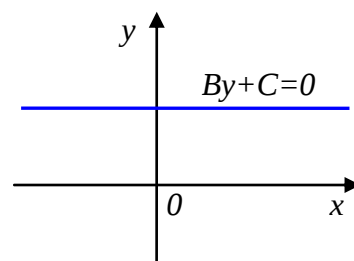
Полученное уравнение прямой называется *общим уравнением прямой*.

Исследование общего уравнения прямой

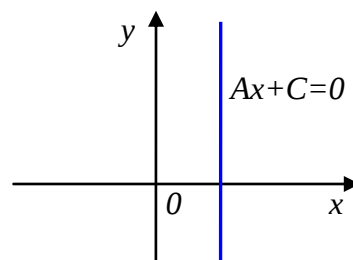
1. Если $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$, тогда $Ax + By = 0$ – прямая проходит через начало координат, т.е. через точку $O(0;0)$.



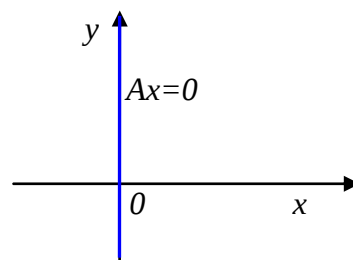
2. Если $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$, тогда $By + C = 0$ или $y = -\frac{C}{B}$ – прямая параллельна оси Ox и пересекает ось Oy в точке с координатами $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$.



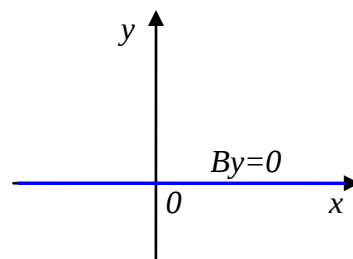
3. Если $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$, тогда $Ax + C = 0$ или $x = -\frac{C}{A}$ – прямая параллельна оси Oy и пересекает ось Ox в точке с координатами $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.



4. Если $B = 0, C = 0, A \neq 0$, тогда $Ax = 0$ или $x = 0$ – прямая совпадает с осью Oy .



5. Если $A = 0, C = 0, B \neq 0$, тогда $By = 0$ или $y = 0$ – прямая совпадает с осью Ox .



Замечание. Из общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ можно выписать координаты вектора нормали к данной прямой (т.е. вектора, перпендикулярного прямой) $\bar{N}(A, B)$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -1)$ перпендикулярно вектору $\bar{N}(1; 3)$.

Решение. Для составления уравнения прямой, проходящей через точку $A(2; -1)$ перпендикулярно вектору $\bar{N}(1; 3)$ воспользуемся формулой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

$$1 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (y - (-1)) = 0,$$

$$x - 2 + 3y + 3 = 0,$$

$$x + 3y + 1 = 0.$$

Ответ: $x + 3y + 1 = 0$.

2.2.6. Уравнение прямой в «отрезках» координатных осей

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, причем $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$.

Перенесем свободный член вправо: $Ax + By = -C$.

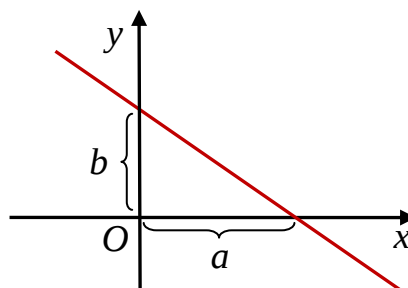
Разделим обе части уравнения на $-C$, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$.

Обозначим, $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (2.8)$$

где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox , b – абсцисса точки пересечения прямой с осью Oy .

Полученное уравнение прямой называется *уравнением в «отрезках» координатных осей*.



Замечание. Прямая, заданная уравнением в «отрезках» координатных осей, проходит через точки $M_1(a,0)$ и $M_2(0,b)$.

Пример. Найти длину отрезка, отсекаемого прямой $l: 2x + 5y + 15 = 0$ от оси Oy .

Решение. Составим уравнение в «отрезках»:

$$2x + 5y + 15 = 0,$$

$$2x + 5y = -15,$$

$$\frac{2}{-15}x + \frac{5}{-15}y = 1,$$

$$\frac{x}{\frac{-15}{2}} + \frac{y}{\frac{-15}{5}} = 1.$$

Следовательно, $a = \frac{-15}{2} = -7,5$, $b = \frac{-15}{5} = -3$.

Ответ: $b = -3$.

2.2.7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла между прямой и положительным направлением оси Ox .

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, причем $A \neq 0, B \neq 0$.

Выразим из этого уравнения y :

$$By = -Ax - C,$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

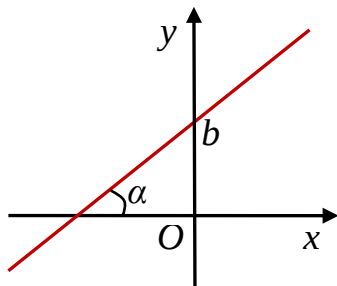
Введем обозначения: $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Тогда получим уравнение:

$$y = kx + b, \quad (2.9)$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$, α ($0 \leq \alpha < \pi$) – угол образованный прямой с положительным направлением оси Ox , b – отрезок, который прямая отсекает на оси Oy .

Полученное уравнение прямой называется *уравнением прямой с*

угловым коэффициентом.



Пример. Найти угловой коэффициент прямой l : $3x - 3y - 8 = 0$.

Решение. Из общего уравнения прямой выразим y :

$$3y = 3x - 8,$$

$$y = \frac{3}{3}x - \frac{8}{3},$$

$$y = x - \frac{8}{3}.$$

Следовательно, угловой коэффициент $k = 1$.

Ответ: $k = 1$.

Если прямая проходит через начало координат, то $b=0$ и, следовательно, уравнение этой прямой будет иметь вид $y = kx$.

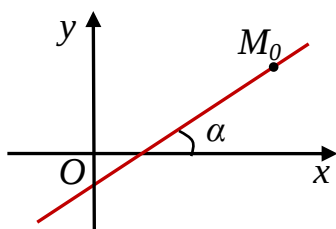
Если прямая параллельна оси Ox , то $\alpha = 0$, следовательно, $k = \operatorname{tg} \alpha = 0$ и уравнение примет вид $y=b$.

Если прямая параллельна оси Oy , то уравнение имеет вид: $x=a$, где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox .

2.2.8. Прямая, проходящая через точку, в данном направлении

Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k . Тогда уравнение этой прямой можно записать в виде:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0). \quad (2.10)$$



Уравнение $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ с различными значениями k называют также *уравнениями пучка прямых* с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. В этом пучке нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy .

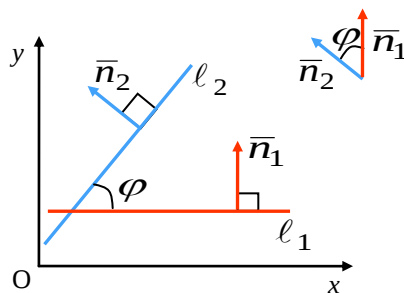
2.3. Взаимное расположение точек и прямых

2.3.1. Угол между двумя прямыми

1. Пусть две прямые заданы своим общим уравнением:

$\ell_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, вектор нормали к прямой $\ell_1: \vec{n}_1 = (A_1, B_1)$;

$\ell_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, вектор нормали к прямой $\ell_2: \vec{n}_2 = (A_2, B_2)$.



Угол между прямыми – это угол между нормальными к прямым:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

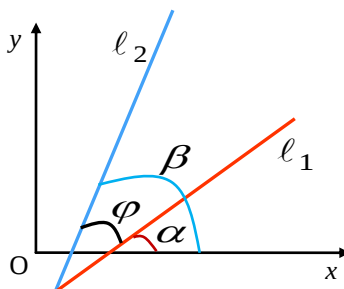
Условие перпендикулярности: $\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Условие параллельности: $\ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

2. Пусть две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом:

$\ell_1: y = k_1x + b_1$, угловой коэффициент к прямой ℓ_1 равен k_1 ;

$\ell_2: y = k_2x + b_2$, угловой коэффициент к прямой ℓ_2 равен k_2 .



Угол между прямыми: $tg \varphi = tg(\beta - \alpha) = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$.

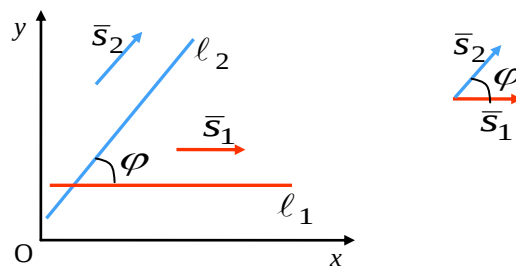
Условие перпендикулярности: $\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

Условие параллельности: $\ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

3. Пусть две прямые заданы своим каноническим уравнением:

$\ell_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}$, направляющий вектор прямой $\ell_1: \bar{s}_1 = (m_1; n_1)$;

$\ell_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$, направляющий вектор прямой $\ell_2: \bar{s}_2 = (m_2; n_2)$.



Угол между прямыми – это угол между направляющими векторами

прямых: $\cos \varphi = \frac{|\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2|}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$.

Условие перпендикулярности: $\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Условие параллельности: $\ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

2.3.2. Точка пересечения прямых

Пусть две прямые заданы своими общими уравнениями:

$\ell_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$,

$\ell_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

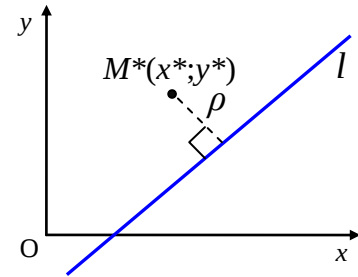
Чтобы найти общую точку, необходимо решить систему двух уравнений с двумя переменными:
$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Если система несовместна, то прямые параллельны.

2.3.3. Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы координаты точки $M^*(x^*; y^*)$ и уравнение прямой $l: Ax + By + C = 0$.

Расстояние от точки до прямой есть длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую:



$$\rho(M^*, l) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.11)$$

2.3.4. Проекция точки на прямую

Пусть необходимо спроецировать точку $M_0(x_0, y_0)$ на прямую $\ell: Ax + By + C = 0$. Проекцией точки на прямую является основание перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Нормалью к данной прямой является вектор, перпендикулярный прямой. Составим уравнение проектирующей прямой. Она проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельна вектору $\vec{n}$. Подставив координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ и вектора $\vec{n}(A, B)$ в уравнение прямой по точке и направляющему вектору, получим:

$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}$. Теперь необходимо найти координаты точки пересечения данной прямой и проектирующей, для чего объединим их в систему:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}. \end{cases}$$

Решение этой системы есть координаты точки, являющейся проекцией точки M_0 на прямую ℓ .

Пример. Даны вершины треугольника ABC : $A(-6; 2)$; $B(8; 10)$; $C(-8; 4)$.
Найти:

- 1) уравнение высоты, опущенной из вершины A ;
- 2) точку пересечения высоты h_A и стороны BC ;
- 3) точку пересечения медиан треугольника ABC .

Решение.

1) Составим уравнение высоты h_A , проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}(-16;-6)$:

$$-16(x+6)-6(y-2)=0,$$

$$-16x-6y-84=0,$$

$$8x+3y+42=0.$$

2) Составим уравнение стороны BC :

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B} = \frac{y-y_B}{y_C-y_B},$$

$$\frac{x-8}{-8-8} = \frac{y-10}{4-10},$$

$$\frac{x-8}{-16} = \frac{y-10}{-6},$$

$$3x-8y+56=0.$$

Найдем точку пересечения высоты h_A и стороны BC . Обозначим эту точку N , она является проекцией точки A на сторону BC . Для нахождения точки N , решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x+3y+42=0; \\ 3x-8y+56=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+3y=-42; \\ 3x-8y=-56. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+3y=-42; \\ 3x-8y=-56. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6\frac{66}{73}; \\ y=4\frac{30}{73}. \end{cases}$$

3) Найдем середину стороны AB :

$$x_1 = \frac{x_A+x_B}{2}, \quad y_1 = \frac{y_A+y_B}{2}.$$

$$x_1 = \frac{-6+8}{2} = 1, \quad y_1 = \frac{2+10}{2} = 6.$$

Составим уравнение прямой проходящей через точку $C(-8;4)$ и точку с координатами $(1;6)$:

$$\frac{x-x_1}{x_C-x_1} = \frac{y-y_1}{y_C-y_1},$$

$$\frac{x-1}{-8-1} = \frac{y-6}{4-6},$$

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y-6}{-2},$$

$$2x - 9y + 52 = 0.$$

Найдем середину стороны AC :

$$x_2 = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_2 = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

$$x_2 = \frac{-6-8}{2} = -7, \quad y_1 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Составим уравнение прямой проходящей через точку $B(8;10)$ и точку с координатами $(-7;3)$:

$$\frac{x-x_2}{x_B-x_2} = \frac{y-y_2}{y_B-y_2},$$

$$\frac{x+7}{8+7} = \frac{y-3}{10-3},$$

$$\frac{x+7}{15} = \frac{y-3}{7},$$

$$7x - 15y + 94 = 0.$$

Найдем точку O пересечения найденных медиан:

$$\begin{cases} 2x - 9y + 52 = 0; \\ 7x - 15y + 94 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 9y = -52; \\ 7x - 15y = -94. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; \\ y = -5\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: 1) $8x + 3y + 42 = 0$, 2) $\left(-6\frac{66}{73}; 4\frac{30}{73}\right)$; 3) $\left(-2; -5\frac{1}{3}\right)$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Даны концы $A(3;-5)$ и $B(-1;1)$ однородного стержня. Определить координаты его центра тяжести.

Задание 2. Даны вершины треугольника $A(1;4)$, $B(3;-9)$, $C(-5;2)$. Определить длину его медианы, проведенной из вершины B .

Задание 3. Отрезок, ограниченный точками $A(1;-3)$ и $B(4;3)$, разделён

точками C и D на три равные части. Определить координаты точек деления.

Задание 4. Найти точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.

Задание 5. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой.

Задание 6. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $ABCD$ $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 2y + 3 = 0$.

Задание 7. Определить угол φ между двумя прямыми:

- 1) $5x - y + 7 = 0$ и $3x + 2y = 0$;
- 2) $3x - 2y + 7 = 0$ и $2x + 3y - 3 = 0$;
- 3) $x - 2y - 4 = 0$ и $2x - 4y + 3 = 0$;
- 4) $3x + 2y - 1 = 0$ и $5x - 2y + 3 = 0$.

Задание 8. Даны вершины треугольника $A(2;1)$, $B(-1;-1)$ и $C(3;2)$. Составить уравнение: 1) стороны AB ; 2) медианы AM ; 3) высоты BH .

Задание 9. Даны вершины треугольника $A(2; 1)$; $B(-1; -1)$; $C(3; 2)$. Составить уравнение высоты AD и найти координаты точки D – точки пересечения высоты AD и стороны BC .

Задание 10. Найти длину наименьшей стороны $\triangle ABC$, где $A(2;1)$, $B(-1; -1)$, $C(3; 2)$.

3. Аналитическая геометрия в пространстве

3.1. Уравнения плоскости в пространстве

3.1.1. Общее уравнение плоскости

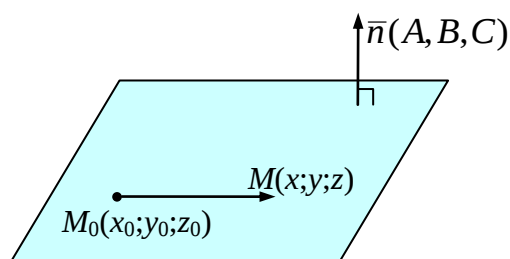
Алгебраическое уравнение первой степени в пространстве определяет плоскость. Общее уравнение плоскости можно записать в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3.1)$$

Любую плоскость можно представить в виде такого уравнения единственным способом с точностью до коэффициента (т.е. при умножении уравнения на число, полученное уравнение задает ту же плоскость).

3.1.2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Нормалью к плоскости называется вектор перпендикулярный к данной плоскости.



Пусть необходимо составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\bar{n} = (A, B, C)$.

Предположим, что такая плоскость построена, возьмем на ней произвольную точку $M(x, y, z)$. Составим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}$, следовательно, их скалярное произведение должно быть равным нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$. Перепишем это условие в координатной форме:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.2)$$

Таким образом, получили уравнение плоскости (3.2), проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с заданной нормалью $\bar{n} = (A, B, C)$.

По уравнению плоскости в общем виде: $Ax + By + Cz + D = 0$, можно выписать координаты вектора-нормали к плоскости $\bar{n} = (A, B, C)$.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку

$A(1,2,-3)$, параллельно плоскости α : $3x-4y+5z-2=0$.

Решение. Из уравнения плоскости α выпишем координаты нормали: $\bar{n} = (3;-4;5)$. Так как необходимо построить плоскость параллельную данной, то можно использовать вектор $\bar{n}$ в качестве нормали к искомой плоскости. Подставим координаты точки $A(1,2,-3)$ и нормали $\bar{n} = (3;-4;5)$ в формулу (3.2), получим:

$$3 \cdot (x-1) - 4 \cdot (y-2) + 5 \cdot (z+3) = 0.$$

После преобразования уравнение примет вид: $3x-4y+5z+20=0$.

Ответ: $3x-4y+5z+20=0$.

3.1.3. Особенности в расположении плоскостей

Рассмотрим общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$. В зависимости от коэффициентов A, B, C, D плоскость может принимать следующие положения:

1. Если $D=0$, то плоскость $Ax+By+Cz=0$ проходит через начало координат, т.е. точка $O(0,0,0)$ принадлежит плоскости, так как ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости.

2. Если $A=0$, то имеем уравнение плоскости $By+Cz+D=0$, нормальный вектор $\bar{n} = (0,B,C)$ перпендикулярен оси OX , следовательно, плоскость параллельна оси OX .

3. Если $A=0$ и $D=0$, то плоскость $By+Cz=0$ содержит точку $O(0,0,0)$ и параллельна оси OX , следовательно плоскость содержит ось OX .

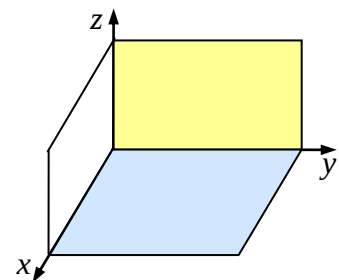
4. Если $A=0$ и $B=0$, то $Cz+D=0$, или $z = -\frac{D}{C}$ плоскость параллельна плоскости XOY , аналогично $Ax+D=0$ плоскость параллельна YOZ , а $By+D=0$ плоскость параллельна XOZ .

5. Плоскости координат имеют уравнения:

XOY задается уравнением: $Z=0$,

XOZ соответственно: $Y=0$,

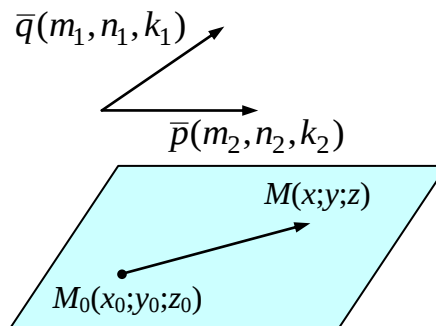
YOZ : – уравнением $X=0$.



3.1.4. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, параллельно двум неколлинеарным векторам

Два неколлинеарных вектора, параллельные плоскости, называются направляющими векторами этой плоскости.

Пусть необходимо составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельную заданным векторам $\vec{p} = (m_1, n_1, k_1)$ и $\vec{q} = (m_2, n_2, k_2)$.



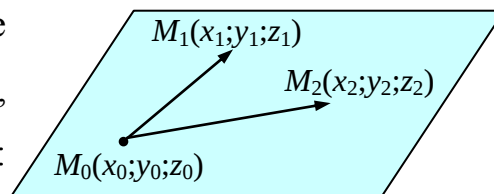
Считаем, что такая плоскость построена, возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ этой плоскости и составим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. При любом расположении точки M , векторы $\overline{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}$ компланарны, т.е. их смешанное произведение равно 0. Запишем это условие в векторной форме: $\overline{M_0M} \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$. В координатной форме последнее выражение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3)$$

Полученное уравнение (3.3) задает плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и имеющую два направляющих вектора $\vec{p} = (m_1, n_1, k_1)$ и $\vec{q} = (m_2, n_2, k_2)$.

3.1.5. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть необходимо составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные, не лежащие на одной прямой, точки: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.



Считаем, что такая плоскость построена, составим два вектора $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overline{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$.

Эти векторы являются направляющими векторами плоскости.

Применяя формулу (3.3.), составим уравнение плоскости по точке M_0 и двум направляющим векторам $\overline{M_0M_1}$ и $\overline{M_0M_2}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Полученное уравнение (3.4) задает плоскость, проходящую через три заданные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Пример. Составить уравнение плоскости ABC , если даны координаты точек: $A(3;-2;2)$; $B(1;-3;1)$; $C(2;0;4)$.

Решение. Составим уравнение плоскости ABC по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1-3 & -3+2 & 1-2 \\ 2-3 & 0+2 & 4-2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Найдем разложение определителя по первой строке, применив теорему Лапласа:

$$(x-3)(-2+2) - (y+2)(-4-1) + (z-2)(-4-1) = 0,$$

$$5(y+2) - 5(z-2) = 0,$$

$$5y - 5z + 20 = 0,$$

$$y - z + 4 = 0.$$

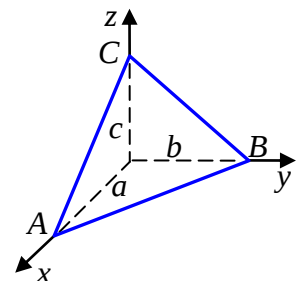
Ответ: $y - z + 4 = 0$.

3.1.6. Уравнение плоскости в «отрезках»

Пусть необходимо составить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат OX , OY , OZ соответственно отрезки a , b , c , т.е. плоскость проходит через точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ и $C(0, 0, c)$.

Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости по трем точкам (3.4):

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-a & y-b & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$



Вычислим определитель, получим:

$$b \cdot c \cdot x + a \cdot c \cdot y + a \cdot b \cdot z - a \cdot b \cdot c = 0,$$

$$bcx + acy + abz = abc.$$

Разделим уравнение на abc , получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3.5)$$

Полученное уравнение (3.5) задает плоскость в «отрезках» координатных осей.

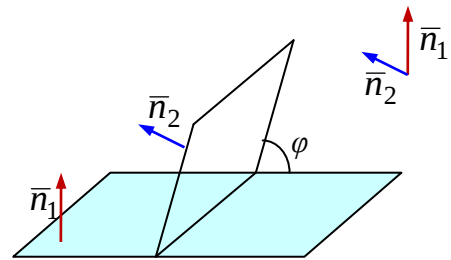
3.1.7. Взаимное расположение плоскостей

Угол между плоскостями

Пусть заданы две плоскости $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Углом между плоскостями называется один из двухгранных углов, образованных при пересечении этих плоскостей. Выпишем нормали к плоскостям: $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.



Угол между плоскостями равен углу между нормальными к плоскостям. Таким образом, косинус угла между плоскостями вычисляется по формуле:

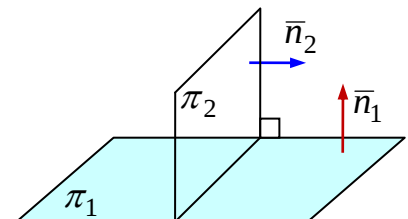
$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

Т.к. $\pi_1 \perp \pi_2$, то $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, следовательно, скалярное произведение равно нулю, т.е.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ или в координатной форме:

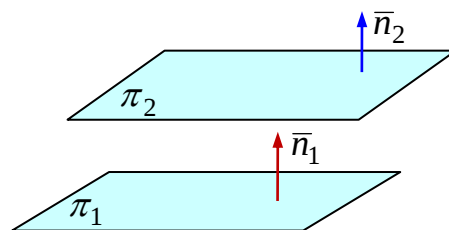
$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$



Условие параллельности двух плоскостей:

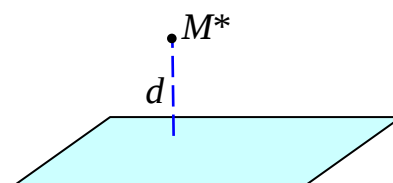
Т.к. $\pi_1 \parallel \pi_2$, то $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$, следовательно, координаты векторов должны быть пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$



Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка: $M^*(x^*; y^*; z^*)$ и плоскость: $Ax + By + Cz + D = 0$ расстояние d от точки до плоскости находится по формуле:



$$d = \frac{Ax^* + By^* + Cz^* + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.6)$$

3.2. Уравнения прямой в пространстве

3.2.1. Общие уравнения прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Пусть заданы две плоскости: $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

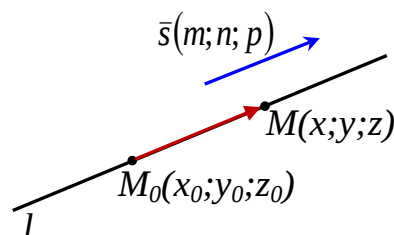
Если они не параллельны, т.е. координаты нормалей к плоскостям $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ не пропорциональны, то система:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

определяет прямую линию l в пространстве. Такой способ задания называют общим уравнением прямой.

3.2.2 Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, параллельно данному вектору

Пусть необходимо составить уравнение прямой l , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно заданному вектору $\bar{s} = (m, n, p)$.



Возьмем произвольную точку $M(x;y;z)$ на прямой l . Вектор $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ параллелен вектору $\vec{s}$, следовательно, их координаты пропорциональны:

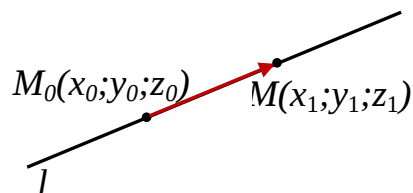
$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \quad (3.8)$$

Таким образом, получили уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p)$. Уравнение (3.8) называется каноническим уравнением прямой в пространстве.

Замечание. Обращение в нуль одного из знаменателей канонического уравнения означает, что и числитель дроби так же должен быть равен нулю.

3.2.3 Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть необходимо составить уравнение прямой l , проходящей через две заданные точки: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Вектор $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ является направляющим вектором прямой.

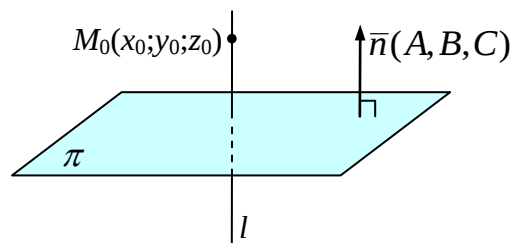


Применяя формулу (3.8), составим уравнение прямой l , проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\overline{M_0M_1}$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \quad (3.8)$$

3.2.4 Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно данной плоскости

Пусть необходимо составить уравнение прямой l проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно плоскости π , заданной общим уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$.



Нормаль к плоскости имеет вид $\vec{n} = (A, B, C)$. Для искомой прямой этот вектор является направляющим вектором. Тогда уравнение прямой l по точке

M_0 и направляющему вектору $\vec{n}$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}. \quad (3.9)$$

3.2.5 Перевод уравнения прямой из канонического вида в параметрический

Пусть имеется уравнение прямой l в каноническом виде:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \quad \text{Для того, чтобы перевести уравнение в}$$

параметрический вид, приравняем каждую дробь к параметру t . В результате

$$\text{получим: } \begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = t, \\ \frac{y-y_0}{n} = t, \\ \frac{z-z_0}{p} = t. \end{cases} \quad \begin{cases} x-x_0 = mt, \\ y-y_0 = nt, \\ z-z_0 = pt. \end{cases}$$

Таким образом, параметрическое уравнение прямой l имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad \text{где } t \in R \quad (3.10)$$

3.2.6 Перевод уравнения прямой из общего вида в канонический

Пусть прямая l задана в общем виде: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

Для того, чтобы перевести ее в канонический вид, возьмем две точки принадлежащие данной прямой, т.е. два ее частных решения. Для получения частного решения системы, проще всего одной из переменных дать произвольное значение, например, $x_0 = 0$. Подставив это значение в систему,

получим систему с двумя переменными: $\begin{cases} B_1y + C_1z = -D_1, \\ B_2y + C_2z = -D_2 \end{cases}$, которую можно

решить, например, по формулам Крамера:

$$y_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & C_1 \\ -D_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}, \quad z_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & -D_1 \\ B_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}.$$

Таким образом, найдена точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Если же определитель $\Delta = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$, то необходимо другой переменной дать произвольное значение, например, $y_0 = 0$ и решить систему относительно x и z . Аналогичным образом находим еще одно частное решение системы, например, $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Координаты найденных точек $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ подставим в уравнение (3.8).

Таким образом, каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (3.11)$$

3.2.7. Перевод уравнения прямой из канонического вида в общий

Пусть дана прямая l , представленная в каноническом виде:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad \text{Для того чтобы ее перевести в общий вид,}$$

приравняем попарно дроби (при условии, что $n \neq 0$):

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \end{cases}$$

После преобразований получим:

$$\begin{cases} n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0 \\ p(y - y_0) - n(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

Прямая l получена в общем виде, как пересечение двух плоскостей. Если же $n=0$, то можно получить одну из плоскостей, приравняв первую дробь к третьей.

3.2.8. Угол между прямыми в пространстве

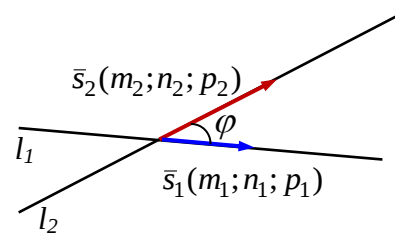
Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Выпишем направляющие векторы этих прямых:

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2).$$

Угол φ между прямыми равен углу между их направляющими векторами:



$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Для нахождения острого угла между прямыми, числитель правой части следует взять по модулю.

• *Условие параллельности прямых:* $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, или в координатной форме: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

• *Условие перпендикулярности прямых:* $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, а в координатной форме: $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$.

3.2.9. Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть две прямые в пространстве заданы каноническими уравнениями:

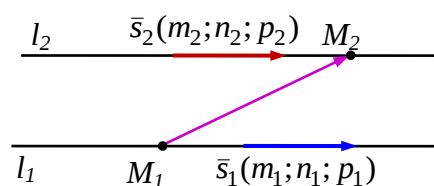
$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \text{ их направляющие}$$

векторы соответственно: $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Точка

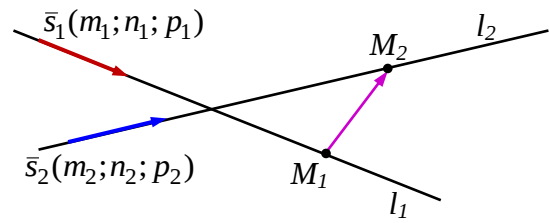
$M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит прямой l_1 , а точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ принадлежит l_2 .

Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. По взаимному расположению векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ можно судить о взаимном расположении прямых.

Прямые параллельны, если $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ коллинеарны и $\overrightarrow{M_1M_2}$ не параллелен $\vec{s}_1$.

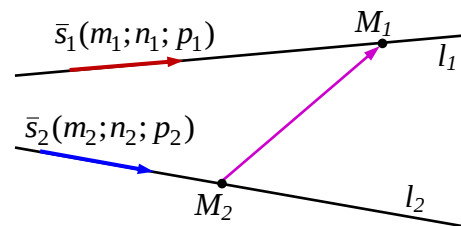


Две прямые пересекаются в пространстве, если $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ не коллинеарны, а векторы $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю:



$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Две прямые скрещиваются, если векторы $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ не компланарны, т.е. их смешанное произведение не равно нулю:

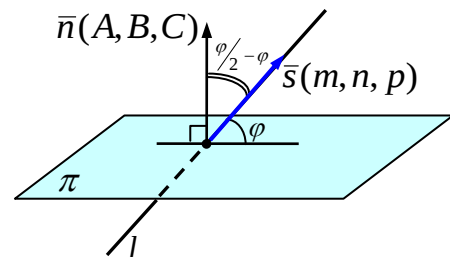


$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

3.2.10. Угол между прямой и плоскостью

Пусть плоскость π задана своим общим уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая l в каноническом виде: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Обозначим через φ угол между прямой l и плоскостью π . Тогда угол между нормалью к плоскости вектором $\bar{n}(A, B, C)$ и направляющим вектором прямой $\bar{s}(m, n, p)$ будет равен $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$.



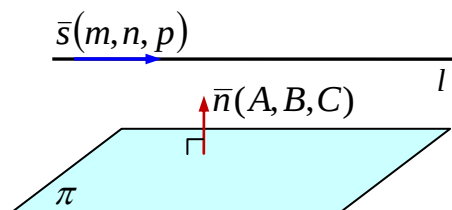
Тогда $\sin \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{|\bar{n} \cdot \bar{s}|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|}$. Так как угол $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \in [0, \pi]$, то синус

острого угла между прямой l и плоскостью π можно найти по формуле:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (3.12)$$

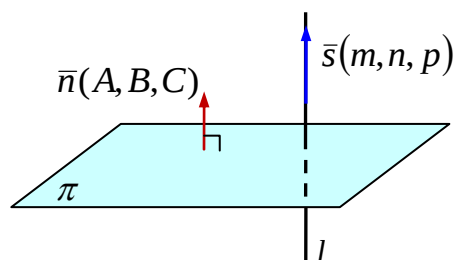
Условие параллельности прямой l и плоскости π

Если прямая l параллельна плоскости π , то векторы $\vec{n}$ и $\vec{s}$ перпендикулярны, т.е. их скалярное произведение равно 0. $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$, т.е. в координатной форме: $Am + Bn + Cp = 0$.



Условие перпендикулярности прямой l и плоскости π

Если прямая l перпендикулярна плоскости π , то векторы $\vec{n}(A, B, C)$ и $\vec{s}(m, n, p)$ параллельны, т.е. должно быть выполнено равенство: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.



3.2.11. Пересечение прямой и плоскости

Пусть плоскость π задана своим общим уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая l в каноническом виде: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. Для решения этой задачи проще всего: прямую представить в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \text{ где } t \in R. \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

Подставляя выражения для x , y и z в уравнение плоскости: $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) = 0$ получаем, что:

- если данное уравнение имеет единственное решение, то прямая и плоскость пересекаются и для нахождения точки пересечения, необходимо найденное значение параметра t подставить в параметрическое уравнение прямой;
- если уравнение решения не имеет, то прямая параллельна плоскости;

• если решений множество, т.е. уравнение верно при любом t , то прямая принадлежит плоскости.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1(3;1;-1)$ и $\vec{a}_2(1;-2;1)$.

Задание 2. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;

2) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$;

3) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y + lz = 0$.

Задание 3. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;

2) $5x + y - 3z - 2 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;

3) $7x - 2y - 2 = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

Задание 4. Дано уравнение плоскости $x + 2y - 3z - 6 = 0$. Написать для неё уравнение «в отрезках».

Задание 5. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точку $M_1(2;-3;3)$ параллельно плоскости Oxy ;

2) через точку $M_2(1;-2;4)$ параллельно плоскости Oxz ;

3) через точку $M_3(-5;2;-1)$ параллельно плоскости Oyz .

Задание 6. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через ось Ox и точку $M_1(4;-1;2)$;

2) через ось Oy и точку $M_2(1;4;-3)$;

3) через ось Oz и точку $M_3(3;-4;7)$.

Задание 7. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точки $M_1(7;2;-3)$ и $M_2(5;6;-4)$ параллельно оси Ox ;

2) через точки $Q_1(2;-1;1)$ и $Q_2(3;1;2)$ параллельно оси Oy ;

3) через точки $P_1(3;-2;5)$ и $P_2(2;3;1)$ параллельно оси Oz .

Задание 8. Привести уравнение $2x - 2y + z - 18 = 0$ плоскости к нормальному виду.

Задание 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ и $M_3(2;0;2)$.

Задание 10. Вычислить расстояние d от точки $P_1(-1;1;-2)$ до плоскости, проходящей через три точки

$M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$ и $M_3(4;-5;-2)$.

Задание 11. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;1;-1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}(1;-2;3)$.

Задание 12. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к вектору $\overline{M_1M_2}$.

Задание 13. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1;-1;-2)$ и $M_2(3;1;1)$ перпендикулярно к плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Задание 14. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$.

Задание 15. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.

Задание 16. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $x - 2y - 2z - 12 = 0$ и $x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Задание 17. Составить каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точки $A(1;-2;1)$ и $B(3;1;-1)$.

Задание 18. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;0;-3)$ параллельно:

- 1) вектору $\vec{a}(2; -3; 5)$; 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$;
 3) оси Ox ; 4) оси Oy ; 5) оси Oz .

Задание 19. Составить каноническое уравнение прямой:

$$x - 2y + 3z - 4 = 0, \quad 3x + 2y - 5z - 4 = 0.$$

Задание 20. Найти острый угол между прямыми:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$$

Задание 21. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Задание 22. Даны прямые $L: \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+1}{-8}$,

$$L_1: \frac{x+6}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+5}{-2}, \quad L_2: \frac{x-10}{9} = \frac{y-10}{-1} = \frac{z-34}{1},$$

$$L_3: \frac{x-6}{-5} = \frac{y+10}{5} = \frac{z+15}{10}, \quad L_4: \frac{x+11}{10} = \frac{y+7}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

Среди прямых L_1, L_2, L_3, L_4 найти прямую, которая:

- 1) параллельна прямой L ; 2) совпадает с прямой L ;
 3) пересекается с прямой L ; 4) скрещивается с прямой L .

Задание 23. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{6} = \frac{y-5}{22} = \frac{z-5}{22}$ и плоскости $89x + 16y + 90z + 280 = 0$.

Задание 24. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(9; -4; 11)$ перпендикулярно к плоскости $-x + 5y + 2z - 160 = 0$.

Задание 25. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-9; -10; 10)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+6}{-5} = \frac{y+10}{7} = \frac{z+1}{6}$.

Задание 26. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через

прямую $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -7t + 3 \\ z = -3t - 3 \end{cases}$ и точку $M(3; 1; -5)$.

Задание 27. Найти значение параметра m , при котором прямая $\frac{x-7}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z+11}{3}$ параллельна плоскости $8x - 7y - 17z - 1 = 0$.

Задание 28. Найти неизвестные коэффициенты канонического уравнения прямой $\frac{x-x_0}{-6} = \frac{y-y_0}{-8} = \frac{z-z_0}{n}$, принадлежащей плоскости $-3x - 4y - 5z + 1 = 0$.

Задание 29. Найти синус угла между прямой $\frac{x-2}{-10} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{8}$ и плоскостью $9x + 9y - 6z - 5 = 0$.

Задание 30. Даны плоскости

1) $6x - y - 4z + 175 = 0$

2) $4x + 16y + 2z - 45 = 0$

3) $4x + 16y + 2z + 213 = 0$

4) $12x - 12y - 13z - 130 = 0$

5) $4x + 16y + 2z - 200 = 0$

6) $5x - 2y + 6z + 27 = 0$

7) $-18x + 6y - 14z - 62 = 0$

8) $14x - 5y + 12z + 72 = 0$

9) $5x - 3y + 14z - 197 = 0$

и прямая $\frac{x+7}{2} = \frac{y+10}{8} = \frac{z+2}{1}$.

Укажите номера плоскостей, которые удовлетворяют следующим условиям:

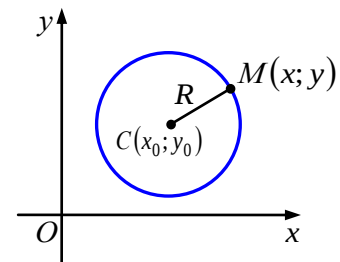
- а) прямая принадлежит плоскости;
- б) прямая параллельна плоскости;
- в) прямая перпендикулярна плоскости;
- г) прямая пересекает плоскость.

4. Кривые второго порядка

Алгебраическое уравнение второго порядка на плоскости описывает кривую второго порядка, другими словами, любое уравнение вида $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ определяет либо одну из кривых: эллипс, гипербола, парабола; либо распадается на две прямые, либо точек, удовлетворяющих данному уравнению на плоскости нет.

4.1. Уравнение окружности

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности.



Уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (4.1)$$

определяет окружность радиуса R с центром $C(x_0; y_0)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $x_0=0$, $y_0=0$, то уравнение принимает вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (4.2)$$

Пример. Найти координаты центра и радиуса окружности $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0,$$

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 8y) - 16 = 0,$$

$$(x^2 - 4x + 4 - 4) + (y^2 + 8y + 16 - 16) - 16 = 0,$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) - 4 - 16 - 16 = 0,$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 - 36 = 0,$$

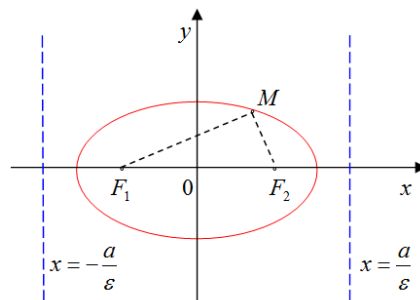
$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 6^2 \text{ — каноническое уравнение окружности.}$$

Центр окружности находится в точке с координатами (2;-4), радиус равен 6.

Ответ: (2;-4) – центр окружности, $R=6$.

4.2. Каноническое уравнение эллипса

Эллипс – геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная (большая, чем расстояние между фокусами).



Уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (4.3)$$

является каноническим уравнением эллипса с центром симметрии в точке $C(x_0; y_0)$.

Если центр эллипса совпадает с началом координат, то каноническое уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.4)$$

Полуосями этого эллипса являются по оси Ox – отрезок a (*большая полуось*), и по оси Oy – отрезок b (*малая полуось*). Таким образом, эллипс имеет две оси симметрии: ось Ox и ось Oy .

Точки $(-a;0)$, $(a;0)$, $(0;-b)$, $(0;b)$ являются вершинами эллипса.

На большей оси в точках с координатами $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ находятся фокусы эллипса, где c – половина расстояния между фокусами.

Величины a , b и c связаны соотношением: $c^2 = a^2 - b^2$ ($a > b$).

Эксцентриситетом эллипса называется $\varepsilon = \frac{c}{a}$, т.е. отношение половины расстояния между фокусами к большей полуоси. Для эллипса $0 < \varepsilon < 1$ (т.к. $c < a$).

Расстояния $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ называются *фокальными радиусами*,

которые определяются по формулам: $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$, $r_1 + r_2 = 2a$.

Директрисами эллипса называются прямые параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$.

Уравнения директрис эллипса: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Пример. Построить эллипс, каноническое уравнение которого: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$. Найти его фокусы и эксцентриситет.

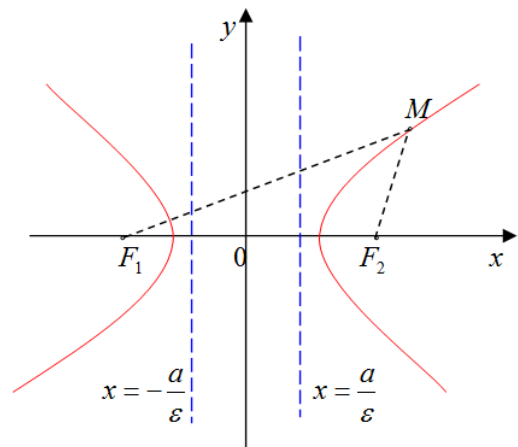
Решение. Центром симметрии эллипса является точка $O(2; -3)$, полуоси эллипса: $a=3$; $b=2$; $c^2=a^2-b^2=3^2-2^2=9-4=5$, фокусы эллипса находятся в точках:

$$F_1(2-\sqrt{5}; -3), F_2(2+\sqrt{5}; -3), \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: $F_1(2-\sqrt{5}; -3), F_2(2+\sqrt{5}; -3), \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

4.3. Каноническое уравнение гиперболы

Гипербола – геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная (не равная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами).



Уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (4.5)$$

является каноническим уравнением гиперболы с центром симметрии в точке $O(x_0; y_0)$.

Если центр гиперболы совпадает с началом координат, то каноническое уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.6)$$

Полуосями этой гиперболы являются по оси Ox – отрезок a (*действительная полуось*), и по оси Oy – отрезок b (*мнимая полуось*). Таким образом, гипербола имеет две оси симметрии: ось Ox и ось Oy .

Точки $(-a; 0)$, $(a; 0)$ являются вершинами гиперболы.

На продолжении действительной оси в точках с координатами $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ находятся фокусы гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами.

Величины a , b и c связаны соотношением: $c^2 = a^2 + b^2$.

Эксцентриситетом гиперболы называется $\varepsilon = \frac{c}{a}$, т.е. отношение половины расстояния между фокусами к действительной полуоси. Для гиперболы $\varepsilon > 1$ (т.к. $c > a$).

Расстояния $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ называются *фокальными радиусами*, которые определяются по формулам: $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = -a + \varepsilon x$ (для правой ветви гиперболы) и $r_1 = -a - \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ (для левой ветви гиперболы).

Директрисами гиперболы называются прямые параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$.

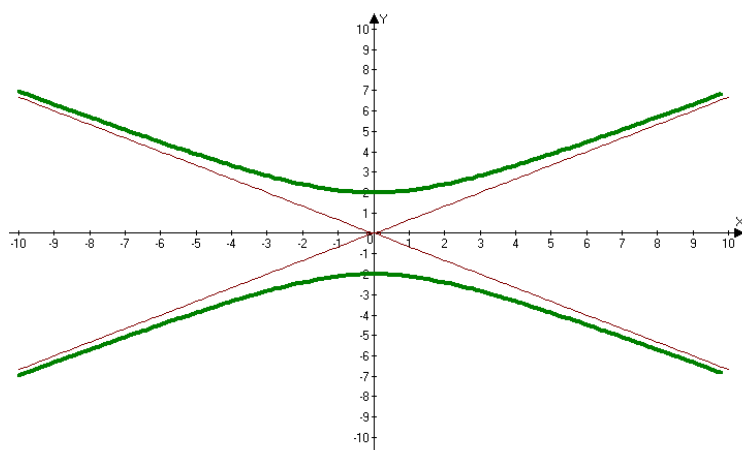
Уравнения директрис эллипса: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Гиперболой, сопряженной к данной, называется гипербола, слагаемые которой отличаются от данной знаком:

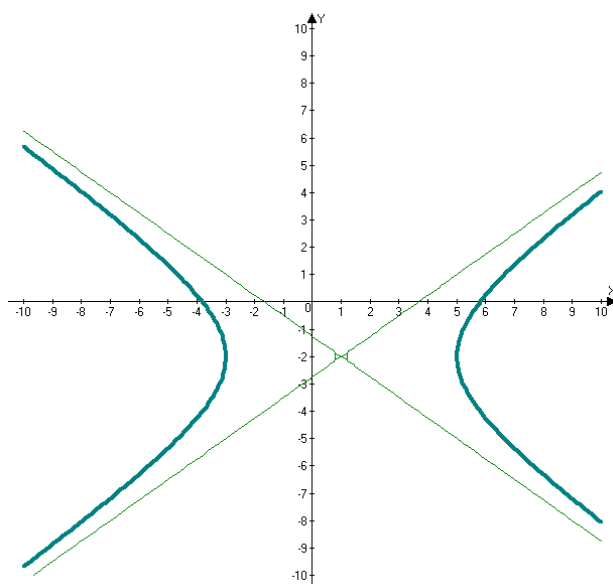
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для этой гиперболы a – мнимая полуось, b – действительная. $c^2 = a^2 + b^2$. Фокусы находятся в точках: $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$.



Пример. Построить гиперболу, каноническое уравнение которой $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$. Найти фокусы и эксцентриситет.

Решение. График гиперболы имеет вид:



Центр симметрии гиперболы находится в точке с координатами $O(1, -2)$.

Действительная полуось $a=4$, мнимая полуось $b=3$.

Величина c определяется из соотношения: $c^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $c=5$.

Фокусы гиперболы: $F_1(1-5; -2)$, $F_2(1+5; -2)$ или $F_1(-4; -2)$, $F_2(6; -2)$.

Эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{5}{4} = 1,25$.

4.4. Каноническое уравнение параболы

Парабола – геометрическое место точек плоскости, расстояние от

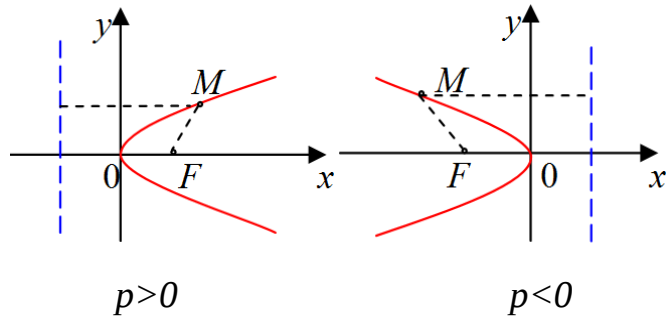
каждой из которых до прямой (директрисы) и точки (фокуса), лежащих в той же плоскости, равны между собой.

$y^2=2px$ – каноническое уравнение параболы;

$F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус;

$x=-\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы;

Ox – ось симметрии.

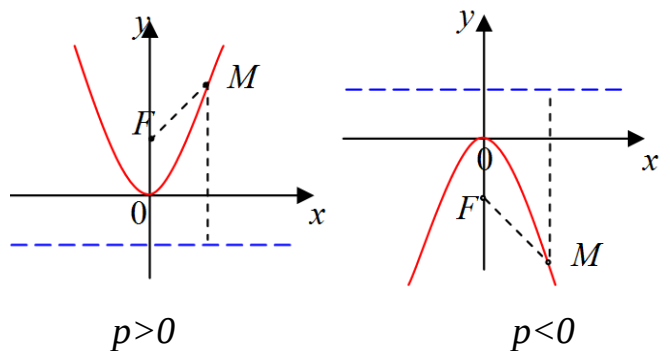


$x^2=2py$ – каноническое уравнение параболы;

$F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ – фокус;

$y=-\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы;

Oy – ось симметрии.

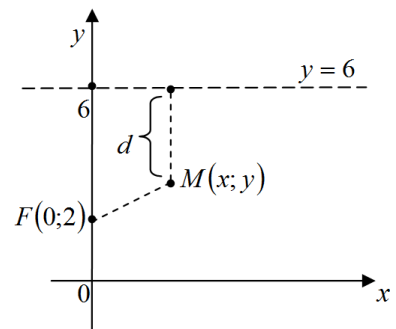


Пример. Составить каноническое уравнение кривой, каждая точка которой равноудалена от точки $F(0;2)$ и прямой $y=6$.

Решение.

Пусть точка $M(x,y)$ – точка, равноудаленная от точки $F(0;2)$ и прямой $y=6$.

Найдем расстояние от точки $M(x,y)$ до точки $F(0;2)$ и до прямой $y=6$.



Т.е. с одной стороны $|\overline{FM}|=d$, где $d=6-y$, а с другой стороны

$$|\overline{FM}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}.$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=6-y,$$

$$x^2+y^2-4y+4=36-12y+y^2,$$

$$8y=-x^2+32,$$

$y = -\frac{1}{8}x^2 + 4$ – уравнение параболы.

Ответ: $y = -\frac{1}{8}x^2 + 4$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Дано уравнение параболы: $x^2 = 16y$. Найти значение параметра p .

Задание 2. Составить каноническое уравнение кривой второго порядка

а) $4y^2 - 6x^2 - 2x + 5y = 18$;

б) $9y^2 - 2x + 4y = 2$;

в) $6y^2 + 6x^2 + 12x - 2y = 14$.

Задание 3. Для эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ найти длины малой и большой полуосей.

Задание 4. Для гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти длины ее мнимой и действительной осей.

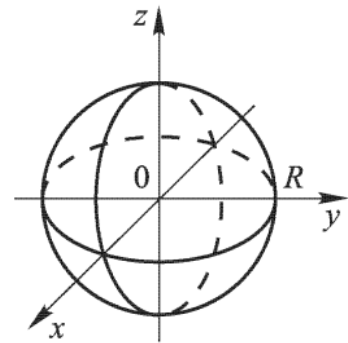
5. Поверхности второго порядка

Поверхность второго порядка – геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$, в котором по крайней мере один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$ отличен от нуля.

Перечислим основные поверхности второго порядка и приведем их эскизы.

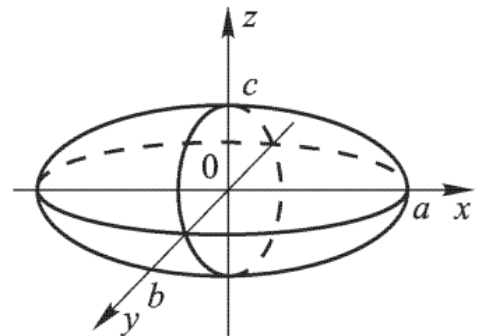
1. *Сфера*:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$



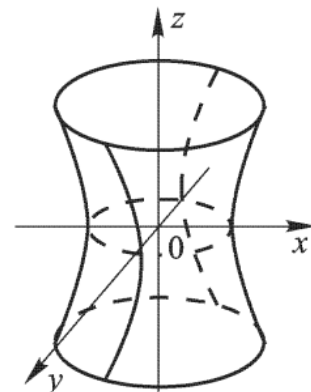
2. *Эллипсоид*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$



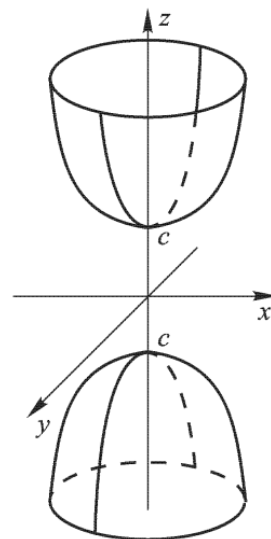
3. *Однополостной гиперболоид*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$



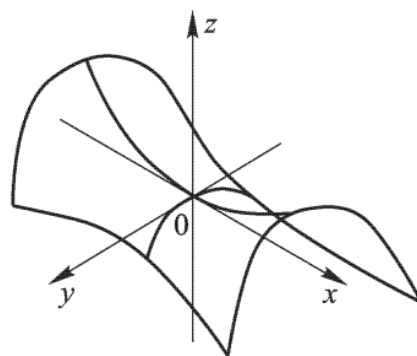
4. Двуполостной гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1;$$



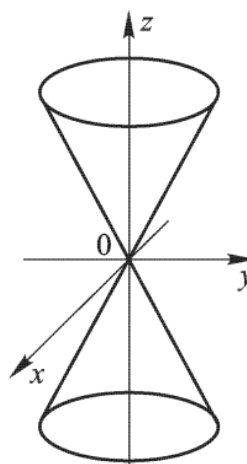
5. Гиперболический параболоид («седло»):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz;$$



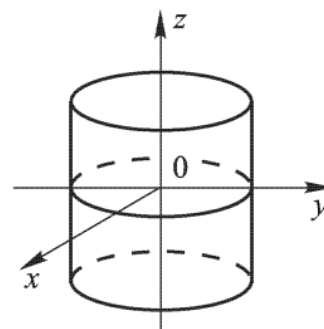
6. Эллиптический конус:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$



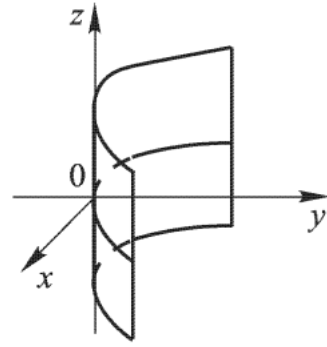
7. Эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$



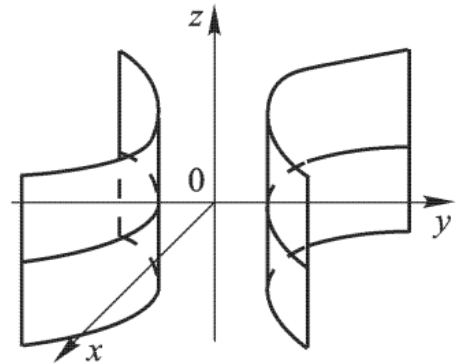
8. Параболический цилиндр:

$$y^2 = 2px;$$



9. Гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$



10. Пара совпавших прямых:	11. Пара совпавших плоскостей:	12. Пара пересекающихся плоскостей:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0;$	$y^2 = 0;$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$

Конической поверхностью, или *конусом*, называется поверхность, которая описывается движущейся прямой (образующей) при условии, что эта прямая проходит через постоянную точку S и пересекает некоторую определенную линию L . Точка S называется вершиной конуса; линия L – направляющей.

Цилиндрической поверхностью, или *цилиндром*, называется поверхность, которая описывается движущейся прямой (образующей) при условии, что эта прямая имеет постоянное направление и пересекает некоторую определенную линию L (направляющую).

Литература

1. Богомолов, Н.В. Математика [Текст]: учебник / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2013.
2. Красс, М.С. Математика для экономистов [Текст]: учеб. пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2008.
3. Михайленко, Е.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Текст]: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, М.А. Жукова. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2010. – 163 с.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006.
5. Старостенко, И.Н. Высшая математика для экономистов. Элементы линейной алгебры: учеб.-практич. пособие / И. Н. Старостенко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2021. – 76 с. – ISBN 978-5-9266-1726-6: Б. ц. – Текст: непосредственный + Текст: электронный. –<http://ebs.libkrumvd.ru/elib/4180/>, требуется авторизация.
6. Старостенко, И.Н. Цикл типовых расчетов по разделам: линейная алгебра и аналитическая геометрия, математический анализ и дифференциальные уравнения [Текст]: учеб.-практ. пособие / И.Н. Старостенко, Ю.Н. Сопильняк. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2013. – То же [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Электронная библиотека КрУ МВД России, требуется авторизация: <http://libkrumvd.ru>.
7. Шипачев, В.С. Высшая математика [Электронный ресурс]: учеб.и практикум для бакалавров / В.С. Шипачев; ред. А.Н. Тихонова. – 8-е изд., доп. и перераб. – М.: Юрайт, 2014. – Режим доступа: Электронная библиотека КрУ МВД России, требуется авторизация: <http://libkrumvd.ru>.

Учебное издание

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ
ЧАСТЬ 2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

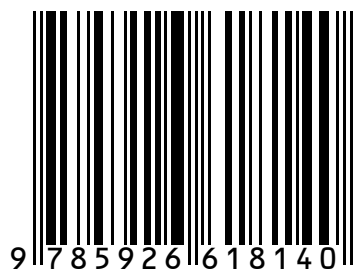
Учебное пособие

Составители:

Старостенко Игорь Николаевич
Хромых Анна Алексеевна

В авторской редакции

ISBN 978-5-9266-1814-0



Подписано в печать 19.10.2022. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 4,8. Тираж 70 экз. Заказ 79.

Краснодарский университет МВД России.
350005, г. Краснодар, ул. Ярославская, 128.