

Краснодарский университет МВД России

**И. Н. Старостенко
Е. В. Михайленко
А. А. Хромых**

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник

Краснодар
2023

УДК 51.77
ББК 22.1
С773

Одобрено
редакционно-издательским советом
Краснодарского университета
МВД России

Рецензенты:

А. Г. Карника, кандидат технических наук, доцент (Ростовский юридический институт МВД России);

Т. Е. Жукова (Главное управление МВД России по Краснодарскому краю);

С. В. Крыгин (Нижегородская академия МВД России).

Старостенко И. Н.

С773 Прикладная математика : учебник / И. Н. Старостенко, Е. В. Михайленко, А. А. Хромых. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2023. – 346 с.

ISBN 978-5-9266-1912-3

Содержит разделы математики: дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика, регрессионный анализ, методы оптимизации, изучаемые курсантами образовательных организаций МВД России.

Для профессорско-преподавательского состава, адъюнктов, курсантов, слушателей образовательных организаций МВД России и сотрудников органов внутренних дел Российской Федерации.

УДК 51.77
ББК 22.1

ISBN 978-5-9266-1912-3

© Краснодарский университет
МВД России, 2023

© Старостенко И. Н., Михайленко Е. В.,
Хромых А. А., 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	10
Раздел I. Дискретная математика	13
Глава 1. Комбинаторика	13
1.1. Основные понятия комбинаторики.....	14
1.1.1. Правило сложения.....	15
1.1.2. Правило умножения.....	16
1.2. Комбинаторные конфигурации без повторений.....	17
1.2.1 Размещения без повторений.....	18
1.2.2. Перестановки без повторений	20
1.2.3. Сочетания без повторений	22
1.3. Комбинаторные конфигурации с повторениями.....	24
1.3.1. Размещения с повторениями.....	25
1.3.2. Перестановки с повторениями.....	27
1.3.3. Сочетания с повторениями.....	28
1.4. Разбиения	29
Глава 2. Булева алгебра	32
2.1. Основные понятия булевой алгебры	33
2.1.1. Основные определения.....	33
2.1.2. Свойства булевых операций.....	34
2.1.3. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы записи	36
2.2. Булевы функции.....	37
2.2.1. Определение булевой функции.....	37
2.2.2. Способы задания булевых функций.....	39
2.3. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.....	40
2.3.1. Минтермы	40
2.3.2. Определение СДНФ	42
2.3.3. Разложение булевых функций	43
2.4. Карты Вейча	44
2.4.1. Определение карт Вейча	44

2.4.2. Нанесение минтермов на карты Вейча	46
2.4.3. Нанесение на карты Вейча булевых функций.....	47
2.5. Нахождение СДНФ при помощи карт Вейча.....	49
2.5.1. Нахождение СДНФ произвольных функций.....	49
2.5.2. Нахождение СДНФ конъюнкции функций.....	51
2.5.3. Нахождение СДНФ инверсии функции	52
2.6. Совершенная конъюнктивная нормальная форма.....	52
2.6.1. Макстермы	52
2.6.2. Нахождение СКНФ булевых функций	53
Глава 3. Введение в математическую логику.....	56
3.1. История развития математической логики	57
3.2. Основные понятия логики высказываний	59
3.3. Логические операции.....	61
3.4. Логические формулы.....	65
3.4.1. Определение логических формул.....	65
3.4.2. Равносильность логических формул.....	67
3.5. Основные законы логики	67
3.5.1. Свойства логических операций	68
3.5.2. Тавтологии	69
Глава 4. Графы.....	71
4.1. Основные определения и классификация графов	72
4.1.1. Понятие графа.....	72
4.1.2. Классификация графов	74
4.1.3. Подграфы	77
4.2. Матричное представление графов	78
4.2.1. Матрица смежностей	78
4.2.2. Матрица инцидентности	79
4.3. Операции над графами	81
4.4. Изоморфизм графов.....	83
4.5. Маршруты и пути графов.....	85

4.5.1. Маршруты и циклы в неориентированном графе.....	85
4.5.2. Пути и контуры в ориентированном графе	87
4.5.3. Пути во взвешенных ориентированных графах.....	88
4.6. Связность графа	90
4.6.1. Понятие связности графа	90
4.6.2. Матрицы связности.....	91
4.7. Деревья.....	92
4.8. Расстояния в графах	94
Раздел II. Теория вероятностей и математическая статистика	96
Глава 5. Теория вероятностей.....	96
5.1. Основные понятия теории вероятностей	96
5.1.1. Основные понятия и классификация событий.....	98
5.1.2. Операции над событиями.....	104
5.2. Вероятность события.....	105
5.2.1. Классическая вероятность.....	105
5.2.2. Статистическая вероятность	109
5.2.3. Геометрическая вероятность.....	110
5.3. Вероятности суммы и произведения несовместных событий	113
5.3.1. Вероятность суммы несовместных событий.....	113
5.3.2. Вероятность произведения несовместных событий	115
5.4. Вероятность суммы и произведения совместных независимых событий	116
5.4.1. Вероятность произведения совместных независимых событий	116
5.4.2. Вероятность суммы совместных независимых событий	118
5.5. Вероятность суммы и произведения произвольных событий.....	120
5.5.1. Условная вероятность	120
5.5.2. Вероятность произведения произвольных событий.....	121
5.5.3. Вероятность суммы произвольных событий.....	124
5.6. Формула полной вероятности	127

5.6.1. Основные понятия и формулы.....	128
5.6.2. Вычисление вероятностей с помощью формулы полной вероятности.....	129
5.7. Формула гипотез Байеса.....	133
5.7.1. Теорема Байеса	133
5.7.2. Вычисление вероятностей гипотез.....	133
Глава 6. Повторные испытания.....	139
6.1. Формула Бернулли.....	140
6.2. Предельные теоремы в схеме Бернулли.....	142
6.2.1. Формула Пуассона	143
6.2.2. Локальная теорема Муавра-Лапласа	145
6.2.3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа	147
6.2.4. Следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа	150
6.3. Наивероятнейшее число	150
Глава 7. Случайные величины	152
7.1. Понятия и определения случайных величин	152
7.1.1 Законы распределения дискретной случайной величины.....	153
7.1.2. Математические операции над случайными величинами	156
7.2. Функция распределения дискретных случайных величин.....	159
7.3. Числовые характеристики случайных величин.....	161
7.3.1. Математическое ожидание	161
7.3.2. Дисперсия.....	163
7.3.3. Среднее квадратическое отклонение.....	164
7.4. Законы распределения дискретных случайных величин.....	165
7.4.1. Биномиальный закон распределения	165
7.4.2. Закон распределения Пуассона.....	166
7.4.3 Геометрическое распределение	168
7.4.4 Гипергеометрическое распределение.....	169
7.5. Непрерывные случайные величины.....	171
7.5.1. Функция распределения непрерывной случайной величины	171

7.5.2. Плотность распределения непрерывной случайной величины	172
7.5.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.....	175
7.6. Законы распределения непрерывных случайных величин.....	177
7.6.1. Равномерный закон распределения	177
7.6.2. Показательный закон распределения	180
7.6.3. Нормальный закон распределения	181
Глава 8. Основы математической статистики.....	185
8.1. Генеральная и выборочная совокупности	186
8.2. Вариационные ряды.....	187
8.3. Переход от дискретного к интервальному вариационному ряду	189
8.4. Переход от интервального к дискретному вариационному ряду	190
8.5. Эмпирическая функция распределения	191
8.6. Графическое представление статистических данных	192
8.7. Числовые характеристики статистического распределения.....	196
8.8. Выборочные начальные и центральные моменты статистического распределения. Асимметрия. Эксцесс.	199
Раздел III. Регрессионный анализ.....	203
Глава 9. Исследование парной регрессии.....	203
9.1. Введение в регрессионный анализ.....	204
9.1.1. Регрессионные модели	204
9.1.2. Виды уравнений парной регрессии.....	206
9.2. Построение и верификация парной линейной регрессии.....	209
9.2.1. Метод наименьших квадратов	211
9.2.2. Определение параметров уравнения линейной модели.....	212
9.2.3. Верификация построенной регрессионной модели	214
9.3. Нелинейные модели парной регрессии	219
9.3.1. Расчет параметров степенной модели.....	219
9.3.2. Показательная регрессионная модель.....	221
9.3.3. Гиперболическая модель парной регрессии.....	224

Глава 10. Многомерный статистический анализ	226
10.1. Понятие множественной регрессии	226
10.1.1. Спецификация модели множественной регрессии	227
10.1.2. Виды уравнений множественной регрессии	228
10.2. Построение линейной множественной регрессионной модели ...	229
10.2.1. Матричная форма записи	229
10.2.2. Оценка параметров множественной регрессионной модели	233
10.3. Верификация множественной модели	238
10.3.1. Средняя ошибка аппроксимации	238
10.3.2. Стандартизованный коэффициент регрессии	239
10.3.3. Коэффициент эластичности	240
10.3.4. Коэффициент детерминации	241
Глава 11. Временные ряды	244
11.1. Основные элементы временного ряда	244
11.3. Моделирование тенденции временного ряда.....	254
11.4. Моделирование сезонных колебаний	256
Раздел IV. Методы оптимизации	266
Глава 12. Задачи линейного программирования.....	266
12.1. Метод последовательного исключения	267
12.1.1. Метод Жордана-Гаусса	267
12.1.2. Преобразование однократного замещения	274
12.1.3. Симплексные преобразования	275
12.2. Модели задач линейного программирования	277
12.2.1. Формулировка задачи линейного программирования.....	277
12.2.2. Основные виды задач линейного программирования	278
12.2.3. Переход от общей ЗЛП к канонической.....	279
12.2.4. Переход от канонической к стандартной ЗЛП	280
12.3. Методы решения задач линейного программирования	281
12.3.1. Графический метод решения задач линейного программирования	281

12.3.2. Симплексный метод решения задач линейного программирования	286
12.4. Теория двойственности	290
12.4.1. Правила составления двойственных задач	291
12.4.2. Первая и вторая теоремы двойственности	296
Глава 13. Транспортная задача линейного программирования	301
13.1. Линейная транспортная задача.....	301
13.1.1. Алгоритм решения транспортной задачи с правильным балансом.....	302
13.1.2. Особенности решения транспортных задач с неправильным балансом.....	311
13.2. Транспортная задача с ограничениями	312
Глава 14. Теория игр и принятия решений.....	315
14.1. Основные понятия теории игр.....	315
14.2. Основные понятия матричной игры	317
14.2.1. Платежная матрица.....	317
14.2.2. Максиминные и минимаксные стратегии	318
14.2.3. Основная теорема теории игр.....	320
14.3. Использование чистых и смешанных стратегий	323
14.3.1. Равновесные стратегии.....	323
14.3.2. Оптимальные чистые стратегии.....	324
14.3.3. Смешанные стратегии	325
14.4. Решение игры с платежной матрицей 2x2	327
14.5. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования	331
14.6. Уменьшение размерностей платежных матриц.....	339
Литература	342

Введение

Учебник посвящен изучению как теоретических вопросов прикладной математики, так и вопросов практического применения математических методов для решения самых разнообразных задач. Это могут быть задачи научного познания, задачи разработки новых технических устройств, задачи создания новых технологических процессов, задачи управления и оптимизации в самых разнообразных областях человеческой деятельности, в том числе и управления обществом.

В отличие от классической математики, прикладная отрасль этой дисциплины направлена на применение математических методов и алгоритмов в ведущих отраслях науки и техники. Прежде всего это информационные технологии, программирование и компьютерная безопасность, статистика и теория вероятности. Разработка математической модели опирается с одной стороны на общенаучные представления об изучаемом объекте или процессе, с другой стороны эффективная модель должна опираться на современные средства фундаментальной математики.

Учебник состоит из четырех разделов. Изучению дискретных математических объектов и структур посвящен первый раздел «Дискретная математика». Представленный материал включает основные понятия комбинаторики, комбинаторные конфигурации без повторений и с повторениями, основные понятия булевой алгебры, определение и способы задания булевых функций. Даются понятия минтерма и макстерма, определяются способы нахождения совершенной дизъюнктивной нормальной формы при помощи карт Вейча и совершенной конъюнктивной нормальной формы булевых функций. В разделе также рассматриваются основные понятия логики высказываний, логические операции и формулы, основные законы логики. Представлены основные определения и классификация графов, матричное представление графов, операции над ними, изоморфизм, маршруты и пути графов, понятие связности графа и матрицы связности, расстояния в графах.

Во втором разделе изучаются основные понятия теории вероятности и математической статистики. Определены понятие и классификация событий, операции над ними, сформулированы определения классической, статистической и геометрической вероятностей. Приведены способы нахождения вероятностей суммы и произведения совместных независимых, несовместных и произвольных событий. Рассмотрены формулы полной вероятности, гипотез Байеса, Бернулли, предельные теоремы в схеме Бернулли. Особое внимание уделяется изучению случайных величин, их числовых характеристик, законов распределения дискретных и непрерывных случайных величин, основ математической статистики.

В третьем разделе «Регрессионный анализ» рассматриваются парная регрессия, многомерный статистический анализ, временные ряды. Определен классический подход к оцениванию параметров линейной регрессии на основе метода наименьших квадратов, приведены принципы построения и верификации парной и множественной регрессионных моделей. Для парной регрессии описаны алгоритмы расчета параметров степенной, показательной и гиперболической моделей. В отдельной главе рассмотрены основные элементы временного ряда, моделирование трендовой и сезонной компонент аддитивной и мультипликативной моделей временного ряда.

В заключительном четвертом разделе «Методы оптимизации» изучаются задачи линейного программирования, транспортная задача, теория игр и принятия решений. Подробно описывается метод Жордана-Гаусса, преобразование однократного замещения, симплексные преобразования, рассматриваются основные виды задач линейного программирования (ЗЛП), переходы от общей ЗЛП к канонической и обратно, графический и симплексный методы решения ЗЛП. Особое внимание уделяется транспортной задаче, представляющей собой специальный класс ЗЛП. Рассмотрены алгоритм решения транспортной задачи с правильным балансом, особенности решения транспортных задач с неправильным балансом, транспортная задача с ограничениями. Также в разделе представлены основные понятия матричной

игры, использование чистых и смешанных стратегий, решение игры с платежной матрицей 2×2 , принципы сведения матричной игры к задаче линейного программирования, уменьшение размерностей платежных матриц.

Во всех главах учебника приведено большое число примеров с подробным решением, что существенно облегчает понимание теоретического материала.

Подготовленный учебник адресован курсантам и слушателям образовательных организаций высшего образования системы МВД России по специальностям 10.05.05 Безопасность информационных технологий в правоохранительной сфере, 38.05.01 Экономическая безопасность, 40.05.03 Судебная экспертиза. Представленный в нем материал позволяет сформировать систему знаний, умений и навыков в области использования математических методов в профессиональной деятельности сотрудников полиции.

Раздел I. Дискретная математика

Глава 1. Комбинаторика

Задачи выбора элементов изучаемых объектов и размещения их в заданном порядке возникают и решаются во многих отраслях науки, промышленности, социальной и правоохранительной сферах. Для развития современных научных направлений математики, физики, химии, биологии, информатики, экономики, создания новых промышленных, строительных и сельскохозяйственных технологий, коммуникаций и средств обработки информации, формирования эффективных методов защиты информации невозможно обойтись без определения количества способов отбора изучаемых объектов, порядка расположения элементов в структурных множествах, распределения имеющихся ресурсов. Такими проблемами занимается комбинаторика.

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов (подмножеств) некоторого дискретного множества в соответствии с заданными правилами. Термин «комбинаторика» имеет происхождение от латинского «*combina*», что означает – «сочетать», «соединять».

Комбинаторика изучает не сами свойства выбранного множества или его элементов, а определяет методы нахождения количества комбинаций, выполнения различных действий над изучаемыми объектами, способов выбора, группировки и расположения элементов множества, подчиненные тем или иным условиям.

В настоящей главе мы изложим вопросы, связанные с основными положениями комбинаторного анализа, представим краткую историю развития комбинаторики, опишем правила сложения и умножения, рассмотрим комбинаторные конфигурации: перестановки, сочетания, размещения без повторений и с повторениями, а также разбиения.

1.1. Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика – одна из самых древних отраслей математики. Несколько тысяч лет назад в Юго-восточной Азии из чисел и других знаков составлялись различные последовательности и таблицы с заданными свойствами. Определялись способы положения и перестановок элементов в данных структурах. В Древней Греции подсчитывали количество различных комбинаций сочетаний слов в словосочетаниях, способы построений геометрических фигур из заданных элементов. В Средние века в Европе предпринимались попытки вывода математических законов для существующих в то время азартных игр с использованием монет, игральные кости, карт, домино и т.д.

Научное обоснование комбинаторики получает в XVI-XVII веках, как приложение для решения задач из области теории вероятностей. Развитие комбинаторики обусловлено было необходимостью расчета количества возможных вариантов наступления того или иного события, комбинаций выбора предметов или иных действий, выполняемых случайным образом. В это время элементы комбинаторных расчетов появились в работах итальянских ученых *Николо Тарталья* (1499–1557), *Джероламо Кардано* (1501–1576), *Галилео Галилея* (1564–1642), и французских математиков *Блеза Паскаля* (1623–1662) и *Пьера Ферма* (1601–1665).

Понятие «комбинаторика», как термин, введено немецким математиком *Готфридом Вильгельмом Лейбницем* (1646 - 1716). В работе «Рассуждения о комбинаторном искусстве» (1666). Лейбниц, впервые опубликовал формулы сочетаний без повторений из k элементов по n , ввел специальные символы для определения количества конфигураций, высказывался о приложениях комбинаторики в различных сферах человеческой деятельности.

Развитием методов решения комбинаторных задач также занимались выдающиеся математики: *Якоб Бернулли* (1654–1705) и *Леонард Эйлер* (1707–1783). В работах этих ученых рассматривались методы определения числа перестановок, сочетаний и размещений, как без повторений, так и с

повторениями, исследовались возможности использования комбинаторики в алгебре, аналитической геометрии, теории вероятности, математической статистике.

В XIX веке изучением *геометрических конфигураций* занимался известный немецкий математик *Теодор Карл Рейе* (1838–1892), а в работах американского ученого *Элиакима Гастингса Мура* (1862–1932) рассматривались *тактические конфигурации*. В XX веке с помощью *перечислительной комбинаторики* известных математиков *Дж.-К. Рота* и *Ричарда Стенли* изучались свойства упорядоченных множеств, различных алгебраических структур, специальных алгебраических функций. В настоящее время комбинаторных методов исследования широко востребованы и интегрированы в современной математике и других науках.

1.1.1. Правило сложения

Комбинаторными принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор. Такие способы построения некоторой конструкции из элементов исходного множества называются *комбинаторными конфигурациями*.

Рассмотрим задачи комбинаторики, описывающие наиболее общие и простые комбинаторные конфигурации. Многие такие задачи решаются с помощью основных теорем комбинаторики – *правила сложения и правила умножения*.

Правило сложения. Пусть некоторое множество A состоит из k элементов: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$. Тогда, если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами; элемент A_2 – n_2 способами, элемент A_3 – n_3 способами, ..., элемент A_k – n_k способами, отличными от первых $k - 1$ способов, то выбор одного из элементов: или A_1 , или A_2 , ..., или A_k может быть осуществлен $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ способами.

Данное правило можно сформулировать иначе. Пусть имеется k различных групп $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$, причем каждая i -ая группа содержит n_i

элементов. Если один элемент из группы A_i можно выбрать n_i способами, и при этом любые две группы A_i и A_j не имеют общих элементов, то выбор одного элемента или из A_1 , или из A_2 , ..., или из A_k можно осуществить $n=n_1+n_2+n_3+\dots+n_k$ способами.

Решим комбинаторные задачи, используя правило сложения.

Пример. В ящиках имеется 140 обычных, 30 трассирующих и 65 холостых патронов. Сколько существует способов извлечения из ящиков либо одного обычного, либо одного трассирующего, либо одного холостого патрона?

Решение. Так как количество способов выбора одного обычного патрона $n_1=140$, количество способов выбора одного трассирующего патрона $n_2=30$, а количество способов выбора одного трассирующего патрона $n_3=65$, то, согласно правилу сложения, количество способов извлечения из ящиков обычного или трассирующего, или холостого патрона $n=n_1+n_2+n_3=140+30+65=21$.

Пример. В подразделении имеются три легковых автомобиля и два микроавтобуса. Для перевозки семи сотрудников к месту патрулирования можно выбрать либо два легковых автомобиля, либо один микроавтобус. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Снова будем использовать правило сложения. Легко рассчитать, что количество способов выбора двух легковых автомобилей из трех $n_1=3$. На самом деле, первый способ – можно взять первый и второй автомобили, второй способ – берем первый и третий автомобили, третий способ – выбрали второй и третий автомобили. Количество способов выбора одного микроавтобуса из двух, естественно, равно $n_2=2$. Тогда количество всех способов выбора транспортных средств для перевозки личного состава равно $n=n_1+n_2=3+2=5$.

1.1.2. Правило умножения

Правило умножения. Пусть некоторое множество A состоит из k элементов: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$. Если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами, после каждого такого выбора элемент A_2 может быть выбран n_2 способами, ..., после каждого $k-1$ выбора элемент A_k может быть выбран n_k

способами, то выбор всех элементов $A_1, A_2, \dots, A_k$ в указанном порядке может быть осуществлен $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Сформулируем это правило по-другому. Пусть имеется k групп $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$, причем i -ая группа содержит n_i элементов. Тогда общее число n способов, которыми можно получить упорядоченную совокупность $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$, где $a_i \in A_i$ (т.е. выбрать по одному элементу из каждой группы и расставить их в определенном порядке), равно $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$.

Пример. В учебной группе 17 курсантов. Сколько способов может быть при назначении заместителя командира взвода и двух командиров отделений при условии, что каждый учащийся может быть выбран только на одну из этих должностей?

Решение. Пусть сначала назначается заместитель командира взвода, это может сделать одним из 17 способами; командира первого отделения можно выбрать из оставшихся курсантов 16-ю способами, а затем остается 15 вариантов назначения командира второго отделения. Используя правило произведения, найдем количество способов одновременного назначения заместителя командира взвода и двух командиров отделений: $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$.

Пример. Два почтальона должны разнести 10 писем, 15 газет и 2 бандероли по 12 адресам. Сколькими способами они могут распределить свою работу, учитывая, что двум почтальонам ходить по одному адресу нецелесообразно?

Решение. Первый адрес имеет $n_1=2$ альтернативы – либо к адресату идет первый почтальон, либо второй. Для второго адресата также есть $n_2=2$ альтернативы и т.д., т.е. $n_1=n_2=\dots=n_{12}=2$. Следовательно, в силу правила умножения общее число способов распределений доставки корреспонденции между двумя почтальонами равно $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_{12} = 2^{12} = 4096$.

1.2. Комбинаторные конфигурации без повторений

В комбинаторных задачах часто определяется количество всех подмножеств данного множества, удовлетворяющих определенным условиям.

Однако, в одних конфигурациях рассматриваются подмножества, отличающиеся не только элементами, но и установленным порядком следования элементов, в других порядок следования элементов не важен и подмножества, отличающиеся только расположением в них элементов, не считаются различными. Кроме того, в одних случаях исследуемые подмножества могут содержать неограниченное количество повторений выбранных элементов, а в других эти элементы могут браться только однократно. Все эти обстоятельства необходимо учитывать при решении комбинаторных задач.

Способы построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, в которых все выбранные элементы представлены только по одному разу, называются *конфигурациями без повторений*.

1.2.1 Размещения без повторений

Определение размещения без повторений. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением* (размещением без повторений) из n элементов по k элементов.

Можно привести другую формулировку определения размещения без повторений.

Размещение из n элементов по k – это все k -элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Для обозначения числа размещений принят специальный математический символ: A_n^k (число размещений из n элементов по k). Рассчитать количество размещений можно, используя следующую теорему.

Теорема 1.1. Количество размещений из n элементов по k элементов равно произведению k последовательных натуральных чисел от n до $n - k + 1$ включительно, т. е.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1), \quad k > 0. \quad (1.1)$$

Формулу (1.1) удобно записывать в другом виде, используя понятие факториала.

Напомним, что факториалом числа n называют произведение первых n натуральных чисел и обозначают $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Кроме того, полагают, что $0! = 1$. Умножив и разделив нашу формулу на $(n-k)!$, имеем:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}. \quad (1.2)$$

Учитывая, что $(n-k)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k)$, после преобразования числителя окончательно получим:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (1.3)$$

Пример. Найдём количество размещений из пяти элементов по три.

Решение. Используя формулу размещений без повторений (1.3) имеем:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Пример. Для решения оперативной задачи необходимо назначить 4 сотрудников из 12 имеющихся. Определить количество всех возможных вариантов составления списка назначенных сотрудников.

Решение. Обратим внимание на то, что порядок следования сотрудников в составляемом списке имеет значение (например, сотрудники направляются на разные объекты или могут выполнять различные обязанности) и в списке сотрудники повторяться не могут, то данная конфигурация будет размещением без повторений. Тогда, используя формулу (1.3) для нахождения количества размещений из двенадцати по четыре, получим:

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, число всех возможных вариантов составления списка назначенных сотрудников равно 11880.

Пример. В учебной лаборатории находится 10 столов. Сколькими способами за ними могут сесть 15 курсантов, если каждый стол рассчитан не более чем на двух человек?

Решение. Установим, что количество посадочных мест в аудитории равно 20. Затем отметим, что из этих двадцати мест будет использовано только 15 (по числу курсантов в группе). Очевидно, что каждый курсант может занять только одно место за столом, то есть каждое место будет использовано только один раз, без повторов. Теперь мы видим, что данная конфигурация является размещением без повторений из двадцати по пятнадцати, следовательно,

$$A_{20}^{15} = \frac{20!}{(20-15)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 20 = 20\,274\,183\,401\,472\,000.$$

Значит, существует 20 274 183 401 472 000 способов посадки пятнадцати курсантов за десять столов.

Можно рассуждать иначе. Для первого курсанта существует 20 способов выбора места в аудитории. Так как одно место уже занято, то для второго курсанта способов занять место остается 19. После того, как расселись 14 курсантов, последнему пятнадцатому придется выбирать только из 6 оставшихся мест. В виду того, что способы для каждого курсанта могут последовательно состояться, то, согласно правилу произведения, перемножим все натуральные числа от шести до двадцати включительно и получим тот же ответ.

Конечно, полученное значение для количества способов огромно. Ведь, если все способы проверить на практике, то отводя на реализацию каждой новой конфигурации только одну секунду, для непрерывного выполнения всех пересадок курсантов потребуется 642 450 104 года.

1.2.2. Перестановки без повторений

Частным случаем размещений без повторений являются перестановки.

Определение перестановок без повторений. Размещение из n элементов по n элементов называется перестановкой из n элементов. Различные

перестановки из n элементов отличаются только порядком элементов. Обозначаются перестановки знаком P_n .

Формулу перестановок из n элементов легко получить из формулы для размещений. По определению перестановок имеем:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Таким образом,

$$P_n = n! \quad (1.4)$$

Пример. Сколькими способами можно расположить шесть автомобилей в одной колонне?

Решение. В нашей задаче мы выбираем все шесть элементов из имеющегося множества автомобилей. Порядок нахождения машин в колонне важен. Каждый автомобиль уникален, и поставить его в колонну два или более раз мы не сможем. Тогда по формуле перестановок без повторений имеем:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Пример. На книжной полке находятся пять книг по математике, две по физике и четыре по программированию. Необходимо определить, сколькими способами можно разместить эти издания на полке, если книги по каждому научному разделу должны стоять вместе.

Решение. Данная задача содержит дополнительные ограничения порядка элементов. Разобьем представленное множество книг на 3 части согласно представленным научным разделам: математика, физика, программирование. Каждый раздел на полке должен иметь свое место. Количество способов установления порядка разделов можно определить, как число перестановок из трех элементов:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Но и в каждом научном разделе книги также могут иметь свой порядок. Аналогично рассчитаем количество способов размещения книг по каждой дисциплине.

по математике $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$;

по физики $P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$;

по программированию $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Учитывая все вышесказанное и используя правило умножения, получим:

$$P_3 \cdot P_5 \cdot P_2 \cdot P_4 = 6 \cdot 120 \cdot 2 \cdot 24 = 34560.$$

1.2.3. Сочетания без повторений

Мы рассматривали конфигурации, в которых место элементов в выбранном подмножестве имел существенное значение. Но на практике часто порядок элементов не имеет никакого значения.

Определение сочетания без повторений. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется сочетанием из n элементов по k элементов.

Это определение имеет и другую формулировку. Сочетания из n элементов по k элементов – это все k -элементные подмножества n -элементного множества, причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют только неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, в этом случае не считаются различными. Обозначаются сочетания символом C_n^k (число сочетаний из n по k).

Пусть количество всевозможные неупорядоченные подмножества, содержащие k элементов, их число равно C_n^k . Тогда из каждого указанного подмножества (содержащего k элементов) перестановкой его элементов можно получить все упорядоченные подмножества, которых будет ровно в $k!$ раз больше, так как каждое k -элементное множество можно упорядочить $k!$ способами. Значит

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = P_k C_n^k. \quad (1.5)$$

Следовательно,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.6)$$

Таким образом, количество сочетаний из n по k определяется формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.7)$$

Пример. Необходимо выбрать для букета семь из пятнадцати имеющихся у продавца алых роз. Сколькими способами это можно осуществить?

Решение. Суть задачи заключается в выборе семи элемента из множества, содержащего пятнадцать элементов. В отличие от размещения выбранное подмножество элементов является неупорядоченным, так как отобранные розы будут помещены в один букет и порядок расположения в нем цветов неважен. Кроме того, будем считать, что каждая роза уникальна, следовательно, повторений выбранных элементов не будет. Тогда, используя формулу количества сочетаний без повторений, имеем:

$$C_{15}^7 = \frac{15!}{(15-7)!7!} = \frac{15!}{8!7!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} = 6435.$$

Таким образом, количество способов данного выбора равна 6435.

Пример. В учебной группе девять юношей и семь девушек. Для несения наряда необходимо выделить восемь курсантов. Сколькими способами это можно сделать, если среди выделяемых курсантов должно быть три девушки?

Решение. Для решения задачи определимся, что производится одновременный выбор элементов из двух множеств. Из девяти юношей мы выбираем пять человек, а из семи девушек – три человека. По условию задачи все выбираемые элементы не могут повторяться, а их порядок в выбранных подмножествах неважен. По формуле количества сочетаний без повторений получим:

$$\text{для юношей} \quad C_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!5!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126;$$

$$\text{для девушек} \quad C_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Таким образом, количество комбинаций выбора юношей равно 126, а девушек – 35. Так как оба выбора осуществляются одновременно, то необходимо использовать правила произведения:

$$C_9^5 \cdot C_7^3 = 126 \cdot 35 = 4760.$$

Значит, количество вариантов назначения в наряд курсантов равно 4760.

Пример. Сколько существует способов расстановки двадцати полицейских для охраны трех объектов, если для выполнения задания на каждый из этих объектов требуется пять сотрудников?

Решение. Задачу разделим на три этапа, по количеству охраняемых объектов. На первый объект требуется пять полицейских, следовательно, количество вариантов расстановки сотрудников будет:

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{(20-5)!5!} = \frac{20!}{15!5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5} = 15505.$$

На второй объект выберем следующие пять полицейских из пятнадцати оставшихся:

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{(15-5)!5!} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5} = 3003.$$

И, наконец, на третий объект выберем еще пять полицейских из десяти:

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!5!} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5} = 252.$$

Так как все вышеперечисленные выборы осуществляются одновременно, то используя правило умножения получим ответ:

$$C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 = 15505 \cdot 3003 \cdot 252 = 11\,733\,501\,780.$$

Таким образом, для охраны трех объектов можно выделить полицейских 11 733 501 780 способами.

1.3. Комбинаторные конфигурации с повторениями

В ряде комбинаторных задач требуется исследовать конфигурации, связанные с неоднократным выбором одних и тех же элементов заданного множества либо с действиями с неограниченным количеством элементов,

объединенных по какому-либо определяющему признаку. Такие конфигурации называют конфигурациями с повторениями. Существенная часть прикладных задач комбинаторики содержит размещения, сочетания и перестановки с повторениями.

1.3.1. Размещения с повторениями

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Упорядоченный набор из k элементов, среди которых могут быть одинаковые элементы, называется размещением с повторениями из n элементов по k элементов.

Можно привести другую формулировку определения размещений с повторениями.

Размещение с повторениями из n элементов по k – это все k -элементные множества, в которых каждый элемент исходного множества может повторяться, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Размещение с повторением часто называют последовательным выбором с возвращением, так как эта конфигурация описывает повторные выборки при статистической обработке данных.

Количество размещений с повторениями обозначаются символом $\bar{A}_n^k$ (число размещений с повторениями из n по k). Из правила произведения можно получить формулу для подсчета количества размещений с повторениями:

$$\bar{A}_n^k = n^k. \quad (1.8)$$

Пример. Сейф имеет сложный цифровой замок, состоящий из 10 дисков. На каждом диске можно выставить цифру от «0» до «9» или латинскую букву от «A» до «F». Сколькими различными наборами знаков может быть представлен код замка.

Решение. В настоящей задаче представлено множество, состоящее из 16 элементов: «0», «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9», «A», «B», «C», «D», «E», «F». Из заданного множества необходимо выбрать 10 элементов, причем составленные конфигурации являются упорядоченными, а каждый элемент в наборе может повторяться не более 10 раз. Например, набор

«А», «А», «А», «7», «7», «7», «7», «7», «7», «7»

содержит три буквы «А» и семь цифр «7». Тогда, используя формулу числа размещений с повторениями из 16 по 10, получим:

$$\overline{A}_{16}^{10} = 16^{10} = 1099511627776.$$

Таким образом, символьный код для описанного замка имеет более триллиона комбинаций.

В конфигурации размещение с повторением количество выборок k может быть больше, чем количество элементов n исследуемого множества.

Пример. Имеется 23 красных, 42 синих и 19 желтых шаров. Шары отличаются только цветом. Случайным образом отобраны 8 шаров и расставлены в ряд. Сколькими способами может быть составлен такой ряд?

Решение. В условии задачи указаны точные количества красных, синих и желтых шаров. Однако для решения данной задачи нам важно знать лишь то, что количество шаров каждого цвета превышает восемь. Будем считать, что у нас только три элемента, назовем их «красный», «синий» и «желтый», и каждый элемент может повторяться, по крайней мере, 8 раз. Порядок цвета элементов в выбранном ряду важен. Таким образом, используем формулу числа размещений с повторениями из трех элементов по восемь:

$$\overline{A}_3^8 = 3^8 = 6561.$$

Следовательно, количество способов составления упорядоченного ряда из 8 шаров равно 6561.

Пример. Сколькими способами можно разместить 7 служебных автомобилей в 5 секторах охраняемой территории при условии, что в каждом секторе осталось достаточно свободных парковочных мест для размещения всех автомобилей.

Решение. Эту задачу можно рассмотреть следующим образом. Будем исходить из того, что для размещения каждого автомобиля имеется множество из пяти повторяемых свободных парковочных мест, по одному на каждом секторе. Мы выбираем сектор! Номер места в каждом секторе не важен, зато упорядочены автомобили, то есть имеет значение, в каком секторе разместится

тот или иной автомобиль. Следовательно, применяя формулу числа размещений с повторениями из пяти элементов по семь, получим:

$$\overline{A}_5^7 = 5^7 = 78125.$$

Значит, количество способов для размещения 7 служебных автомобилей в 5 секторах охраняемой территории равно 78 125.

1.3.2. Перестановки с повторениями

Определение. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Упорядоченный набор k элементов этого множества такой, что 1-й элемент взят k_1 раз, 2-й элемент – k_2 раза, ..., n -й элемент – k_n раз ($k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$) называется перестановкой с повторениями длины k из n элементов.

Приведем другую формулировку определения размещений с повторениями. Перестановкой с повторениями из n элементов по k называется всякое k -элементное множество, в котором каждый i -й элемент заданного множества повторяется k_i раз, отличающееся составом элементов или порядком их следования.

Количество перестановок с повторениями длины k из n разных элементов, взятых соответственно по $k_1, k_2, \dots, k_n$ раз каждый, обозначается $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Формула для числа перестановок с повторениями получается непосредственно из правила умножения:

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}. \quad (1.9)$$

Пример. Для посадки декоративных деревьев в парке Краснодарского университета МВД подготовлены 20 лунок. Сколькими способами можно разместить в них 8 лип, 5 кленов и 7 катальп, если считать деревья одного сорта одинаковыми?

Решение. Можно считать, что мы имеем множество сортов декоративных деревьев, состоящее из $n = 3$ элементов: «липа», «клен» и «катальпа». Каждый элемент повторяется: количество лип $k_1 = 8$, кленов $k_2 = 5$, катальп $k_3 = 7$. Всего $k = 20$ деревьев. Тогда, используя формулу числа перестановок с повторениями, получим:

$$P(8,5,7) = \frac{20!}{8! \cdot 5! \cdot 7!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 20}{1 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 7} = 99\,768\,240.$$

Сократив значения факториалов, получим, что посадку деревьев можно сделать 99 768 240 способами, считая деревья одного сорта одинаковыми.

Если бы в условии задачи количество лунок было бы больше, чем количество саженцев, тогда после посадки остались бы пустые лунки и следовало бы ввести еще один сорт деревьев – «пусто» и решать задачу уже с множеством из четырех повторяющихся элементов.

14.3.3. Сочетания с повторениями

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Любой неупорядоченный набор из k элементов, среди которых могут быть одинаковые элементы исходного множества, называется сочетанием с повторениями из n элементов по k элементов.

Можно привести другую формулировку определения размещений с повторениями.

Сочетание с повторениями из n элементов по k – это все k -элементные множества, в которых каждый элемент может повторяться, отличающиеся только составом элементов.

Количество сочетаний с повторениями обозначаются $\overline{C}_n^k$ (число сочетаний с повторениями из n по k). Формула для подсчета количества сочетаний с повторениями выглядит следующим образом:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}. \quad (1.10)$$

Пример. В буфете продаются 4 вида пирожных. Сколькими способами можно приобрести 10 пирожных, при условии наличия на прилавке большого количества пирожных каждого вида?

Решение. Итак, по условию задачи имеется множество, состоящее из четырех пирожных, каждое из которых может повторяться, по крайней мере, 10 раз. Все пирожные приобретаются одновременно, порядок их появления на прилавке или, например, поедания не важен. Следовательно, данная

конфигурация – сочетания с повторениями. Используя первую часть формулы числа сочетаний с повторениями из 4 по 10, рассчитаем количество способов покупки:

$$\overline{C}_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{(13-10)! \cdot 10!} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = 286.$$

Значит, существует 286 способов приобретения десяти пирожных при условиях, описанных в условии задачи.

1.4. Разбиения

Разбиением исходного n -элементного множества называется совокупность непересекающихся k подмножеств данного множества, содержащих $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ элементов данного множества, причем $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$.

Разбиения бывают упорядоченными и неупорядоченными. Если подмножества пронумерованы и их номера зафиксированы, то разбиения считаются упорядоченными. В противном случае разбиения являются неупорядоченными. Как в упорядоченных, так и в неупорядоченных разбиениях порядок расположения элементов в получившихся подмножествах не важен.

На практике обычно используют упорядоченные разбиения множеств. Упорядоченное разбиение множества из n элементов на k подмножеств обозначаются следующим выражением: $R(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$. Данная запись указывает на то, что в первое подмножество содержит ровно n_1 элементов, второе – n_2 элементов, третье – n_3 элементов, ..., k -ое – n_k элементов.

Для подсчета числа упорядоченных разбиений можно использовать следующую формулу:

$$R(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}. \quad (1.11)$$

Пример. Шесть книг нужно расставить по трем полкам так, чтобы на одной полке оказалось две книги, на второй – три книги, а на третьей – одна. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В данной задаче мы имеем упорядоченные разбиения множества из $n = 6$ книг на $k = 3$ подмножества. Причем, первое подмножество содержит $n_1 = 2$ элемента, второе – $n_2 = 3$ элемента, а третье $n_3 = 1$ элемент. Используя формулу числа упорядоченных разбиений получим:

$$R(2,3,1) = \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 60.$$

Таким образом, если не учитывать внутренний порядок книг на каждой полке, расставить книги указанным способом можно 60 способами.

Пример. Сколькими способами можно разбить группу из 25 курсантов на три подгруппы по 6, 9 и 10 человек в каждой группе?

Решение. По условию задачи общее количество курсантов в группе $n = 25$, количество подгрупп, на которые разбивается наша группа, $k=3$, а количество курсантов в каждой подгруппе определены соответственно, как $n_1=6$, $n_2=9$, $n_3=10$. Число упорядоченных разбиений группы рассчитаем по формуле:

$$R(6,9,10) = \frac{25!}{6! \cdot 9! \cdot 10!} = 16\,360\,143\,800.$$

Таким образом, группу курсантов из 25 человек можно разбить на три подгруппы по 6, 9 и 10 человек 16 360 143 800 способами. Число впечатляет!

Пример. Сколькими способами можно разделить группу из восьми оперативных сотрудников на две части для проведения поиска и задержания преступников в городском парке и торговом центре, учитывая, что в каждой группе должно быть не менее трех человек?

Решение. Решение данной задачи сводится к исследованию всех возможных вариантов разбиений группы из восьми человек на две части, содержащих не менее трех сотрудников.

Варианты	Городской парк	Торговый центр
Вариант 1	3	5
Вариант 2	4	4
Вариант 3	5	3

Таких вариантов получилось равно три. Рассчитаем число возможных разбиений в каждой конфигурации:

$$R(3,5) = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56; \quad R(4,4) = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70; \quad R(5,3) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$$

Сложив количества разбиений в каждом из выше перечисленных вариантов, получим:

$$R = R(3,5) + R(4,4) + R(5,3) = 56 + 70 + 56 = 182.$$

Значит, группу из восьми оперативных сотрудников можно разделить на две части 182 способами.

Пример. Для выполнения боевого задания подразделение из 10 человек необходимо разделить на 2 части в отношении 4:1. Сколько вариантов выбора сотрудников подразделения может быть?

Решение. По условию задачи группу из 10 человек необходимо разделить на 2 части в отношении 4:1, следовательно, в первую часть будет входить 8 человек, а во вторую – 2 человека.

Число упорядоченных разбиений группы рассчитаем по формуле:

$$R(8,2) = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45.$$

Таким образом, группу из 10 человек можно разбить на 2 части в отношении 4:1 ровно 45 способами.

Глава 2. Булева алгебра

Несмотря на то, что понятие логики было известно еще в древнем Риме, математическое обоснование этой науки начало разрабатываться лишь в XVII веке. Только тогда была введена структура математической логики; характеризующейся своей формой, а не содержанием высказываний.

В своей работе «Исследование законов мышления» (1854) ирландский математик *Джордж Буль* (1815–1864) ввел основные понятия нового раздела математики – алгебры логики. Булевские понятия логики основаны на математической формализации логических построений посредством специальных алгебраических методов. В честь *Дж. Буля* данный раздел математики назвали *булевой алгеброй*. Большой вклад в булеву алгебру внес известный шотландский ученый *А. де Морган* (1806–1871).

Развитию булевой алгебры способствовали исследования немецкого математика *Э. Шрёдера* (1841–1902), разработавшего в 1877 г. полную систему аксиом булевой алгебры. Труды *А. Уайтхеда* (1861–1947) продолжили исследования систем булевых аксиом и теорем и полностью абстрагировали понятия булевой алгебры от представлений классической логики высказываний. Алгебра предикатов

В XX веке булева алгебра применялась не только в математической логике, но и дала основу для создания новых разделов дискретной математики. Такие выдающиеся ученые, как *Дж. Бёркхоф* (1884–1944), *О. Оре* (1899–1968), *Б. Ван дер Варден* (1903–1996), использовали ее методы в функциональном анализе, геометрии, для изучения различных алгебраических структур.

Широкое практическое значение булева алгебра приобрела в связи с бурным развитием электроники и вычислительной техники. В работах *Р. Хартли* (1888–1970), *К. Шеннона* (1916–2001), *А Реньи* (1921–1970) аппарат булевой алгебры способствовал созданию новых научных направлений: теории информации, теории автоматов, теории вероятностных схем, теории систем управления. В настоящее время вся современная цифровая техника, любые

компьютерные системы основаны на использовании математического аппарата алгебры Буля.

2.1. Основные понятия булевой алгебры

2.1.1. Основные определения

Определение. Булевой алгеброй называется непустое множество элементов, принимающих значения 1 и 0, и на котором определены три операции: дизъюнкция, конъюнкция и инверсия.

Дизъюнкция или логическое сложение – это бинарная операция, она обычно обозначается знаком сложения «+» или « $\vee$ », которые ставятся между двумя складываемыми элементами. Дизъюнкцию можно определить следующим образом.

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкция или логическое умножение также является бинарной операцией, обозначается знаком умножения « $\cdot$ » либо « $\wedge$ » между двумя умножаемыми элементами, но чаще никакой знак вообще не ставится. Конъюнкцию можно описать таблицей.

A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Инверсия или логическое отрицание является унарной операцией. Она обозначается надчеркиванием над инвертированным выражением или знаком « $\neg$ » перед ним. При использовании инверсии единичное значение становится нулем, и наоборот ноль превращается в единицу.

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Приведенные таблицы принято называть *таблицами истинности*.

В булевой алгебре часто встречаются записи, содержащие переменные величины. Такие выражения называют *булевыми формулами*. В формулы могут входить одновременно две и более операций. В булевой алгебре определен следующий приоритет выполнения заданных операций: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция. Скобки в булевых выражениях имеют тот же смысл, что и в алгебре чисел.

Пример. Вычислить значение выражения $\overline{1(0 + \bar{0} \cdot 1)}$.

Решение. Сначала рассмотрим действия в скобках $(0 + \bar{0} \cdot 1)$. Конъюнкция является более приоритетной, чем дизъюнкция, поэтому выполним $\bar{0} \cdot 1$. Учитывая, что $\bar{0} = 1$, получим $\bar{0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$. Затем сложим логическое значение 0 и получившуюся единицу: $0 + 1 = 1$. Следующим действием является конъюнкция единицы и значения выражения в скобках: $1 \cdot 1 = 1$. И, наконец, инвертируя единицу, получим 0. Таким образом, значение выражения $\overline{1(0 + \bar{0} \cdot 1)}$ равно 0.

2.1.2. Свойства булевых операций

Булевы операции обладают следующими свойствами.

1. Коммутативность

$$A + B = B + A$$

$$AB = BA$$

2. Ассоциативность

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C$$

3. Дистрибутивность

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

Кроме того, для булевых операций справедливы следующие утверждения.

1. Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} = A$$

2. Идемпотентный закон

$$A + A = A$$

$$AA = A$$

3. Граничный закон

$$A + 0 = A$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot 1 = A$$

4. Закон склеивания

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A\bar{A} = 0$$

5. Закон поглощения

$$A + AB = A$$

$$A(A + B) = A$$

6. Закон де Моргана

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$$

Некоторые из вышеприведенных свойств и законов булевой алгебры неочевидны. Однако любое из записанных утверждений легко доказать, используя тот факт, что любая булева переменная может принимать только одно из двух значений: 0 или 1. Следовательно, подставляя все возможные комбинации значений переменных, входящих в формулу, можно проверить любое из равенств.

Пример. Доказать истинность закона де Моргана.

Решение. Докажем сперва первую часть закона де Моргана $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$. Найдем значения выражения $\overline{AB}$, стоящего в левой части равенства, подставляя в него все комбинации значений A и B .

A	B	$\overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Теперь рассчитаем значения $\bar{A} + \bar{B}$.

A	B	$\bar{A} + \bar{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

В результате мы видим, что для соответствующих пар значений A и B результаты формул $\overline{AB}$ и $\bar{A} + \bar{B}$ равны. Таким образом, эти формулы являются эквивалентными.

Аналогично построим таблицы истинности для формул второй части закона де Моргана $\overline{A+B} = \overline{A}\overline{B}$.

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	$\overline{A}\overline{B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Результаты расчетов в левой и правой частях равенства при соответствующих значениях переменных также идентичны, следовательно, закон де Моргана выполняется.

2.1.3. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы записи

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется запись, в которой булева формула представлена в виде дизъюнкции выражений, каждое из которых представляет либо отдельную переменную, либо конъюнкцию нескольких различных переменных в прямой или инверсной форме.

Аналогично, *конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* будем называть такую запись, в которой булева формула представлена в виде конъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельную переменную, либо дизъюнкцию нескольких различных переменных в прямой или инверсной форме.

Записи в виде одной переменной в прямой или инверсной форме принято считать записанными в ДНФ и КНФ одновременно.

Пример. Определить формы записи представленных формул:

- а) $\overline{AB} + \overline{A}C + B$ в) $A + \overline{B} + \overline{C} + D$ д) $(A + \overline{A})(\overline{B} + \overline{C})$
 б) $\overline{A}(C + AB)$ г) $(A + B)(A + B + C)$ е) $\overline{D}$

Решение. Выражение а) $\overline{AB} + \overline{A}C + B$ записано в виде дизъюнкции конъюнкций $\overline{AB}$, $\overline{A}C$ и отдельной переменной B , следовательно, оно представлено в ДНФ. Запись б) $\overline{A}(C + AB)$ представляет собой конъюнкцию отдельной переменной в инверсной форме $\overline{A}$ и выражения $C + AB$, которое не является чистой дизъюнкцией, так как содержит произведение AB . Данная

запись не подходит ни под одно из определений. Формула в) $A + \bar{B} + \bar{C} + D$ выведена в виде дизъюнкции отдельных переменных A , $\bar{B}$, $\bar{C}$ и D , поэтому ее можно считать представленной в ДНФ. В примере г) $(A+B)(A+B+C)$ конъюнкция дизъюнкций $A+B$ и $A+B+C$ очевидно записана в КНФ. Запись д) $(A+\bar{A})(\bar{B}+\bar{C})$ не подходит под определение КНФ, так как множитель $A+\bar{A}$ содержит два раза одну и ту же переменную в прямой и инверсной форме. И, наконец, выражение е) $\bar{D}$ можно считать записанным и в ДНФ и в КНФ.

2.2. Булевы функции

Изучая разделы математического анализа, мы часто сталкивались с понятием функции. Функцию мы всегда рассматривали как некоторую зависимость между элементами различных множеств. Причем, функция всегда представляла собой математическое правило, выраженное в виде аналитической формулы, таблицы или графика, по которому некоторое численное значение рассчитывалось в соответствие со значениями одного или нескольких независимых переменных.

2.2.1. Определение булевой функции

В булевой алгебре также существует понятие функции. *Булевой функцией* можно назвать однозначное соответствие между значениями одного или нескольких булевых переменных, принимающих логические значения 0 или 1, называемых *аргументами булевой функции*, и результирующим значением булева множества. Значение булевой функции полностью определяется значениями ее аргументов и логическими связями.

Для задания булевой функции можно воспользоваться любой булевой формулой. Например, в записи

$$f = \overline{\bar{C}(B + A\bar{C}\bar{D})}$$

булева функция f зависит от значений A , B , C и D . Она, как и независимые аргументы в правой части выражения, является двоичной переменной.

Число независимых аргументов в булевой функции называют *арностью* или *местностью* функции. Если арность булевой функции равна нулю, то булева функция превращается в *булеву константу*. В приведенном выше примере арность функции равна четырем.

Пусть всем аргументам булевой функции присвоены определенные значения. Совокупность таких значений называют *набором значений аргументов*, или просто набором. Любой набор значений булевой функции представляет собой последовательность, состоящую из цифр 0 и 1, в которой первая цифра определяет значение первого аргумента, вторая цифра второго аргумента, третья – третьего аргумента и т.д.

Например, запись 0110 означает, что первый аргумент 4-арной булевой функции принимает значение 0, второй аргумент – значение 1, третий – 1, четвертый – 0.

Теперь осталось определить, какой из аргументов булевой функции является первым, какой – вторым, какой – третьим. а какой – четвертым? Для определенности номера всех аргументов принято располагать в алфавитном порядке их идентификаторов.

Например, для булевой функции

$$f = (P + \overline{C})(\overline{DB} - A)$$

под номером один понимают аргумент A , вторым является аргумент B , третьим будет C , четвертым D , а пятым P .

При использовании набора 10001 значение данной функции равно:

$$f(10001) = (1 + \overline{0})(\overline{00} + 1) = 1.$$

Для булевой функции одной переменной наборы представлены значениями 1 и 0. Для функции двух аргументов получим следующие наборы значений аргументов: 00, 01, 10, 11, следовательно, количество наборов равно четырем. Для функции трех переменных число наборов увеличивается еще в два раза: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, то их станет восемь. Таким образом, каждый раз увеличивая количество объясняющих переменных на

единицу, получаем, что общее число наборов значений аргументов булевой функции n аргументов равно 2^n .

2.2.2. Способы задания булевых функций

Как и обычную функцию нескольких действительных переменных булеву функцию можно задавать различными способами. Самыми популярными из них являются аналитический и табличный.

Аналитический способ представлен в виде математического выражения с использованием идентификаторов переменных и логических операций. Аналитический способ достаточно компактен, однако трудоемок. Для вычисления сложных функций часто необходимо разбивать вычисления на отдельные действия, учитывающие приоритет булевых операций и скобки.

Пример. Рассчитать значение функции четырех переменных $f = \overline{\overline{(B + AC)}(\overline{AD} + \overline{ABCD})}$ для набора 1010.

Решение.

1. Подставим набор значений 1010 в выражение для функции f :

$$f(1010) = \overline{\overline{(0 + 11)}(\overline{10} + \overline{1010})}.$$

2. Выполним вычисления в первой скобке:

$$\overline{0 + 11} = \overline{0 + 1} = \overline{0 + 0} = \overline{0} = 1.$$

3. Выполним действия во второй скобке:

$$\overline{10} + \overline{1010} = \overline{0} + 0000 = 1 + 0 = 1.$$

4. Перемножим значения, полученные в первом и во втором действиях, и инвертируем полученное значение:

$$f(1010) = \overline{11} = \overline{1} = 0.$$

Таким образом, значение функции для набора 1010 равно 1.

Табличный способ задания функции представляет совокупность всех наборов значений аргументов булевой функции и соответствующих значений функции для каждого набора. Этот способ может быть представлен в виде таблицы истинности.

Пример. Составим таблицу истинности для функции $f = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B} + \overline{A}C$.

Решение. Для построения таблицы истинности необходимо рассчитать значения функции f для всех 2^3 наборов значений аргументов булевой функции.

1. $f(000) = \overline{0}0\overline{0} + 0\overline{0} + \overline{0}0 = 0 + 0 + 0 = 0$; 2. $f(001) = \overline{0}0\overline{1} + 0\overline{0} + \overline{0}1 = 0 + 0 + 1 = 1$;
3. $f(010) = \overline{0}1\overline{0} + 0\overline{1} + \overline{0}0 = 1 + 0 + 0 = 1$; 4. $f(011) = \overline{0}1\overline{1} + 0\overline{1} + \overline{0}1 = 0 + 0 + 1 = 1$;
5. $f(100) = \overline{1}0\overline{0} + 1\overline{0} + \overline{1}0 = 0 + 1 + 0 = 1$; 6. $f(101) = \overline{1}0\overline{1} + 1\overline{0} + \overline{1}1 = 0 + 1 + 1 = 1$;
7. $f(110) = \overline{1}1\overline{0} + 1\overline{1} + \overline{1}0 = 1 + 0 + 0 = 1$; 8. $f(111) = \overline{1}1\overline{1} + 1\overline{1} + \overline{1}1 = 0 + 0 + 0 = 0$.

Затем полученные значения запишем в таблицу истинности.

№ набора	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

2.3. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

2.3.1. Минтермы

Минтермом n аргументов булевой функции называется такая конъюнкция этих аргументов, в которую каждый аргумент входит один и только один раз в прямой или инверсной форме. Все аргументы располагаются в минтерме в алфавитном порядке.

Примеры минтермов.

Минтермы двух аргументов: $\overline{A}\overline{B}$, AB , $\overline{A}B$.

Минтермы трех аргументов: $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, $\overline{A}BC$, $\overline{A}B\overline{C}$.

Минтермы четырех аргументов: $ABCD$, $\overline{A}\overline{B}CD$, $\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$.

Каждый минтерм n аргументов имеет свой уникальный номер, по которому его можно точно идентифицировать. Номер минтерма можно

получить, записав вместо каждого из аргументов, входящих в минтерм, единицу, если аргумент записан в прямой форме, или ноль, если наблюдается инверсия. Таким образом, получим двоичный код минтерма.

Пример. Найти номер минтерма четырех аргументов $\overline{A}\overline{B}CD$.

Решение. Выпишем булевы аргументы в виде двоичного кода. Для этого инверсии $\overline{A}$ и $\overline{B}$ представим нулями, а прямое вхождение в минтерм переменных C и D запишем как последовательность единиц. В результате номер минтерма $\overline{A}\overline{B}CD$ будет равен 0011 в двоичной системе исчисления.

Номер минтерма обладает очень важной особенностью. Он является единственным набором значений аргументов, на котором минтерм принимает единичное значение. Действительно, подставляя как набор значений двоичный код номера минтерма, мы в любом случае получаем конъюнкцию n единиц, что в результате всегда дает нам единицу. При подстановке в минтерм любого другого набора конъюнкция будет содержать хотя бы один ноль, что приведет к нулевому значению минтерма.

Минтермы обозначаются строчной буквой m с нижним индексом, который является номером минтерма, записанным в десятичной системе исчисления.

Пример. Записать в виде m_i минтерм $\overline{A}\overline{B}C\overline{D}\overline{E}$.

Решение. Двоичным кодом минтерма является набор 10100. Переведем в десятичную систему это число.

$$10100_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 4 = 20.$$

Тогда минтерм $\overline{A}\overline{B}C\overline{D}\overline{E}$ можно записать в виде m_{20} .

Пример. Выписать все минтермы функции f от аргументов A, B, C .

Решение. Рассмотрим все возможные минтермы в порядке возрастания номеров. Количество таких наборов, очевидно, равно количеству различных наборов аргументов, то есть $2^3=8$.

$$m_0 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}, \quad m_1 = \overline{A}\overline{B}C, \quad m_2 = \overline{A}B\overline{C}, \quad m_3 = \overline{A}BC,$$

$$m_4 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}, \quad m_5 = \overline{A}\overline{B}C, \quad m_6 = \overline{A}B\overline{C}, \quad m_7 = \overline{A}BC.$$

Теорема 2.1. Конъюнкция двух и более различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, тождественно равна нулю.

Действительно, при использовании любого набора только одно из значений минтермов, двоичный номер которого совпадает с выбранным набором, будет равно единице, следовательно, все остальные минтермы будут равны нулю. Значит, конъюнкция различных минтермов также будет равна нулю.

Пример. Вычислим конъюнкцию минтермов функции четырех аргументов m_5, m_{24}, m_{14} .

Решение. Согласно теореме о конъюнкции минтермов различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, тождественно равна нулю. На самом деле, минтерм $m_5 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}E$ принимает значение 1 только на наборе 00101, минтерм $m_{24} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}E$ не равен нулю на всех наборах, кроме 11000, а минтерм $m_{14} = \overline{A}B\overline{C}\overline{D}E$ равен нулю всегда, кроме набора 01110. Следовательно, конъюнкция этих минтермов всегда равна нулю.

2.3.2. Определение СДНФ

Представление булевой функции в виде дизъюнкции минтермов n аргументов называется записью в *совершенной дизъюнктивной нормальной форме*, или сокращённо – СДНФ. Всякая булева функция заданного числа аргументов представима в совершенной дизъюнктивной нормальной форме, единственным образом.

Пример. Представить булеву функцию f , которая принимает единичное значение на наборах 0010, 0101, 1001, 1111 в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

Решение. Для представления функции в СДНФ выпишем сумму минтермов, соответствующих наборам 0010, 0101, 1001, 1111. Аналитическое представление функции f в СДНФ примет вид:

$$f = \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{B}\overline{C}D + ABCD.$$

Для представления функции в СДНФ можно использовать и обозначения минтермов. Для этого переведем двоичные коды в десятичную систему.

$$f = m_2 + m_5 + m_9 + m_{15}.$$

Кроме того, для представления функции в СДНФ достаточно указать только номера наборов, на которых функция равна единице:

$$f = (2, 5, 9, 15).$$

Так как любую булеву функцию можно представить в виде дизъюнкции 2^n минтермов, то число различных булевых функций n аргументов будет равно 2^{2^n} .

Согласно данному утверждению число булевых функций двух аргументов равно $2^{2^2} = 16$, четырех переменных равно $2^{2^4} = 65536$, и, например, число функций шести переменных – $2^{2^6} = 18446744073709600000$. Видно, как велико разнообразие булевых функций.

2.3.3. Разложение булевых функций

Всякую булеву функцию можно разложить по любому из аргументов. Разложение выполняется следующим образом:

$$f(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n) = A_i f(A_1, A_2, \dots, 1, \dots, A_n) + \bar{A}_i f(A_1, A_2, \dots, 0, \dots, A_n)$$

Пример. Разложим функцию трех аргументов $f = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B} + \bar{A}C$ по аргументу B .

Решение. Используя формулу разложения, получим:

$$\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B} + \bar{A}C = B(\bar{A}1\bar{C} + A1 + \bar{A}C) + \bar{B}(\bar{A}0\bar{C} + A0 + \bar{A}C).$$

Преобразуем выражения в скобках, а затем скобки раскроем:

$$B(\bar{A}\bar{C} + \bar{A}C) + \bar{B}(A + \bar{A}C) = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}C.$$

Если разлагать булеву функцию в любом порядке последовательно по всем ее аргументам, то окончательно, после n -ного шага, получим эту функцию в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

Пример. Представить булеву функцию трех аргументов $f = \bar{A} + B\bar{C}$ в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

Решение. Разложим функцию $f = \bar{A} + B\bar{C}$ последовательно по аргументам A, B , а затем по C .

Сначала выполняем действия с аргументом A .

$$\bar{A} + B\bar{C} = A(\bar{1} + B\bar{C}) + \bar{A}(\bar{0} + B\bar{C}) = AB\bar{C} + \bar{A}.$$

Аналогичные действия предпринимаем по аргументу B .

$$AB\bar{C} + \bar{A} = B(A\bar{1}\bar{C} + \bar{A}) + \bar{B}(A\bar{0}\bar{C} + \bar{A}) = AB\bar{C} + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}.$$

На третьем шаге разложим функцию по C .

$$\begin{aligned} AB\bar{C} + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} &= C(AB\bar{1} + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}) + \bar{C}(AB\bar{0} + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}) = \\ &= \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}. \end{aligned}$$

Перепишем полученное выражение функции f в порядке возрастания номеров минтермов:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C}.$$

Запишем полученную СДНФ с помощью специальных обозначений, учитывая двоичные коды 000, 001, 010, 011, 110, соответствующие минтермам:

$$f = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_6.$$

И, наконец, выведем функцию в самом простом виде:

$$f = (0, 1, 2, 3, 6).$$

2.4. Карты Вейча

Приведенные примеры прошлой лекции показывают, как с помощью разложения можно привести булевы функции к СДНФ. Однако очевидно, что с увеличением количества аргументов резко возрастает количество логических операций и расчеты становятся все более трудоемкими.

2.4.1. Определение карт Вейча

Для упрощения вычислительного процесса используются специальные табличные методы преобразования булевых функций. К ним относятся карты

Вейча. Карты позволяют легко осуществлять различные преобразования булевых функций с небольшим числом аргументов.

Рассмотрим карту Вейча для булевой функции двух аргументов (рис.2.1.а).



Рис. 2.1. Карта Вейча двух аргументов

Карта разделена на четыре части. В левой половине карты располагаются минтермы, содержащие A , а в правой – инверсию $\bar{A}$. В верхней половине находятся минтермы, содержащие B , а в нижней $\bar{B}$. На рисунке 2.1.б предложена карта Вейча, содержащая десятичные номера минтермов.

На карте Вейча для функции трёх аргументов (рис. 2.2 а, б) аналогично расположены минтермы или их номера. Интересно, как трехмерное изображение представлено в обычной таблице.

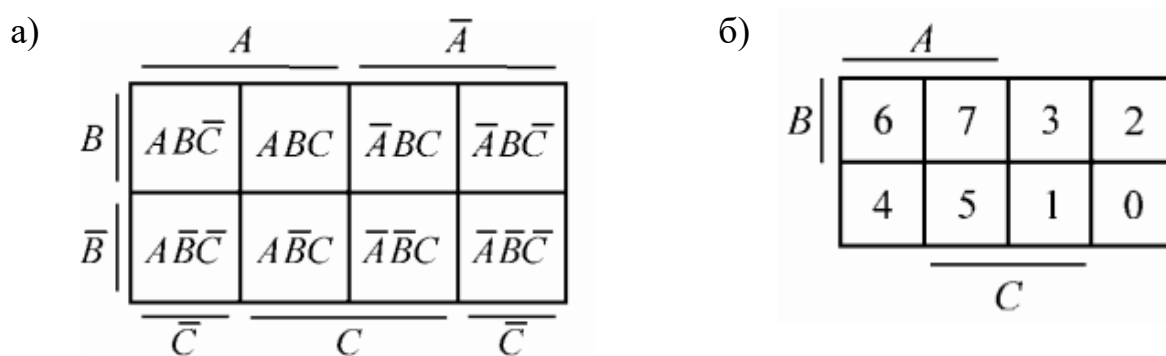


Рис. 2.2. Карта Вейча трех аргументов

Еще сложнее выглядит карта Вейча четырёх аргументов. На рис 2.3 а, б изображена карта с аналитическим представлением минтермов и их десятичных номеров.

a)

$\overline{A}$			
$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$
$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$
$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$
$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$
C			

б)

$\overline{A}$			
12	14	6	4
13	15	7	5
9	11	3	1
8	10	2	0
C			

Рис. 2.3. Карта Вейча четырех аргументов

2.4.2. Нанесение минтермов на карты Вейча

Для нанесения булевых функций, представленных в совершенной дизъюнктивной нормальной форме достаточно в клетки, соответствующие номерам минтермов, записать единицы.

Пример. Нанести на карту Вейча функцию $f = \overline{A}B + AB$.

Решение. Возьмем карту Вейча двух аргументов с десятичными кодами.

$\overline{A}$	
3	1
2	0

Для нанесения на карту запишем функцию через номера ее минтермов: $f = (1,3)$. Затем ячейки карты Вейча, номера которых соответствуют номерам минтермов функции, заполним единицами.

$\overline{A}$	
1	1

Таким образом, получим карту Вейча с нанесенной на нее функцией $f = \overline{A}B + AB$.

Пример. Нанести на карту функцию $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$.

Решение. Для решения данной задачи потребуется карта Вейча трех переменных:

	<u>A</u>			
B	6	7	3	2
	4	5	1	0
	<u>C</u>			

Данную функцию можно записать в виде: $f = (0, 1, 2, 6)$. Следовательно, записав единицы, в ячейки, соответствующие номерам 0, 1, 2, 6, получим:

	<u>A</u>			
B	1			1
			1	1
	<u>C</u>			

2.4.3. Нанесение на карты Вейча булевых функций

Если булева функция не записана в СДНФ, то процесс ее нанесения на карту Вейча несколько отличается.

Представим, что функция представлена в виде конъюнкции двух или нескольких аргументов, в которую аргументы функции могут входить в прямой или инверсной форме либо вообще не входить. Тогда нанесение такой функции на карту сводится к проставлению единиц в ячейках, лежащих на пересечении строк и столбцов с соответствующими условиями по каждой переменной, входящей в конъюнкцию.

Пример. Нанести на карту Вейча трех аргументов функцию $f = \overline{A}B$.

Решение. При нанесении функции следует учесть, что первый аргумент A входит в конъюнкцию в инверсной форме, следовательно, нас интересуют только третий и четвертый столбцы. Вторая переменная B записана в прямой форме и тогда нас удовлетворяет только первая строка. Ограничений же по

аргументу C вообще нет, так как этот аргумент в конъюнкции отсутствует. Таким образом, получим:

	A			
B			1	1
	C			

Если функция представлена в виде дизъюнкции двух или нескольких булевых функций, то ее нанесение на карту Вейча сводится к последовательному нанесению каждой функции на карту, причем, при накладывании единицы на ячейку, в которой уже есть значение, даст нам единицу.

Пример. Нанести на карту функцию трех аргументов $f = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C$.

Решение. Нанесем на карту первую часть дизъюнкции $\bar{A}\bar{B}C$. Это будет минтерм m_5 :

	A			
B				
		1		
	C			

Для нанесения второго слагаемого $\bar{A}\bar{B}$ нужно добавить к уже отмеченной единицей ячейке пересечение третьего, четвертого столбца и второй строки:

	A			
B				
		1	1	1
	C			

И, наконец, перейдем к третьему слагаемому $\bar{A}C$. Отметим единицами третий столбец таблицы, удовлетворяющий условию инверсии $\bar{A}$ и прямого

вхождения в конъюнкцию C . Заметим, что ячейка, стоящая в третьем столбце и второй строке, уже содержит единицу. Однако прибавление к ней второй единицы не меняет значения ячейки. Таким образом, нанесенная на карту Вейча функция $f = A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C$ будет выглядеть следующим образом:

	A			
B			1	
		1	1	1
	C			

2.5. Нахождение СДНФ при помощи карт Вейча

2.5.1. Нахождение СДНФ произвольных функций

Проблема нахождения совершенной дизъюнктивной нормальной формы функции достаточно просто решается с помощью карт Вейча. Для определения номеров минтермов, входящих в СДНФ функции, достаточно нанести функцию на карту и выписать номера ячеек таблицы, содержащих единицы.

Пример. Найти СДНФ функции двух аргументов $f = A(B + \bar{A}B) + \bar{B}$.

Решение. Для простоты, используя дистрибутивное свойство конъюнкции относительно дизъюнкции раскроем скобки, получим функцию $f = AB + \bar{B}$, которую легче наносить на карту:

	A	
B	1	
	1	1

Выпишем десятичные номера минтермов, соответствующих единицам в данной таблице: 0, 2, 3. В результате получим запись функции в СДНФ:

$$f = (0, 2, 3).$$

Пример. Найти СДНФ функции трех аргументов $f = \bar{A} + B\bar{C}$.

Решение. Обратим внимание на то, что ранее СДНФ этой функции мы уже находили, разлагая функцию по всем трем аргументам. Теперь найдем СДНФ при помощи карты Вейча. Нанесем на карту функцию $f = \bar{A} + B\bar{C}$:

	<u>A</u>			
B	1		1	1
			1	1
	<u>C</u>			

Выпишем десятичные номера минтермов, соответствующих единицам в данной таблице: 0, 1, 2, 3, 6. В результате получим запись функции в СДНФ:

$$f = (0, 1, 2, 3, 6).$$

Как видим, данный способ нахождения СДНФ функции гораздо проще и эффективнее, чем аналитический, с помощью разложений.

Пример. Найти СДНФ функции четырех аргументов $f = \bar{A}(B\bar{C} + CD)$.

Решение. Нанесем на карту Вейча функцию $f = \bar{A}(B\bar{C} + CD)$. Для простоты, используя дистрибутивное свойство конъюнкции относительно дизъюнкции раскроем скобки. Полученное выражение функции в виде дизъюнкции $f = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}CD$ легче наносить на карту:

	<u>A</u>			
B				1
			1	1
			1	
	<u>C</u>			

Теперь перечислим десятичные номера соответствующих минтермов: 3, 4, 5, 7. Таким образом, функцию $f = \bar{A}(B\bar{C} + CD)$ можно представить в СДНФ:

$$f = (3, 4, 5, 7).$$

2.5.2. Нахождение СДНФ конъюнкции функций

Если функция представлена в виде конъюнкции двух булевых функций, то алгоритм нанесения функции на карту Вейча следующий. Наносим на карту первую функцию. Затем накладываем значения второй функции на уже составленную карту. После добавления значений второй функции некоторые ячейки могут быть пустыми, их мы не трогаем. В других клетках могут содержаться по одной единице, их нужно очистить. А есть ячейки, в которых появились две единицы, здесь мы оставим только одну. В результате получим карту Вейча конъюнкции двух функций. Если необходимо нанести конъюнкцию большего количества булевых выражений, то это можно сделать последовательно за несколько шагов.

Пример. Нанести на карту функцию трех аргументов $f = (A + \bar{A}C)\bar{B}\bar{C}$.

Решение. Нанесем на карту первую часть конъюнкции $A + \bar{A}C$:

	A			
B	1	1	1	
	1	1	1	
	C			

Затем накладываем на полученную карту значения второй части конъюнкции $\bar{B}\bar{C}$. Единицы добавим в первую и последнюю ячейки первой строки:

	A			
B	11	1	1	1
	1	1	1	
	C			

Теперь, очистим ячейки, содержащие по одной единице, а в клетке с двумя значениями оставляем только одно: На результирующей карте Вейча функция $f = (A + \bar{A}C)\bar{B}\bar{C}$ будет отображена так:

	<u>A</u>			
B	1			
	<u>C</u>			

2.5.3. Нахождение СДНФ инверсии функции

Если функция представлена в виде инверсии булевой функции, то нанеся на карту Вейча эту функцию, достаточно инвертировать значения каждой ячейки таблицы.

Пример. Нанести на карту Вейча функцию $f = \overline{(A + \bar{A}C)B\bar{C}}$.

Решение. В предыдущей задаче мы уже получили карту Вейча для функции $f = (A + \bar{A}C)B\bar{C}$:

	<u>A</u>			
B	1			
	<u>C</u>			

Теперь инвертируем все значения построенной таблицы. Процесс будет заключаться в замене пустых клеток на единицы, а ячейки, содержащие единицы очистим. Так получим инверсию $f = \overline{(A + \bar{A}C)B\bar{C}}$:

	<u>A</u>			
B		1	1	1
	1	1	1	1
	<u>C</u>			

2.6. Совершенная конъюнктивная нормальная форма

2.6.1. Макстермы

Макстермом n аргументов булевой функции называется такая дизъюнкция этих аргументов, в которую каждый аргумент входит один и

только один раз в прямой или инверсной форме. Так же как и для минтерма все аргументы в макстермы располагаются в минтерме в алфавитном порядке.

Примеры макстермов.

Минтермы двух аргументов: $A + \bar{B}$, $A + B$, $\bar{A} + \bar{B}$.

Минтермы трех аргументов: $\bar{A} + B + \bar{C}$, $A + \bar{B} + C$, $\bar{A} + B + C$.

Минтермы четырех аргументов: $\bar{A} + \bar{B} + C + D$, $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$.

По аналогии с минтермами макстермы обозначаются заглавной буквой M с десятичным индексом, указывающим форму вхождения аргументов в макстерм, прямую или инверсную. Например, для функции трех аргументов запись M_5 означает $A + \bar{B} + C$. На самом деле, двоичный код числа 5 равен 101, и, следовательно, первая переменная входит в макстерм в прямой форме, вторая переменная – в инверсной форме, а третья – снова в прямой.

Можно отметить, что макстерм M_i является инверсией минтерма m_i . Если минтермы принимали единичное значение только на одном из наборов, то каждый макстерм принимает значение 1 на всех наборах, за исключением одного. Очевидно, числа такого набора должны принимать нулевые значения, если соответствующие им аргументы записаны в прямой форме, или равны единицам в противном случае.

Макстермы обладают важным свойством. Дизъюнкция двух любых различных макстермов, одних и тех же аргументов, равна единице. На самом деле, так как макстермы отличаются друг от друга только формой входящих в них аргументов, то на любом наборе значений переменных, только значение одного из макстермов может быть равно нулю, поэтому другой макстерм обязательно примет значение 1. Следовательно, дизъюнкция этих макстермов также будет равна единице.

2.6.2. Нахождение СКНФ булевых функций

Представление булевой функции в виде конъюнкции макстермов n аргументов называется записью в *совершенной конъюнктивной нормальной форме*, или сокращённо – СКНФ. Всякая булева функция заданного числа

аргументов представима в совершенной конъюнктивной нормальной форме, единственным образом.

Нахождение СКНФ булевой функции сводится к следующему алгоритму.

1. Находим СДНФ заданной функции.

2. Результат первого шага инвертируем. В инверсию функции войдут все минтермы, отсутствующие в СДНФ.

3. Аналитическую форму полученного выражения снова инвертируем с использованием теоремы де Моргана. Это и будет СКНФ нашей функции.

Пример. Найти СКНФ функции трех аргументов $f = \bar{A}C + B\bar{C}$.

Решение. Найдем СДНФ функции $f = \bar{A}C + B\bar{C}$. Для этого нанесем ее на карту Вейча:

	<u>A</u>			
B	1		1	1
			1	
	<u>C</u>			

Следовательно, СДНФ функции $f = (1, 2, 3, 6)$.

Для нахождения инверсии СДНФ функции выпишем минтермы, отсутствующие в СДНФ $\bar{f} = (0, 4, 5, 7)$.

Инвертируем аналитическую форму полученного выражения $\bar{f}$ с использованием теоремы де Моргана:

$$f = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC} = (A + B + C)(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

СКНФ функции $f = \bar{A}C + B\bar{C}$ можно записать и в краткой форме с использованием макстермов:

$$f = M_0 M_2 M_3 M_7 \text{ или } f = [0, 2, 3, 7].$$

Пример. Найти СКНФ функции $f = C\bar{D} + \bar{C} + A\bar{D}$.

Решение.

1. Найдем СДНФ функции, для этого нанесем ее на карту Вейча:

$\overline{A}$			
B	1	1	1
	1		1
	1		1
	1	1	1
$\overline{C}$			
D			

$\overline{A}$			
B	12	14	6
	13	15	7
	9	11	3
	8	10	2
$\overline{C}$			
D			

Выпишем номера минтермов: $f = (1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14)$.

2. Полученный результат инвертируем: $\bar{f} = (3, 7, 11, 15)$ и запишем инверсию функции в аналитической форме:

$$\bar{f} = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD + A\bar{B}CD + ABCD.$$

3. Еще раз инвертируем по теореме де Моргана:

$$\begin{aligned} f &= \overline{\bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD + A\bar{B}CD + ABCD} = \\ &= (A + B + \bar{C} + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}). \end{aligned}$$

Тогда, выписывая номера макстермов в порядке возрастания, получим совершенную конъюнктивную нормальную форму функции $f = C\bar{D} + \bar{C} + A\bar{D}$:

$$f = [0, 4, 8, 12].$$

Глава 3. Введение в математическую логику

Логика – это наука, изучающая формы и законы мышления, закономерности мыслительного процесса. Слово «логика» произошло от греческого слова «*logos*», что означает «слово», «понятие», «рассуждение», «разум». Законы и правила формальной логики необходимо знать для построения правильных рассуждений. Логические знания чрезвычайно важны для повышения эффективности мыслительной деятельности человека и предотвращения логических ошибок.

Согласно основному принципу логики, правильность рассуждения (вывода) определяется только его логической формой (структурой) и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений. Отличительная особенность правильного вывода состоит в том, что из истинных исходных утверждений всегда получаются истинные заключения. Это позволяет из одних истин получать другие с помощью только рассуждения, разума и без обращения к опыту.

Логика состоит из большого числа логических систем, описывающих отдельные типы содержательных рассуждений. Эти системы принято делить на *классическую логику* (классическая логика высказываний и логика предикатов), и *неклассическую логику* (модальная логика, многозначная логика, деонтическая логика, логика времени, паранепротиворечивая логика, парафальсифицирующая логика и другие).

Все эти частные системы, пользующиеся одними и теми же методами исследования при описании отдельных логических процессов, соединяясь вместе, образуют логику как единую науку. Для любой логики характерно отвлечение от конкретного содержания высказываний или умозаключений и оперирование только их формальным содержанием, использование единого языка символов и формул.

Знание правил и законов логики не является конечной целью ее изучения. Конечная цель изучения логики – умение применять ее правила и законы в процессе мышления. Истина и логика взаимосвязаны, поэтому значение логики

невозможно переоценить. Логика помогает доказывать истинные сужения и опровергать ложные, она учит мыслить четко, лаконично, правильно.

3.1. История развития математической логики

Как самостоятельная наука, логика оформилась в трудах греческого философа *Аристотеля* (384 – 322 г. до н.э.). Он систематизировал известные до него сведения, и эта система стала впоследствии называться *традиционной* или *Аристотелевой логикой*. Аппарат логики Аристотеля оказался настолько мощным, что, например, на его основе средневековый философ и богослов *Фома Аквинский* (1225 – 1274) осуществил обоснование всей христианской теологии. Широкое применение силлогистика нашла в судебной практике, когда материалы предварительного следствия брались за истинные посылки. Применяя к этим посылкам процедуры порождения новых утверждений по правилам теории Аристотеля, судьи делали вывод о виновности или невиновности подсудимого. Традиционная логика просуществовала без серьезных изменений более двадцати столетий.

В XIX в. – начале XX в. в логике произошла научная революция и на смену традиционной логике пришла современная логика, называемая также *математической* или *символической логикой*. Развитие математики выявило недостаточность Аристотелевой логики и поставило задачу о ее дальнейшем построении на математической основе. Впервые в истории идеи о таком построении логики были высказаны немецким математиком *Готфридом Лейбницем* (1646 – 1716) в конце XVII века. Он считал, что основные понятия логики должны быть обозначены символами, которые соединяются по определенным правилам, и это позволяет всякие рассуждения заменить вычислением. *Джордж Буль* (1815 – 1864) в своей работе «Исследование законов мысли» (1854 г.) истолковывал умозаключения как результат решения логических равенств, в результате чего логическая теория приняла вид обычной алгебры и получила название алгебры высказываний. Буль рассматривал свою алгебру как инструмент изучения законов человеческого мышления.

Введение символических обозначений в логику имело для этой науки такое же решающее значение, как и введение буквенных обозначений для математики. Именно благодаря введению символов в логику была получена основа для создания новой науки – математической логики. Предметом математической логики служат рассуждения, при изучении которых она пользуется математическими методами.

При этом на первых порах развитие математической логики позволило представить логические теории в новой удобной форме и применить вычислительный аппарат к решению задач, малодоступных человеческому мышлению, что, конечно, расширило область логических исследований. Однако главное назначение математической логики определилось в конце XIX века, когда стала ясна необходимость обоснования понятий и идей самой математики. Эти задачи имели логическую природу и, естественно, привели к дальнейшему развитию математической логики.

В этом отношении показательны работы немецкого математика *Готлоба Фрёге* (1848 – 1925) и итальянского математика *Джузеппе Пеано* (1858 – 1932), которые применили математическую логику для обоснования арифметики и теории множеств.

В развитие логики значительный вклад внесли *Бертран Рассел* (1872 – 1970), *Альфред Уайтхед* (1861 – 1947), *Давид Гильберт* (1862 – 1943), *Курт Гедель* (1906 – 1978), *Альфред Тарский* (1901 – 1983) и др.

В первой половине XX в. стали выделяться следующие направления: *многозначная логика* (предполагает, что утверждение может быть не только истинным или ложным, но иметь и другие значения истинности); *деонтическая логика* (изучает логические связи нормативных высказываний); *модальная логика* (рассматривает понятия необходимости, возможности, случайности); *эпистемическая логика* (изучает понятия «опровержимо», «неразрешимо», «доказуемо», «убежден»); *паранепротиворечивая логика*; *парафальсифицирующая логика* и другие. Все эти новые разделы логики были связаны с естественными и гуманитарными науками. Перемены, происшедшие

с логикой в XX веке, приблизили ее к непосредственному человеческому мышлению, к практической деятельности человека.

3.2. Основные понятия логики высказываний

Высказыванием называется всякое утверждение (повествовательное предложение), про которое всегда определенно и объективно можно сказать, является ли оно истинным или ложным. Например, предложения «Дважды два – четыре», «Курсанты технических специальностей изучают информатику и математику», «3 больше 5», «Число 10 является нечетным», «На улице идет дождь», «Уголовное дело отправлено на следствие» – являются высказываниями. Побудительные предложения («Кругом», «Налево», «Подойдите, пожалуйста, ко мне»), вопросительные («Вы не подскажете, как пройти в библиотеку?»), восклицательные («Да здравствует свобода!») высказываниями не являются.

Повествовательное предложение, содержащее переменную, также не является высказыванием. Например, утверждение « x – положительное число» не будет высказыванием, так как нельзя определить ложно оно или истинно. Если же подставить вместо переменной x какое-либо число, то получим высказывание: «5 – положительное число» (истинное высказывание), «0 – положительное число» (ложное высказывание).

Рассмотренные выше примеры высказываний, а именно «Дважды два – четыре», «Курсанты технических специальностей изучают информатику и математику», являются истинными во всех возможных ситуациях. Такие высказывания называются *абсолютно истинными*. Высказывания «3 больше 5» и «Число 10 является нечетным» являются *абсолютно ложными*. Абсолютно истинные и абсолютно ложные высказывания называются *логическими константами*. Высказывания «На улице идет дождь» и «Уголовное дело отправлено на следствие» будут истинны или ложны в зависимости от конкретной ситуации. В одних случаях они будут истинными, в других – ложными. Поэтому, точнее говорить, что данное высказывание истинно или

ложно в определенной фиксированной ситуации. Ситуация может быть определена в самом высказывании, а может описываться дополнительно.

Высказывания обозначаются заглавными латинскими буквами: $A, B, C, \dots$. Например, A – «Волга впадает в Каспийское море», B – «3 больше 5», C – «На улице идет дождь». Подобные обозначения вводятся для упрощения анализа высказывания. В этом случае вместо сложных рассуждений получаются выражения, традиционно встречающиеся в математике. В логике высказываний значение истинного высказывания равно 1, а ложного – равно 0. Так, например, $A=1$, так как «Волга впадает в Каспийское море» – абсолютно истинное высказывание; $B=0$ как абсолютно ложное; C может быть равно 1, а может – 0 в зависимости от рассмотренной ситуации.

С помощью союзов «и», «или», «если, то», частицы «не» из нескольких высказываний (повествовательных предложений) можно составить различные новые высказывания. При этом исходные высказывания, которые нельзя разбить на еще более мелкие, называются *простыми*, а сконструированные при помощи логических связок – *сложными*.

В определенной ситуации истинность или ложность простых высказываний очевидна. Для определения истинности сложных высказываний необходимо не только знать, истинны или ложны простые высказывания, из которых построены сложные, но и проанализировать их структуру. Разрешение вопроса об истинности или ложности сложных высказываний, рассматриваемого на основе изучения способа их построения из элементарных, является основной задачей логики высказываний.

Логика высказываний – раздел логики, изучающий связи между высказываниями, которые определяются тем, как одни высказывания строятся из других. Эту часть логики еще называют алгеброй высказывания или исчислением высказываний.

Рассмотрим два высказывания: «Сегодня будет хорошая погода», «Мы пойдем на прогулку». Из этих простых высказываний можно сконструировать сложные:

- «Сегодня будет хорошая погода и мы пойдем на прогулку»;
- «Мы не пойдем на прогулку»;
- «Если сегодня будет хорошая погода, то мы пойдем на прогулку»;
- «Мы пойдем на прогулку тогда и только тогда, если сегодня будет хорошая погода»;
- «Сегодня будет хорошая погода или мы пойдем на прогулку»;
- «Если мы пойдем на прогулку, то сегодня будет хорошая погода».

В последней фразе нарушается нормальная причинно-следственная связь, однако это сложное высказывание с точки зрения логики высказываний ничем не хуже остальных. В ней допускаются любые грамматически правильно составленные высказывания, а их смысловая характеристика не изучается. Важно только то, что получившееся предложение может быть формально либо истинным, либо ложным.

3.3. Логические операции

Рассмотрим более подробно некоторые логические связки, позволяющие конструировать из простых высказываний сложные. В математической логике такие связки называются *логическими операциями*.

Самой простой логической операцией, применяемой только к одному высказыванию, является *операция отрицания*, которая в русском языке соответствует частице «не». Отрицание высказывания A обозначается $\neg A$ или $\bar{A}$. Символ $\bar{A}$ читается «не A » или «не верно, что A ». Например, если высказывание A – «подсудимый виновен», то $\bar{A}$ – «подсудимый не виновен».

По смыслу, отрицание высказывания – высказывание, противоположное данному. То есть, если высказывание A – истинное, то высказывание $\bar{A}$ – ложное, и наоборот, если A – ложное, то $\bar{A}$ – истинное. Запишем в виде таблицы значения нового, сложного высказывания $\bar{A}$ в зависимости от значений простого A , на основе которого оно построено.

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

Подобная таблица называется *таблицей истинности*. Именно эту таблицу берут за определение операции отрицания. *Высказывание $\bar{A}$ называется отрицанием высказывания A , если оно истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно.*

Операция дизъюнкция применяется к двум высказываниям A и B и соответствует соединению их с помощью союза «или». Дизъюнкция обозначается с помощью знака $\vee$, который ставится между высказываниями: $A \vee B$, что читается « A или B » или «или A , или B ». Например, «Договор может быть заключен в устной *или* в письменной форме».

Рассмотрим значение составленного сложного высказывания $A \vee B$. Если одно из высказываний истинно, а другое ложно, то дизъюнкция будет истинной. Если оба простых высказывания A и B ложны, то и дизъюнкция будет ложной. А вот если оба высказывания A и B истинны, то существует два случая. Это связано с тем, что в русском языке союз «или» имеет два значения. Одно из них не исключающее «или», а другое – исключающее. Например, высказывание «Или я выучу этот материал, или получу двойку» при истинных его составляющих будет ложно. Здесь «или» понимается в исключающем смысле. А высказывание «Сейчас идет снег или дождь» – истинно, если оба высказывания «Сейчас идет снег» и «сейчас идет дождь» – истинны и в этом случае союз «или» – не исключающий. В логике высказываний дизъюнкция соответствует *не исключающему «или»*.

Дизъюнкция $A \vee B$ – сложное высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B одновременно ложны. Таблица истинности операции дизъюнкция будет следующей:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Значения операции $A \vee B$ (кроме первой строчки), как видно из таблицы, получаются простым алгебраическим сложением значений A и B . Поэтому

дизъюнкцию также называют *логическим сложением* и часто обозначают, как в алгебре, знаком «+».

Операция конъюнкция применяется также к двум высказываниям A и B и соответствует соединению их с помощью союза «и». Она обозначается с помощью знака $\wedge$ или $\&$, который ставится между высказываниями: $A \wedge B$, что читается « A и B » или «и A , и B ». Например, «Это преступление наказывается лишением свободы и конфискацией имущества»; «Оскорбление – это унижение чести и достоинства человека...».

Рассмотрим значение конъюнкции, исходя из смысла союза «и». Если оба высказывания A и B будут истинными, то и конъюнкция $A \wedge B$ будет истинной. Если же хотя бы одно из них, или оба, будут ложными, то и конъюнкция также будет ложной. Например, высказывание «3 – нечетное число и 3 делится на 2» будет ложным. Исходя из этого, можно дать следующее определение операции конъюнкция.

Конъюнкция $A \wedge B$ – сложное высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B одновременно истинны. Таблица истинности операции конъюнкция такова:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Проанализировав приведенную таблицу, можно заметить, что значения операции $A \wedge B$ получаются простым алгебраическим умножением значений A и B . Поэтому конъюнкцию также называют *логическим умножением* и обозначают, как в алгебре, знаком « $\cdot$ », который может опускаться.

Одной из важнейших логических операций является операция импликация высказываний. Она соответствует объединению двух высказываний с помощью союза «если ..., то ...». Импликация обозначается с помощью знака $\rightarrow$, ставящегося между высказываниями: $A \rightarrow B$, что читается « A

имплицитно B » или «если A , то B », иногда говорят « A влечет B », «из A следует B ».

Операция импликации определяется следующим образом.

Импликация высказываний A и B ($A \rightarrow B$) – сложное высказывание, которое истинно всегда, кроме случая, когда A – истинно, а B – ложно. Таким образом, таблица истинности импликации такова:

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Проанализируем соответствие определения импликации с общепринятым значением сложноподчиненного предложения с использованием союза «если ..., то ...». Рассмотрим следующее сложное высказывание: «Если гражданин Иванов совершил кражу, то он может быть наказан лишением свободы на срок до двух лет». Если оба простые высказывания «гражданин Иванов совершил кражу» и «он может быть наказан лишением свободы на срок до двух лет» истинны, то истинность сложного высказывания не вызывает сомнения.

Операция эквивалентности обозначается символом $\leftrightarrow$, либо $\sim$. Сложное высказывание $A \leftrightarrow B$ читается: « A эквивалентно B », либо « A равносильно B », либо « A тогда и только тогда, когда B », либо « B , если и только если A ». Эквивалентность соответствует употреблению выражения «тогда и только тогда, когда», хотя, как и в случае с импликацией, такое соответствие далеко не полное.

Рассмотрим примеры использования операции эквивалентности. «Два треугольника равны тогда и только тогда, когда три стороны одного треугольника равны соответствующим сторонам другого треугольника». «Деяние кража равносильно тайному хищению чужого имущества». «Распространение заведомо ложных сведений является клеветой, если и только если эти сведения порочат честь и достоинство другого лица или подрывают его репутацию».

Эквивалентность высказываний A и B ($A \leftrightarrow B$) – сложное высказывание, которое истинно, когда A и B одновременно либо истинны либо ложны и ложно во всех других случаях. Эквивалентность определяется следующей таблицей истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Эквивалентность соответствует двум операциям импликации, соединенных конъюнкцией. А именно, $A \leftrightarrow B$ равносильно $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, т.е. имеет такую же таблицу истинности. Поэтому эквивалентность также называют двойной импликацией.

3.4. Логические формулы

3.4.1. Определение логических формул

Применяя введенные логические операции можно из простых высказываний составить высказывания сколь угодно сложного вида:

$$A \rightarrow B \vee C; (A \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}) \rightarrow \bar{B} \wedge \bar{A}; B \rightarrow \bar{A} \vee (C \wedge B) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge \bar{B} \rightarrow C.$$

Такие высказывания называются *логическими формулами*, а входящие в них простые высказывания – логическими переменными. Символы $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ называют логическими связками.

Для правильного вычисления значения логических формул необходимо задать порядок выполнения логических операций. Сначала выполняется операция отрицания $\neg$, затем конъюнкция $\wedge$, потом дизъюнкция $\vee$, затем импликация $\rightarrow$ и, последней, эквивалентность $\leftrightarrow$. Как и в алгебре, скобки необходимы для изменения порядка действий.

Таким образом, для вычисления значения выражения $(A \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}) \rightarrow \bar{B} \wedge \bar{A}$ необходимо сначала определить $\bar{A}$ и $\bar{B}$, затем выполнить дизъюнкцию $\bar{A} \vee \bar{B}$, после подсчитать значение выражения в скобках: $A \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$, далее выполнить конъюнкцию $\bar{B} \wedge \bar{A}$ и, наконец,

соединить вычисленные значения высказываний $A \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$ и $\bar{B} \wedge \bar{A}$ с помощью импликации: $(A \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}) \rightarrow \bar{B} \wedge \bar{A}$. Порядок выполнения операций будет таков: $(A \overset{4}{\leftrightarrow} \overset{1}{\bar{A}} \overset{3}{\vee} \overset{2}{\bar{B}}) \overset{6}{\rightarrow} \overset{5}{\bar{B}} \wedge \bar{A}$.

Вычислим значение истинности рассмотренной логической формулы при всевозможных комбинациях значений логических переменных, составляющих эту формулу. Делать такие вычисления удобнее с помощью таблицы, в каждой строке которой анализируется одна комбинация значений простых высказываний, а в столбцах вычисляются все операции по порядку. Такие таблицы называются *таблицами истинности* или *таблицами Куайна*.

Построим таблицу истинности для приведенного выше сложного высказывания: $(A \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}) \rightarrow \bar{B} \wedge \bar{A}$.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$A \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	$\bar{B} \wedge \bar{A}$	$(A \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}) \rightarrow \bar{B} \wedge \bar{A}$
1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1

Если логическая формула состоит из трех переменных A , B и C , то строк в таблице истинности будет 8. Действительно, для каждого значения высказывания C , а их два: истина и ложь, существуют 4 комбинации значений A и B . Если в сложном высказывании – n простых, то логических возможностей – строк таблицы истинности будет $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ раз}} = 2^n$. К примеру, при $n=10$, число различных комбинаций значений переменных – число строк таблицы $2^{10} = 1024$.

Пример. Построить таблицу истинности логической формулы:

$$B \rightarrow \bar{A} \vee (C \wedge B) \leftrightarrow (A \vee B).$$

Сначала определим порядок вычисления логических операций:

$$B \overset{5}{\rightarrow} \overset{3}{\bar{A}} \overset{4}{\vee} \overset{1}{(C \wedge B)} \overset{6}{\leftrightarrow} \overset{2}{(A \vee B)}.$$

Вычислим значения сложного высказывания по действиям для каждого из 8 возможных комбинаций.

A	B	C	$C \wedge B$	$A \vee B$	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee (C \wedge B)$	$B \rightarrow \bar{A} \vee (C \wedge B)$	$B \rightarrow \bar{A} \vee (C \wedge B) \leftrightarrow (A \vee B)$
1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0

3.4.2. Равносильность логических формул

Рассмотрим следующую логическую формулу $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Построим таблицу истинности данной формулы.

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Если сравнить построенную таблицу истинности формулы $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ с таблицей истинности эквивалентности $A \leftrightarrow B$, то окажется, что при одних и тех же значениях переменных A и B значения одинаковы. Такие логические формулы называются *равносильными*. Равносильность формул обозначается с помощью знака $\equiv$:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

Таким образом, эквивалентность довольно просто выражается через комбинацию двух импликаций, соединенных операцией конъюнкция.

Две логические формулы называются *равносильными*, если при любых значениях входящих в них логических переменных эти формулы принимают одинаковые значения.

Равносильные формулы служат для выражения одних логических операций через другие, позволяют упрощать формулы или, точнее, заменять одни логические формулы другими, равносильными, но более простыми.

3.5. Основные законы логики

В логике высказываний некоторые наиболее значимые пары равносильных формул принято считать законами математической логики.

3.5.1. Свойства логических операций

Свойства операций логики высказываний можно представить в виде пары равносильных формул логики высказываний:

Коммутативные законы

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

Ассоциативные законы

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$

Дистрибутивные законы

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Законы идемпотентности

$$A \vee A \equiv A$$

$$A \wedge A \equiv A$$

Законы поглощения

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

Законы де Моргана

$$\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$$

Операции с константами

$$A \vee 0 \equiv A$$

$$A \wedge 1 \equiv A$$

$$A \vee 1 \equiv 1$$

$$A \wedge 0 \equiv 0$$

Рассмотрим формулы, в которых содержатся лишь операции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. Любую формулу можно привести к такому виду. Для таких формул можно сформулировать следующее утверждение.

Закон двойственности. Если в двух равносильных формулах заменить дизъюнкцию конъюнкцией, единицу нулем и наоборот, то полученные формулы будут также равносильны.

Из законов Моргана вытекает еще одно важное свойство. Оказывается, что операцию дизъюнкции можно выразить через отрицание и конъюнкцию, и наоборот. Действительно, рассмотрим формулу $\overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$. На основании закона Моргана получим: $\overline{\bar{A} \wedge \bar{B}} \equiv \bar{\bar{A}} \vee \bar{\bar{B}}$. А знаки двойного отрицания можно убрать: $\bar{\bar{A}} \equiv A$ и $\bar{\bar{B}} \equiv B$. Следовательно, $A \vee B \equiv \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$.

Аналогично доказывается равносильность $A \wedge B \equiv \overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$, выражающая конъюнкцию через отрицание и дизъюнкцию.

Таким образом, для любой логической формулы можно найти равносильную, содержащую только две логические операции: дизъюнкцию и отрицание или конъюнкцию и отрицание.

3.5.2. Тавтологии

Логические формулы, принимающие значение «истина» при любых значениях, входящих в эту формулу логических переменных называются *тождественно истинными* или *тавтологиями*.

Факт, что высказывание A является тавтологией, обозначается так $\models A$.

Сложное высказывание называется *тождественно ложным*, если оно принимает значение «ложь» при любых значениях входящих в него простых высказываний. Отрицание тождественно истинного высказывания будет тождественно ложным. То есть, если $\models A$, то $\models \bar{A}$ – тождественно ложно.

Тавтологии имеют большое значение в математической логике, и они также называются законами логики. Существует бесконечно много тождественно истинных формул. Рассмотрим наиболее важные из них, наиболее часто используемые в математических доказательствах.

Закон силлогизма

$$\models [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$$

Закон силлогизма можно «прочитать» так. *Если из высказывания A следует B , а из высказывания B следует C , то можно заключить, что из A следует C .* Этот закон позволяет при доказательствах некоторого утверждения пользоваться цепочками заключений.

Modus ponens (лат.)

$$\models [A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$$

Если A – истинно и из A следует B , то B также будет истинно.

Закон контрапозиции

$$\models (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$$

Следование из высказывания A высказывания B равносильно тому, что из не B следует не A .

Закон исключения третьего

$$|= A \vee \bar{A}$$

Для любого высказывания A или само высказывание A истинно, или истинно его отрицание $\bar{A}$ (не A). В терминах самого высказывания этот закон можно сформулировать еще и таким образом: любое высказывание либо истинно, либо ложно.

Закон противоречия

$$|= \overline{A \wedge \bar{A}}$$

Закон противоречия отражает следующее утверждение: «Для любого высказывания A неверно, что одновременно истинны и само высказывание A , и его отрицание $\bar{A}$ (не A)».

Очевидно, что если $\overline{A \wedge \bar{A}} \equiv 1$, то высказывание, стоящее под общим отрицанием, будет всегда ложно $A \wedge \bar{A} \equiv 0$. То есть, не могут быть одновременно истинны и высказывание A , и его отрицание $\bar{A}$ (не A).

Закон двойного отрицания

$$|= \overline{\bar{A}} \leftrightarrow A$$

Отрицание от отрицания любого высказывания эквивалентно (равносильно) самому высказыванию.

Выше приведены лишь некоторые, наиболее часто используемые законы логики. Доказать любой закон достаточно просто. Для этого необходимо построить таблицу истинности приведенного высказывания и убедиться, что при любых исходных данных оно истинно.

Глав 4. Графы

Теория графов – это раздел дискретной математики, изучающий специальные множества, обладающие некоторыми свойствами. В общем смысле граф представляется, как конечное множество вершин или узлов, произвольным образом соединённых между собой.

Родоначальником теории графов считается Леонард Эйлер (1707 – 1783). В 1736 году в одном из своих писем он формулирует и предлагает решение задачи о «Кенигсбергских мостах», ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов. Термин «граф» впервые употребил известный английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр (1814 – 1897) в 1878 году в статье в естественно-научном журнале «Nature». Однако терминология теории графов до сих пор окончательно не определена. В прикладных разделах математики, в программировании, информатике и других прикладных областях физико-математических и технических наук вместо «графы» часто используют термин «сети», а термин «вершина» графа имеет много синонимов.

Настоящая глава посвящена основным положениям теории графов. В ней мы рассмотрим определение и основные компоненты графов: вершины и ребра графа. Достаточно большое место будет уделено свойствам графа, а также классификации графов. Затем мы определим матричные способы представления графов, рассмотрим принципы записи графов с помощью матрицы смежностей и матрицы инцидентности, изучим графические и матричные методы определения изоморфности графов. Кроме того, мы рассмотрим алгоритмы нахождения маршрутов и циклов в неориентированных графах, особенности построения путей и контуров в ориентированных графах, мы поднимем вопросы связности графов, введем понятия расстояния между вершинами связного графа, построим матрицу расстояний, рассчитаем эксцентриситеты вершин графа, диаметр графа, радиус графа, найдем периферийные и центральные вершины графа.

4.1. Основные определения и классификация графов

4.1.1. Понятие графа

Графом называют совокупность двух множеств $G=[A, B]$, где $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – любое непустое конечное множество, а B является множеством некоторых двухэлементных подмножеств (a_i, a_j) множества A . Элементы $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ из множества A обычно называют *вершинами* графа, а элементы из множества B – *ребрами графа*.

Пример. Пусть множество A представляет собой множество из четырех элементов $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, а множество $B = \{(a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4)\}$, тогда граф $G=[A, B]$ можно представить в виде: $[\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4)\}]$.

Пример. Пусть множество A представляет собой множество из трех элементов $\{1, 2, 3\}$, а множество B состоит из пары $B = \{(2, 3)\}$, тогда граф $G=[A, B]$ можно представить в виде: $[\{1, 2, 3\}, \{(2, 3)\}]$.

Форма записи графа, показанная в приведенных примерах, называется *алгебраической*.

Граф $G=[A, B]$ называется *неориентированным*, если пары множества B считаются неупорядоченными, то есть место элемента $a_i \in A$ в паре не имеет никакого значения. В случае упорядоченных пар $(a_i, a_j) \in B$ граф $G=[A, B]$ принято называть *ориентированным*, ребра ориентированного графа называются *дугами*. Если же у графа присутствуют упорядоченные и неупорядоченные пары, то такой граф – *смешанный*. Неориентированное ребро можно считать, как две противоположно направленные дуги, соединяющие одни и те же вершины.

Для наглядности графы часто представляют в виде графических объектов. В *графической* форме вершины графа (элементы множества A) обычно представляются точками, а ребра (элементы из B) отображаются линиями,

соединяющими соответствующие точки. Для упорядоченных пар графа линии имеют соответствующее направление, а линии, отвечающие неупорядоченным парам, направления не имеют. Вид линии, обозначающей ребро или дугу, обычно не важен, здесь определяющее значение имеет то, какие вершины и в каком направлении соединяются вершины.

Пример. На рисунке 4.1 представлены три графа:

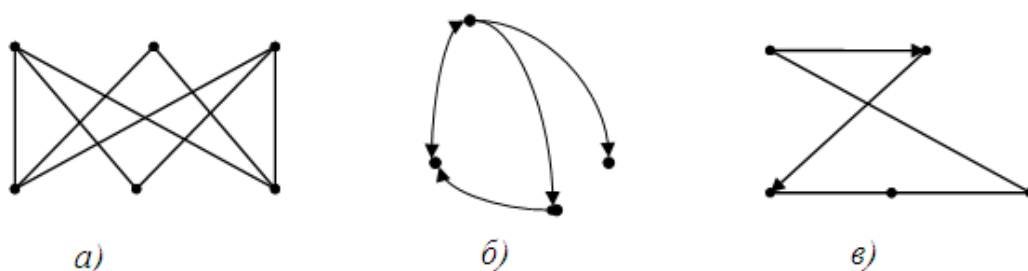


Рис. 4.1. Графическое представление графов.

Первый граф на рис. 4.1.а является неориентированным. Граф, изображенный на рис. 4.1.б, – ориентированный, а третий граф – смешанный.

Для определенности идентификации графа, заданного в геометрической форме, можно указывать алгебраические обозначения вершин и, если это необходимо, ребер.

Пример. На рисунке 4.2 показан неориентированный граф $G = [\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (c, d)\}]$. Его четыре представления, хотя имеют различные виды, по сути, являются одним и тем же графом.

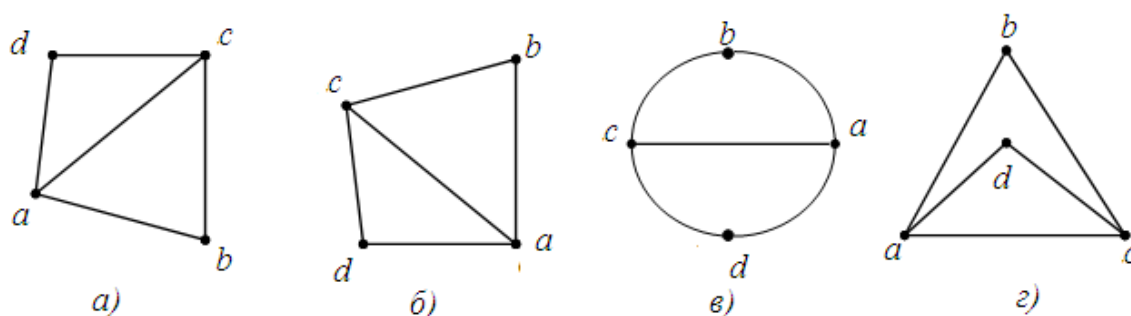


Рис. 4.2. Четыре изображения графа G .

На самом деле, что одному и тому же графу могут соответствовать несколько изображений, которые будут его геометрическими интерпретациями.

Если вершины a_1 и a_2 графа соединены ребром b , то эти вершины называют *инцидентными* ребру b , соответственно и ребро b будет инцидентно вершинам a_1 и a_2 . Кроме того, вершины a_1 и a_2 будут называться *смежными*. Аналогично, два ребра графа являются *смежными*, если они содержат общую вершину.

Пример. В графе G на рис 4.2 вершина d инцидентна ребрам (a, d) и (c, d) , ребро (b, c) инцидентно вершинам b и c . Смежными с вершиной c являются вершины a , b и d , а для ребра (a, d) смежными являются ребра (a, b) , (a, c) , (c, d) .

4.1.2. Классификация графов

Пару вершин графа могут соединять одно или несколько ребер. Если две вершины соединяются двумя и более ребрами, то такие ребра называются *кратными*. Граф называется *простым*, если он не содержит кратных ребер. В противном случае, если в графе имеется хотя бы одно кратное ребро, он называется *мультиграфом*.

В некоторых графах ребро может соединять одну и ту же вершину. Такое ребро называют *петлей*. Граф, содержащий хотя бы одну петлю, называется *псевдографом*.

Пример. На рисунке 4.3. изображены четыре графа. Вершины графа отмечены малыми латинскими буквами, а ребра – числами.

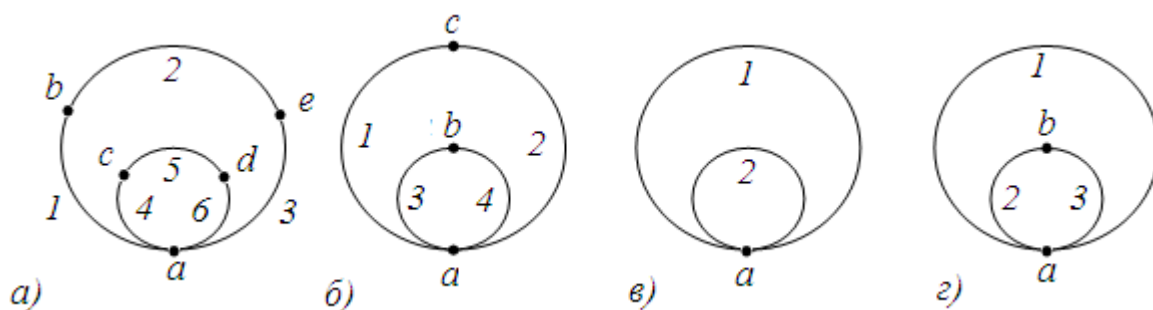


Рис. 4.3. Кратность ребер.

Первый из представленных графов (рис. 4.3.а), является простым, так как не содержит кратных ребер. Второй граф (рис. 4.3.б) имеет кратные ребра 1, 2, одновременно соединяющие вершины a и b , а также ребра 3, 4, инцидентные

вершинам a и c . Следовательно, второй граф можем считать мультиграфом. Третий из представленных графов (рис. 4.3.в) является псевдографом, так как единственная вершина соединена сама с собой петлями 1, 2. И, наконец, четвертый граф (рис. 4.3.г) одновременно можно считать мультиграфом и псевдографом, так как он имеет и кратные ребра 2, 3 и петлю 1.

Степенью (валентностью) вершины a неориентированного графа $\deg(a)$ называется число ребер, инцидентных данной вершине. Вершина со степенью 0, считается *изолированной вершиной*, а вершина со степенью 1 – *висячей*. Вершину называют *четной*, если ее степень четное число, и *нечетной* в противном случае.

Пример. В неориентированном графе, изображенном на рис 4.а, степени вершин равны $\deg(a)=2$, $\deg(b)=2$, $\deg(c)=1$, $\deg(d)=4$, $\deg(e)=1$, $\deg(f)=0$. Таким образом, вершины графа c и e являются висячими, а вершина f – изолированной. Вершины a , b и d – четные, а c , e – нечетные. Очевидно, всякий граф имеет четное число вершин нечетной степени.

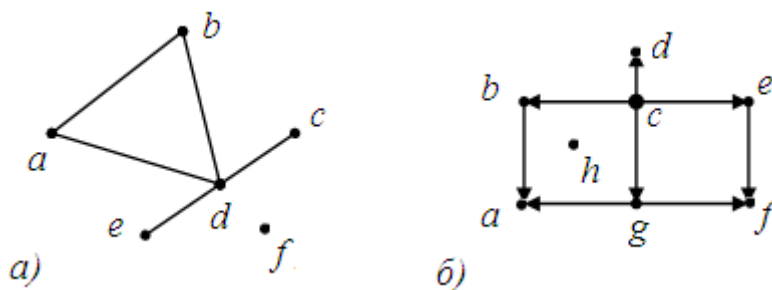


Рис. 4.4. Степени вершин графа.

Для ориентированных графов, в связи с важностью направления дуги, понятие степени вершин подразделяется на две части: *полустепенью исхода* вершины $d^-(a)$ называется число дуг графа, берущих начало в этой вершине, и, аналогично, *полустепенью захода* $d^+(a)$ вершины называется число дуг графа, заканчивающихся в данной вершине.

Пример. В ориентированном графе, изображенном на рис 4.4.б, полустепени вершин следующие: $\deg^-(a)=0$, $\deg^+(a)=2$, $\deg^-(b)=1$, $\deg^+(b)=1$, $\deg^-(c)=1$, $\deg^+(c)=0$, $\deg^-(d)=0$, $\deg^+(d)=1$, $\deg^-(e)=1$,

$\deg^+(e)=1$, $\deg^-(f)=0$, $\deg^+(f)=2$, $\deg^-(g)=1$, $\deg^+(g)=2$, $\deg^-(h)=0$, $\deg^+(h)=2$. Как и в случае неориентированных графов, вершина d является висячей, а вершина h – изолированной.

Граф, степени всех вершин которого равны k , называется *однородным* графом степени k . Граф называют *полным*, если все его вершины попарно соединены между собой и только одним ребром.

Пример. На рисунке 4.5 представлены однородные графы степени 3 (рис. 4.5.а), 5 (рис. 4.5.б), 8 (рис. 4.5.в), 3 (рис. 4.5.г). Но, вместе с тем, полным из них является только первый. Все вершины второго графа попарно соединены между собой, но двумя ребрами, а в третьем и четвертом графах попарного соединения всех точек вообще нет.

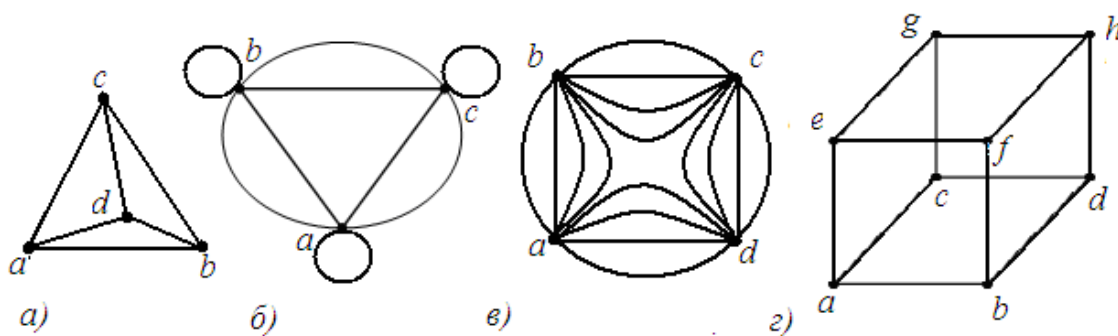


Рис. 4.5. Однородные графы.

Если каждой дуге (a_i, a_j) ориентированного графа G можно поставить в соответствие противоположно направленную дугу (a_j, a_i) , то такой граф называется *симметрическим*.

Граф G называют *планарным*, если существует такое его двумерное графическое представление, которое не содержит пересекающихся линий.

Граф G называется *двудольным*, если все его вершины можно разбить на два произвольных класса таким образом, что каждое ребро (дуга) будет соединять вершины из разных классов.

Пример. На рисунке 4.6.а изображен симметрический граф. Дуге кратности 2 (a, b) можно поставить в соответствие противоположно направленную дугу (b, a) той же кратности. Графы, изображенные на рис. 4.6.а

и 4.6.б являются планарными. В первом случае граф уже не содержит пересекающихся линий, а для второго графа не содержащее пересечений двумерное графическое представление показано на рис. 4.6.в. Два первых графа также являются и двудольными. Для первого графа каждую из его двух вершин можно отнести к отдельному классу, таким образом, требование двудольности выполняется. А для второго графа вершины a, b, c отнесем к одному классу, а вершины d, e, f ко второму. Граф, изображенный на рис. 4.6.г не является ни симметрическим, ни планарным, ни двудольным.

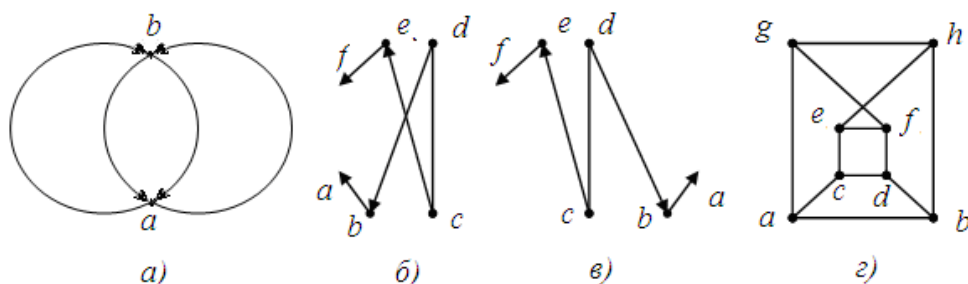


Рис. 4.6. Симметрические, планарные, двудольные графы.

4.1.3. Подграфы

Граф G_1 называется *подграфом* графа G_2 , если все вершины и все ребра графа G_1 содержатся во множестве вершин и ребер графа G_2 .

В случае если подграф G_1 графа G_2 не совпадает с графом G_2 , то такой подграф называется *собственным*.

Пример. На рисунке 4.7 Изображены графы G_1 , G_2 , G_3 . Графы G_2 , G_3 являются собственными подграфами графа G_1 . Для графа G_2 это утверждение очевидно. Однако графическое представление графа G_3 несколько отличается от двух предыдущих. Но и здесь вершины графов G_1 и G_3 полностью идентичны, а каждое ребро из графа G_3 также содержится и во множестве ребер графа G_1 .

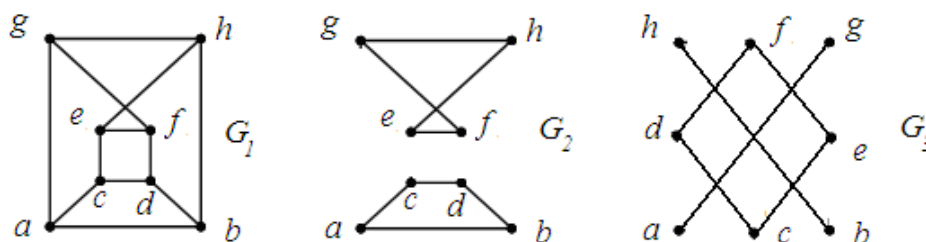


Рис. 4.7. Подграфы.

4.2. Матричное представление графов

Обычное алгебраическое представление графов в виде множеств вершин и ребер является громоздким и неэффективным для действий над графами, поэтому часто графы записывают в виде матриц.

4.2.1. Матрица смежностей

Матрицей смежностей графа G называется квадратная матрица M порядка n , который определяется числом вершин данного графа. Элементами матрицы могут быть только нули и единицы. Единица, находящаяся на пересечении i -ой строки и j -ого столбца означает наличие ребра (дуги), с началом в вершине a_i и с концом в вершине a_j . Ноль определяет, что нет ребра (дуги), соединяющего вершину a_i с вершиной a_j . Таким образом

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, a_j) \in B, \\ 0, & (a_i, a_j) \notin B. \end{cases}$$

Данное определение применимо как для ориентированных, так и для неориентированных графов.

Пример. Построим матрицу смежностей для неориентированного графа G_1 и ориентированного графа G_2 заданных графически (рис. 4.8).

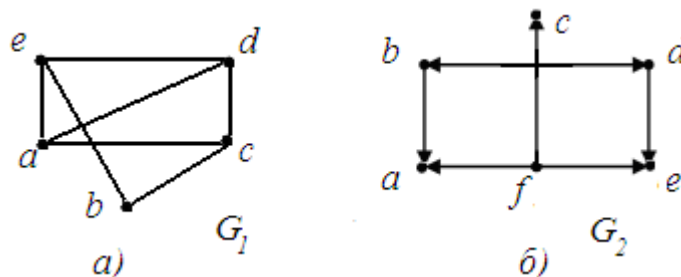


Рис. 4.8. Графы G_1 и G_2 .

Исходя из определения, построим соответствующие матрицы смежностей M_1 и M_2 для графов G_1 и G_2 . Для неориентированного графа G_1 отметим каждое ребро по два раза, такие ребра можно считать направленными в обе стороны. Очевидно, что для неориентированных графов матрица смежностей всегда является симметричной. А для ориентированного графа G_2 дуги могут быть направлены как в одну, так и в две стороны, следовательно, матрица смежности симметричной не будет.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2.2. Матрица инцидентности

Матрицей инцидентности (инциденций) графа G называется прямоугольная матрица N порядков $m \times n$, где m – число вершин, n – число ребер. Построение матриц инцидентностей для неориентированных и ориентированных графов несколько различается. Для неориентированных графов матрица состоит только из нулей и единиц. Элемент матрицы инцидентностей n_{ij} содержит единицу, если i -ая вершина графа G инцидентна j -тому ребру. В противном случае ставится ноль. Таким образом,

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \in b_j, \\ 0, & a_i \notin b_j. \end{cases}$$

Для ориентированных графов матрица инцидентности содержит еще значение -1 .

Здесь

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \text{ является началом дуги } b_j \\ -1, & a_i \text{ является концом дуги } b_j \\ 0, & a_i \notin b_j \end{cases}$$

Очевидно, вид матрицы смежностей и вид матрицы инцидентности графа существенно зависят от того, как именно пронумерованы его вершины и ребра.

Пример. Построим матрицу смежностей для графов G_1 и G_2 , для которых уже построили матрицы смежностей. Для начала пронумеруем ребра матриц.

Для графа G_1 определим номера ребер в следующем порядке: (a,c) , (a,d) , (a,e) , (b,c) , (b,e) , (c,d) , (d,e) . А порядок номеров дуг графа G_2

соответственно: (b, a) , (b, d) , (d, b) , (d, e) , (f, a) , (f, c) , (f, e) . На рис. 4.9 отмечены номера ребер графа G_1 и дуг графа G_2 .

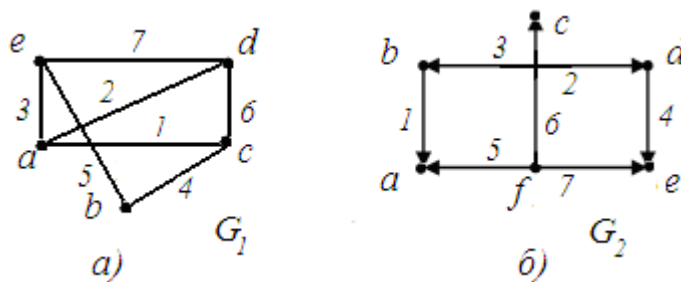


Рис. 4.9. Графы G_1 и G_2 с нумерацией ребер и дуг.

В соответствии с определением построим соответствующие матрицы инцидентностей N_1 и N_2 для графов G_1 и G_2 .

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в каждом столбце матрицы инцидентностей всегда ровно два ненулевых значения. Это означает, что ребро графа соединяет только две вершины.

Отметим основные свойства матриц смежности и инцидентности.

1. Матрица смежности неориентированного графа является симметричной. Для ориентированного графа это утверждение может не выполняться.

2. Сумма элементов i -ой строки или i -го столбца матрицы смежности неориентированного графа равна степени вершины a_i .

3. Сумма элементов i -ой строки матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, исходящих из вершины a_i .

4. Сумма элементов i -го столбца матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, входящих в вершину a_i .

5. Сумма строк матрицы инцидентности ориентированного графа является нулевой строкой.

4.3. Операции над графами

Пусть $G_1 = [A_1, B_1]$ и $G_2 = [A_2, B_2]$ – два произвольных графа.

Объединением графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \cup G_2$, множество вершин которого есть объединение множеств вершин графов $A = A_1 \cup A_2$, а множество ребер является объединением множеств ребер этих графов $B = B_1 \cup B_2$.

Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \cap G_2$, множество вершин которого есть объединение вершин $A = A_1 \cap A_2$, а множество ребер является объединением ребер $B = B_1 \cap B_2$.

Разностью графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \setminus G_2$, множество вершин A которого является разностью вершин графов $A = A_1 \setminus A_2$, а множество ребер B – разностью ребер графов $B = B_1 \setminus B_2$.

Кольцевой суммой графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \oplus G_2$ порожденный на множестве ребер $(B_1 \cup B_2) \setminus (B_1 \cap B_2)$, и множеством вершин, им инцидентных. Нетрудно видеть, что данный граф не содержит изолированных вершин.

Пример. Пусть $G = (GV, GE)$ и $H = (HV, HE)$ — неориентированные мультиграфы, причем $GV = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $GE = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7\}$, $HV = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$, $HE = \{e_1, e_2, e_5, e_6, e_8\}$ имеют вид, изображенный на рисунке 4.10.

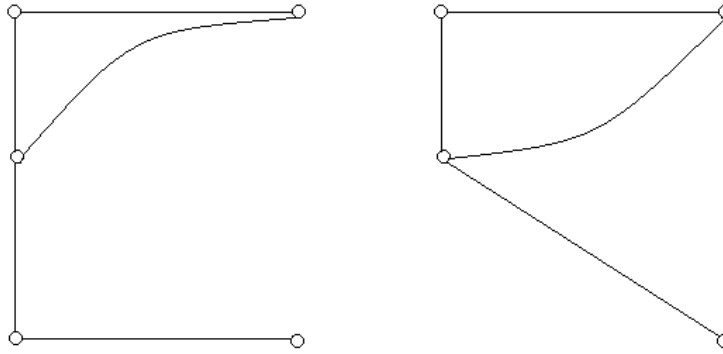


Рис. 4.10. Исходные графы G и H

Осуществим операции объединения, пересечения и кольцевой суммы указанных графов.

$$G \cup H = J_1 = (JV_1, JE_1), \quad \text{где} \quad JV_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

$$JE_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \text{ (рис. 4.11)}$$

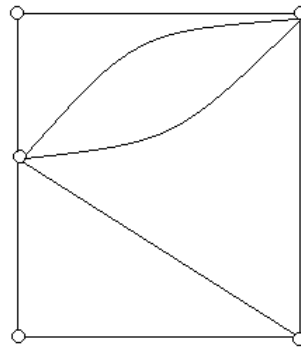


Рис. 4.11. Объединение графов G и H .

$$G \cap H = J_2 = (JV_2, JE_2), \text{ где } JV_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}, JE_2 = \{e_1, e_2\} \text{ (рис. 4.12).}$$



Рис. 4.12. Пересечение графов G и H .

$$G \setminus H = J_3 = (JV_3, JE_3), \text{ где } JV_3 = \{v_4\}, JE_3 = \emptyset.$$

$$H \setminus G = J_4 = (\emptyset, \emptyset) \text{ — пустой граф.}$$

$G \oplus H = J_5 = (JV_5, JE_5)$, где $JV_5 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $JE_5 = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ (рис. 4.13).

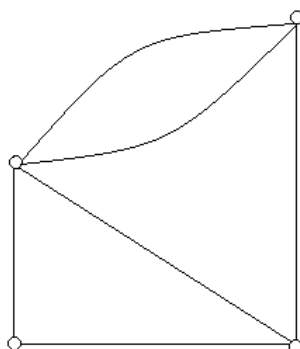


Рис. 4.13. Результат выполнения операции кольцевой суммы.

В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости иллюстраций графов в данном разделе будем считать, что необозначенные ребра (дуги) на графе, соединяющие одни и те же вершины, но изображённые по-разному, различаются.

4.4. Изоморфизм графов

Графы $G_1(A_1, B_1)$ и $G_2(A_2, B_2)$ называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное соответствие между множествами вершин A_1 и A_2 , что любые две вершины одного графа соединены тогда и только тогда, когда соответствующие вершины соединены в другом графе, причем одним и тем же способом. Такое соответствие называют *изоморфизмом* графов.

Пример. На рисунке 4.14 изображены четыре графа G_1, G_2, G_3, G_4 .

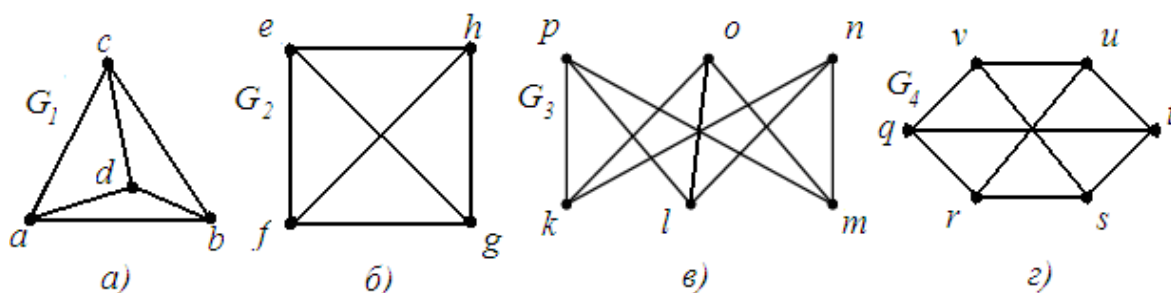


Рис. 4.14. Изоморфные графы.

Рассмотрим графы G_1 и G_2 . Отображения вершин $a \rightarrow f$, $b \rightarrow g$, $c \rightarrow h$, $d \rightarrow e$ является изоморфизмом, так как способы соединения соответствующих

вершин одинаковы. Аналогично можно сказать и об изоморфности графов G_3 и G_4 , если рассмотреть соответствия $k \rightarrow g$, $l \rightarrow u$, $m \rightarrow s$, $n \rightarrow t$, $o \rightarrow r$, $p \rightarrow v$.

Соответствующие соответствия можно определить и графически, передвигая соответствующие вершины графа. Например, передвигая вправо вершину c графа G_1 , а вершину d влево и вверх, получим точный вид графа G_2 . В этом случае изоморфизм графов G_1 и G_2 очевиден. Так же можно увидеть и изоморфность графов G_3 и G_4 . Для этого достаточно передвинуть, поменяв местами, вершины l и o графа G_3 . Полученная модификация графа G_3 поможет увидеть изоморфное отображение.

Изоморфные графы отличаются только обозначением вершин, следовательно, матрицы смежностей двух изоморфных графов могут отличаться только расположением нулей и единиц. Подобно передвижению на плоскости вершин графа, можно преобразовывать и матрицу смежностей, неоднократно переставляя ее строки и столбцы. Если после очередной перестановки матрицы смежностей двух графов совпадут, то графы можно считать изоморфными.

Пример. Исследуем на изоморфность графы G_3 , G_4 , изображенные на рисунке 4.14.

Представим оба графа с помощью матриц смежностей. Для графов G_3 , G_4 матрицы смежностей будут выглядеть следующим образом.

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переставляя строки и столбцы матрицы M_3 , убедимся в изоморфности графов. Преобразования матрицы будем осуществлять по действиям.

1) Поменяем местами вторую и пятую строки матрицы M_3 .

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Теперь переставим второй и второй и пятый столбцы.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_4$$

После двух действий мы получили матрицу смежностей графа G_4 . Следовательно графы G_3 и G_4 изоморфны.

4.5. Маршруты и пути графов

4.5.1. Маршруты и циклы в неориентированном графе

Маршрутом или *цепью* в неориентированном графе G называется произвольная последовательность ребер $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, такая, что каждые два соседних ребра (дуги) b_i и b_{i+1} имеют общую инцидентную вершину.

Одно и то же ребро может встречаться в маршруте один или неограниченное количество раз. В конечном маршруте $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ графа G имеются начало и конец маршрута.

Началом маршрута называется вершина, инцидентная первому ребру b_1 , но не инцидентная второму ребру b_2 . *Концом маршрута* называется вершина, инцидентная последнему ребру b_n , но не инцидентная предпоследнему ребру b_{n-1} .

Длиной (мощностью) маршрута называется число ребер графа, входящих в данный маршрут, причем каждое ребро считается ровно столько раз, сколько оно входит в маршрут.

Циклом называется маршрут, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Граф, в котором найдется цикл, проходящий по всем ребрам графа ровно один раз, называется *эйлеровым графом*.

Пример. В изображенном на рисунке 4.15 графе G рассмотрим три маршрута: $M_1 = (a_1, a_2, a_4)$; $M_2 = (a_1, a_2, a_5, a_6)$ и $M_3 = (a_2, a_5, a_6, a_3)$.

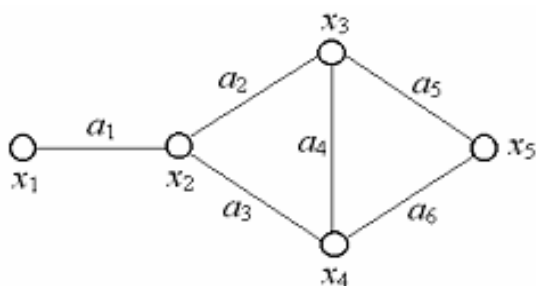


Рис. 4.15. Маршруты в графе.

Тогда длина маршрута M_1 равна трем, а длина маршрута M_2 —четырем. Маршрут M_3 является циклом. Граф не является эйлеровым.

Маршрут, в котором все ребра различны, называется *простой цепью*. В случае, если простая цепь является циклом, то речь идет о *простом цикле*.

Маршрут, в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарной цепью*. Если же элементарная цепь является циклом, то она называется *элементарным циклом*.

Пример. На рис. 4.16.а и 4.16.б изображены графы G_1 и G_2 .

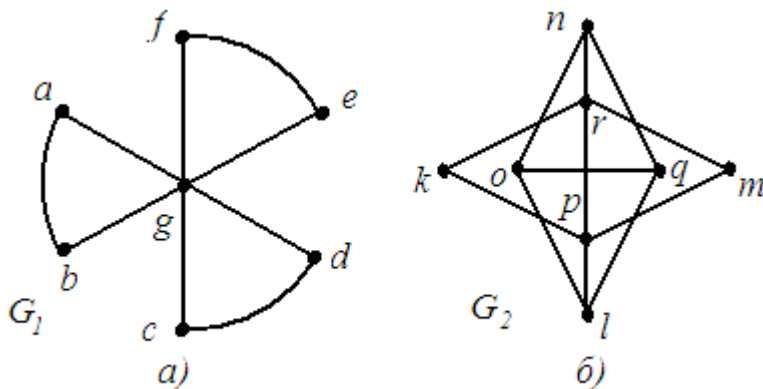


Рис. 4.16. Маршруты и пути графов.

Рассмотрим маршруты $M_1 = ((a, b), (b, g), (g, a))$, $M_2 = ((b, g), (g, b))$, $M_3 = ((g, a), (a, b), (b, g), (g, e), (e, f), (f, g), (g, c), (c, d), (d, g))$ графа G_1 . Длина маршрута M_1 равна трем, мощность M_2 – двум, а маршрута M_3 – девяти. Маршруты M_1 и M_3 являются циклами. Так как цикл M_3 проходит по всем ребра графа ровно один раз, то граф G является эйлеровым. Для маршрутов $M_4 = ((k, p), (p, m), (m, r), (r, k))$ и $M_5 = ((k, p), (p, l), (l, q), (q, n), (n, r), (r, p))$ графа G_2 можно сказать, что M_4 является простым элементарным циклом, M_5 – простая, но не элементарная цепь, так как вершина p встречается дважды.

4.5.2. Пути и контуры в ориентированном графе

Для ориентированного графа G *путем (ориентированной цепью)* называется последовательность дуг $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, в которой каждая конечная вершина произвольной дуги, кроме последней, является начальной вершиной следующей дуги. Количество дуг заданного пути называется *длиной пути*.

Путь называется *контуром*, если его начальная вершина совпадает с конечной. Как и для неориентированных графов путь, в котором ни одна из дуг не повторяется, называется *простым*. Соответственно, ориентированная цепь в которой все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарной*. Простыми и элементарными могут быть и контуры.

Пример 3.17. На рисунке 4.17 изображен граф G_3 .

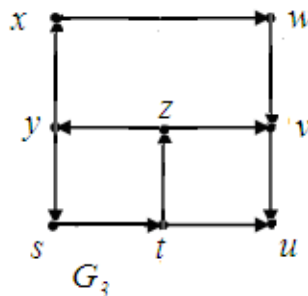


Рис. 4.17. Ориентированный граф G_3 .

Рассмотрим пути $P_1 = ((t, z), (z, y), (y, x), (x, w), (w, v), (v, u))$, $P_2 = ((t, z), (z, y), (y, s), (s, t))$ и $P_3 = ((t, z), (z, y), (y, s), (s, t), (t, z), (z, y))$. Путь P_1 является простым элементарным путем. Путь P_2 – простым элементарным

контуром. Путь P_3 нельзя назвать ни простым, ни элементарным, так как повторяются и дуги и вершины.

Следует помнить, что понятиям ребра, маршрута (цепи), цикла в неориентированном графе соответствуют понятия дуги, пути (ориентированной цепи), контура в ориентированном графе.

4.5.3. Пути во взвешенных ориентированных графах

Ориентированный граф называется *взвешенным (нагруженным)*, если дугам этого графа поставлены в соответствие веса, так что дуге (x_i, x_j) сопоставлено некоторое значение $c(x_i, x_j) = c_{ij}$, называемое *длиной (весом, стоимостью)* дуги.

Длиной (весом, стоимостью) пути s , состоящего из некоторой последовательности дуг (x_i, x_j) , называется числовое значение $l(s)$, равное сумме длин дуг, входящих в этот путь:

$$l(s) = \sum c_{ij},$$

причем суммирование ведется по всем дугам (x_i, x_j) из s .

Матрица C , содержащая длины дуг, называется *матрицей длин дуг или матрицей весов*.

Пример. Рассмотрим изображенный на рисунке 4.18 взвешенный ориентированный граф G .

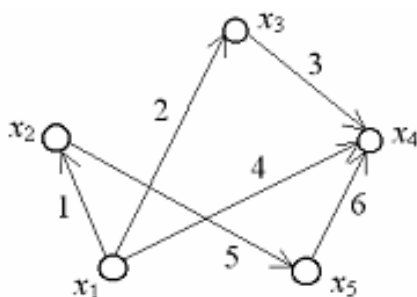


Рис. 4.18 Помеченный граф G .

Матрица весов C для представленного графа G имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Длина пути (x_1, x_2, x_5, x_4) равна $1 + 5 + 6 = 12$.

Четверка (M, R, f, g) называется *помеченным графом*, где пара функций f , и g являются *пометкой* или *распределением меток* графа $G = (M, R)$ и $f: M \rightarrow SM$ (распределение меток вершин), $g: R \rightarrow SR$ (распределение меток дуг).

Для вершины $a \in M$ элемент $f(a)$ называется *весом вершины a* , для дуги $u \in R$ элемент $g(u)$ называется *весом дуги u* .

Пример. Помеченный граф (M, R, f, g) представляет собой схему автомобильных дорог с указанием их протяженности (рис. 4.19).

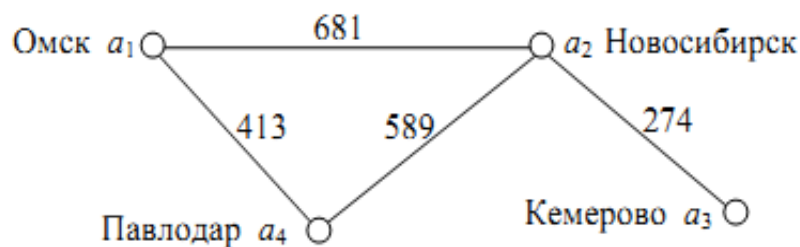


Рис. 4.19. Схема автомобильных дорог.

Пусть $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $R = \{[a_1, a_2]; [a_2, a_3]; [a_1, a_4]; [a_2, a_4]\}$,
 $f: M \rightarrow C$, $g: R \rightarrow \omega$,
 где C – множество городов:
 $f(a_1) = \text{Омск}$, $g([a_1, a_2]) = 681$,
 $f(a_2) = \text{Новосибирск}$, $g([a_2, a_3]) = 274$,
 $f(a_3) = \text{Кемерово}$, $g([a_1, a_4]) = 413$,
 $f(a_4) = \text{Павлодар}$, $g([a_2, a_4]) = 589$.

Матрица весов имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 681 & \infty & 413 \\ 681 & 0 & 274 & 589 \\ \infty & 274 & 0 & \infty \\ 413 & 589 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Для ненагруженного графа введем понятие *кратчайшего пути*. Это путь с минимальным общим числом дуг, причем каждая дуга считается столько раз, сколько она содержится в этом пути.

Пример. Найдём минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 в изображенном графе (рис. 4.20).

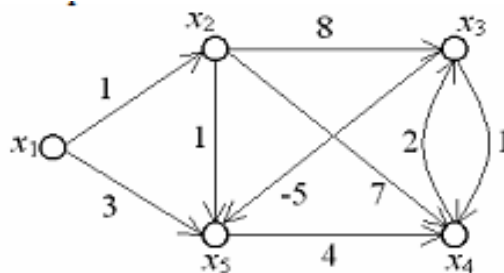


Рис. 4.20. Кратчайший путь в графе.

Введем число вершин графа $n = 5$. Матрица весов этого графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 8 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с матрицей весов графа, минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 будет: $(x_1, x_2, x_5, x_4, x_3)$. Длина пути равна восьми.

4.6. Связность графа

4.6.1. Понятие связности графа

Связным называется неориентированный граф G , каждая пара вершин a_i и a_j которого может быть соединена, по крайней мере, одной цепью.

Компонентой связности неориентированного графа G будем называть любой связный подграф графа G , не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа G .

Односторонне связным называется ориентированный граф G , если для любых двух его вершин a_i и a_j , по крайней мере, одна достижима из другой.

Компонентой односторонней связности неориентированного графа G называют односторонне связный подграф графа G , не являющийся собственным подграфом никакого другого односторонне связного подграфа графа G .

Сильно связным называется ориентированный граф G , если для каждой пары вершин a_i и a_j этого графа существует хотя бы один путь, соединяющий указанные вершины.

Компонентой сильной связности ориентированного графа G можно считать любой сильно связный подграф графа G , не являющийся собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа графа G .

Пример. Рассмотрим графы G_1 , G_2 , G_3 и G_4 (рис. 4.21).

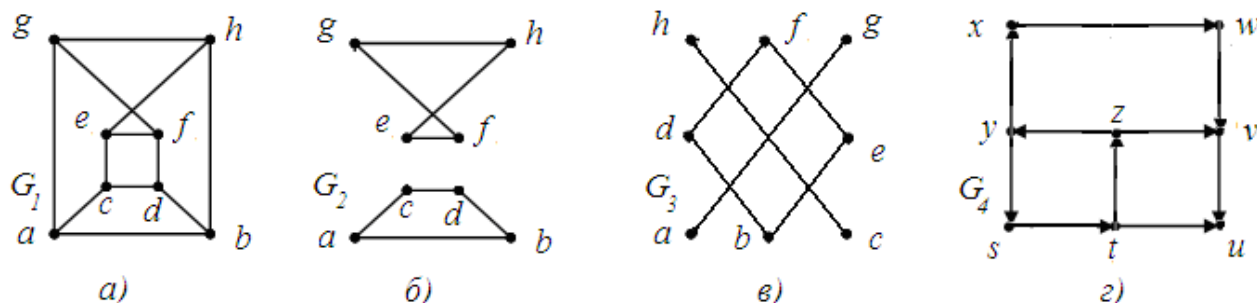


Рис. 4.21. Связность графов.

Граф G_1 является связным. Граф G_2 содержит две компоненты связности, а граф G_3 – три. Ориентированный граф G_4 можно считать односторонне связным. G_4 содержит компоненту сильной связности с вершинами s, t, y, z .

4.6.2. Матрицы связности

Матрицей связности S неориентированного графа G с множеством вершин $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ называется квадратная матрица порядка n , элементы которой определяются по следующему правилу:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } a_i \text{ и } a_j \text{ принадлежат одной компоненте связности,} \\ 0, & \text{если вершины } a_i \text{ и } a_j \text{ принадлежат разным компонентам связности.} \end{cases}$$

Пример. Используя данное определение, построим матрицы связности S_1 , S_2 и S_3 графов G_1 , G_2 и G_3 , изображенных на рисунке 4.21.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что строки и столбцы для вершин, принадлежащих одним и тем же компонентам, одинаковы.

Матрицей сильной связности W ориентированного графа G с множеством вершин $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ называется квадратная матрица порядка n , элементы которой определяются следующим образом:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует путь из вершины } a_i \text{ в вершину } a_j, \\ 0, & \text{если пути из вершины } a_i \text{ в вершину } a_j \text{ нет.} \end{cases}$$

Матрицей односторонней связности T ориентированного графа G с множеством вершин $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ называется квадратная матрица порядка n , элементы которой равны:

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существуют оба пути: из } a_i \text{ в } a_j \text{ и из } a_j \text{ в } a_i, \\ 0, & \text{если хотя бы из двух указанных путей не существует.} \end{cases}$$

Пример. Построим матрицу сильной связности W_4 и матрицу односторонней связности T_4 графа G_4 , представленного на рисунке 4.21.

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следует заметить, что матрица сильной связности всегда симметрична.

4.7. Деревья

Неориентированным деревом (или просто *деревом*) называется связный граф без циклов. На рисунке 4.22 представлены три графа, являющиеся деревьями.

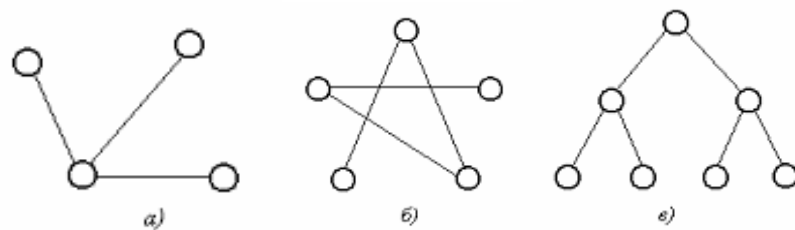


Рис.4.22. Три графа, являющиеся деревьями.

Если граф несвязный и не имеет циклов, то каждая его связная компонента будет *деревом*. Такой граф называется *лесом* (рис. 4.23).

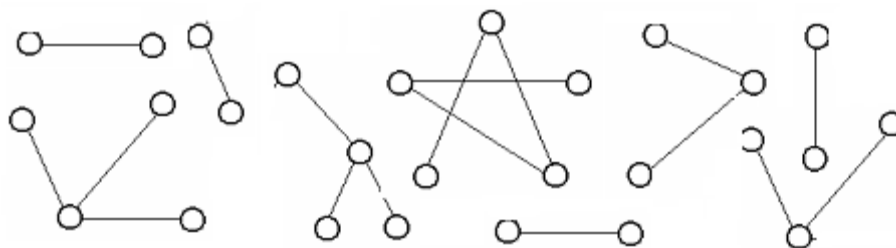


Рис. 4.23. Лес.

Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Для графа, изображенного на рис. 4.24.а, графы на рис. 4.24.б и 4.24.в являются остовными деревьями.

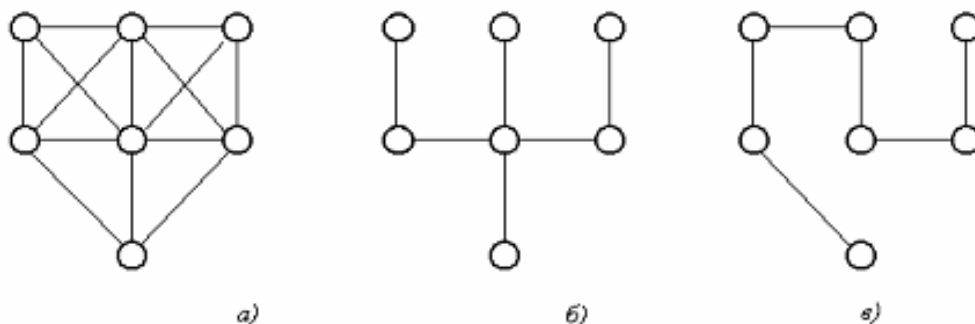


Рис. 4.24. Остовные деревья.

Пусть граф G имеет n вершин и m ребер. Так как всякое дерево с n вершинами по определению имеет $n - 1$ ребер, то любое остовное дерево графа G получается из этого графа в результате удаления $m - (n - 1) = m - n + 1$ ребер.

Число $\gamma = m - n + 1$ называется *цикломатическим числом* графа.

Пример. Найдем минимальное остовное дерево для изображенного на рисунке 4.25 графа G .

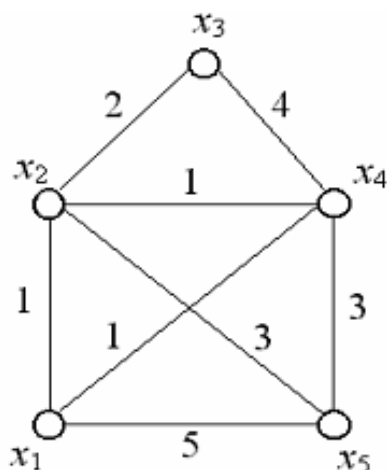


Рис. 4.25. Граф G .

Процесс построения минимального остовного дерева графа заключается в последовательном добавлении его компонентов (рис. 4.26):

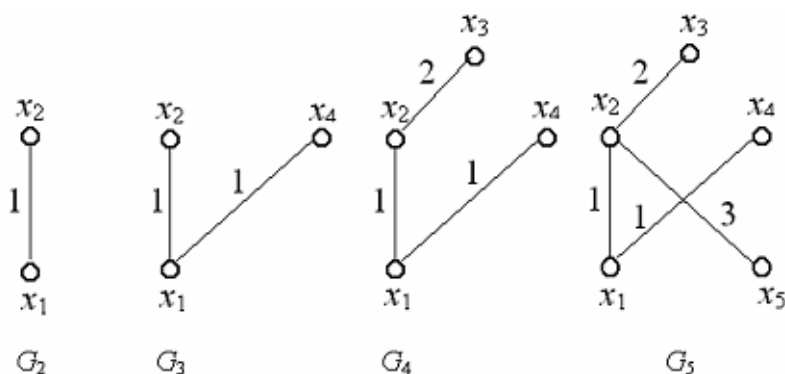


Рис. 4.26. Построение минимального остовного дерева графа.

4.8. Расстояния в графах

Расстоянием между вершинами a и b связного графа G называется длина кратчайшего маршрута между заданными вершинами. Расстояние между вершинами a и b обозначается $p(a,b)$.

Матрицей расстояний P графа G с множеством вершин $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ называется квадратная матрица порядка n , элементы которого равны

$$p_{ij} = p(a_i, a_j).$$

Эксцентриситетом вершины a графа G называется наибольшее расстояние между данной вершиной и всеми другими вершинами графа. Эксцентриситет вершины a обозначается $\varepsilon(a)$.

Диаметром графа $d(G)$ называется наибольший среди всех эксцентриситетов вершин графа G . Радиусом графа $r(G)$ называется наименьший среди всех эксцентриситетов вершин графа G .

Вершину a графа G называют периферийной, если ее эксцентриситет $e(a)$ равен диаметру графа $d(G)$. Вершину a графа G считают центральной, если ее эксцентриситет $e(a)$ совпадает с радиусом графа $d(G)$.

Центром графа G называется множество всех его центральных вершин. И, соответственно, периферией графа можно считать все его периферийные вершины.

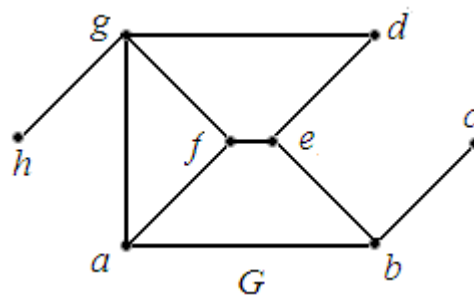


Рис. 4.27. Расстояния в графах.

Пример. Для графа G (рис. 4.27) построим матрицу расстояний, найдем эксцентриситеты всех его вершин, диаметр, радиус, центр графа и его периферию.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \varepsilon(a) &= 2, \\ \varepsilon(b) &= 3, \\ \varepsilon(c) &= 4, \\ \varepsilon(d) &= 3, \\ \varepsilon(e) &= 3, \\ \varepsilon(f) &= 3, \\ \varepsilon(g) &= 3, \\ \varepsilon(h) &= 4. \end{aligned}$$

Из расчетов эксцентриситетов вершин видно, что диаметр графа $d(G)$ равен четырем, радиус $r(G)$ – двум. Единственная вершина a образует центр графа G , а периферийными можно считать вершины c и h .

Раздел II. Теория вероятностей и математическая статистика

Глава 5. Теория вероятностей

Функционирование органов внутренних дел связано с различными явлениями, процессами, деятельностью людей (правонарушителей, сотрудников, вспомогательного состава), которые часто имеют непредсказуемый характер. Эффективность борьбы с преступностью зависит от многих факторов, порой неизвестных заранее или известных лишь частично. Так, раскрытие преступных действий и выявление преступников осуществляется при наличии и действии случайных факторов. Изучением закономерностей в случайных явлениях и процессах занимается специальная наука - теория вероятностей.

Большинство задач, которые решают специалисты органов внутренних дел, содержат элементы неопределенности. Объясняется это тем, что процессы формирования объектов исследования протекают под влиянием множества факторов. В каждом конкретном случае их комбинации и степень воздействия различны. Поэтому признаки объектов, возникающие под влиянием совокупности факторов, не поддаются однозначной оценке и приобретают вероятностный характер. Решением такого рода задач и занимается раздел математики, называемый теорией вероятностей.

5.1. Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей – это наука, изучающая количественные закономерности однородных случайных событий массового характера и разрабатывающая методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные события.

Теория вероятностей, подобно другим математическим наукам возникла из потребностей практики. Первые ростки этой теории относятся к началу XVII в. Уже тогда знаменитый физик *Галилео Галилей* (1564 – 1642) пытался подвергнуть научному исследованию ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятности. Однако теория вероятностей, как математическая наука, сформировалась, в основном, на более

простом материале. Таким материалом исторически оказались так называемые «азартные» игры. Само слово «азарт» означает «случай». Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине XVII в. и связано с исследованиями *Блеза Паскаля* (1623 – 1662), *Пьера Ферма* (1601 – 1665), *Христиана Гюйгенса* (1629 – 1695) в области азартных игр. Для всего XVIII в. и начала XIX в. характерно бурное развитие теории вероятностей. Эта теория становится «модной» наукой. Ее пытаются применять к изучению общественных явлений.

Важный вклад в теорию вероятностей внёс *Якоб Бернулли* (1655 – 1705): он дал доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний.

В XVIII веке важное значение для развития теории вероятностей имели работы *Томаса Байеса* (1702 – 1761), сформулировавшего и доказавшего знаменитую Теорему Байеса.

Выдающаяся роль в развитии теории вероятностей принадлежит знаменитому математику *Пьеру-Симону Лапласу* (1749-1827). Он впервые дал стройное и систематическое изложение основ теории вероятностей и развил ряд замечательных приложений к вопросам практики, в частности к анализу ошибок наблюдений и измерений.

В первой половине XIX века теория вероятностей начинает применяться к анализу ошибок наблюдений. Французский ученый *Семион Пуассон* (1781 – 1840) доказал первые предельные теоремы. Величайший немецкий математик *Иоганн Карл Гаусс* (1855 – 1777) детально исследовал нормальное распределение случайной величины, также называемое «распределением Гаусса». Среди ученых Петербургской школы теории вероятностей следует назвать *Виктора Буняковского* (1804-1889) – автора первого курса теории вероятностей на русском языке. В этой работе автор наряду с оригинальным изложением методов теории вероятностей осветил вопросы ее практического применения.

Во второй половине XIX века значительный вклад внёс ряд европейских учёных. Среди них исключительный научный вклад внесли русские ученые: *Пафнутий Чебышев* (1821 – 1824), *Андрей Марков* (1856 – 1922) и *Александр Ляпунов* (1857 – 1918). В это время были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, разработана теория Марковских цепей.

Наследие русских математиков получило развитие в работах советских математиков *Евгения Слуцкого* (1880-1948), *Сергея Бернштейна* (1880-1968), *Александра Хинчина* (1894-1959), *Юрия Линника* (1904-1972).

Современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматизации, предложенной *Андреем Колмогоровым* (1903 – 1987). В результате теория вероятностей приобрела строгий математический вид и окончательно стала восприниматься как один из важнейших разделов математики.

5.1.1. Основные понятия и классификация событий

Случайным событием (событием) называется любой исход опыта или наблюдения, который может произойти или не произойти.

Рассмотрим следующие примеры.

Подбрасываем монету. Появился орел. А ведь могла появиться и решка. То, что появился орел – случайное событие.

При задержании особо опасного преступника оперативный работник произвел выстрел из пистолета. Попал. Но мог и не попасть (произошла осечка, подвел глаз, дрогнула рука). Попадание - событие случайное.

На месте преступления обнаружен отпечаток указательного пальца левой руки предполагаемого преступника. Конечно, это дело случая: мог быть оставлен отпечаток указательного пальца правой руки, большого пальца или вообще ничего. То, что обнаружен отпечаток именно указательного пальца левой руки - случайное событие.

В этих примерах *случайные события* - последствия определенных действий или результаты наблюдений при реализации комплекса условий (подбрасывание монеты, выстрел, снятие отпечатка).

Для простоты *случайные события* называют *событиями*. События обозначаются заглавными латинскими буквами (часто с добавлением цифровых обозначений), например, A, B, C, A_1, B_2, D_8 .

Классифицируются события по следующим видам:

достоверные, невозможные, случайные, неопределенные;

совместные, несовместные;

зависимые, независимые;

простые, сложные.

Достоверным событием называется такое событие, которое при реализации данного комплекса условий непременно произойдет.

Пример. Бросается игральный кубик, содержащий шесть граней с числами «1», «2», «3», «4», «5», «6». Определим событие A_1 , как «выпадение натурального числа». Очевидно, что все числа от одного до шести являются натуральными числами, следовательно, Событие A_1 «выпадение натурального числа» является достоверным.

Невозможное – это такое событие, которое при соблюдении некоторых условий не может произойти.

Пример. Теперь бросим два игральных кубика. Определим событие A_2 , как «сумма выпавших чисел равна одному». Так как на каждом кубике могут выпасть числа от одного до шести, следовательно, минимальная сумма будет равна $1 + 1 = 2$. Таким образом, событие A_2 «сумма выпавших чисел равна одному» является невозможным.

Случайным событием называется такой исход эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

Пример. Снова бросаем кубик. Определим событие A_3 , как «выпадение шестерки». Данное событие A_3 , является случайным событием, так как в нашем опыте «шестерка» может выпасть, а может и не выпасть.

Пример. Факт совершения преступления на обслуживаемой органами внутренних дел территории в какой-либо период времени является случайным событием.

Неопределенным называется событие, исход которого заранее не может быть предсказан, так как невозможно проводить многократные эксперименты при одних и тех же условиях.

Пример. Поиск и задержание конкретного преступника невозможно многократно повторять, соблюдая одни и те же условия.

Два события A и B называются *совместными* при данном испытании (наблюдении), если появление одного из них не исключает возможности появления другого.

Пример. Снова бросим два кубика. Событие A_1 определим, как «Выпадение шестерки на первом кубике», а событие A_2 , как «Выпадение шестерки на первом кубике». Так как при одном испытании одновременно могут выпасть две шестерки сразу, следовательно, события A_1 и A_2 являются совместными.

Пример. Представим, что в тире по мишени одновременно стреляют два курсанта. Событие A_1 определим, как «поражение мишени первым курсантом», а событие A_2 определим, как «поражение мишени вторым курсантом». Так как при выстрелах двух курсантов мишень может быть поражена двумя пулями, то события A_1 и A_2 являются совместными.

Пример. Если входная дверь банка блокирована двумя независимо срабатывающими устройствами, то событие A (срабатывание первого устройства) и событие B (срабатывание второго устройства) являются совместными, так как оба датчика могут сработать одновременно.

События A и B называются *несовместными*, если появление одного из них исключает возможность появления другого.

Пример. По мишени производится выстрел одним стрелком. Определим событие A , как попадание в мишень, а событие B , как промах. Очевидно, что указанные события A и B исключают появление друг друга: одним выстрелом

попасть в мишень и промахнуться стрелок не может. Таким образом, определенные события A и B являются несовместными.

Пример. Если предложены две версии раскрытия преступления, то событие A (верна первая версия) и событие B (верна вторая версия) несовместны, так как не могут быть верны одновременно обе версии.

События A и B являются *зависимыми* друг от друга, если наступление или не наступление события A влияет на возможность наступления события B .

Пример. Возьмем колоду игральных карт и последовательно вытащим из нее две карты. Определим события. Событие A определим, как «первая карта является тузом», а событие B , как «вторая карта является тузом». Тогда наступление события A влияет на наступление события B , поскольку если событие A наступит, то в колоде останется только три туза, а если первая карта не оказалась тузом, то в колоде перед выбором второй карты останется четыре туза, а возможность наступления события B изменится.

Пример. Если событие A – наступление холодного сезона, а событие B – переход на зимнюю форму одежды, то событие B зависит от наступления события A .

События A и B являются *независимыми*, если появление одного из них никак не влияет на появление другого.

Пример. В тире по мишени одновременно стреляют два курсанта. Событие A_1 определим, как «поражение мишени первым курсантом», а событие A_2 определим, как «поражение мишени вторым курсантом». Очевидно, события A_1 и A_2 являются независимыми.

Пример. Сообщения граждан, поступающие в дежурную часть по телефону, тоже можно считать независимыми.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *парно-несовместными*, если любые два из них несовместны

Пример. Производится один выстрел в тире по мишени с концентрическими зонами поражения. Пулей может быть поражена одна из зон, а стрелку начисляется 10, 9, 8, 7, 0 баллов. События A_1 «получение 10

баллов», A_2 «получение 9 баллов», A_3 «получение 8 баллов», A_4 «получение 7 баллов» и A_5 «получение 0 баллов» являются попарно-несовместными.

N несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют *полную группу*, если в результате данного испытания обязательно должно произойти одно из них.

Пример. Бросая игральный кубик, можно определить шесть событий: A_1 «Выпадение единицы», A_2 «Выпадение двойки», A_3 «Выпадение тройки», A_4 «Выпадение четверки», A_5 «Выпадение пятерки», A_6 «Выпадение шестерки». Все указанные события являются попарно-несовместными и образуют полную группу.

Пример. Предложено 4 версии, образующих полную группу. Тогда в результате практической разработки одна из них обязательно окажется верной.

Два единственно возможных и несовместных события образуют полную группу событий. Такие события называются *противоположными* и обозначаются A и $\bar{A}$.

Пример. Пусть событие A - «попадание стрелка в цель», а событие $\bar{A}$ - «промах». События A и $\bar{A}$ образуют полную группу и являются противоположными.

Пример. Подбрасывается монета. «Выпадение орла» и «Выпадение решки» также являются противоположными.

Простое событие – это событие, которое нельзя разложить на другие события.

Пример. Событие «получение пятерки на экзамене» является простым.

Комбинируя вышеуказанные простые события определенным образом, можно получать так называемые сложные события, имеющие важные практические приложения.

Пример. Сравним следующие события:

A - появление двух очков при бросании игральной кости;

B - появление четного числа очков при бросании игральной кости.

Заметим следующее отношение между событиями: если произошло A , то обязательно произойдет и событие B .

Событие A называется *благоприятствующим* событию B , если появление события A влечет за собой появление события B .

Тот факт, что A благоприятствует B (или B является следствием A), записывается в виде:

$$A \subset B \text{ или } B \supset A.$$

Событие A является частью события B , поскольку событие B состоит в осуществлении трех элементарных событий: появление двух очков, появление четырех очков, появление шести очков.

Пример. Сопоставим события:

A – появление герба при подбрасывании монеты,

B – не появление цифры при подбрасывании монеты.

Если же монета не может укатиться и застрять в щели пола или стать на ребро, тогда если произошло A , то произошло и B и в то же время если произошло B , то произошло и A . Тогда запишем: $A = B$ и будем говорить, что события A и B равносильны.

События A и B называются *равносильными*, если появление события A влечет за собой появление события B и в то же время появление события B влечет за собой появление события A .

Равносильные события не следует путать с равновозможными.

События называются *равновозможными*, если есть основание считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие.

Пример. Появление «орла» и появление «решки» при бросании монеты – равновозможные события, так как предполагается, что монета изготовлена из однородного металла, имеет правильную цилиндрическую форму, и наличие чеканки не оказывает влияния на результат.

Пример. Появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости равновозможные события, если игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не оказывает влияния на выпадение любой грани.

5.1.2. Операции над событиями

Мы привыкли к тому, что математические действия выполняются в основном над числами. Но оказывается, что их можно проводить и над событиями. Этим и занимается раздел математики, который называется *алгебра событий*.

Суммой (объединением) двух событий A и B называется третье событие C , состоящее в появлении или события A , или события B , или обоих этих событий.

Обозначение: $C = A + B$ или $C = A \cup B$.

Пример. Если событие A – попадание в цель при первом выстреле, B – попадание в цель при втором выстреле. Тогда событие $C = A + B$ есть попадание в цель вообще, безразлично при каком выстреле – при первом, при втором или при обоих вместе.

Пример. В ящике находятся 20 деталей первого сорта и 17 деталей второго. Из ящика последовательно вытаскивают две детали. Определим события:

A – первая деталь окажется высшего сорта;

B – вторая деталь окажется высшего сорта.

Тогда суммой $A + B$ является событие, состоящее в том, что хотя бы одна деталь из двух взятых будет первого сорта.

Суммой (объединением) нескольких событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется событие $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Пример. Производится 5 выстрелов по мишени. Рассмотрим события: A_0 – «ни одного попадания», A_1 – «одно попадание», A_2 – «два попадания», A_3 – «три попадания», A_4 – «четыре попадания», A_5 – «пять попаданий». Тогда $A = A_0 + A_1 + A_2$ есть событие – «не более двух попаданий», $B = A_3 + A_4 + A_5$ есть событие – «не менее трех попаданий».

Произведением (пересечением) двух событий A и B называется такое третье событие C , которое состоит в совместном появлении и события A , и события B .

Обозначение: $C = AB$ или $C = A \cap B$.

Пример. Событие A – «попадание в цель при первом выстреле», событие B – «попадание в цель при втором выстреле». Тогда AB состоит в попадании в цель при обоих выстрелах.

Произведением (пересечением) нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Пример. Бросается игральный кубик. Рассмотрим следующие события: A – «число выпавших очков меньше 5», B – «число выпавших очков больше 2», C – «число выпавших очков нечетное. Тогда событие $D = ABC$ заключается в том, что выпало 3 очка.

5.2. Вероятность события

Вероятность события - это численная мера объективной возможности его появления.

Идея выражать числами степень возможности появления тех или иных событий возникла давно и возникла на основе первых попыток исчисления шансов в азартных играх. Исторически первым определением понятия вероятности является то определение, которое в настоящее время принято называть классическим определением вероятности.

Если опыт таков, что подразделяется только на конечное число элементарных событий, которые к тому же являются равновероятными, то говорят, что речь идет о классическом случае.

Примерами таких опытов являются броски монеты (два равновероятных элементарных события) или бросание игральной кости (шесть равновероятных элементарных событий).

5.2.1. Классическая вероятность

Классическая формула вероятности. В общем случае, когда имеется n равновероятных элементарных событий, вероятность любого составного

события A , состоящего из m элементарных событий определяется как отношение элементарных событий, благоприятствующих событию A , и общему числу элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример. Какова вероятность появления «решки» при бросании монеты?

Решение. В нашем примере можно определить всего 2 равновероятных элементарных событий, а благоприятствует событию A только одно из них. Тогда вероятность появления «решки» при одном бросании монеты равна:

$$P(A_1) = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Пример. В случае с игральной костью вероятность события A_1 , состоящего в выпадении шестерки равна $P(A_1) = \frac{1}{6}$, а вероятность событий A_2 , состоящего в выпадении четного числа очков равна $P(A_2) = \frac{3}{6} = 0,5$.

Пример. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 13?

Решение. Каждый из кубиков может упасть шестью различными способами.

Тогда два кубика по правилу умножения могут упасть $6 \times 6 = 36$ различными способами. Любой из этих исходов благоприятствует наступлению события A , заключающегося в том, что сумма выпавших очков меньше 13. Действительно, максимальная сумма очков выпадет тогда, когда на каждом кубике выпадет по 6 очков. Но эта сумма равна 12, и она меньше 13. Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{36}{36} = 1.$$

Из формулы для вычисления вероятности вытекают следующие свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, если событие A достоверное, то любой исход испытания благоприятствует этому событию, но тогда $m = n$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна 0.

Действительно, если событие A невозможное, то ни один из исходов испытания не благоприятствует ему. Следовательно, $m = 0$, но тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Свойство 3. Вероятность события A удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Число исходов, благоприятствующих наступлению события, либо равно 0, либо m , либо, по определению вероятности, является частью всех n исходов испытания.

Пример. Цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 написаны на карточках, которые тщательно перемешаны. Произвольным образом выбираются подряд три карточки и кладутся в ряд. Какова вероятность того, что число, составленное из трех цифр, которые написаны на карточках, больше 987?

Решение. Найдём число исходов, благоприятствующих событию A , вероятность которого следует определить. Однако это число равняется нулю, так как из данных карточек нельзя составить число, которое больше 987. Действительно, любое число, которое больше 987, например, 988, 991, предполагает повторение цифр, что невозможно по условию задачи.

Таким образом, число благоприятствующих исходов $m = 0$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Для нахождения вероятности с помощью формулы классической вероятности часто приходится использовать элементы комбинаторики. Рассмотрим примеры

Пример. В урне находятся 12 красных и 8 зеленых шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что он красный?

Решение. Введем обозначения:

A – вынутый из урны шар окажется красным.

Тогда число случаев, благоприятствующих событию A , совпадает с количеством красных шаров в урне $m = 12$; а общее число случаев рассчитаем, как общее количество шаров в урне, $n = 12 + 8 = 20$.

Тогда, используя классическую формулу вероятностей получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{20} = 0,6.$$

Таким образом, вероятность того, что вынутый из урны шар окажется красным, равна 0,6.

Пример. В урне находятся 12 красных и 8 зеленых шаров. Вынули три шара. Какова вероятность того, что один из них красный и два зеленых?

Решение. Введем обозначения:

A – вынули один красный шар и два зеленых.

Учитывая тот факт, что порядок вытаскивания трех шаров не важен, общее число вариантов n вытаскивания трех шаров из двадцати будет равно сочетанию из двадцати по трем:

$$n = C_{20}^3 = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140.$$

Число благоприятных исходов m можно представить, как произведение количества комбинаций выбора одного красного шара из двенадцати C_{12}^1 на количество комбинаций выбора двух шаров зеленого цвета из восьми C_8^2 :

$$m = C_{12}^1 \cdot C_8^2 = \frac{12!}{1! \cdot 11!} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 12 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} = 336.$$

Тогда, используя классическую формулу вероятностей получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{336}{1140} \approx 0,294737.$$

Таким образом, вероятность того, что среди вынутых из урны шаров один красный и два зеленых, равна 0,294737.

5.2.2. Статистическая вероятность

На практике очень часто встречаются испытания, число возможных исходов которых велико или бесконечно. Так же встречаются задачи, в которых элементарные события не являются равновероятными. В таких случаях классическое определение вероятности неприемлемо.

Во многих случаях трудно указать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы являются равновероятными. В связи с этим появилась необходимость введения еще одного определения вероятности, называемого *статистическим*. Чтобы дать это определение, предварительно вводят понятие относительной частоты события.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

$$\omega(A) = \frac{m}{n}.$$

Здесь $\omega(A)$ – относительная частота события A ; m – число появлений события; n – общее число испытаний.

Частота события обладает следующими свойствами:

Частота достоверного события U равна единице:

$$\omega(U) = 1.$$

Частота невозможного события V равна нулю:

$$\omega(V) = 0.$$

Частота случайного события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \leq \omega(A) \leq 1.$$

Частота суммы двух несовместных событий A и B равна сумме частот этих событий:

Наблюдения позволили установить, что относительная частота обладает свойствами статистической устойчивости: в различных сериях многочисленных

испытаний (в каждом из которых может появиться или не появиться это событие) она принимает значения, достаточно близкие к некоторой постоянной. Эту постоянную, являющуюся объективной числовой характеристикой явления, считают вероятностью данного события.

Статистической вероятностью события A называется относительная частота появления этого события в n произведенных испытаниях.

$$P(A) = \omega(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример. В результате 200 выстрелов по мишени получено 176 попаданий. Определить вероятность поражения цели при одном выстреле и вероятное число попаданий при 25 выстрелах.

Решение. Введем обозначения:

A – попадание в мишень.

Из условия задачи следует, что число испытаний, в котором появилось событие A , $m = 176$, а общее число фактически произведенных испытаний $n = 200$. Найдем вероятность поражения цели при одном выстреле:

$$P(A) = \omega(A) = \frac{m}{n} = \frac{176}{200} = 0,88.$$

Из формулы статистической вероятности следует, что $m = \omega(A) \cdot n$, тогда подставляя числовые значения n и $\omega(A)$ получим:

$$m = \omega(A) \cdot n = 0,88 \cdot 25 = 22.$$

Таким образом, частота попаданий по мишени и вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,88, а вероятное число попаданий при 25 выстрелах равно 22.

5.2.3. Геометрическая вероятность

Пусть случайное испытание можно представить, как *бросание точки* наудачу в некоторую геометрическую область G (на прямой, плоскости, в пространстве). Элементарные исходы – это отдельные точки области G , любое событие A – это подмножество области, пространства элементарных исходов G .

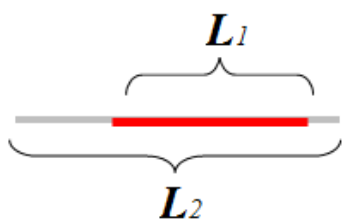
Если для простоты считать, что выбор точек равномерен внутри области G , то вероятность попадания точки в некоторое подмножество пропорциональна его мере (длине, площади, объему) и не зависит от его расположения и формы.

Геометрическая вероятность – это вероятность попадания точки в некоторую, заранее определенную область (отрезок, часть плоскости, объемной фигуры). Она определяется отношением:

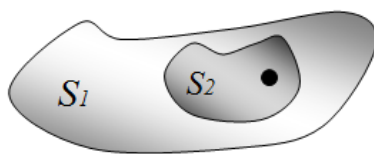
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(G)},$$

где $m(G)$ и $m(A)$ – геометрические меры (длины, площади или объемы) всего пространства элементарных исходов G и события A соответственно.

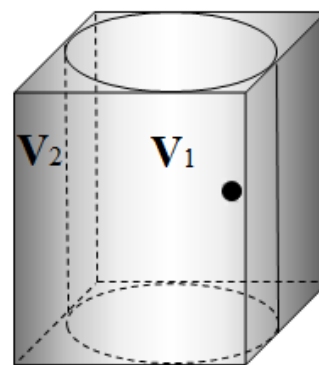
Чаще всего, в одномерном случае речь будет идти о длинах отрезков, в двумерном – о площадях фигур, в трехмерном – об объемах тел.



$$P(A) = \frac{\text{длина } l}{\text{длина } L}$$



$$P(A) = \frac{\text{площадь } S_1}{\text{площадь } S_2}$$



$$P(A) = \frac{\text{объем } V_1}{\text{объем } V_2}$$

Основная сложность при решении задач с использованием геометрической вероятности – построить математическую модель эксперимента, нужным образом выбрать пространство элементарных исходов, обозначить событие, выразить его математически как некоторую область.

Пример. В прямоугольник со сторонами 7 и 4 см вписан круг радиуса 2 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

Решение. Введем обозначения:

A – точка окажется внутри круга.

Согласно геометрической интерпретации искомая вероятность равна отношению площади круга, в который точка должна попасть, к площади прямоугольника, в который попадает поставленная точка:

$$P(A) = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{прямоугольника}}} = \frac{\pi 2^2}{7 \cdot 4} \approx 0,448799.$$

Таким образом, вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга, приближенно равна 0,448799.

Пример. Какова вероятность встречи двух курсантов, если они договорились встретиться в определенном месте, с 19.00 до 20.00 и могут ждать друг друга в течение 5 минут?

Решение. Введем обозначения:

A – курсанты встретятся.

Для решения задачи будем использовать геометрическое определение вероятности события. Обозначим x и y время прихода первого и второго курсантов соответственно. На значения переменных накладываются ограничения:

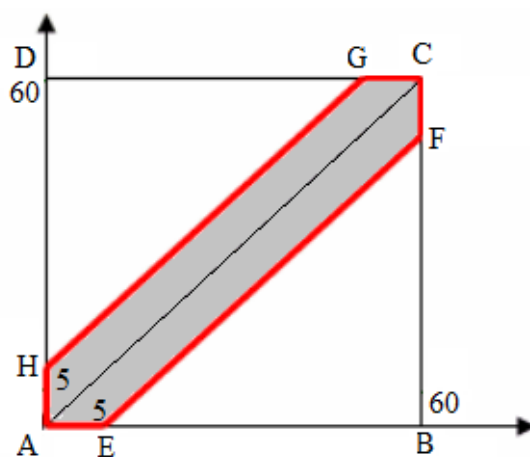
$$0 \leq x \leq 60; \quad 0 \leq y \leq 60.$$

В прямоугольной системе координат этому условию удовлетворяют точки, лежащие внутри квадрата $ABCD$.

Курсанты встретятся, если между моментами их прихода пройдет не более 5 минут. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} y - x < 5, & \text{при } x < y \\ x - y < 5, & \text{при } x > y \end{cases}.$$

Изобразим геометрически решение системы неравенств:



Тогда вероятность встречи равна отношению площадей шестиугольника $AEFCGH$ и квадрата $ABCD$.

$$P(A) = \frac{S_{AEFCGH}}{S_{ABCD}} = \frac{60 \cdot 60 - 55 \cdot 55}{60 \cdot 60} \approx 0,159722.$$

Таким образом, вероятность встречи двух курсантов равна 0,159722.

5.3. Вероятности суммы и произведения несовместных событий

Самыми простыми случаями применения формулы классической вероятности можно считать задачи, в условиях которых используются два или более несовместных событий.

Напомним, что два или несколько событий называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании. Рассмотрим методы нахождения вероятностей для случаев суммы и произведения несовместных событий.

5.3.1. Вероятность суммы несовместных событий

Теорема 5.1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Пример. Найдём вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет либо шестерка, либо нечётное число.

Решение. Введём обозначения событий:

A_1 – «выпадение шестерки»; A_2 – «выпадение нечётного числа».

Вероятности наступления указанных событий будут равны:

$$P(A_1) = \frac{1}{6} \text{ и } P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

События A_1 и A_2 являются несовместными, следовательно, для нахождения вероятности того, что при бросании игрального кубика выпадет либо шестерка, либо нечетное число можно воспользоваться формулой вероятности суммы двух несовместных событий:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1+3}{6} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет либо шестерка, либо нечетное число равно $\frac{2}{3}$.

Теорема о вероятности суммы двух несовместных событий обобщается на случай произвольного числа попарно несовместных событий.

Теорема 5.2. Вероятность суммы двух или более попарно несовместных событий равна сумме вероятностей всех этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Пример. Стрелок производит выстрел по мишени. Вероятность его попадания в десятку равна 0,2, в девятку – 0,3, в восьмерку – 0,2 и в семерку – 0,1. Найти вероятность поражения цели.

Решение. Введем обозначения событий:

A_1 – «попадание в десятку»; A_2 – «попадание в девятку»;

A_3 – «попадание в восьмерку»; A_4 – «попадание в семерку».

Тогда вероятности наступления указанных событий будут равны:

$$P(A_1) = 0,2; P(A_2) = 0,3; P(A_3) = 0,2; P(A_4) = 0,1.$$

Все определенные события A_1, A_2, A_3, A_4 являются попарно несовместными. На самом деле, одним выстрелом одновременно попасть в две, три или четыре зоны поражения невозможно. Следовательно, для нахождения вероятности поражения цели, то есть наступления одного из вышеперечисленных событий A_1, A_2, A_3, A_4 можно найти по теореме вероятности суммы двух или более несовместных событий:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 0,2 + 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,8.$$

Таким образом, вероятность поражения цели стрелком равна 0,8.

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Пример. Вероятность того, что событие A произойдет в течении суток равна 0,348. Определить вероятность того, что событие A не произойдет в течении суток.

Решение. Преобразуем формулу из следствия, перенеся в правую часть вероятность события A :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Подставив в полученное выражение вероятность события A , получим:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,348 = 0,652.$$

Таким образом, вероятность того, что событие A не произойдет в течении суток равна 0,652.

5.3.2. Вероятность произведения несовместных событий

Рассмотрим произведение двух или более попарно несовместных событий. Из определения несовместных событий следует, что одновременно эти события произойти не могут. Следовательно, и вероятность их произведения всегда будет равна нулю.

Теорема 5.3. Вероятность произведения двух или более попарно несовместных событий равна нулю.

Пример. Найти вероятность того, что выбранная наудачу карта из колоды будет тузом и девяткой.

Решение. Введем обозначения:

A_1 – «выбран туз»; A_2 – «выбрана девятка».

События A_1 и A_2 являются несовместными, следовательно, вероятность того, что выбранная наудачу карта из колоды будет тузом и девяткой равна нулю.

5.4. Вероятность суммы и произведения совместных независимых событий

В этом вопросе мы изучим еще один частный случай нахождения вероятности. Рассмотрим вероятности суммы и произведения для совместных независимых событий.

Напомним, что событие A называется *независимым* от события B , если появление события A не зависит от появления события B . В противном случае события называются *зависимыми*. Если речь идет о нескольких независимых событиях, то подразумевают, что исследуемые события являются попарно независимыми. Рассмотрим сначала метод нахождения вероятности произведения двух или более совместных независимых событий.

5.4.1. Вероятность произведения совместных независимых событий

Теорема 5.4. Вероятность произведения совместных, независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Пример. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения первым равна 0,8, а вторым – 0,7.

Решение. Введем обозначения событий:

A – поражение первым орудием; B – поражение вторым орудием.

Вероятности поражения цели первым и вторым орудиями равны соответственно: $P(A) = 0.8$; $P(B) = 0.7$.

События A и B являются совместными и независимыми, так как оба орудия одновременно, независимо друг от друга могут поразить цель. Тогда для нахождения вероятности совместного поражения цели двумя орудиями можно использовать формулу вероятности произведения совместных независимых событий:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56.$$

Таким образом, вероятность совместного поражения цели двумя орудиями равна 0,56.

Пример. Курсант разыскивает формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках

соответственно равны 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула окажется: только в одном справочнике; только в двух справочниках; во всех трех справочниках.

Решение. По условию вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны

$$p_1 = 0,6; p_2 = 0,7; p_3 = 0,8.$$

Тогда вероятности того, что формула не окажется в этих справочниках будут равны: $q_1 = 0,4; q_2 = 0,3; q_3 = 0,2$.

Найдем вероятность того, что формула содержится только в одном справочнике:

$$\begin{aligned} P(A) &= p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = \\ &= 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188. \end{aligned}$$

Теперь определим вероятность нахождения формулы только в двух справочниках:

$$\begin{aligned} P(B) &= p_1 p_2 q_3 + q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3 = \\ &= 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,452. \end{aligned}$$

А теперь рассчитаем вероятность того, что формула можно найти во всех трех справочниках:

$$P(C) = p_1 p_2 p_3 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

Теперь рассмотрим алгоритм нахождения вероятности суммы совместных независимых событий.

Пример. Агент передаёт некоторое сообщение по радию. В целях повышения надёжности передачи сообщения в условиях действия помех, сообщение дублируется 4 раза. Сообщение считается искаженным, если все 4 послышки окажутся искаженными помехами. Какова вероятность искажения сообщения, если вероятность его искажения при каждой посылке 0,3?

Решение. Введем обозначения:

A – искажение команды вообще;

B_i – искажение команды при i -й посылке.

Так как события B_i – независимые по условию задачи, то

$$P(A) = P(B_1 B_2 B_3 B_4) = P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(B_4) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = (0,3)^4 = 0,0081.$$

5.4.2. Вероятность суммы совместных независимых событий

Теорема 5.5. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n).$$

Пример. Три стрелка производят залп по мишени. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,9, третьим – 0,75. Определить вероятность поражения мишени после залпа.

Решение. Введем обозначения событий:

A – поражение цели хотя бы одним стрелком;

A_1 – поражение цели первым стрелком;

A_2 – поражение цели вторым стрелком;

A_3 – поражение цели третьим стрелком.

Вероятности событий равны: $P(A_1) = 0,8$; $P(A_2) = 0,9$; $P(A_3) = 0,75$.

Все события являются совместными и попарно независимыми. Учитывая это применим формулу вероятности суммы совместных независимых событий:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3).$$

Рассчитаем вероятности событий противоположных для A_1, A_2 и A_3 :

$$P(\bar{A}_1) = 1 - 0,8 = 0,2; \quad P(\bar{A}_2) = 1 - 0,9 = 0,1; \quad P(\bar{A}_3) = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Подставляя значения рассчитанных вероятностей получим:

$$P(A) = 1 - 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,25 = 1 - 0,005 = 0,995.$$

Таким образом, вероятность поражения мишени после залпа равна 0,995.

Пример. Курсант разыскивает формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что формула окажется хотя бы в одном справочнике.

Решение. По условию вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны:

$$p_1 = 0,6; \quad p_2 = 0,7; \quad p_3 = 0,8.$$

Тогда вероятности того, что формула отсутствует в справочниках:

$$q_1 = 0,4; \quad q_2 = 0,3; \quad q_3 = 0,2.$$

Тогда вероятность того, что формула окажется хотя бы в одном справочнике можно найти следующим образом:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,976.$$

Пример. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем ящике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что деталь содержится не более чем в двух ящиках.

Решение. Введем обозначения событий:

A – деталь содержится не более чем в двух ящиках;

A_1 – нужная сборщику деталь находится в первом ящике;

A_2 – нужная сборщику деталь находится во втором ящике;

A_3 – нужная сборщику деталь находится в третьем ящике.

Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем ящике соответственно равны:

$$p_1 = 0,6; \quad p_2 = 0,7; \quad p_3 = 0,8.$$

Вероятности того, что нужной детали не окажется в первом, втором, третьем ящике соответственно равны:

$$q_1 = 1 - 0,6 = 0,4; \quad q_2 = 1 - 0,7 = 0,3; \quad q_3 = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Вероятность того, что деталь содержится не более чем в двух ящиках можно выразить следующим образом:

$$P_3(m \leq 2) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2).$$

Рассчитаем находящиеся в правой части равенства значения. Сначала найдем вероятность того, что нужная деталь не окажется ни в одном из ящиков:

$$P_3(0) = q_1 q_2 q_3 = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024.$$

Затем найдем вероятность того, что нужная деталь окажется только в одном ящике. Для этого сложим вероятности нахождения детали только в первом ящике, только во втором ящике и только в третьем ящике:

$$P_3(1) = p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2 = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + \\ + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,036 + 0,056 + 0,096 = 0,188.$$

Теперь найдем вероятность того, что нужная деталь окажется только в двух ящиках. Снова рассчитываем и складываем три варианта – первый и второй ящики, первый и третий ящики, второй и третий ящики:

$$P_3(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + \\ + 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,4 = 0,084 + 0,144 + 0,224 = 0,452.$$

Теперь складываем полученные вероятности $P_3(0)$, $P_3(1)$, $P_3(2)$:

$$P_3(m \leq 2) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) = 0,024 + 0,188 + 0,452 = 0,664.$$

Таким образом, вероятности того, что деталь содержится не более чем в двух ящиках равна 0,664.

5.5. Вероятность суммы и произведения произвольных событий

Если совместные события являются зависимыми, то есть если появление события A зависит от появления события B или наоборот, то использование выше приведенных формул для вычисления вероятностей суммы и произведения для независимых событий дадут неверный результат.

Рассмотрим несколько новых методов, которые могут использоваться для любых произвольных событий, зависимых и независимых.

5.5.1. Условная вероятность

Условной вероятностью $P(A/B)$ называют вероятность события A , вычисленную в предположении, что событие B уже наступило.

Теорема 5.6. Для условной вероятности $P(A/B)$ справедлива формула

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично можно найти и вероятность события B , при уже наступившем событии A :

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Пример. В ящике 21 деталь: 14 стандартных, 7 нестандартных.

Последовательно берут две детали, не возвращая их в ящик. Какова вероятность того, что при обоих испытаниях появятся нестандартные детали.

Решение. Введем обозначения событий:

A – при первом испытании появилась нестандартная деталь;

B – при испытании появилась нестандартная деталь.

Вероятность события A можно определить, как отношение количества нестандартных деталей к общему количеству деталей в ящике:

$$P(A) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}.$$

После наступления события A в ящике осталось 20 деталей, причем, только 13 оставшихся деталей будут нестандартными. Тогда условную вероятность события B можно определить, как отношение количества оставшихся нестандартных деталей к общему количеству оставшихся деталей в ящике.

$$P(B / A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Для нахождения вероятности того, что при обоих испытаниях появятся нестандартные детали, будем использовать формулу условной вероятности:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = 0,1.$$

Таким образом, вероятность того, что при обоих испытаниях появятся нестандартные детали равна 0,1.

5.5.2. Вероятность произведения произвольных событий

Теорема 5.7. Вероятность произведения двух произвольных событий A и B равна вероятности одного из этих событий, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло.

$$P(AB) = P(A)P(B / A) = P(B)P(A / B).$$

Пример. В ящике 50 деталей, 45 стандартных, 5 нестандартных. Последовательно берут две детали, не возвращая их в ящик.

Какова вероятность того, что:

- а) при обоих испытаниях появятся стандартные детали;
 б) при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м – нестандартная?

Решение. Введем обозначения:

A_1 - при 1-м испытании появилась стандартная деталь;

B_1 - при 1-м испытании появилась нестандартная деталь;

A_2 - при 2-м испытании появилась стандартная деталь;

B_2 - при 2-м испытании появилась нестандартная деталь.

а) Найдем вероятность того, что при обоих испытаниях появятся стандартные детали. Для этого необходимо найти вероятность одновременного наступления событий A_1 и A_2 :

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \approx 0,808.$$

б) Теперь найдем вероятность того, что при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м – нестандартная. Этого можно достичь, вычислив вероятность одновременного наступления событий A_1 и B_2 :

$$P(A_1B_2) = P(A_1)P(B_2/A_1) = \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \approx 0,092.$$

Если необходимо вычислить вероятность произведения большего количества событий, то можно использовать следующую теорему.

Теорема 5.8. Вероятность совместного появления нескольких произвольных событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли:

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n / A_1A_2...A_{n-1}).$$

Пример. В пепельнице на месте преступления обнаружено 8 окурков, 5 из которых со следами губной помады. В первый день на исследование берутся 4 окурка. Какова вероятность того, что все они будут со следами губной помады, если отбор объектов экспертизы случаен?

Решение. Введем обозначения событий:

A_1 – 1-й окурочок имеет следы губной помады;

A_2 – 2-й окурочок имеет следы губной помады;

A_3 – 3-й окурочок имеет следы губной помады;

A_4 – 4-й окурочок имеет следы губной помады.

Согласно теореме о вероятности совместного появления нескольких произвольных событий вероятность того, что все окурочки будут со следами губной помады можно найти по формуле:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdot P(A_4 / A_1 A_2 A_3 A_4).$$

Найдем соответствующие вероятности. Вероятность того, что 1-й окурочок имеет следы губной помады, найдем разделив количество окурочков со следами губной помады на общее количество окурочков:

$$P(A_1) = \frac{5}{8}.$$

Найдем условные вероятности $P(A_2/A_1)$, $P(A_3/A_1A_2)$ и $P(A_4/A_1A_2A_3)$, каждый раз уменьшая количество окурочков со следами губной помады и общего количество оставшихся окурочков:

$$P(A_2 / A_1) = \frac{4}{7}; \quad P(A_3 / A_1 A_2 A_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(A_4 / A_1 A_2 A_3) = \frac{2}{5}.$$

Подставим полученные значения в формулу вероятности совместного появления нескольких произвольных событий:

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdot P(A_4 / A_1 A_2 A_3 A_4) = \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{14}. \end{aligned}$$

Пример. В ящике 50 деталей, 45 – стандартных, 5 – нестандартных. Берут последовательно 3 детали, не возвращая в ящик. Какова вероятность того, что:

а) при всех трех испытаниях появятся стандартные детали;

б) при 1-м испытании – стандартная деталь, при 2-м и 3-м – нестандартные?

Решение. Введем обозначения событий:

A_1 – при 1-м испытании появились стандартные детали;

B_1 – при 1-м испытании появились нестандартные детали;

A_2 – при 2-м испытании появились стандартные детали;

B_2 – при 2-м испытании появились нестандартные детали;

A_3 – при 3-м испытании появились стандартные детали;

B_3 – при 3-м испытании появились нестандартные детали.

Все рассматриваемые события являются зависимыми.

Сначала рассмотрим первый случай: при всех трех испытаниях появятся стандартные детали. Используя вероятности совместного появления нескольких произвольных событий получим:

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2).$$

Определим вероятности наступления событий A_1, A_2, A_3 :

$$P(A_1) = \frac{45}{50}; \quad P(A_2 / A_1) = \frac{44}{49}; \quad P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{43}{48}.$$

Подставив полученные значения в формулу произведения, найдем вероятность того, что при всех трех испытаниях появятся стандартные детали.

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} \approx 0,724.$$

Рассмотрим второй случай. Здесь при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м и 3-м – нестандартные. Снова будем использовать формулу произведения произвольных событий:

$$P(A_1 B_2 B_3) = P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) \cdot P(B_3 / A_1 B_2).$$

Рассчитаем вероятности наступления событий A_1, B_2, B_3 :

$$P(A_1) = \frac{45}{50}; \quad P(B_2 / A_1) = \frac{5}{49}; \quad P(B_3 / A_1 B_2) = \frac{4}{48}.$$

Подставив полученные значения в формулу произведения, найдем вероятность того, что при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м и 3-м – нестандартные.

$$P(A_1 B_2 B_3) = P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) \cdot P(B_3 / A_1 B_2) = \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{4}{48} \approx 0,008.$$

5.5.3. Вероятность суммы произвольных событий

Теорема 5.9. Вероятность суммы двух произвольных событий равна

сумме вероятностей событий без вероятности их произведения:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

Пример. Бросают 2 игральных кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Решение. Введем обозначения:

A - появление шестерки при бросании 1-й кости;

B - появление шестерки при бросании 2-й кости.

Используя классическое определение вероятности, имеем:

$$P(A) = \frac{1}{6}; P(B) = \frac{1}{6}.$$

Так как события A и B независимы, то совместное событие AB при одновременном бросании двух костей, где элемент i, j выпадение чисел i и j на двух костях равно $P(AB) = \frac{1}{36}$.

Так как события A и B совместны, то

$$P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Пример. Три стрелка стреляют по одной цели. Найти вероятность поражения цели при одном залпе, если вероятности поражения цели соответственно равны: 0,8; 0,8; 0,9.

Решение. Введем обозначения:

B_i – поражение цели i -м стрелком ($i = 1, 2, 3$).

Так как события B_i совместны, используем формулу

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) - P(B_1 B_2) - P(B_1 B_3) - P(B_2 B_3).$$

В нашем примере:

$$\begin{aligned} P(B_1 B_2 B_3) &= 0,8 + 0,8 + 0,9 - 0,8 \cdot 0,8 - 0,8 \cdot 0,9 - 0,8 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = \\ &= 2,5 - 0,8 \cdot (0,8 + 0,9 + 0,9) + 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 2,5 - 0,8 \cdot 2,04 = 0,868. \end{aligned}$$

Пример. В ящике 50 деталей, из них 45 стандартных и 5 нестандартных. Из ящика берут одну деталь, затем возвращают в ящик и повторяют проделанную манипуляцию. Какова вероятность того, что, хотя бы одна деталь окажется стандартной?

Решение. Введем обозначения событий:

A_1 - при первом испытании появилась стандартная деталь.

A_2 - при втором испытании появилась стандартная деталь.

Используем формулу вероятности суммы двух произвольных событий:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

Так как деталь возвращается в ящик, то события A_1, A_2 – независимые, следовательно,

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2).$$

Найдем вероятности событий $A_1, A_2, A_1 A_2$,

$$P(A_1) = \frac{45}{50}; \quad P(A_2) = \frac{45}{50}; \quad P(A_1 A_2) = \frac{45}{50} \cdot \frac{45}{50}.$$

Тогда окончательно получим:

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2) &= \frac{45}{50} + \frac{45}{50} - \frac{45}{50} \cdot \frac{45}{50} = 2 \cdot \frac{45}{50} - \left(\frac{45}{50} \right)^2 = \frac{45}{50} \left(2 - \frac{45}{50} \right) = \\ &= \frac{45}{50} \cdot \frac{55}{50} = \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{99}{100} = 0,99. \end{aligned}$$

Теорема 5.10. Вероятность суммы n произвольных событий можно определить следующим образом:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{ij} P(A_i A_j) + \sum_{ijk} P(A_i A_j A_k) + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right).$$

Пример. В ящике 50 деталей, из них 45 стандартных, 5 нестандартных. Из ящика берут наудачу 2 детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь окажется нестандартной?

Решение. Используется теорема:

$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ (для попарно несовместимых событий).

Введем обозначения:

B – среди выбранных деталей появилась хотя бы одна нестандартная;

A_1 – выбраны стандартная и нестандартная детали;

A_2 – выбраны две нестандартные детали.

$$B = A_1 + A_2.$$

Общее число возможных вариантов выбора двух деталей из пятидесяти равно C_{50}^2 . Число событий, благоприятствующих событию A_1 , равно $C_{45}^1 C_5^1$. А вероятность события A_1 равна

$$P(A_1) = \frac{C_{45}^1 C_5^1}{C_{50}^2} = \frac{45 \cdot 5 \cdot 48! \cdot 2!}{50!} = \frac{45}{245}.$$

Число событий, благоприятствующих событию A_2 , равно C_5^2 . Тогда вероятность события A_2 равна

$$P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{50}^2} = \frac{5! \cdot 48! \cdot 2!}{2! \cdot 3! \cdot 50!} = \frac{4 \cdot 5}{45 \cdot 50} = \frac{2}{245}.$$

Вероятность того, что среди выбранных деталей появилась хотя бы одна нестандартная, равна

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = \frac{45}{245} + \frac{2}{245} = \frac{47}{245}.$$

Пример. Выпущено 10000 лотерейных билетов и установлены размеры выигрышей и количества: 10 выигрышей по 200 долларов, 100 – по 100 долларов, 500 – по 25 долларов и 1000 – по 5 долларов. Был куплен один билет. Какова вероятность того, что он будет выигрышным и выиграет не меньше 25 долларов?

Решение. Введем обозначения:

A – выигрыш не менее 25 долларов;

A_1 – выигрыш равен 25 долларов (500 билетов);

A_2 – выигрыш равен 100 долларам (100 билетов);

A_3 – выигрыш равен 200 долларов (10 билетов).

$$P(A_1) = \frac{500}{10000} = 0,05; \quad P(A_2) = \frac{100}{10000} = 0,01; \quad P(A_3) = \frac{10}{10000} = 0,001;$$

$$P(A) = 0,05 + 0,01 + 0,001 = 0,061.$$

5.6. Формула полной вероятности

Следствием двух основных теорем теории вероятностей, теоремы

сложения и теоремы умножения, является формула полной вероятности.

5.6.1. Основные понятия и формулы

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу, то есть в результате испытания обязательно должно произойти одно и только одно из этих событий. Поскольку заранее не известно, какое из событий H_i наступит, события $H_1, H_2, \dots, H_n$ будем называть *гипотезами*.

В силу того, что $H_1, H_2, \dots, H_n$ – полная группа попарно несовместных событий, используя теорему сложения для попарно несовместных событий, можно получить вероятность события A :

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n)$$

Кратко полученную формулу можно записать в виде:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i).$$

Вероятности $P(A \cap H_i)$ можно представить, как произведение вероятности гипотезы H_i на условную вероятность события A при наступлении H_i :

$$P(A \cap H_i) = P(H_i) \cdot P(A / H_i).$$

В результате подстановки выражения $P(H_i) \cdot P(A / H_i)$ вместо $P(A \cap H_i)$ получим новую формулу вычисления вероятности события A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i).$$

Полученная формула называется формулой *полной вероятности*.

Теорема 5.11. Если событие A может произойти только при условии появления одной из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу, то вероятность события A равна сумме произведения вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующие условные вероятности события A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i)$$

В случае небольшого количества гипотез, образующих полную группу, формулы полной вероятности проще записывать в виде:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

5.6.2. Вычисление вероятностей с помощью формулы полной вероятности

Формула полной вероятности используется в случаях, когда вероятность события A вычисляется сложно, гипотезы H_i образуют полную группу, а условные вероятности $P(A/H_i)$ и вероятности самих гипотез $P(H_i)$ вычисляются достаточно просто.

Пример. В пирамиде 20 винтовок, 8 из них с оптическим прицелом. Вероятность поражения цели при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,98; а для винтовки без оптического прицела – 0,7. Стрелок производит выстрел из наудачу взятой винтовки. Какова вероятность того, что цель будет поражена?

Решение. Введем обозначения событий.

A – цель поражена;

H_1 – выбрана винтовка с оптическим прицелом;

H_2 – выбрана винтовка без оптического прицела.

События H_1 и H_2 состоят в том, что будет выбрана винтовка с оптическим или без оптического прицела. Определим вероятности наступления этих гипотез. Используя теорему классической вероятности получим:

$$P(H_1) = \frac{8}{20} = 0,4; \quad P(H_2) = \frac{20-8}{20} = \frac{12}{20} = 0,6.$$

По условию задачи вероятности наступления события A при наступлении гипотез H_1 , H_2 соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 0,98; \quad P(A/H_2) = 0,7.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \\ &= 0,4 \cdot 0,98 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,812. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что цель поражена равна 0,812.

Пример. Литье в болванках для дальнейшей обработки поступает из двух цехов: 70% из первого и 30% из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго – 20%. Найти вероятность того, что одна наудачу взятая болванка не имеет дефектов.

Решение. Введем обозначения:

A – болванка взята без дефектов;

H_1 – заготовка взята из 1-го цеха;

H_2 – заготовка взята из 2-го цеха.

События H_1 и H_2 состоят в том, что взятая болванка взята из первого или второго цеха. Определим вероятности наступления этих гипотез:

$$P(H_1) = \frac{70}{100} = 0,7; \quad P(H_2) = \frac{30}{100} = 0,3.$$

По условию вероятности наступления события A при условиях наступления гипотез H_1 и H_2 соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,1 = 0,9; \quad P(A/H_2) = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \\ &= 0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,87. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что взятая наудачу болванка не имеет дефектов равна 0,87.

Пример. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные – в третьем. Первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9; второй цех – с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

Решение. Введем обозначения событий.

A – выбрана деталь отличного качества.

гипотеза H_1 – выбранная деталь изготовлена в первом цехе;

гипотеза H_2 – выбранная деталь изготовлена во втором цехе;

гипотеза H_3 – выбранная деталь изготовлена в третьем цехе.

События H_1, H_2, H_3 состоят в том, что выбранная деталь изготовлена в первом, втором, третьем цехах, тогда

$$P(H_1) = \frac{18}{50}; \quad P(H_2) = \frac{20}{50}; \quad P(H_3) = \frac{12}{50}.$$

По условию вероятности наступления события A при наступлении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 0,9; \quad P(A/H_2) = 0,6; \quad P(H_3) = 0,9.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) = \\ &= 0,9 \cdot \frac{18}{50} + 0,6 \cdot \frac{20}{50} + 0,9 \cdot \frac{12}{50} = \frac{39}{50} = 0,78. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества равна 0,78.

Пример. На огневом рубеже три стрелка. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,75; вторым – 0,9; а третьим – 0,87. Стреляет произвольно выбранный стрелок. Найти вероятность попадания в цель.

Решение. Введем обозначения событий.

A – попадание в цель;

гипотеза H_1 – стреляет первый стрелок;

гипотеза H_2 – стреляет второй стрелок;

гипотеза H_3 – стреляет третий стрелок.

События H_1, H_2, H_3 состоят в том, что будет стрелять первый, второй или третий стрелок. Определим вероятности наступления этих гипотез. Поскольку стрелков всего три, то вероятности того, что будет стрелять первый, второй, третий одна и та же:

$$P(H_1) = \frac{1}{3}; \quad P(H_2) = \frac{1}{3}; \quad P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

По условию вероятности наступления события A при наступлении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 0,75; \quad P(A/H_2) = 0,9; \quad P(A/H_3) = 0,87.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 0,9 + \frac{1}{3} \cdot 0,87 = \frac{1}{3} \cdot (0,75 + 0,9 + 0,87) = \frac{1}{3} \cdot 2,52 = 0,84. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что цель поражена рана 0,84.

Пример. В первой урне находится 4 белых и 6 черных шаров, во второй – 5 белых и 3 чёрных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар, а затем из этих двух наудачу берется один. Какова вероятность, что это будет белый шар?

Решение. Введем обозначения:

A – Из этих двух вынули наудачу белый шар;

H_1 – из первой урны вытащили белый шар, а из второй – черный;

H_2 – из первой урны вытащили белый шар, а из второй – белый;

H_3 – из первой урны вытащили черный шар, а из второй – черный;

H_4 – из первой урны вытащили черный шар, а из второй – белый.

Найдем вероятности гипотез H_1, H_2, H_3, H_4 , используя классическое определение вероятности:

$$P(H_1) = \frac{4}{4+6} \cdot \frac{3}{5+3} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{80} = \frac{3}{20};$$

$$P(H_2) = \frac{4}{4+6} \cdot \frac{5}{5+3} = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4};$$

$$P(H_3) = \frac{6}{4+6} \cdot \frac{3}{5+3} = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{18}{80} = \frac{9}{40};$$

$$P(H_4) = \frac{6}{4+6} \cdot \frac{5}{5+3} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}.$$

Найдем вероятности события A , при условии появления гипотез H_1, H_2, H_3, H_4 . При появлении гипотез H_1 и H_3 условные вероятности наступления события A будут равны 0,5, поскольку в этих случаях мы выбираем один белый и один черный шары:

$$P(A/H_1) = \frac{1}{2}; \quad P(A/H_4) = \frac{1}{2}.$$

При появлении H_2 событие A/H_2 будет достоверным, так как обо шара – белые, а при появлении H_4 событие A/H_4 будет невозможным, так как оба выбранных шара – черные:

$$P(A/H_2) = 1; \quad P(A/H_3) = 0.$$

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) + P(H_4) \cdot P(A/H_4) = \\ &= \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{9}{40} \cdot 0 + \frac{3}{20} \cdot \frac{3}{8} = \frac{41}{80} = 0,5152. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что в результате испытания появится белый шар равна 0,5152.

5.7. Формула гипотез Байеса

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является формула гипотез Байеса.

5.7.1. Теорема Байеса

Теорема 5.12. Если событие A может произойти только при условии появления одной из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу, то условная вероятность события H_i в предположении, что событие A уже произошло, определяется по *формуле Байеса*:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

где $P(A)$ вычисляют по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Подставляя формулу полной вероятности в знаменатель дроби, запишем формулу гипотез Байеса в следующем виде:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)}.$$

5.7.2. Вычисление вероятностей гипотез

Пример. Два полицейских выстрелили по преступнику, в результате чего он был поражен одной пулей. Вероятность попадания первым полицейским

равна 0,8; а вторым – 0,7. Каковы вероятности того, что преступник был поражен первым или вторым полицейским?

Решение. Введем обозначения событий.

A – поражение преступника;

H_1 - в цель попал только первый полицейский;

H_2 - в цель попал только второй полицейский.

По условию задачи вероятности поражения преступника p_1 и p_2 двумя полицейскими соответственно равны:

$$p_1 = 0,8; \quad p_2 = 0,7.$$

Тогда вероятности промахов q_1 и q_2 первым и вторым полицейскими будут равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 0,2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0,3.$$

Вероятности поражения цели только первым или только вторым полицейскими будут равны:

$$P(H_1) = p_1 q_2 = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24;$$

$$P(H_2) = p_2 q_1 = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14.$$

Из условия задачи мы знаем, что преступник был поражен одной пулей, следовательно, события A/H_1 и A/H_2 являются достоверными и, следовательно:

$$P(A/H_1) = 1; \quad P(A/H_2) = 1.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = 0,24 \cdot 1 + 0,14 \cdot 1 = 0,38.$$

Тогда вероятность поражения преступника только первым полицейским равна:

$$P(H_1/A) \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,24}{0,38} = \frac{12}{19};$$

а вероятность поражения преступника только вторым полицейским равна:

$$P(H_2/A) \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,14}{0,38} = \frac{7}{19}.$$

Таким образом, вероятности того, что преступник был поражен первым или вторым полицейским равны соответственно $\frac{12}{19}$ и $\frac{7}{19}$.

Пример. Литье в болванках для дальнейшей обработки поступает из двух цехов: 70% из первого и 30% из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго – 20%. Найти вероятность того, что наудачу взятая не имеющая дефектов болванка была взята из первого цеха.

Решение. Введем обозначения:

A – взятая болванка оказалась без дефектов;

H_1 – заготовка получена из первого цеха;

H_2 – заготовка получена из второго цеха.

Тогда по условию задачи вероятности того, что болванки получены из первого или второго цеха равны соответственно:

$$P(H_1) = 0,7; \quad P(H_2) = 0,3.$$

А вероятности события A при условии наступления гипотез H_1 и H_2 будут соответственно равны:

$$P(A / H_1) = 1 - 0,1 = 0,9; \quad P(A / H_2) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

По формуле полной вероятности определим вероятность события A .

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) = 0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,87.$$

Тогда по формуле Байеса проверим первую гипотезу:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot 0,9}{0,87} = \frac{0,63}{0,87} \approx 0,724138$$

Таким образом, вероятность того, что наудачу взятая не имеющая дефектов болванка была взята из первого цеха приближенно равна 0,724138.

Пример. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 - во втором, остальные - в третьем. Первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью – 0,9; второй цех - с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь отличного качества изготовлена в первом цехе?

Решение. Введем обозначения.

A – выбрана деталь отличного качества;

гипотеза H_1 – выбранная деталь изготовлена в первом цехе;

гипотеза H_2 – выбранная деталь изготовлена во втором цехе;

гипотеза H_3 – выбранная деталь изготовлена в третьем цехе.

Вероятности изготовления выбранной детали в первом, втором или третьем цехе будут равны:

$$P(H_1) = \frac{18}{50}; \quad P(H_2) = \frac{20}{50}; \quad P(H_3) = \frac{12}{50}.$$

Из условия задачи мы знаем, первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью – 0,9; второй цех - с вероятностью 0,6. Таким образом выпишем вероятности события A , при условии, что выбранная деталь изготовлена в первом, втором или третьем цехе:

$$P(A/H_1) = 0,9; \quad P(A/H_2) = 0,6; \quad P(A/H_3) = 0,9.$$

Тогда по формуле Байеса найдем решение задачи, вероятность того, что взятая наудачу деталь отличного качества изготовлена в первом цехе:

$$\begin{aligned} P(H_i/A) &= \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)} = \\ &= \frac{0,9 \cdot \frac{18}{50}}{0,9 \cdot \frac{18}{50} + 0,6 \cdot \frac{20}{50} + 0,9 \cdot \frac{12}{50}} = \frac{9 \cdot 18}{9 \cdot 18 + 6 \cdot 20 + 9 \cdot 12} = \frac{162}{390} \approx 0,415385. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что взятая наудачу деталь отличного качества изготовлена в первом цехе равна примерно 0,415385.

Пример. Три стрелка одновременно стреляют в цель, причем обнаруживаются только 2 попадания. Найти вероятность того, что первый и второй стрелки попали в цель, если вероятность попадания первым стрелком равна 0,4; вторым – 0,5; третьим – 0,45.

Решение. Введем обозначения:

A – цель поражена двумя пулями;

H_1 – только первый и второй стрелки попали в цель;

H_2 – только первый и третий стрелки попали в цель;

H_3 – только второй и третий стрелки попали в цель.

По условию задачи вероятности p_1 , p_2 и p_3 попадания в цель стрелками равны соответственно:

$$p_1 = 0,4; \quad p_2 = 0,5; \quad p_3 = 0,45.$$

Тогда вероятности промахов q_1 , q_2 и q_3 первым, вторым и третьим полицейскими будут равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 0,62; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0,5; \quad q_3 = 1 - p_3 = 0,55.$$

Найдем вероятности наступления гипотез H_1 , H_2 и H_3 :

$$P(H_1) = p_1 p_2 q_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,55 = 0,11;$$

$$P(H_2) = p_1 q_2 p_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,45 = 0,09;$$

$$P(H_3) = q_2 p_2 p_3 = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,45 = 0,135.$$

Условные вероятности поражения цели, при условии, что выполняются гипотезы H_1 , H_2 , H_3 равны:

$$P(A/H_1) = 1; \quad P(A/H_2) = 1; \quad P(A/H_3) = 1.$$

По формуле полной вероятности найдем вероятность того, что цель будет поражена двумя стрелками:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) = \\ &= 0,11 \cdot 1 + 0,09 \cdot 1 + 0,135 \cdot 1 = 0,335. \end{aligned}$$

Тогда по формуле гипотез Байеса вероятность поражения цели только первым и вторым стрелком равна:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,11 \cdot 1}{0,335} = \frac{110}{335} = \frac{22}{67} \approx 0,328359.$$

Таким образом, вероятность поражения цели только первым и вторым стрелком приближенно равна 0,328359.

Пример. Из тридцати стрелков 12 попадает в цель с вероятностью 0,6, восемь – с вероятностью 0,5 и десять – с вероятностью 0,7. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

Решение. Введем обозначения:

A – выбранный стрелок попал в мишень;

H_1 – выбранный стрелок принадлежал первой группе;

H_2 – выбранный стрелок принадлежал второй группе;

H_3 – выбранный стрелок принадлежал третьей группе.

Согласно классическому определению вероятности гипотез H_1 , H_2 и H_3 соответственно равны:

$$P(H_1) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}; \quad P(H_2) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}; \quad P(H_3) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Из условия задачи выпишем вероятности события A при условии наступления гипотез H_1 , H_2 и H_3 :

$$P(A/H_1) = 0,6; \quad P(A/H_2) = 0,5; \quad P(A/H_3) = 0,7.$$

По формуле полной вероятности найдем вероятность наступления события A :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) = \\ &= \frac{2}{5} \cdot 0,6 + \frac{4}{15} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,7 = \frac{6 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 7}{150} = \frac{91}{150}. \end{aligned}$$

Теперь формуле Байеса найдем вероятности того, что стрелок принадлежал i -ой группе, если он попал в цель:

$$\begin{aligned} P(H_1/A) &= \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot 0,6}{\frac{91}{150}} = \frac{1,2 \cdot 150}{5 \cdot 91} = \frac{180}{455} = \frac{36}{91} \approx 0,395604. \\ P(H_2/A) &= \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{15} \cdot 0,5}{\frac{91}{150}} = \frac{2 \cdot 150}{15 \cdot 91} = \frac{300}{1365} = \frac{20}{91} \approx 0,219780. \\ P(H_3/A) &= \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,7}{\frac{91}{150}} = \frac{0,7 \cdot 150}{3 \cdot 91} = \frac{105}{273} = \frac{35}{91} \approx 0,384615. \end{aligned}$$

Сравним полученные значения. Наибольшим значением является условная вероятность первой гипотезы $P(H_1/A) \approx 0,395604$. Значит, вероятнее всего стрелок принадлежал первой группе.

Глава 6. Повторные испытания

В исследованиях часто приходится сталкиваться с такими задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний, в результате каждого из которых может появиться или не появиться событие A . При этом интерес представляет исход не каждого «отдельного» испытания, а общее количество появлений события A в результате определенного количества испытаний.

В подобных задачах нужно уметь определять вероятность любого числа m появлений события A в результате n испытаний. Рассмотрим случай, когда испытания являются независимыми и вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Такие испытания называются *повторными независимыми испытаниями*.

В настоящей главе мы рассмотрим важнейшие методы нахождения вероятностей событий при повторных испытаниях. В первом вопросе мы познакомимся с основными понятиями повторных испытаний, а также с теоремой Бернулли, позволяющей вычислять вероятности событий для относительно небольшого числа испытаний.

Использование формулы Бернулли при больших значениях количества испытаний вызывает большие трудности. Это связано с громоздкими вычислениями. Как решить такие проблемы, мы увидим из содержания второго вопроса. Этот вопрос посвящен предельным теоремам схеме Бернулли. Здесь мы изучим методы нахождения вероятностей с помощью формулы Пуассона, рассмотрим принципы использования локальной теоремы Муавра-Лапласа, интегральной теоремы Муавра-Лапласа, а также детально разберем следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

И в заключении мы решим часто задаваемый вопрос: каково будет наивероятнейшее число наступления событий в схеме Бернулли. Здесь будет описан алгоритм нахождения наивероятнейшего числа появления события в повторных испытаниях, а также основные принципы использования этого алгоритма.

6.1. Формула Бернулли

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при данном комплексе условий, в которых представляет интерес вероятность числа m наступлений некоторого события A в n испытаниях.

Если вероятность наступления события A в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других, то такие испытания называются *независимыми относительно события A* .

Если независимые повторные испытания проводятся при одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события A в каждом испытании одна и та же. Описанная последовательность независимых испытаний получила название схемы Бернулли (Якоб Бернулли 1655 – 1705).

Теорема 6.1. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p , то вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях ровно m раз можно вычислить по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p.$$

Пример. По мишени производится 5 выстрелов, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена 3 выстрелами?

Решение. По условию задачи

$$n = 5; p = 0,8; m = 3.$$

Подставляя значения в формулу Бернулли, получим:

$$\begin{aligned} P_5(3) &= C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot (1 - 0,8)^{5-3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,512 \cdot 0,008 = 2 \cdot 5 \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,2048. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что мишень будет поражена тремя выстрелами из пяти произведенных равна 0,2048.

Пример. Вероятность выиграть по лотерейному билету равна $\frac{1}{7}$. Найти вероятность выигрыша по двум билетам из пяти купленных лотерейных билетов.

Решение. По условию задачи

$$p = \frac{1}{7}; \quad n = 5; \quad k = 2; \quad q = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

Подставляя значения в формулу Бернулли, получим:

$$\begin{aligned} P_5(2) &= C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{5!}{(5-2)!2!} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{216}{343} = \\ &= \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{216}{16807} \approx 0,128518. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность выигрыша по двум билетам из пяти купленных лотерейных билетов приближенно равна 0,128518.

В ряде случаев требуется определить вероятности появления события A менее m раз, более m раз, не менее m раз, не более m раз. В этих случаях могут быть использованы формулы:

$$\text{менее } m \text{ раз} \quad P(X < m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m-1);$$

$$\text{более } m \text{ раз} \quad P(X > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n);$$

$$\text{не менее } m \text{ раз} \quad P(X \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n);$$

$$\text{не более } m \text{ раз} \quad P(X \leq m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m).$$

Пример. Найти вероятность того, что при шести бросках игрального кубика шестерка выпадет: а) менее 3 раз, б) не менее 3 раз.

Решение. В случае а) шестерка на игральном кубике может выпасть 0, 1 и 2 раза. Найдем соответствующие вероятности:

$$P_6(0) = C_6^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{15625}{46656} = \frac{15625}{46656} \approx 0,334898;$$

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{6!}{5!1!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3125}{7776} = \frac{3125}{7776} \approx 0,401878;$$

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{15}{36} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{3125}{15552} \approx 0,200939.$$

Для нахождения вероятности того, что шестерка на игральном кубике может выпасть 0, 1 и 2 раза сложим полученные значения $P_6(0)$, $P_6(1)$ и $P_6(2)$:

$$P(X < 3) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) \approx 0,334898 + 0,401878 + 0,200939 \approx 0,937714.$$

В случае б) шестерка на игральном кубике может выпасть 3, 4, 5 и 6 раз, тогда это событие является противоположным событию из случая а):

$$P(X \geq 3) = P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = 1 - P(X < 3) \approx \\ \approx 1 - 0,937714 \approx 0,062286.$$

Таким образом, вероятность того, что при шести бросках игрального кубика шестерка выпадет менее 3 раз равна 0,937714; не менее 3 раз вероятность равна 0,062286.

6.2. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Использование формулы Бернулли при больших значениях n и m вызывает большие трудности. Это связано с громоздкими вычислениями.

Пример. По мишени производится 10000 выстрелов, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена 7000 раз?

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_{10000}(7000) = C_{10000}^{7000} (0,8)^{7000} (0,2)^{3000} = \frac{10000!}{7000!3000!} \cdot (0,8)^{7000} \cdot (0,2)^{3000}.$$

Вычисление $P_n(m)$ вызывает затруднения также при малых значениях p . Возникает необходимость в поиске приближенных формул для вычисления $P_n(m)$, обеспечивающих необходимую точность.

Такие формулы дают нам предельные теоремы. Они содержат так называемые асимптотические формулы, которые при больших значениях испытаний дают сколь угодно малую относительную погрешность. Рассмотрим три предельные теоремы, содержащие асимптотические формулы для вычисления биномиальной вероятности $P_n(m)$ при $n \rightarrow \infty$.

6.2.1. Формула Пуассона

Теорема 6.2. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \rightarrow 0$), при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n \rightarrow \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу λ ($np \rightarrow \lambda$), то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Данное выражение называется *асимптотической формулой Пуассона*.

Из предельного равенства при больших n и малых p вытекает *приближенная формула Пуассона*:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \text{где } \lambda = np, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Формулу Пуассона применяют, если

- 1) вероятность p успеха крайне мала, то есть сам по себе успех (появление события A) является редким событием, но количество испытаний n велико, среднее число успехов $\lambda = np$ незначительно;
- 2) $n \geq 50$;
- 3) $np \leq 10$.

Формула Пуассона часто находит применение в *теории массового обслуживания*.

Пример. Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность звонка одного абонента в течение часа равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

Решение. По условию задачи:

$$n = 2000; \quad p = 0,003; \quad m = 5.$$

Тогда

$$\lambda = np = 2000 \cdot 0,003 = 6.$$

Применим формулу Пуассона

$$P_{2000}(5) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \frac{(2000 \cdot 0,003)^5 e^{-2000 \cdot 0,003}}{5!} = \frac{6^5 e^{-6}}{5!} \approx 0,160623.$$

Таким образом, вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов равна 0,160623.

Пример. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность, что он обнаружит ровно 3 бракованных детали? Какова вероятность, что контролер обнаружит не меньше 3-х бракованных деталей?

Решение. По условию задачи мы имеем 1000 испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» $p=0,005$, и произведением $np < 5$.

Применяя пуассоновское приближение с $np=5$, рассчитаем вероятность, что контролер обнаружит ровно 3 бракованных детали:

$$P_{1000}(3) \approx \frac{5^3 \cdot e^{-5}}{3!} \approx 0,140374.$$

Вероятность того, что контролер обнаружит не меньше трех бракованных деталей, рассчитаем, как разность между единицей и вероятностью обнаружения менее трех бракованных деталей:

$$P_{1000}(m \geq 3) = 1 - P_{1000}(m < 3) = 1 - (P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)).$$

Найдем вероятности $p_{1000}(0)$, $p_{1000}(1)$, $p_{1000}(2)$:

$$P_{1000}(0) \approx \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} \approx 0,006738; \quad P_{1000}(1) \approx \frac{5^1 \cdot e^{-5}}{1!} \approx 0,033680;$$

$$P_{1000}(2) \approx \frac{5^2 \cdot e^{-5}}{2!} \approx 0,084224.$$

Подставляя полученные значения в формулу для $P_{1000}(m \geq 3)$ получим:

$$P_{1000}(m \geq 3) \approx 1 - (0,006738 + 0,033680 + 0,084224) = 0,875358.$$

Таким образом, вероятность того, что контролер обнаружит ровно три бракованных детали равна 0,140374, а вероятность того, что контролер обнаружит не меньше трех бракованных деталей равна 0,875358.

6.2.2. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Теорема 6.3. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — функция Гаусса, обладающая

следующими свойствами:

- 1) функция $\varphi(x)$ является четной, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
- 2) при $x \geq 4$ функция $\varphi(x) = 0$.

Для упрощения расчетов ниже представлена таблица значений функции Гаусса $\varphi(x)$ (Таблица 6.1).

Пример. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

Решение. По условию задачи $n = 100$, $m = 75$, $p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$. Применим локальную теорему Муавра-Лапласа.

Найдем значение аргумента x :

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{-5}{\sqrt{16}} = -1,25.$$

Используя Таблицу 6.1, определим значение функции Гаусса $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(-1,25) = \varphi(1,25) = 0,1826.$$

Найдем вероятность $P_{100}(75)$:

$$P_{100}(75) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \cdot \varphi(-1,25) = \frac{1}{\sqrt{16}} \cdot 0,1826 = 0,04565.$$

Таким образом, вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз равна 0,04565.

Таблица 6.1.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ГАУССА															
0	0,398942	0,5	0,352065	1	0,241971	1,5	0,129518	2	0,053991	2,5	0,017528	3	0,004432	3,5	0,000873
0,01	0,398922	0,51	0,350292	1,01	0,239551	1,51	0,127583	2,01	0,052919	2,51	0,017095	3,01	0,004301	3,51	0,000843
0,02	0,398862	0,52	0,348492	1,02	0,237132	1,52	0,125665	2,02	0,051864	2,52	0,016670	3,02	0,004173	3,52	0,000814
0,03	0,398763	0,53	0,346668	1,03	0,234714	1,53	0,123763	2,03	0,050824	2,53	0,016254	3,03	0,004049	3,53	0,000785
0,04	0,398623	0,54	0,344818	1,04	0,232297	1,54	0,121878	2,04	0,049800	2,54	0,015848	3,04	0,003928	3,54	0,000758
0,05	0,398444	0,55	0,342944	1,05	0,229882	1,55	0,120009	2,05	0,048792	2,55	0,015449	3,05	0,003810	3,55	0,000732
0,06	0,398225	0,56	0,341046	1,06	0,227470	1,56	0,118157	2,06	0,047800	2,56	0,015060	3,06	0,003695	3,56	0,000706
0,07	0,397966	0,57	0,339124	1,07	0,225060	1,57	0,116323	2,07	0,046823	2,57	0,014678	3,07	0,003584	3,57	0,000681
0,08	0,397668	0,58	0,337180	1,08	0,222653	1,58	0,114505	2,08	0,045861	2,58	0,014305	3,08	0,003475	3,58	0,000657
0,09	0,397330	0,59	0,335213	1,09	0,220251	1,59	0,112704	2,09	0,044915	2,59	0,013940	3,09	0,003370	3,59	0,000634
0,1	0,396953	0,6	0,333225	1,1	0,217852	1,6	0,110921	2,1	0,043984	2,6	0,013583	3,1	0,003267	3,6	0,000612
0,11	0,396536	0,61	0,331215	1,11	0,215458	1,61	0,109155	2,11	0,043067	2,61	0,013234	3,11	0,003167	3,61	0,000590
0,12	0,396080	0,62	0,329184	1,12	0,213069	1,62	0,107406	2,12	0,042166	2,62	0,012892	3,12	0,003070	3,62	0,000569
0,13	0,395585	0,63	0,327133	1,13	0,210686	1,63	0,105675	2,13	0,041280	2,63	0,012558	3,13	0,002975	3,63	0,000549
0,14	0,395052	0,64	0,325062	1,14	0,208308	1,64	0,103961	2,14	0,040408	2,64	0,012232	3,14	0,002884	3,64	0,000529
0,15	0,394479	0,65	0,322972	1,15	0,205936	1,65	0,102265	2,15	0,039550	2,65	0,011912	3,15	0,002794	3,65	0,000510
0,16	0,393868	0,66	0,320864	1,16	0,203571	1,66	0,100586	2,16	0,038707	2,66	0,011600	3,16	0,002707	3,66	0,000492
0,17	0,393219	0,67	0,318737	1,17	0,201214	1,67	0,098925	2,17	0,037878	2,67	0,011295	3,17	0,002623	3,67	0,000474
0,18	0,392531	0,68	0,316593	1,18	0,198863	1,68	0,097282	2,18	0,037063	2,68	0,010997	3,18	0,002541	3,68	0,000457
0,19	0,391806	0,69	0,314432	1,19	0,196520	1,69	0,095657	2,19	0,036262	2,69	0,010706	3,19	0,002461	3,69	0,000441
0,2	0,391043	0,7	0,312254	1,2	0,194186	1,7	0,094049	2,2	0,035475	2,7	0,010421	3,2	0,002384	3,7	0,000425
0,21	0,390242	0,71	0,310060	1,21	0,191860	1,71	0,092459	2,21	0,034701	2,71	0,010143	3,21	0,002309	3,71	0,000409
0,22	0,389404	0,72	0,307851	1,22	0,189543	1,72	0,090887	2,22	0,033941	2,72	0,009871	3,22	0,002236	3,72	0,000394
0,23	0,388529	0,73	0,305627	1,23	0,187235	1,73	0,089333	2,23	0,033194	2,73	0,009606	3,23	0,002165	3,73	0,000380
0,24	0,387617	0,74	0,303389	1,24	0,184937	1,74	0,087796	2,24	0,032460	2,74	0,009347	3,24	0,002096	3,74	0,000366
0,25	0,386668	0,75	0,301137	1,25	0,182649	1,75	0,086277	2,25	0,031740	2,75	0,009094	3,25	0,002029	3,75	0,000353
0,26	0,385683	0,76	0,298872	1,26	0,180371	1,76	0,084776	2,26	0,031032	2,76	0,008846	3,26	0,001964	3,76	0,000340
0,27	0,384663	0,77	0,296595	1,27	0,178104	1,77	0,083293	2,27	0,030337	2,77	0,008605	3,27	0,001901	3,77	0,000327
0,28	0,383606	0,78	0,294305	1,28	0,175847	1,78	0,081828	2,28	0,029655	2,78	0,008370	3,28	0,001840	3,78	0,000315
0,29	0,382515	0,79	0,292004	1,29	0,173602	1,79	0,080380	2,29	0,028985	2,79	0,008140	3,29	0,001780	3,79	0,000303
0,3	0,381388	0,8	0,289692	1,3	0,171369	1,8	0,078950	2,3	0,028327	2,8	0,007915	3,3	0,001723	3,8	0,000292
0,31	0,380226	0,81	0,287369	1,31	0,169147	1,81	0,077538	2,31	0,027682	2,81	0,007697	3,31	0,001667	3,81	0,000281
0,32	0,379031	0,82	0,285036	1,32	0,166937	1,82	0,076143	2,32	0,027048	2,82	0,007483	3,32	0,001612	3,82	0,000271
0,33	0,377801	0,83	0,282694	1,33	0,164740	1,83	0,074766	2,33	0,026426	2,83	0,007274	3,33	0,001560	3,83	0,000260
0,34	0,376537	0,84	0,280344	1,34	0,162555	1,84	0,073407	2,34	0,025817	2,84	0,007071	3,34	0,001508	3,84	0,000251
0,35	0,375240	0,85	0,277985	1,35	0,160383	1,85	0,072065	2,35	0,025218	2,85	0,006873	3,35	0,001459	3,85	0,000241
0,36	0,373911	0,86	0,275618	1,36	0,158225	1,86	0,070740	2,36	0,024631	2,86	0,006679	3,36	0,001411	3,86	0,000232
0,37	0,372548	0,87	0,273244	1,37	0,156080	1,87	0,069433	2,37	0,024056	2,87	0,006491	3,37	0,001364	3,87	0,000223
0,38	0,371154	0,88	0,270864	1,38	0,153948	1,88	0,068144	2,38	0,023491	2,88	0,006307	3,38	0,001319	3,88	0,000215
0,39	0,369728	0,89	0,268477	1,39	0,151831	1,89	0,066871	2,39	0,022937	2,89	0,006127	3,39	0,001275	3,89	0,000207
0,4	0,368270	0,9	0,266085	1,4	0,149727	1,9	0,065616	2,4	0,022395	2,9	0,005953	3,4	0,001232	3,9	0,000199
0,41	0,366782	0,91	0,263688	1,41	0,147638	1,91	0,064378	2,41	0,021862	2,91	0,005782	3,41	0,001191	3,91	0,000191
0,42	0,365263	0,92	0,261286	1,42	0,145564	1,92	0,063157	2,42	0,021341	2,92	0,005616	3,42	0,001151	3,92	0,000184
0,43	0,363714	0,93	0,258881	1,43	0,143505	1,93	0,061952	2,43	0,020829	2,93	0,005454	3,43	0,001112	3,93	0,000177
0,44	0,362135	0,94	0,256471	1,44	0,141460	1,94	0,060765	2,44	0,020328	2,94	0,005296	3,44	0,001075	3,94	0,000170
0,45	0,360527	0,95	0,254059	1,45	0,139431	1,95	0,059595	2,45	0,019837	2,95	0,005143	3,45	0,001038	3,95	0,000163
0,46	0,358890	0,96	0,251644	1,46	0,137417	1,96	0,058441	2,46	0,019356	2,96	0,004993	3,46	0,001003	3,96	0,000157
0,47	0,357225	0,97	0,249228	1,47	0,135418	1,97	0,057304	2,47	0,018885	2,97	0,004847	3,47	0,000969	3,97	0,000151
0,48	0,355533	0,98	0,246809	1,48	0,133435	1,98	0,056183	2,48	0,018423	2,98	0,004705	3,48	0,000936	3,98	0,000145
0,49	0,353812	0,99	0,244390	1,49	0,131468	1,99	0,055079	2,49	0,017971	2,99	0,004567	3,49	0,000904	3,99	0,000139

Рассмотрим еще один пример.

Пример. Монета подбрасывается 2020 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет 1000 раз?

Решение. По условию задачи $n = 2020$, $m = 1000$, $p = 0,5$, $q = 0,5$.
Применим локальную теорему Муавра-Лапласа.

Найдем значение аргумента x :

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1000 - 2020 \cdot 0,5}{\sqrt{2020 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{-10}{\sqrt{505}} = -0,445.$$

Используя Таблицу 6.1, определим значение функции Гаусса $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(-0,445) = \varphi(0,445) = 0,3621.$$

Найдем вероятность $P_{2020}(1000)$:

$$P_{2020}(1000) = \frac{1}{\sqrt{505}} \cdot 0,3621 = 0,0161.$$

Таким образом, вероятность того, что герб выпадет 1000 раз равна 0,0161.

6.2.3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз, т.е. $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$, используют интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Теорема 6.4. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ может быть вычислена по приближенной формуле:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \text{а } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{функция Лапласа,}$$

обладающая следующими свойствами:

функция $\Phi(x)$ нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

при $x \geq 5$ функция $\Phi(x) = 0,5$.

Для упрощения расчетов ниже представлена таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (Таблица 6.2).

Таблица 6.2.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА															
0	0,000000	0,5	0,191500	1	0,341377	1,5	0,433219	2	0,477272	2,5	0,493809	3	0,498670	3,5	0,499787
0,01	0,004029	0,51	0,195012	1,01	0,343784	1,51	0,434505	2,01	0,477807	2,51	0,493983	3,01	0,498713	3,51	0,499796
0,02	0,008018	0,52	0,198506	1,02	0,346168	1,52	0,435771	2,02	0,478331	2,52	0,494151	3,02	0,498756	3,52	0,499804
0,03	0,012006	0,53	0,201981	1,03	0,348527	1,53	0,437018	2,03	0,478844	2,53	0,494316	3,03	0,498797	3,53	0,499812
0,04	0,015953	0,54	0,205439	1,04	0,350862	1,54	0,438246	2,04	0,479347	2,54	0,494477	3,04	0,498837	3,54	0,499820
0,05	0,019939	0,55	0,208877	1,05	0,353172	1,55	0,439455	2,05	0,479840	2,55	0,494633	3,05	0,498876	3,55	0,499827
0,06	0,023922	0,56	0,212297	1,06	0,355459	1,56	0,440646	2,06	0,480323	2,56	0,494786	3,06	0,498913	3,56	0,499834
0,07	0,027903	0,57	0,215698	1,07	0,357722	1,57	0,441818	2,07	0,480796	2,57	0,494934	3,07	0,498949	3,57	0,499841
0,08	0,031881	0,58	0,219079	1,08	0,359960	1,58	0,442972	2,08	0,481259	2,58	0,495079	3,08	0,498985	3,58	0,499848
0,09	0,035856	0,59	0,222441	1,09	0,362174	1,59	0,444108	2,09	0,481713	2,59	0,495220	3,09	0,499019	3,59	0,499855
0,1	0,039828	0,6	0,225783	1,1	0,364365	1,6	0,445226	2,1	0,482153	2,6	0,495358	3,1	0,499052	3,6	0,499861
0,11	0,043795	0,61	0,229106	1,11	0,366531	1,61	0,446326	2,11	0,482589	2,61	0,495492	3,11	0,499084	3,61	0,499867
0,12	0,047759	0,62	0,232407	1,12	0,368674	1,62	0,447409	2,12	0,483015	2,62	0,495623	3,12	0,499116	3,62	0,499873
0,13	0,051717	0,63	0,235689	1,13	0,370792	1,63	0,448474	2,13	0,483432	2,63	0,495750	3,13	0,499146	3,63	0,499878
0,14	0,055670	0,64	0,238950	1,14	0,372887	1,64	0,449523	2,14	0,483841	2,64	0,495874	3,14	0,499175	3,64	0,499884
0,15	0,059657	0,65	0,242190	1,15	0,374958	1,65	0,450554	2,15	0,484240	2,65	0,495995	3,15	0,499203	3,65	0,499889
0,16	0,063599	0,66	0,245409	1,16	0,377006	1,66	0,451568	2,16	0,484632	2,66	0,496112	3,16	0,499231	3,66	0,499894
0,17	0,067535	0,67	0,248607	1,17	0,379030	1,67	0,452565	2,17	0,485015	2,67	0,496227	3,17	0,499258	3,67	0,499899
0,18	0,071463	0,68	0,251784	1,18	0,381030	1,68	0,453546	2,18	0,485389	2,68	0,496338	3,18	0,499283	3,68	0,499903
0,19	0,075385	0,69	0,254939	1,19	0,383007	1,69	0,454511	2,19	0,485756	2,69	0,496447	3,19	0,499308	3,69	0,499908
0,2	0,079299	0,7	0,258072	1,2	0,384960	1,7	0,455459	2,2	0,486115	2,7	0,496552	3,2	0,499333	3,7	0,499912
0,21	0,083206	0,71	0,261183	1,21	0,386890	1,71	0,456392	2,21	0,486466	2,71	0,496655	3,21	0,499356	3,71	0,499916
0,22	0,087104	0,72	0,264273	1,22	0,388797	1,72	0,457308	2,22	0,486809	2,72	0,496755	3,22	0,499379	3,72	0,499920
0,23	0,090993	0,73	0,267340	1,23	0,390681	1,73	0,458209	2,23	0,487145	2,73	0,496853	3,23	0,499401	3,73	0,499924
0,24	0,094874	0,74	0,270385	1,24	0,392541	1,74	0,459095	2,24	0,487473	2,74	0,496947	3,24	0,499422	3,74	0,499928
0,25	0,098746	0,75	0,273408	1,25	0,394379	1,75	0,459965	2,25	0,487794	2,75	0,497040	3,25	0,499443	3,75	0,499931
0,26	0,102607	0,76	0,276408	1,26	0,396194	1,76	0,460820	2,26	0,488108	2,76	0,497129	3,26	0,499463	3,76	0,499935
0,27	0,106459	0,77	0,279385	1,27	0,397987	1,77	0,461661	2,27	0,488415	2,77	0,497217	3,27	0,499482	3,77	0,499938
0,28	0,110300	0,78	0,282339	1,28	0,399756	1,78	0,462486	2,28	0,488715	2,78	0,497302	3,28	0,499501	3,78	0,499941
0,29	0,114131	0,79	0,285271	1,29	0,401503	1,79	0,463297	2,29	0,489008	2,79	0,497384	3,29	0,499519	3,79	0,499945
0,3	0,117950	0,8	0,288179	1,3	0,403228	1,8	0,464094	2,3	0,489294	2,8	0,497464	3,3	0,499536	3,8	0,499948
0,31	0,121758	0,81	0,291064	1,31	0,404930	1,81	0,464876	2,31	0,489574	2,81	0,497542	3,31	0,499553	3,81	0,499950
0,32	0,125555	0,82	0,293926	1,32	0,406611	1,82	0,465644	2,32	0,489848	2,82	0,497618	3,32	0,499570	3,82	0,499953
0,33	0,129339	0,83	0,296765	1,33	0,408269	1,83	0,466399	2,33	0,490116	2,83	0,497692	3,33	0,499586	3,83	0,499956
0,34	0,133111	0,84	0,299580	1,34	0,409905	1,84	0,467139	2,34	0,490377	2,84	0,497764	3,34	0,499601	3,84	0,499958
0,35	0,136869	0,85	0,302371	1,35	0,411520	1,85	0,467867	2,35	0,490632	2,85	0,497834	3,35	0,499616	3,85	0,499961
0,36	0,140615	0,86	0,305139	1,36	0,413113	1,86	0,468581	2,36	0,490881	2,86	0,497901	3,36	0,499630	3,86	0,499963
0,37	0,144347	0,87	0,307883	1,37	0,414684	1,87	0,469281	2,37	0,491125	2,87	0,497967	3,37	0,499644	3,87	0,499965
0,38	0,148066	0,88	0,310604	1,38	0,416234	1,88	0,469969	2,38	0,491362	2,88	0,498031	3,38	0,499657	3,88	0,499968
0,39	0,151770	0,89	0,313300	1,39	0,417763	1,89	0,470644	2,39	0,491595	2,89	0,498093	3,39	0,499670	3,89	0,499970
0,4	0,155460	0,9	0,315973	1,4	0,419271	1,9	0,471307	2,4	0,491821	2,9	0,498154	3,4	0,499683	3,9	0,499972
0,41	0,159135	0,91	0,318622	1,41	0,420757	1,91	0,471957	2,41	0,492043	2,91	0,498212	3,41	0,499695	3,91	0,499974
0,42	0,162795	0,92	0,321247	1,42	0,422223	1,92	0,472594	2,42	0,492259	2,92	0,498269	3,42	0,499707	3,92	0,499976
0,43	0,166440	0,93	0,323847	1,43	0,423669	1,93	0,473220	2,43	0,492469	2,93	0,498325	3,43	0,499718	3,93	0,499977
0,44	0,170069	0,94	0,326424	1,44	0,425093	1,94	0,473833	2,44	0,492675	2,94	0,498379	3,44	0,499729	3,94	0,499979
0,45	0,173683	0,95	0,328977	1,45	0,426498	1,95	0,474435	2,45	0,492876	2,95	0,498431	3,45	0,499740	3,95	0,499981
0,46	0,177280	0,96	0,331505	1,46	0,427882	1,96	0,475025	2,46	0,493072	2,96	0,498481	3,46	0,499750	3,96	0,499982
0,47	0,180860	0,97	0,334009	1,47	0,429246	1,97	0,475604	2,47	0,493263	2,97	0,498531	3,47	0,499760	3,97	0,499984
0,48	0,184424	0,98	0,336489	1,48	0,430590	1,98	0,476171	2,48	0,493450	2,98	0,498578	3,48	0,499769	3,98	0,499985
0,49	0,187971	0,99	0,338945	1,49	0,431914	1,99	0,476727	2,49	0,493632	2,99	0,498625	3,49	0,499778	3,99	0,499987

Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа применяются, когда $npq \geq 20$, причем чем больше n , тем точнее формулы.

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию задачи $n=400$, $m_1=70$, $m_2=100$, $p=0,2$, $q=1-p=0,8$.

Решим задачу с использованием интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Найдем значение аргументов x_1 и x_2 :

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{-10}{\sqrt{64}} = -1,25;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{20}{\sqrt{64}} = 2,5.$$

Используя Таблицу 6.2, определим значения функции Лапласа $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,3944;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(2,5) = 0,4938.$$

Определим вероятность $P_{400}(70 \leq m \leq 100)$:

$$P_{400}(70 \leq m \leq 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,4938 - (-0,3944) = 0,8882.$$

Таким образом, вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей, равна 0,8882.

Пример. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятности того, что событие появится не менее 75 раз.

Решение. По условию задачи $n = 100$, $m_1 = 75$, $m_2 = 100$, $p = 0,8$, $q = 0,2$.

Снова применим интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{-5}{\sqrt{16}} = -1,25;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{20}{\sqrt{16}} = 5.$$

Используя Таблицу 6.2, определим значения функции Лапласа $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,3944;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(5) = 0,5.$$

Рассчитаем вероятность $P_{100}(75 \leq m \leq 100)$:

$$P_{100}(75 \leq m \leq 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,5 - (-0,3944) = 0,8944.$$

Таким образом, вероятности того, что событие появится не менее 75 раз равна 0,8944.

6.2.4. Следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа

Вероятность отклонения относительной частоты n_A от вероятности p в n независимых испытаниях вычисляется по формуле:

$$P_n\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое число.

Пример. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 1200 независимых испытаниях отклонение частоты от вероятности по модулю не превышает 0,05.

Решение. В нашей задаче $n=1200$; $p=0,6$; $q=1-p=0,4$; $\varepsilon=0,05$. Тогда используя следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа получим:

$$P_{1200}\left(\left|\frac{n_A}{n} - 0,6\right| \leq 0,05\right) = 2\Phi\left(0,05 \cdot \sqrt{\frac{1200}{0,6 \cdot 0,4}}\right) = 2\Phi(3,54) = 0,9996.$$

Таким образом, вероятность того, что при 1200 независимых испытаниях отклонение частоты от вероятности по модулю не превышает 0,05, равна 0,9996.

6.3. Наивероятнейшее число

Наивероятнейшее число появлений k события A в n испытаниях можно определить из двойного неравенства:

$$np - q \leq k \leq np + p,$$

где p – вероятность появления в одном испытании, $q = 1 - p$.

Следует знать, что:

- 1) если значение $np - q$ является дробным, то двойное неравенство имеет единственное целое решение;
- 2) если значение $np - q$ – целое, то двойное неравенство имеет два целых решения.

Пример. Игральный кубик подбросили 120 раз. Найти наиболее вероятное число выпавшей грани с числом «6».

Решение. Введем обозначения:

A – выпадение грани с числом «6» при одном бросании кубика.

Тогда по условию:

$$p = P(A) = \frac{1}{6}, \quad q = 1 - p = \frac{5}{6}, \quad n = 120.$$

Подставим эти значения в неравенство и получим:

$$120 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leq k \leq 120 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{120 - 5}{6} \leq k \leq \frac{120 + 1}{6}$$

$$19\frac{1}{6} \leq k \leq 20\frac{1}{6}.$$

Из полученного неравенства можно сделать вывод, что k однозначно определяется числом 20.

Таким образом, наиболее вероятное число выпавшей грани с числом «6» равно 20.

Глава 7. Случайные величины

Случайная величина – это величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определёнными вероятностями. Примером случайной величины может служить число, выпавшее на игральной кости или расстояние от точки падения снаряда до цели. Случайная величина является одним из основных понятий теории вероятностей.

Роль случайной величины, как одного из основных понятий теории вероятностей, впервые была чётко осознана *Пафнутием Львовичем Чебышевым* (1821 – 1894), который в 1867 году обосновал общепринятую на сегодня точку зрения на это понятие. Понимание случайной величины как частного случая общего понятия функции, пришло значительно позднее, в первой трети 20 века. Впервые полное формализованное представление основ теории вероятностей на базе теории меры было в 1933 году разработано *Андреем Николаевичем Колмогоровым* (1903 – 1987), после которого стало ясным, что случайная величина представляет собой измеримую функцию, определённую на вероятностном пространстве.

7.1. Понятия и определения случайных величин

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Рассмотрим основные законы распределения дискретных случайных величин, используемые для построения теоретико-вероятностных моделей реальных социально-экономических явлений. Нами будут рассматриваться распределения случайных величин, используемые в качестве вспомогательного технического средства при решении различных задач статистического анализа.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от различных случайных причин.

Введем более точное определение случайной величины.

Случайной величиной X называется функция, заданная на множестве элементарных исходов (или в пространстве элементарных событий), т.е. , где w – элементарный исход (или элементарное событие).

Случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами $X, Y, Z, \dots$, а их значения – соответственными строчными буквами $x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots, z_1, z_2, z_3, \dots$.

Случайные величины делятся на *дискретные* и *непрерывные*.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Число значений дискретной случайной величины может быть конечным или счетным.

7.1.1 Законы распределения дискретной случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретных случайных величин закон распределения может быть задан в виде таблицы, аналитически (в виде формулы) или графически.

При табличном законе распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины, а вторая – соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно значение, то события $X=x_1, X=x_2, \dots, X=x_n$ образуют полную группу, следовательно, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Если множество значений X бесконечно, то ряд: $p_1 + p_2 + \dots$ сходится и его сумма равна единице.

Закон распределения случайной величины, заданной в виде таблицы, где каждому возможному значению сопоставлена его вероятность, называется *рядом распределения*.

Пример. Вероятности того, что курсант сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам A и B , равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить ряд распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст курсант.

Решение. Пусть случайная величина X – число сданных экзаменов. В сессию курсант может не сдать ни одного экзамена, может сдать толь один экзамен, а может сдать и все два. Тогда возможные значения случайной величины X равны $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Введем обозначения:

A_1 – курсант сдает первый экзамен;

A_2 – курсант сдает второй экзамен.

Вероятности того, что наступят события A_1 и A_2 соответственно равны:

$$p_1 = 0,7; \quad p_2 = 0,9,$$

а, значит, вероятности не наступления событий A_1 и A_2 равны:

$$q_1 = 0,3; \quad q_2 = 0,1.$$

Учитывая это, найдем вероятности появления значений $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$:

$$P(X = 0) = P(\overline{A_1} \overline{A_2}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = q_1 \cdot q_2 = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03.$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 = \\ &= 0,7 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,3 = 0,34. \end{aligned}$$

$$P(X = 2) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 \cdot p_2 = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63.$$

Составим ряд распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст курсант:

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

Осуществим контроль значений нижней строки таблицы:

$$P(0) + P(1) + P(2) = 0,03 + 0,34 + 0,63 = 1.$$

Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно значение, то события $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ образуют полную группу, следовательно, сумма их вероятностей будет равна единице.

Пример. Испытуемый прибор состоит из трёх малонадёжных элементов. Отказы элементов независимы, а их вероятности соответственно равны 0,1; 0,2; 0,25. Составить закон распределения числа отказавших элементов.

Решение. Пусть дискретная случайная величина X – число отказавших элементов. Она может принимать следующие возможные значения:

$X = 0$ – ни один из элементов не отказал;

$X = 1$ – отказал только один элемент;

$X = 2$ – отказали только два элемента;

$X = 3$ – отказали все три элемента.

По условию задачи вероятности отказа элементов:

$$p_1 = 0,1; \quad p_2 = 0,2; \quad p_3 = 0,25.$$

Тогда вероятности работы этих же элементов будут равны:

$$q_1 = 0,9; \quad q_2 = 0,8; \quad q_3 = 0,75.$$

Поскольку отказы элементов независимы один от другого, то, используя теоремы сложения и умножения, получим:

$$P(X = 0) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,75 = 0,54.$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 = \\ &= 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,75 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,75 + 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,25 = 0,375. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \\ &= 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,75 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,25 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,25 = 0,08. \end{aligned}$$

$$P(X = 3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,25 = 0,005.$$

Составим ряд распределения числа отказавших элементов:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,54	0,375	0,08	0,005

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0,54 + 0,375 + 0,08 + 0,005 = 1.$$

Пример. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Составить закон распределения числа попаданий мяча в корзину.

Решение. Пусть случайная величина X – число попаданий мяча в корзину.

Эта величина может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3. Поскольку броски независимы один от другого и вероятности попадания равны между собой, применима формула Бернулли.

По условию задачи

$$n = 3; \quad p = 0,7; \quad q = 0,3.$$

Используя этот факт, рассчитаем вероятности значений случайной величины X :

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = \frac{3!}{0!3!} \cdot 0,7^0 \cdot 0,3^3 = 0,027;$$

$$P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1!2!} \cdot 0,7^1 \cdot 0,3^2 = 0,189;$$

$$P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!1!} \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^1 = 0,441;$$

$$P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = \frac{3!}{3!0!} \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^0 = 0,343.$$

Составим ряд распределения числа отказавших элементов:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,027	0,189	0,441	0,343

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0,027 + 0,189 + 0,441 + 0,343 = 1.$$

7.1.2. Математические операции над случайными величинами

Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Пусть даны две случайные величины X и Y :

x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

y_1	y_2	...	y_i	...	y_m
p_1	p_2	...	p_i	...	p_m

Введем операции над случайными величинами.

Произведением случайной величины X на постоянную k называется случайная величина kX , которая принимает значения $kx_1, kx_2, \dots, kx_n$ с теми же вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$.

m -той *степенью* случайной величины X , называется случайная величина X^m , принимающая значения $x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m$ с теми же вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Пример. Случайная величина X задана с помощью ряда распределения:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: $Y = 3X$ и $Z = X^2$.

Решение. Случайную величину $Y = 3X$ получим, умножая все значения случайной величины на число 3:

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(-6) + P(3) + P(6) = 0,5 + 0,3 + 0,2 = 1.$$

Случайную величину $Z = X^2$ получим, возведя все значения случайной величины во вторую степень:

z_i	4	1	4
p_i	0,5	0,3	0,2

Однако, мы видим, что в таблице оказалось два одинаковых значения $z_1 = z_3 = 4$ случайной величины Z . Объединив столбы, окончательно получим:

z_i	1	4
p_i	0,3	0,7

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(1) + P(4) = 0,3 + 0,7 = 1.$$

Суммой (разностью или произведением) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида $x_i + y_j$ ($x_i - y_j$ или $x_i \cdot y_j$), где $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i , а Y – значение y_j :

$$p_{ij} = P[(X = x_i)(Y = y_j)].$$

Если случайные величины X и Y независимы, то есть независимы любые события $X = x_i$ и $Y = y_j$, то по теореме умножения вероятностей для независимых событий:

$$p_{ij} = P[(X = x_i)P(Y = y_j)] = p_i p_j.$$

Пример. Независимые случайные величины X и Y заданы таблично:

x_i	0	2
p_i	0,4	0,6

y_j	1	3	4
p_j	0,2	0,3	0,5

Найдем закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Используя определение суммы случайных величин X и Y найдем всевозможные значения случайной величины $Z = X + Y$ и соответствующие этим значения вероятности. Для этого в верхней строке таблицы запишем всевозможные суммы значений случайных величин X и Y : $x_1 + y_1$, $x_1 + y_2$, ..., $x_2 + y_3$, а в нижней – произведения соответствующих им вероятностей $p_1 \cdot p_1$, $p_1 \cdot p_2$, ..., $p_2 \cdot p_3$:

$x_i + y_j$	0+1	0+3	0+4	2+1	2+3	2+4
p_i	0,4·0,2	0,4·0,3	0,4·0,5	0,6·0,2	0,6·0,3	0,6·0,5

Рассчитаем значения выражений в таблице:

z_i	1	3	4	3	5	6
p_i	0,08	0,12	0,2	0,12	0,18	0,3

Заметим, что значение 3 повторяется. Объединим столбцы, содержащие значение 3, сложив вероятности появления трех:

z_i	1	3	4	5	6
p_i	0,08	0,24	0,2	0,18	0,3

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(1) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 0,08 + 0,24 + 0,2 + 0,18 + 0,3 = 1.$$

7.2. Функция распределения дискретных случайных величин

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, численно равная вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее наперед заданного произвольного действительного числа x :

$$F(x) = P(X < x)$$

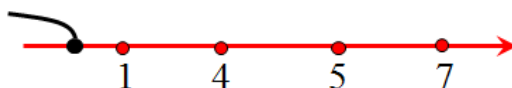
Пример. Дан ряд распределения случайной величины. Найти и изобразить графически ее функцию распределения.

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

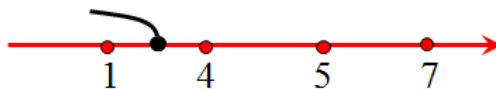
Найдем значения функции распределения.

Решение. Найдем значение функции распределения $F(x)$ на каждом участке числовой прямой.

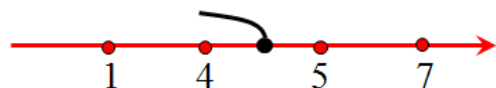
1. Если $x \leq 1$, то $F(x) = P(X < 1) = 0$.



2. Если $1 < x \leq 4$, то $F(x) = P(X < 4) = 0,4$.

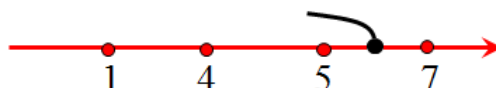


3. Если $4 < x \leq 5$, то $F(x) = P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 4) = 0,4 + 0,1 = 0,5$.

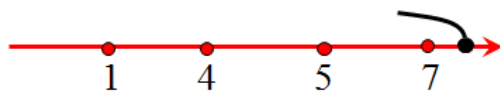


4. Если $5 < x \leq 7$, то $F(x) = P(X < 7) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 5) =$

$$= 0,4 + 0,1 + 0,3 = 0,8.$$



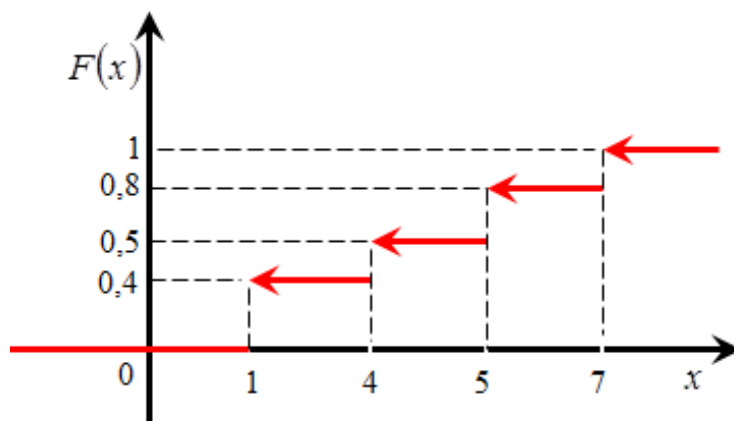
5. Если $7 < x$, то $F(x) = P(X > 7) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7) =$
 $0,4 + 0,1 + 0,3 + 0,2 = 1.$



Таким образом, функцию распределения можно выразить аналитически:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 0,4 & 1 < x \leq 4 \\ 0,5 & 4 < x \leq 5 \\ 0,8 & 5 < x \leq 7 \\ 1 & x > 7 \end{cases}$$

Построим график функции распределения случайной величины:



Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений. А сумма всех скачков функции распределения равна 1.

Рассмотрим основные свойства функции распределения дискретной случайной величины:

Свойства функции распределения

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, значения которой заключены между нулем и единицей.

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси.

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

3. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности – единице.

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ равна приращению ее функции распределения на этом интервале.

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

7.3. Числовые характеристики случайных величин

7.3.1. Математическое ожидание

Математическим ожиданием (или средним значением) $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

В том случае, когда дискретная случайная величина X принимает бесконечное, но счетное множество значений, математическим ожиданием, или средним значением, такой случайной величины называется сумма ряда (если он сходится абсолютно).

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Если ряд расходится, то дискретная случайная величина X не будет иметь математического ожидания.

Пример. Вычислить математическое ожидание дискретной случайной величины X , заданной таблично:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Решение. Используя определение математического ожидания найдем значение математического ожидания дискретной случайной величины X :

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = \\ = 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,3 + 7 \cdot 0,2 = 3,7.$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины Z равно 3,7.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Пример. Известны законы распределений случайных величин числа очков, выбиваемых первым и вторым стрелками.

Для первого стрелка:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,1	0,1	0,04	0,05	0,12	0,2

Для второго стрелка:

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,1	0,1	0,04	0,02

Какой из двух стрелков стреляет лучше?

Решение. Очевидно, что из двух стрелков стреляет тот лучше, кто в среднем выбивает большее количество очков.

$$M(X) = 0 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,04 + 3 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,04 + 5 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,1 + \\ + 7 \cdot 0,04 + 8 \cdot 0,05 + 9 \cdot 0,12 + 10 \cdot 0,2 = 5,36$$

$$M(Y) = 0 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0,03 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,09 + 4 \cdot 0,11 + 5 \cdot 0,24 + 6 \cdot 0,21 + \\ + 7 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,04 + 10 \cdot 0,02 = 5,36.$$

Таким образом, среднее число выбиваемых очков у двоих стрелков одинаковое.

Свойства математического ожидания

$M(C) = C$, где C – произвольная постоянная величина.

$M(CX) = CM(X)$, где C – произвольная постоянная величина.

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

$M(XY) = M(X)M(Y)$, если X и Y независимые случайные величины.

$M(X \pm C) = M(X) \pm C$, где C – произвольная постоянная величина.

$$M[X - M(X)] = 0$$

Пример. Пусть $M(X) = 3$, $M(Y) = 2$, $Z = 8X - 5Y + 7$. Найти: $M(Z)$.

Решение. Используя свойства математического ожидания для дискретных случайных величин получим:

$$\begin{aligned} M(Z) &= M(8X - 5Y + 7) = M(8X) - M(5Y) + M(7) = 8M(X) - 5M(Y) + 7 = \\ &= 8 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 7 = 21. \end{aligned}$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины Z равно 21.

7.3.2. Дисперсия

Рассеяние случайной величины около среднего значения характеризует дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Для дискретной случайной величины с конечным числом принимаемых значений дисперсию можно рассчитать сумму квадратов разности между значениями случайной величины и математическим ожиданием случайной величины, умноженных на вероятности появления соответствующих значений:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Пример. Вычислить дисперсию дискретной случайной величины X , заданной таблично:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Решение. В одном из предыдущих примеров мы уже рассчитали математическое ожидание случайной величины X . По расчетам оно было равно 3,5.

Используя формулу для дискретной случайной величины с конечным числом принимаемых значений, получим дисперсию:

$$D(X) = \sum_{i=1}^4 (x_i - M(X))^2 p_i = (1 - 3,7)^2 \cdot 0,4 + (4 - 3,7)^2 \cdot 0,1 + (5 - 3,7)^2 \cdot 0,3 + (7 - 3,7)^2 \cdot 0,2 = 7,29 \cdot 0,4 + 0,09 \cdot 0,1 + 1,69 \cdot 0,3 + 10,89 \cdot 0,2 = 5,61.$$

Таким образом, дисперсия случайной величины равно 5,61.

Рассмотрим основные свойства дисперсии.

Свойства дисперсии

1. $D(C) = 0$, где C – произвольная постоянная величина.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$, где C – произвольная постоянная величина.
3. $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.
4. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, если X и Y независимые случайные величины.

17.3.3. Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением, стандартом) случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Используя свойства дисперсии, вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X .

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Решение. Математическое ожидание случайной величины X ранее мы уже нашли. По расчетам оно было равно 3,5.

Для расчета дисперсии будем использовать свойство дисперсии 3:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Найдем математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0,4 + 4^2 \cdot 0,1 + 5^2 \cdot 0,3 + 7^2 \cdot 0,2 = \\ = 0,4 + 1,6 + 7,5 + 9,8 = 19,3.$$

Тогда значение дисперсии будет равно:

$$D(X) = 19,3 - (3,7)^2 = 19,3 - 13,69 = 5,61.$$

А среднее квадратическое отклонение найдем, как квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5,61} \approx 2,368544.$$

7.4. Законы распределения дискретных случайных величин

7.4.1. Биномиальный закон распределения

Дискретная случайная величина X имеет биномиальный закон распределения, если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$ с вероятностями

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m=0,1,\dots, n$.

Биномиальный закон распределения представляет собой закон распределения числа $X=m$ наступлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью p .

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

x_i	0	1	2	...	m	...	n
p_i	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

$$q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + C_n^m p^m q^{n-m} + \dots + p^n = (q + p)^n = 1.$$

Теорема 7.1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , определенной по биномиальному закону вычисляются по формулам:

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq.$$

Пример. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого заемщика. Составить таблицу закона распределения количества

заемщиков, не вернувших кредит по окончании кредитования. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Случайная величина X – это количество заемщиков, не вернувших кредит по окончании кредитования.

По условию задачи $n=5$; $p=0,2$; $q=0,8$. Найдем вероятности всех значений, принимаемых случайной величиной:

$$P(X = 0) = C_5^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{5-0} = 0,32768;$$

$$P(X = 1) = C_5^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{5-1} = 0,4096;$$

$$P(X = 2) = C_5^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{5-2} = 0,2048;$$

$$P(X = 3) = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{5-3} = 0,0512;$$

$$P(X = 4) = C_5^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{5-4} = 0,0064;$$

$$P(X = 5) = C_5^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^{5-5} = 0,00032.$$

Составим таблицу закона распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании кредитования.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = np = 4 \cdot 0,2 = 0,8; \quad D(X) = npq = 4 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,64.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины равно 0,8, а дисперсия 0,64.

7.4.2. Закон распределения Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона, если она принимает значения (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{m,n} = P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda = np$, $m=0, 1, 2, \dots$.

Ряд распределения закона Пуассона имеет вид:

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

Теорема 7.2. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ :

$$M(X) = \lambda; \quad D(X) = \lambda.$$

Пример. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,002. Необходимо составить закон распределения отказавших за время t элементов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. По условию задачи случайная величина X – это число отказавших за время t элементов. Здесь $n=1000$; $p=0,002$; $q=0,998$; $\lambda=2$. Рассчитаем вероятности появления значений случайной величины:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0,13534; & P(X=1) &= \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0,27067; \\ P(X=2) &= \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0,27067; & P(X=3) &= \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0,18045. \end{aligned}$$

Составим таблицу закона распределения.

x_i	0	1	2	3	...
p_i	0,13534	0,27067	0,27067	0,18045	...

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = 2; \quad D(X) = 2.$$

7.4.3 Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если она принимает значения $1, 2, 3, \dots$ (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = pq^{m-1},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Ряд геометрического распределения случайной величины имеет вид:

x_i	1	2	3	...	m	...
p_i	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_i = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = p \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

Теорема 7.3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , имеющей геометрическое распределение с параметром p , вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Пример. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба по цели до первого попадания. Необходимо составить закон распределения числа сделанных выстрелов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. По условию задачи случайная величина X – количество сделанных выстрелов. Параметры закона распределения $p = 0,05$; $q = 0,95$. Рассчитаем вероятности появления значений случайной величины:

$$P(X = 1) = p = 0,05; \quad P(X = 2) = qp = 0,95 \cdot 0,05 = 0,0475;$$

$$P(X = 3) = qqp = 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,05 = 0,04513;$$

$$P(X = 4) = qqqp = 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,05 = 0,04287; \quad \dots$$

Составим таблицу закона распределения.

x_i	1	2	3	4	...
p_i	0,05	0,075	0,04513	0,04287	...

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = \frac{1}{0,05} = 20; \quad D(X) = \frac{0,95}{(0,05)^2} = 380.$$

Пример. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

Решение. Случайная величина X - число проверенных деталей до обнаружения бракованной - имеет геометрическое распределение с параметром $p=0,1$.

Ряд распределения имеет вид:

x_i	1	2	3	4	...
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	...

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,1} = 10; \quad D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,9}{0,1^2} = 90.$$

7.4.4 Гипергеометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение, если она принимает значения $1, 2, 3, \dots, \min(n, M)$ с вероятностями

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где $M \leq N, n \leq N, n, M, N$ – натуральные числа.

Теорема 7.4. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами n, M, N , вычисляется по формуле:

$$M(X) = n \frac{M}{N}; \quad D(X) = n \frac{M}{N-1} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

Пример. В лотерее денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 чисел из отобранных случайно 6 из 45 вариантов. Найти закон распределения случайной величины X — числа угаданных чисел среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

Решение. По условию задачи случайная величина X — количество угаданных чисел. Параметры закона распределения $n = 6$, $M = 6$, $N = 45$. Рассчитаем вероятности появления значений случайной величины:

$$P(X = 0) = \frac{C_6^0 C_{39}^6}{C_{45}^6} = 0,40056; \quad P(X = 1) = \frac{C_6^1 C_{39}^5}{C_{45}^6} = 0,42413;$$

$$P(X = 2) = \frac{C_6^2 C_{39}^4}{C_{45}^6} = 0,15147; \quad P(X = 3) = \frac{C_6^3 C_{39}^3}{C_{45}^6} = 0,02244;$$

$$P(X = 4) = \frac{C_6^4 C_{39}^2}{C_{45}^6} = 0,00137; \quad P(X = 5) = \frac{C_6^5 C_{39}^1}{C_{45}^6} = 0,00003;$$

$$P(X = 6) = \frac{C_6^6 C_{39}^0}{C_{45}^6} = 0,0000001.$$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,40056	0,42413	0,15147	0,02244	0,00137	0,00003	0,0000001

Тогда вероятность получения денежного приза будет равна:

$$P(3 \leq X \leq 6) = \sum_{i=3}^6 P(X = i) = 0,02244 + 0,00137 + 0,00003 + 0,0000001 \approx 0,02384.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = 6 \cdot \frac{6}{45} = 0,8; \quad D(X) = 6 \cdot \frac{39}{44} \left(1 - \frac{39}{45}\right) \left(1 - \frac{6}{45}\right) = 0,6145.$$

Таким образом, а вероятность выигрыша равна 0,02384, математическое ожидание 0,8, а дисперсия равна 0,6145.

7.5. Непрерывные случайные величины

7.5.1. Функция распределения непрерывной случайной величины

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайной величины X примет значение, меньшее чем x .

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию $F(x)$ иногда называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

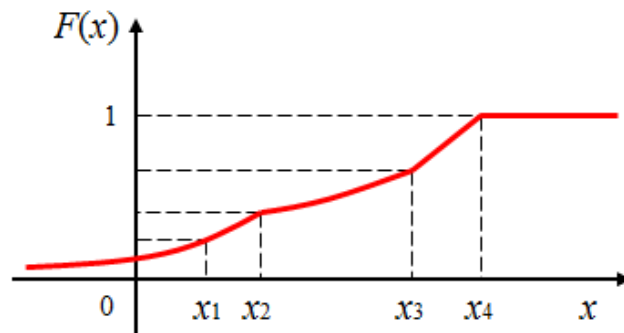


Рис.7.1. График функции распределения непрерывной случайной величины.

Свойства функции распределения непрерывной случайной величины

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. Функции распределения $F(x)$ – неубывающая функция:

$$F(x_2) \geq F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

3. Вероятность того, случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение конкретное значение равна нулю.

5. Если X – непрерывная случайная величина, то вероятность попадания случайной величины в интервал (a, b) не зависит от того, является этот интервал открытым или закрытым.

6. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Пример. Функция распределения случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/2, & 0 < x \leq 2. \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение в интервале $[1; 3)$.

Решение. Решение найдем, используя третье свойство функции распределения непрерывной случайной величины:

$$P(1 \leq X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

7.5.2. Плотность распределения непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины $f(x)$ называется первая производная от функции распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = F'(x).$$

График плотности распределения называют кривой распределения.

Пример. Функция распределения случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3. \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти плотность распределения непрерывной случайной величины.

Решение. Дифференцируя функцию распределения непрерывной случайной величины, найдем ее плотность распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 2x - 4, & 2 < x \leq 3. \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Свойства плотности распределения

1. Плотность вероятности – неотрицательная функция:

$$f(x) \geq 0.$$

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал (a, b) равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от a до b :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

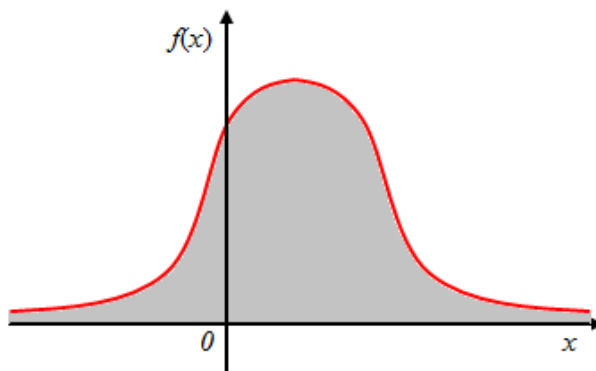
3. Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность распределения по формуле:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

4. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения непрерывной случайной величины равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Замечание. Геометрически 4-е свойство означает, что площадь фигуры, ограниченной осью Ox , кривой распределения $f(x)$ равна единице:



Пример. Плотность распределения случайной величины имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ a(x+1)^2, & -1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Найти параметр a и функцию распределения $F(x)$.

Решение. Найдем несобственный интеграл от плотности распределения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-1}^2 a(x+1)^2 dx = a \int_{-1}^2 (x+1)^2 dx = a \left. \frac{(x+1)^3}{3} \right|_{-1}^2 = \\ &= a \frac{(2+1)^3}{3} - a \frac{(-1+1)^3}{3} = a \left(\frac{3^3}{3} - 0 \right) = 9a. \end{aligned}$$

Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения непрерывной случайной величины равен 1, следовательно,

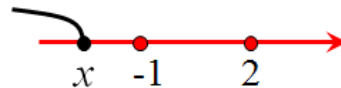
$$9a = 1, \text{ а значит } a = \frac{1}{9}.$$

Таким образом, плотность распределения непрерывной случайной величины будет иметь вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, & -1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

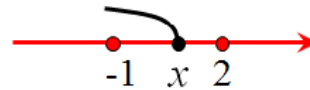
Найдем функцию распределения.

1. Если $x \leq -1$, то



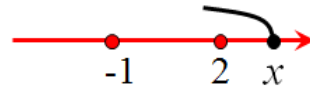
$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

2. Если $-1 \leq x \leq 2$, то



$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^x \frac{1}{9} (t+1)^2 dt = 0 + \frac{1}{9} \frac{(t+1)^3}{3} \Big|_{-1}^x = \frac{(t+1)^3}{27}.$$

3. Если $x \geq 2$, то



$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^2 \frac{1}{9} (t+1)^2 dt + \int_2^x 0 dt = 0 + \frac{1}{9} \frac{(t+1)^3}{3} \Big|_{-1}^2 + 0 = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Таким образом, образом функция распределения непрерывной случайной величины будет иметь вид:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{(x+1)^3}{27}, & -1 < x \leq 2. \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

7.5.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется определенный интеграл:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx.$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат всей оси Ox , то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Свойства математического ожидания

1. $M(C) = C$, $C - const$.
2. $M(CX) = CM(X)$, $C - const$.
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

4. $M(XY) = M(X)M(Y)$, X и Y независимы.

5. $M(X \pm C) = M(X) \pm C$, $C - \text{const}$.

6. $M[X - M(X)] = 0$.

Дисперсией непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется определенный интеграл

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x) dx.$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат всей оси Ox , то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx.$$

Замечание. Для вычисления дисперсии удобно использовать формулу:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

где $M(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx$ или $M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$

Свойства дисперсии

1. $D(C) = 0$;

2. $D(CX) = C^2 D(X)$;

3. $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$;

4. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Задана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Найдем сначала математическое ожидание:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{2}{3}.$$

Рассчитаем значение дисперсии. Найдем ее по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Определим математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{1}{2}.$$

Подставим полученное выражение в формулу дисперсии:

$$D(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Вычислим среднеквадратическое отклонение случайной величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

7.6. Законы распределения непрерывных случайных величин

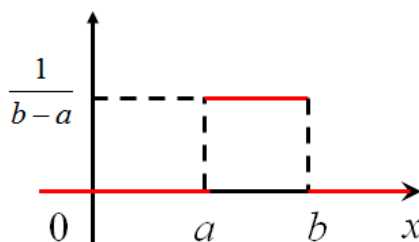
7.6.1. Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерный закон распределения* на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его.

Плотность распределения случайной величины в этом случае определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, \quad x > b \end{cases}.$$

Построим график плотности распределения случайной величины.



Вычислим функцию распределения случайной величины в случае распределения по равномерному закону:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

1. Если $x \leq a$, то

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

2. Если $a \leq x \leq b$, то

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = 0 + \frac{t}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

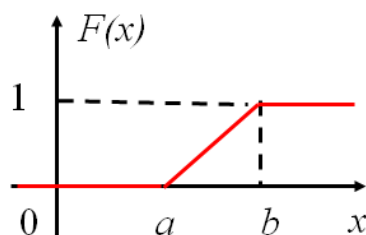
3. Если $x \geq b$, то

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0 dt = \frac{t}{b-a} \Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Выпишем функцию распределения случайной величины, соответствующей равномерному закону распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

Построим график функции распределения случайной величины.



Вычислим математическое ожидание случайной величины:

$$M(x) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}.$$

Для нахождения дисперсии рассчитаем математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M(x^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{1}{3(b-a)} (b^3 - a^3) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Теперь можно рассчитать выражение для дисперсии:

$$D(X) = M(x^2) - (M(x))^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Теорема 7.5. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , распределенной по равномерному закону, вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вероятность того, что случайная величина X , распределенная по равномерному закону, примет значение из интервала (α, β) , вычисляется по формуле:

$$P(X \in (\alpha, \beta)) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Пример. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты. Найти математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

Решение. Случайная величина X распределена равномерно, следовательно, плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}, \quad x \in (0; 2); \quad f(x) = 0, \quad x \notin (0; 2).$$

Вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = P(X \leq 0,5) = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{0,5} = \frac{1}{4}.$$

Согласно теореме, математическое ожидание равно:

$$M(X) = \frac{0+2}{2} = 1.$$

Рассчитаем дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины:

$$D(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}; \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0,58.$$

7.6.2. Показательный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет показательный (экспоненциальный) закон распределения с параметром λ , если ее плотность вероятности имеет вид:

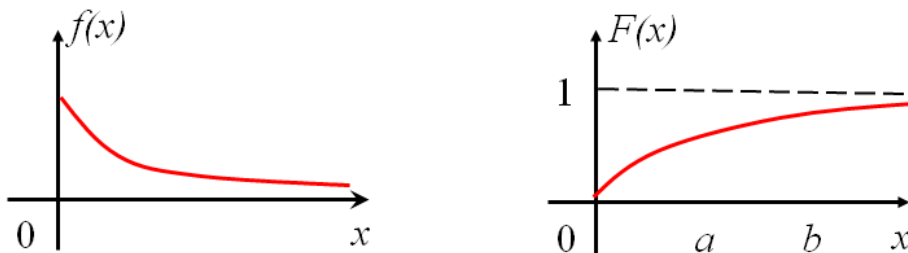
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Число $\lambda > 0$ – называют параметром распределения.

Функция распределения случайной величины, распределенной по показательному закону имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Построим графики закона распределения и плотности распределения для случайной величины, распределенной по показательному закону.



Теорема 7.6. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , распределенной по показательному закону, вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Вероятность того, что случайная величина X , распределенная по показательному закону, примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$, вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Пример. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина X , распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизора 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Из условия задачи следует, что $M(X)=15$, тогда $\frac{1}{\lambda}=15$, и $\lambda = \frac{1}{15}$. Тогда $D(X) = \frac{1}{\lambda^2} 225$, а $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 15$.

Найдем плотность распределения случайной величины. В виду того, что случайная величина распределена по показательному закону:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \text{ следовательно, } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Определим функцию распределения.

$$\text{Так как } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \text{ то } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{15}x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Определим вероятность того, что на ремонт потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизора 15 дней:

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - F(20) = 1 - (1 - e^{-\frac{20}{15}}) = e^{-\frac{20}{15}} = e^{-\frac{4}{3}} \approx 0,264.$$

7.6.3. Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами a и σ^2 ($\sigma > 0$), если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет следующий вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Кривую нормального закона распределения называют нормальной кривой или гауссовой кривой:

Построим графики функции распределения и плотности распределения для случайной величины, распределенной по нормальному закону.

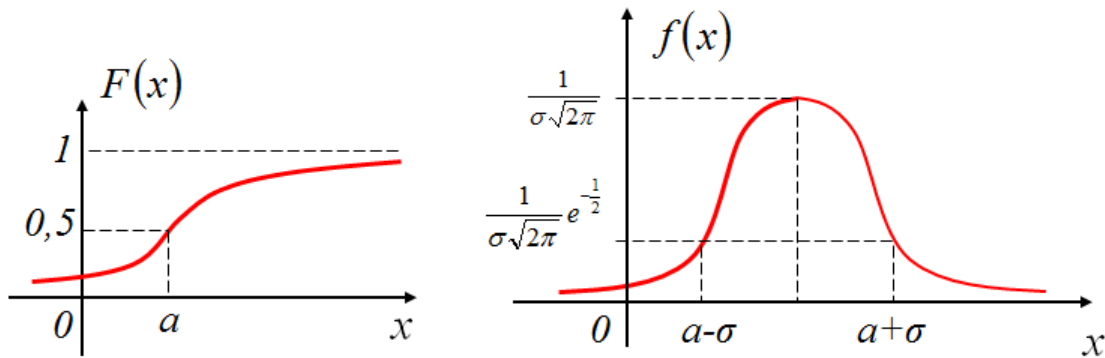


Рис. 7.3. Графики функции и плотности распределения.

Теорема 7.7. Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по нормальному закону, равно параметру a , а среднее квадратическое отклонение равно параметру σ этого параметру a , а среднее квадратическое отклонение равно параметру σ этого закона:

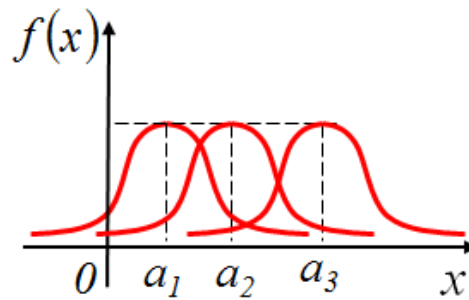
$$M(X) = a; \quad D(X) = \sigma^2.$$

Пример. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины X заданной плотностью:

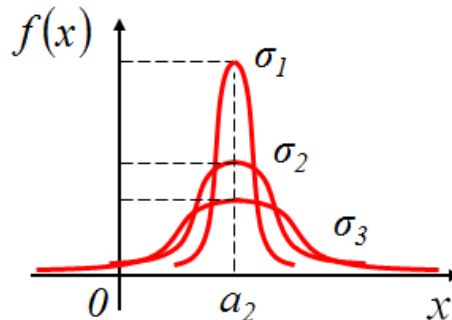
$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}.$$

Решение. Согласно вышеприведенной теореме $M(X) = a; \quad D(X) = \sigma^2$, следовательно: $M(X) = a = 1$, $\sigma = 5$, а $D(X) = \sigma^2 = 25$.

Рассмотрим влияние параметров распределения на форму нормальной кривой. Если $\sigma = \text{const}$ и менять параметр a ($a_1 < a_2 < a_3$), т.е. центр симметрии распределения, то нормальная кривая будет смещаться вдоль оси абсцисс, не меняя формы.



Если $a = \text{const}$ и менять параметр σ ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$), то меняется ордината точки максимума нормальной кривой.



Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, нормальное распределение с такими параметрами называют *стандартным*.

Плотность стандартной случайной величины имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Функция распределения случайной величины $X \sim N(0,1)$ имеет вид:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функция Лапласа.}$$

Теорема 7.8. Функция распределения случайной величины X , распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа по формуле

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Свойство 1. Вероятность попадания случайной величины X , распределенной по нормальному закону, в интервал $[x_1, x_2]$ равна

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \quad t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma}; \quad t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}.$$

Свойство 2. Вероятность того, что отклонение случайной величины X , распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a не превысит величину $\delta > 0$ (по абсолютной величине), равна

$$P(|X - a| \leq \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило трех сигм. Если случайная величина имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ , то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения, т.е. значения случайной величины заключены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Пример. Пусть X – случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с параметрами $a = 1,6$ и $\sigma = 1$. Какова вероятность того, что при четырех испытаниях эта случайная величина попадет хотя бы один раз в интервал $(1, 2)$?

Решение. Вероятность попадания в заданный интервал при одном испытании равна

$$P(1 < X < 2) = \frac{1}{2} \left(\Phi\left(\frac{2-1,6}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-1,6}{1}\right) \right) = \frac{1}{2} (\Phi(0,4) + \Phi(0,6)) \approx \\ \approx 0,1554 + 0,2257 = 0,3811.$$

Тогда, вероятность непадения при одном испытании будет равна:

$$q = 1 - p = 1 - 0,3811 = 0,6189,$$

а при четырех $0,6189^4 \approx 0,1467$.

$$P(X = 4) = 1 - 0,1467 = 0,8533.$$

Глава 8. Основы математической статистики

Математическая статистика – это раздел прикладной математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин по результатам наблюдений.

Основными задачами математической статистики являются:

- 1) представление полученных данных в удобном для дальнейшего анализа виде;
- 2) оценка интересующих характеристик случайной величины;
- 3) проверка статистических гипотез, т.е. решение вопроса согласования результатов оценивания с опытными данными.

Анализ статистических данных включает оценку вероятностей события, функции распределения вероятностей или плотности вероятностей, оценку параметров известного распределения, оценку связей между случайными величинами.

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей и в свою очередь служит основой для разработки методов обработки и анализа статистических результатов в конкретных областях человеческой деятельности.

Математическая статистика как наука начинается с работ знаменитого немецкого математика *Карла Фридриха Гаусса* (1777–1855 гг.), который на основе теории вероятностей исследовал и обосновал метод наименьших квадратов, созданный им в 1795 г. и примененный для обработки астрономических данных (с целью уточнения орбиты малой планеты Церера). Его именем часто называют одно из наиболее популярных распределений вероятностей – нормальное, а в теории случайных процессов основной объект изучения – гауссовские процессы. Большой вклад в развитие статистики внесли: *Я. Бернулли, П. Лаплас, К. Пирсон, Р. Фишер, П. Чебышев* и др.

8.1. Генеральная и выборочная совокупности

Определим основные понятия математической статистики.

Генеральной совокупностью называется вся совокупность подлежащая изучению.

Генеральная совокупность может быть *конечной* или *бесконечной* в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих ее объектов.

Не следует смешивать понятие генеральной совокупности с реально существующими совокупностями. Например, отделом полиции Прикубанского округа Краснодарского края в январе 2018 года ежедневно фиксировалось число преступлений, что является реально существующей совокупностью, которую нельзя назвать генеральной, поскольку данные о количестве преступлений можно получить за любой промежуток сколь угодно большой.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Выборка называется *репрезентативной (представительной)*, если ее объекты достаточно хорошо отражают свойства генеральной совокупности.

Повторной называется выборка, при которой отобранный объект возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называется выборка, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Применяют различные способы получения выборки.

1) *Простой отбор* – случайное извлечение объектов из генеральной совокупности с возвратом или без возврата.

2) *Типический отбор* – объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из ее «типической» части.

3) *Серийный отбор* – объекты отбираются из генеральной совокупности не по одному, а сериями.

4) *Механический отбор* – генеральная совокупность «механически» делится на столько частей, сколько объектов должно войти в выборку и из каждой части выбирается один объект.

Число N объектов генеральной совокупности и число n объектов выборочной совокупности называют *объемами* генеральной и выборочной совокупностей соответственно. При этом предполагают, что N значительно больше n .

8.2. Вариационные ряды

Полученные различными способами отбора данные образуют выборку. Как правило, это множество чисел, расположенных в произвольном порядке. По такой выборке трудно выявить какую-либо закономерность их изменения (*варьирования*).

Для обработки данных используют операцию *ранжирования*, то есть расположение наблюдаемых значений в порядке возрастания.

После проведения операции ранжирования значения случайной величины объединяют в группы, то есть группируют так, чтобы в каждой отдельной группе значения случайной величины были бы одинаковыми. Каждое такое значение называется *вариантом*. Варианты обозначаются строчными буквами латинского алфавита с индексами, соответствующими порядковому номеру группы $x_i, y_j, \dots$

Изменение значения варианта называется *варьированием*.

Последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*.

Число, которое показывает, сколько раз встречаются соответствующие значения вариантов в ряде наблюдений, называется *частотой* или *весом варианта* и обозначается n_i ($i=1,2,\dots,k$), где i – номер варианта, $\sum_{i=1}^k n_i = n$ – объем выборки.

Отношение частоты данного варианта к общему числу наблюдений n называется *относительной частотой* или *частотью* (долей)

соответствующего варианта и обозначается $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ ($\sum_{i=1}^k \omega_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$), где k

– число вариантов, n – объем выборки. Частость ω_i является статистической вероятностью появления варианта x_i . Она является аналогом вероятности p_i появления значения x_i случайной величины X .

Накопленная частота $n_i^{нак}$ показывает, сколько наблюдалось вариантов со значением признака, меньшим x . Отношение накопленной частоты $n_i^{нак}$ к общему числу наблюдений n называется *накопленной частотью* $\omega_i^{нак}$.

Дискретным статистическим рядом называется ранжированная совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами n_i или частотями ω_i .

Дискретный статистический ряд удобно записывать в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

x_i	x_1	x_2	...	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	...	ω_k

Характеристики дискретного статистического ряда:

1. *Размах варьирования* $R = x_{\max} - x_{\min}$.
2. *Мода* M_0 – вариант, имеющий наибольшую частоту.
3. *Медиана* M_e – вариант, приходящийся на середину ранжированной выборки.

Пусть n – объем выборки. Тогда:

- 1) если $n = 2k$, то есть ряд имеет четное число членов, то $M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$;
- 2) если $n = 2k + 1$, то есть ряд имеет нечетное число членов, то $M_e = x_{k+1}$.

Пример. Органами МВД зарегистрирована подростковая преступность в возрасте: 14, 13, 12, 13, 14, 14, 15, 16, 14, 15, 15, 16, 14, 15, 13, 14, 15, 15, 16, 16.

Составить дискретный ряд распределения числа преступлений по возрасту. Найти объем, размах, моду и медиану выборки.

Решение. Ранжируем исходные данные: 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16.

Объем выборки: $n=20$.

Наименьшее значение варианты: $x_{\min} = 12$.

Наибольшее значение варианты: $x_{\max} = 16$.

Размах: $R = x_{\max} - x_{\min} = 16 - 12 = 4$.

Мода: $M_0 = 14$, так как вариант $x_i = 14$ встречается наибольшее количество раз $n_i = 7$.

Так как $n = 20$, то медиана $M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{14 + 14}{2} = \frac{28}{2} = 14$.

Вариационный ряд:

x_i	12	13	14	15	16
n_i	1	3	7	5	4

8.3. Переход от дискретного к интервальному вариационному ряду

Если изучаемая случайная величина X является непрерывной или число ее значений достаточно велико, то составляют *интервальный статистический ряд*.

Весь интервал наблюдаемых значений разбивается на k частичных интервалов $[x_1, x_2)$, $[x_2, x_3)$, ..., $[x_k, x_{k+1}]$ одинаковой длины h . Затем подсчитывают количество попаданий наблюдений в каждый интервал. Эти числа принимают за частоты n_i . Согласно формуле Стерджеса рекомендуемое число интервалов разбиений $k \approx 1 + \log_2 n$, а длины частичных интервалов

$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n}$, n – объем выборки. Если шаг окажется дробным, то за длину

интервала берут ближайшее целое число или ближайшую простую дробь.

За начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{нач} = x_{\min} - \frac{h}{2}$, а конец последнего должен удовлетворять условию $x_{кон} - h \leq x_{\max} < x_{кон}$. Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала шаг h .

Сгруппированный ряд представляется в виде таблицы (*интервальный статистический ряд*):

$x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	...	$x_k - x_{k+1}$
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Пример. Органами МВД за отчетный период зарегистрировано следующее количество преступлений: 178, 158, 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155, 157, 175, 166, 170, 159, 173, 182, 167, 171, 169, 172, 165, 156, 179, 160, 171, 175, 173, 164, 179. Построить интервальный статистический ряд.

Решение. Ранжируем полученные данные: 153, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 163, 164, 165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172, 173, 173, 175, 175, 178, 179, 179, 182, 183, 186.

Объем выборки: $n=30$.

Наименьшее значение варианты: $x_{\min} = 153$.

Наибольшее значение варианты: $x_{\max} = 186$.

По формуле Стерджеса находим число интервалов разбиений:
 $k \approx 1 + \log_2 30 \approx 5,9069 \approx 6$.

Длина частичных интервалов: $h = \frac{186-153}{1+\log_2 30} \approx \frac{33}{6} \approx 5,5 \approx 6$.

Начальное значение: $x_{нач} = 153 - \frac{6}{2} = 150$.

Составляем интервальный статистический ряд.

$x_i - x_{i+1}$	150–156	156–162	162–168	168–174	174–180	180–186
n_i	4	5	6	7	5	3

8.4. Переход от интервального к дискретному вариационному ряду

Иногда интервальный статистический ряд необходимо заменить дискретным. В этом случае срединное значение i -го интервала принимают за вариант x_i , а соответствующую интервальную частоту n_i – за частоту этого варианта.

Пример. Дан интервальный вариационный ряд:

$x_i - x_{i+1}$	150–156	156–162	162–168	168–174	174–180	180–186
n_i	4	5	6	7	5	3

Построить дискретный вариационный ряд.

Решение. Найдем середины частичных интервалов, получим числа: 153, 159, 165, 171, 177, 183. Запишем дискретный вариационный ряд.

x_i	153	159	165	171	177	183
n_i	4	5	6	7	5	3

8.5. Эмпирическая функция распределения

Пусть получено статистическое распределение выборки и каждому варианту x_i из этой выборки поставлена в соответствие его частота ω_i .

Эмпирической функцией (функцией распределения выборки) называется относительная частота (частота) того, что признак (случайная величина X) примет значение, меньшее заданного x , т.е.

$$F_n(x) = w(X < x) = w_x^{нак} = \frac{n_x^{нак}}{n},$$

где n – объем выборки.

Из определения следует, что значения эмпирической функции распределения при каждом x являются случайными величинами. Она обладает теми же свойствами, что и обычная функция распределения вероятностей:

1. $0 \leq F^*(x) \leq 1$;
2. $F^*(x)$ – неубывающая функция;
3. $F^*(x)$ – непрерывна слева;
3. $F^*(x) = 0$, при $x \leq x_{\min}$ и $F^*(x) = +\infty$, при $x > x_{\max}$.

Пример. Построить эмпирическую функцию распределения по данному вариационному ряду:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1

Решение. Объем выборки: $n = 20$.

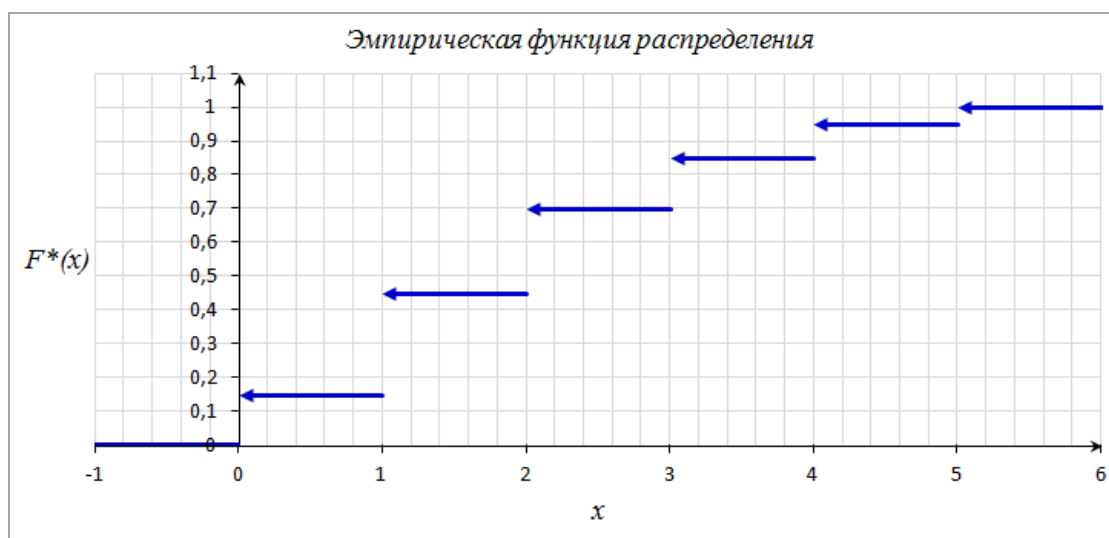
Составим таблицу, в которой найдем относительные частоты и накопленные относительные частоты.

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
ω_i	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05
$\omega_i^{нак}$	0,15	0,45	0,7	0,85	0,95	1

На основе полученной таблицы, используя значения x_i и $\omega_i^{нак}$, составим эмпирическую функцию распределения:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ 0,15, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0,45, & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 0,7, & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 0,85, & \text{при } 3 < x \leq 4; \\ 0,95, & \text{при } 4 < x \leq 5; \\ 1, & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

График построенной функции имеет вид:



8.6. Графическое представление статистических данных

Для графического изображения вариационных рядов наиболее часто применяются *полигон*, *гистограмма* и *кумулятивная кривая*.

Полигон частот или *относительных частот* служит для изображения дискретного вариационного ряда и представляет собой ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_i; n_i)$ или $(x_i; \omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Полигон относительных частот является аналогом многоугольника распределения дискретной случайной величины в теории вероятностей.

Гистограмма частот или *относительных частот* служит только для изображения интервальных вариационных рядов и представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями, равными частичным интервалам значений признака $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, и высотами, равными частотам n_i или относительным частотам ω_i . Если соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой, то можно получить полигон того же распределения.

Кумулятивная кривая (кумулята) – кривая накопленных частот (частостей). Для дискретного вариационного ряда кумулята представляет ломаную линию, соединяющую точки $(x_i; n_i^{нак})$ или $(x_i; \omega_i^{нак})$, $i = 1, 2, \dots, k$. Для интервального вариационного ряда ломаная начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала, а ордината – накопленной частоте (частости), равной нулю. Другие точки этой ломаной соответствуют концам интервалов.

Пример. В результате некоторого эксперимента получены следующие данные:

2, 4, 9, 5, 4, 8, 3, 6, 7, 2,
8, 7, 5, 3, 7, 4, 4, 3, 4, 6.

Найти размах варьирования R , моду M_0 , медиану M_e . Построить полигон и кумуляту частот и относительных частот.

Решение. Объем выборки: $n = 20$.

Размах: $R = 7$.

Мода: $M_0 = 4$.

Медиана: $M_e = \frac{4+5}{2} = 4,5$.

Ранжируем исходные данные: 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9.

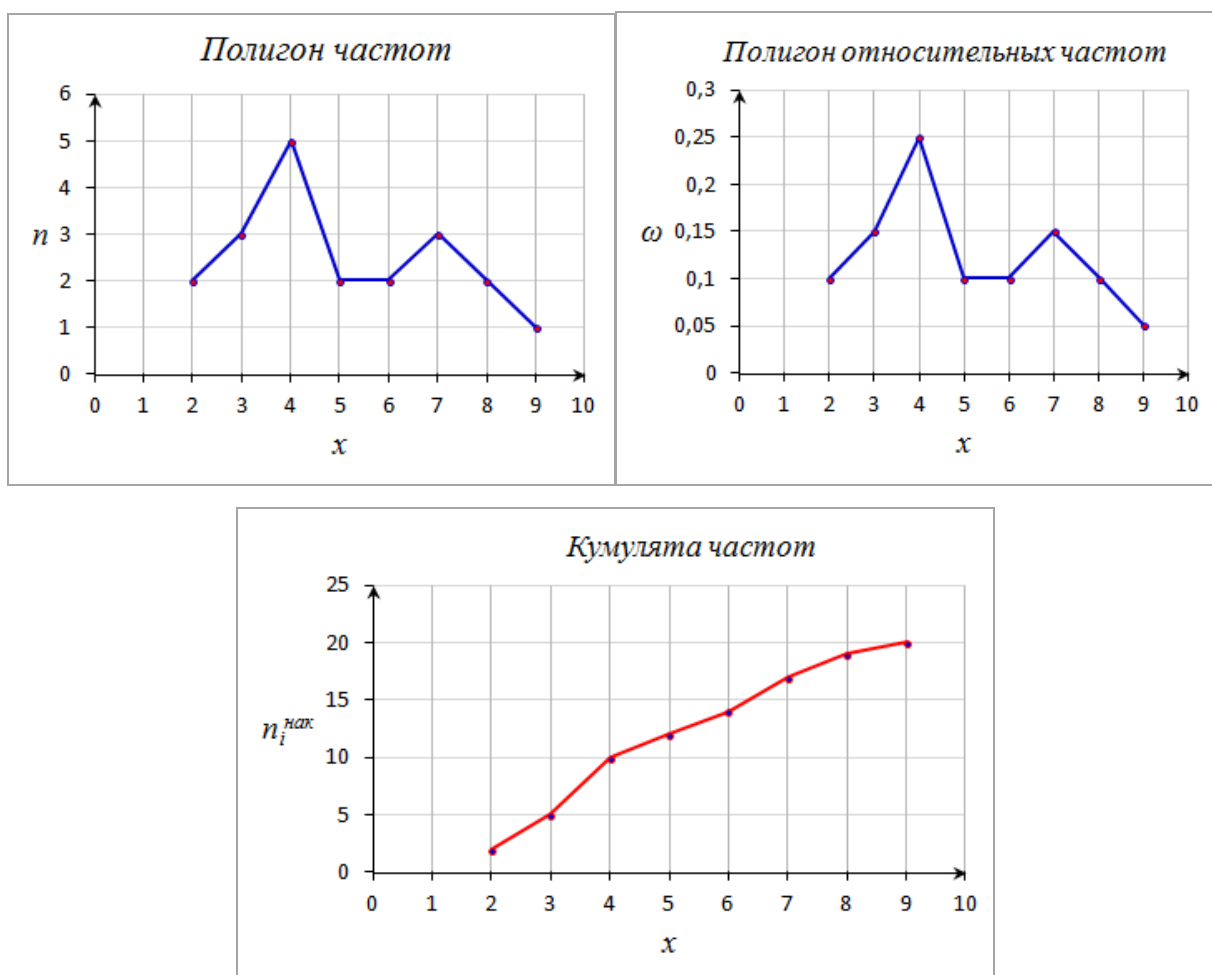
Составим дискретный вариационный ряд.

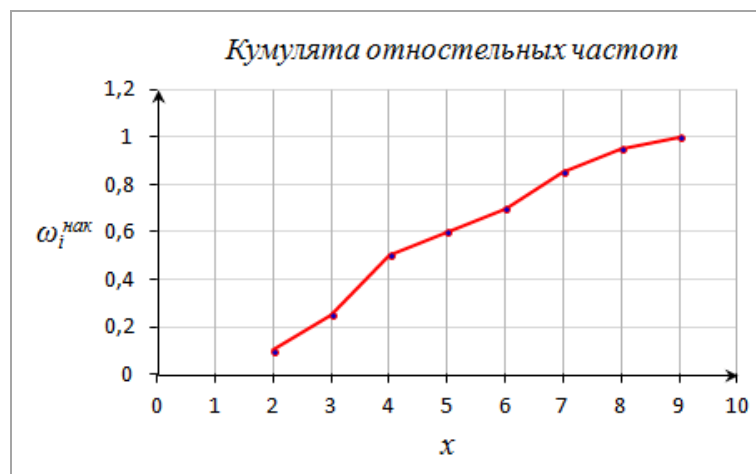
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	3	5	2	2	3	2	1

Найдем относительные частоты, накопленные частоты и накопленные относительные частоты. Составим таблицу:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	3	5	2	2	3	2	1
ω_i	0,1	0,15	0,25	0,1	0,1	0,15	0,1	0,05
$n_i^{нак}$	2	5	10	12	14	17	19	20
$\omega_i^{нак}$	0,1	0,25	0,5	0,6	0,7	0,85	0,95	1

На основе полученной таблицы строим полигон частот и относительных частот, кумуляту частот и относительных частот.





Пример. Дан интервальный вариационный ряд:

$x_i - x_{i+1}$	1 – 5	5 – 9	9 – 13	13 – 17	17 – 21
n_i	10	20	50	12	8

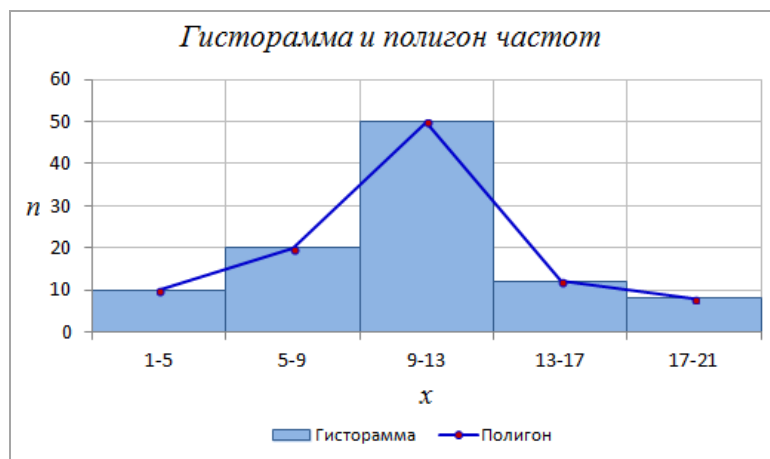
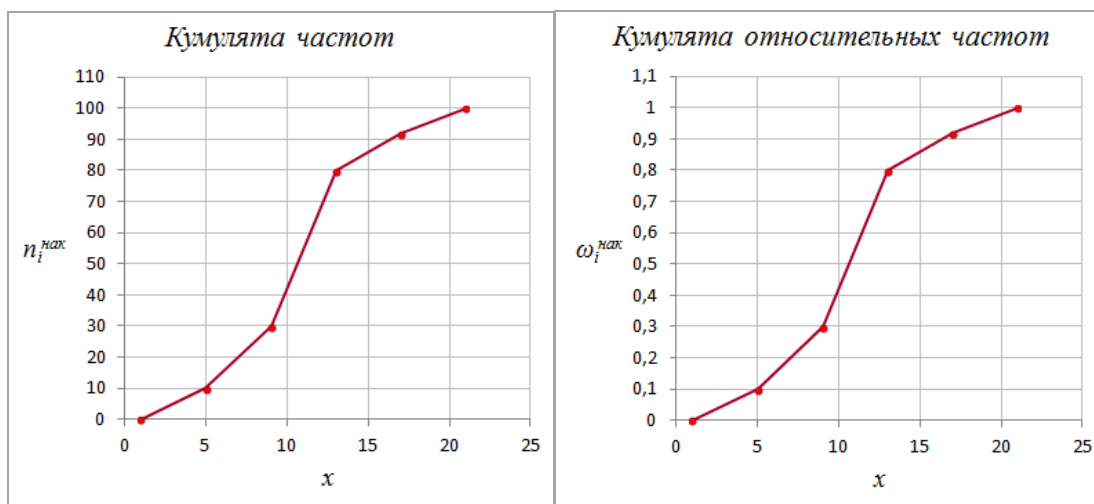
Построить гистограмму и кумуляту частот и относительных частот.

Решение. Найдем относительные частоты, накопленные частоты и накопленные относительные частоты. Составим таблицу:

$x_i - x_{i+1}$	1 – 5	5 – 9	9 – 13	13 – 17	17 – 21
n_i	10	20	50	12	8
ω_i	0,1	0,2	0,5	0,12	0,08
$n_i^{\text{нак}}$	10	30	80	92	100
$\omega_i^{\text{нак}}$	0,1	0,3	0,8	0,92	1

На основе полученной таблицы строим гистограмму частот и относительных частот, кумуляту частот и относительных частот.





8.7. Числовые характеристики статистического распределения

Пусть дано статистическое распределение выборки объема n :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m

Выборочным средним $\bar{x}_g$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\overline{x}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i n_i.$$

Так как $\omega_i = \frac{n_i}{n}$, то для вычисления выборочной средней можно использовать формулу:

$$\overline{x}_g = \sum_{i=1}^m x_i \omega_i.$$

В случае интервального вариационного ряда в качестве x_i берут середины интервалов, а n_i – соответствующие им частоты.

Выборочной дисперсией D_g называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего $\overline{x}_g$:

$$D_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x}_g)^2 \cdot n_i.$$

Выборочная дисперсия может быть вычислена по формуле:

$$D_g = \overline{x_g^2} - (\overline{x_g})^2, \text{ где } \overline{x_g^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^2 n_i.$$

Так как $\omega_i = \frac{n_i}{n}$, то для вычисления выборочной дисперсии можно использовать формулу:

$$D_g = \sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x}_g)^2 \cdot \omega_i.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле:

$$\sigma_g = \sqrt{D_g}.$$

Особенность σ_g состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и данные выборки.

При решении практических задач используется *исправленная выборочная дисперсия* S^2 :

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\epsilon}.$$

Замечание. Формулы для вычисления выборочной дисперсии и исправленной дисперсии отличаются только знаменателями. При достаточно большом объеме выборки n выборочная D_{ϵ} и исправленная S^2 дисперсии мало отличаются друг от друга, поэтому на практике исправленной дисперсией пользуются, если $n \leq 30$.

Исправленное среднее квадратическое отклонение S определяется по формуле:

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Пример. Дан статистический ряд распределения частот:

x_i	1	3	4	5	6
n_i	3	5	7	2	3

Вычислить среднюю выборочную ($\bar{x}_{\epsilon}$), выборочную дисперсию (D_{ϵ}), выборочное среднее квадратическое отклонение (σ_{ϵ}), исправленную дисперсию (S^2), исправленное среднее квадратическое отклонение (S).

Решение. Объем выборки: $n = 20$.

Выборочная средняя:

$$\bar{x}_{\epsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i n_i = \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{20} = 3,7.$$

Выборочная дисперсия:

$$\overline{x_{\epsilon}^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^2 n_i = \frac{1^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 7 + 5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 3}{20} = 15,9.$$

$$D_{\epsilon} = \overline{x_{\epsilon}^2} - (\bar{x}_{\epsilon})^2 = 15,9 - (3,7)^2 = 2,21.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_{\epsilon} = \sqrt{D_{\epsilon}} = \sqrt{2,21} \approx 1,4866.$$

Исправленная дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\epsilon} = \frac{20}{20-1} \cdot 2,21 \approx 2,3263.$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{2,3263} \approx 1,5252.$$

8.8. Выборочные начальные и центральные моменты статистического распределения. Асимметрия. Эксцесс.

Средняя выборочная и выборочная дисперсия являются частными случаями *моментов статистического распределения*.

Начальным выборочным моментом порядка k называется среднее арифметическое k -х степеней всех значений выборки:

$$\tilde{\nu}^k = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^k \cdot n_i}{n} \quad \text{или} \quad \tilde{\nu}^k = \sum_{i=1}^m x_i^k \cdot \omega_i.$$

Замечание. Средняя арифметическая является начальным выборочным моментом первого порядка: $\tilde{\nu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^1 \cdot n_i = \overline{x_g}$.

Центральным выборочным моментом порядка k называется среднее арифметическое k -х степеней отклонений наблюдаемых значений выборки от выборочного среднего $\overline{x_g}$:

$$\tilde{\mu}^k = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x_g})^k \cdot n_i}{n} \quad \text{или} \quad \tilde{\mu}^k = \sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x_g})^k \cdot \omega_i.$$

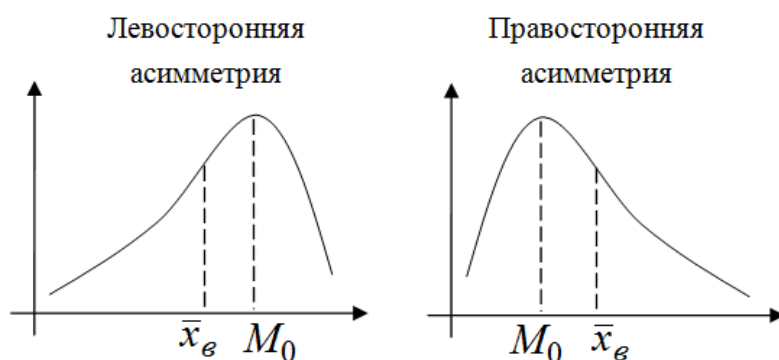
Замечание. Центральный выборочный момент первого порядка равен нулю: $\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x_g})^1 \cdot n_i = 0$, так как $\sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x_g}) \cdot n_i = 0$.

Замечание. Выборочная дисперсия является центральным выборочным моментом второго порядка: $\tilde{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x_g})^2 \cdot n_i = D_g$.

Выборочным коэффициентом асимметрии называется число $\tilde{A}$, вычисляемое по формуле: $\tilde{A} = \frac{\tilde{\mu}_3}{\sigma_g^3}$.

Выборочный коэффициент асимметрии служит для характеристики асимметрии полигона вариационного ряда. Если $\tilde{A} = 0$, то распределение имеет симметричную форму, т.е. варианты равноудаленные от $\bar{x}$, имеют одинаковую частоту (средняя арифметическая, мода и медиана совпадают). Если это равенство нарушается, то распределение асимметрично.

Если $\tilde{A} < 0$, то наблюдается положительная (правосторонняя) асимметрия, т.е. более пологий «спуск» полигона наблюдается слева. Если $\tilde{A} > 0$, то наблюдается отрицательная (левосторонняя) асимметрия, т.е. более пологий «спуск» полигона наблюдается справа.

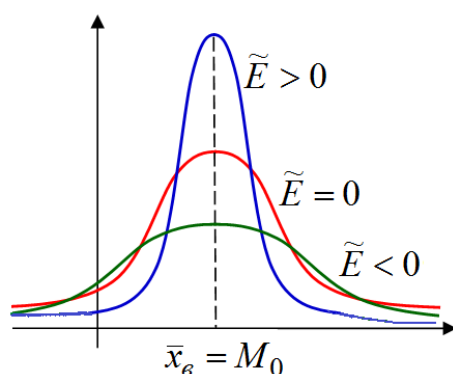


Выборочным коэффициентом эксцесса или коэффициентом крутости называется число $\tilde{E}$, вычисляемое по формуле:

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{\mu}^4}{\sigma_e^4} - 3.$$

Выборочный коэффициент эксцесса служит для сравнения на «крутость» выборочного распределения с нормальным распределением.

Коэффициент эксцесса для случайной величины, распределенной по нормальному закону, равен нулю.



Поэтому за стандартное значение выборочного коэффициента эксцесса принимают $\tilde{E} = 0$. Если $\tilde{E} > 0$ ($\tilde{E} < 0$), то полигон вариационного ряда имеет более крутую (пологую) вершину по сравнению с нормальной кривой.

Пример. Вычислить коэффициент асимметрии и эксцесс по данным представленным в таблице:

№	Значения	Частота
1	94-100	3
2	100-106	7
3	106-112	11
4	112-118	20
5	118-124	28
6	124-130	19
7	130-136	10
8	136-142	2

Решение. Объем выборки: $n = 100$.

Составим дискретный вариационный ряд распределения частот:

№	x_i	n_i
1	97	3
2	103	7
3	109	11
4	115	20
5	121	28
6	127	19
7	133	10
8	139	2

Выборочная средняя:

$$\bar{x}_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i n_i = \frac{1}{100} \cdot (97 \cdot 3 + 103 \cdot 7 + 109 \cdot 11 + 115 \cdot 20 + 121 \cdot 28 + 127 \cdot 19 + 133 \cdot 10 + 139 \cdot 2) = 119,2.$$

Выборочная дисперсия:

$$\overline{x_e^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^2 n_i = \frac{1}{100} \cdot (97^2 \cdot 3 + 103^2 \cdot 7 + 109^2 \cdot 11 + 115^2 \cdot 20 + 121^2 \cdot 28 + 127^2 \cdot 19 + 133^2 \cdot 10 + 139^2 \cdot 2) = 14296,1.$$

$$D_e = \overline{x_e^2} - (\bar{x}_e)^2 = 14296,1 - (119,2)^2 = 87,48.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{D_{\varepsilon}} = \sqrt{87,48} \approx 9,353.$$

Центральный выборочный момент 3-го порядка:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}^3 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_{\varepsilon})^3 \cdot n_i = \frac{1}{100} \cdot ((97 - 119,2)^3 \cdot 3 + (103 - 119,2)^3 \cdot 7 + \\ &+ (109 - 119,2)^3 \cdot 7 + (115 - 119,2)^3 \cdot 20 + (121 - 119,2)^3 \cdot 28 + \\ &+ (127 - 119,2)^3 \cdot 19 + (133 - 119,2)^3 \cdot 10 + (139 - 119,2)^3 \cdot 2) \approx -247,54\end{aligned}$$

Центральный выборочный момент 4-го порядка:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}^4 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_{\varepsilon})^4 \cdot n_i = \frac{1}{100} \cdot ((97 - 119,2)^4 \cdot 3 + (103 - 119,2)^4 \cdot 7 + \\ &+ (109 - 119,2)^4 \cdot 7 + (115 - 119,2)^4 \cdot 20 + (121 - 119,2)^4 \cdot 28 + \\ &+ (127 - 119,2)^4 \cdot 19 + (133 - 119,2)^4 \cdot 10 + (139 - 119,2)^4 \cdot 2) \approx 20767,8\end{aligned}$$

Коэффициент асимметрии:

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{\mu}_3}{\sigma_{\varepsilon}^3} = \frac{-247,54}{9,353^3} = -0,3025.$$

Эксцесс:

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{\mu}^4}{\sigma_{\varepsilon}^4} - 3 = \frac{20767,8}{9,353^4} - 3 = -0,2862.$$

Так как коэффициент асимметрии $\tilde{A}$ отрицателен, то наблюдается левосторонняя асимметрия. Поскольку эксцесс $\tilde{E}$ отрицательный, то рассматриваемое распределение имеет пологую вершину по сравнению с нормальной кривой.

Раздел III. Регрессионный анализ

Глава 9. Исследование парной регрессии

В криминологических исследованиях между значениями наблюдаемых факторов существуют различные зависимости, в которых каждому значению одного фактора соответствует множество возможных значений других переменных, то есть их определенное распределение. Такая зависимость получила название статистической зависимости.

Если каждому значению одной переменной соответствует определенное условное математическое ожидание другой, то такая статистическая зависимость называется корреляционной. Ставя цель дать количественное описание взаимосвязей между такими изучаемыми объектами (процессами), используемый математический аппарат, прежде всего, связан с методами регрессионного анализа.

Одним из главных компонентов процесса управления в правоохранительной сфере является аналитическая деятельность. От обоснованности выводов, полученных в результате анализа и прогнозирования социально-экономических процессов, во многом зависит качество управленческих решений, а, следовательно, и эффективность управляющих воздействий в сфере охраны общественного порядка, безопасности и борьбы с преступностью.

Вместе с тем выявление корреляционных зависимостей не является достаточным основанием для формирования достоверных выводов о наличии устойчивой социальной или экономической закономерности. Несмотря на полученное сколь угодно высокое значение коэффициента корреляции, аналитик еще не имеет достаточных оснований утверждать, что независимая переменная является причиной, а зависимая – следствием. Поэтому современное направление развития математических методов анализа социально-правовых явлений часто связывается с построением и практической реализацией математических моделей, учитывающих специфику и эволюцию преступности.

9.1. Введение в регрессионный анализ

В регрессионном анализе исследуется односторонняя зависимость случайной переменной y от одной или нескольких независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_p$. Такая зависимость называется регрессионной и может быть представлена в виде уравнения

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

При этом данное уравнение называется модельным уравнением регрессии, функция $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ – модельной функцией регрессии, а ее график – модельной линией регрессии. Зависимую переменную y называют объясняемой, выходной, эндогенной, результирующим признаком, а независимые переменные $x_1, x_2, \dots, x_p$ – объясняющими, входными, экзогенными, факторными признаками.

Задачами регрессионного анализа являются установление функциональной зависимости между факторами исследуемых явлений, оценка полученной регрессионной модели, прогноз значений зависимой переменной.

9.1.1. Регрессионные модели

Для построения статистической математической модели, используются два типа исходных данных:

- 1) данные, характеризующие совокупность различных объектов в определенный момент (период) времени;
- 2) данные, характеризующие один объект за ряд последовательных моментов (периодов) времени.

Модели, построенные по данным первого типа, называются пространственными моделями. Модели, построенные на основе второго типа данных, называются моделями временных рядов.

В зависимости от количества факторов, включенных в уравнение регрессии, принято различать парную и множественную регрессии.

Парная регрессия представляет собой регрессию между двумя переменными y и x , т. е. модель вида

$$y = f(x),$$

где y – зависимая переменная (результативный признак); x – независимая, или объясняющая, переменная (признак-фактор).

Множественная регрессия соответственно представляет собой регрессию результативного признака с двумя или большим числом факторов, то есть модель вида

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Любое статистическое исследование начинается со спецификации модели, т.е. с формулировки вида модели, исходя из соответствующей теории связи между переменными. Иными словами, исследование начинается с подбора математической модели, устанавливающей связь между явлениями.

Из круга факторов, влияющих на результативный признак, необходимо выделить наиболее существенно влияющие факторы. Парная регрессия достаточна, если имеется единственный доминирующий признак-фактор, который и используется в качестве объясняющей переменной.

Предположим, что выдвигается гипотеза о том, что количественный показатель y изучаемого социально-криминологического явления находится в функциональной зависимости от численного значения заранее известного фактора x :

$$y = f(x).$$

В этом случае необходимо знать, что остальные объясняющие факторы предполагаются неизменными или малозначимыми, т.е. ими в создаваемой модели можно пренебречь.

Уравнение парной регрессии характеризует связь между двумя признаками, которая проявляется как некоторая закономерность лишь в среднем в целом по совокупности наблюдений. Так, если зависимость значения исследуемого фактора y от фактора x характеризуется, например, уравнением

$$y = a + bx,$$

то это означает, что с ростом значения фактора x на одну единицу значение фактора y в среднем увеличивается на b единиц.

В уравнении регрессии корреляционная зависимость признаков представляется в виде функциональной связи, выраженной соответствующей математической функцией. Практически в каждом отдельном случае величина y складывается из двух слагаемых:

$$y_j = y(x_j) + \varepsilon_j, \quad (9.1)$$

где y_j – фактическое значение результативного признака; $y(x_j)$ – теоретическое значение результативного признака, найденное исходя из математической функциональной связи y и x ; ε_j – случайная величина, характеризующая отклонения реального значения результативного признака от теоретического, найденного по уравнению регрессии.

Случайная величина ε называется также возмущением. Она включает влияние неучтенных в модели факторов, случайных ошибок и особенностей измерения. Ее присутствие в модели порождено тремя источниками: спецификацией модели, выборочным характером исходных данных, особенностями измерения переменных.

Регрессионные модели не всегда используют для описания связи факторов линейной зависимости. Класс математических функций для описания связи двух переменных достаточно широк.

9.1.2. Виды уравнений парной регрессии

Различают линейные и нелинейные регрессии.

Линейная регрессия представляет собой линейную функцию вида:

$$y = a + bx + \varepsilon. \quad (9.2)$$

Нелинейные регрессии делятся на два класса.

1) Регрессии, нелинейные относительно включенной в анализ объясняющей переменной, но линейные по оцениваемым параметрам. К ним относятся:

полиномы различных степеней

$$y = a + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_nx^n + \varepsilon; \quad (9.3)$$

гиперболические функции

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon. \quad (9.4)$$

2) Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам:
степенная функция

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon; \quad (9.5)$$

показательная функция

$$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon; \quad (9.6)$$

логарифмическая функция

$$y = a \log_b x \cdot \varepsilon; \quad (9.7)$$

экспоненциальная функция

$$y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon. \quad (9.8)$$

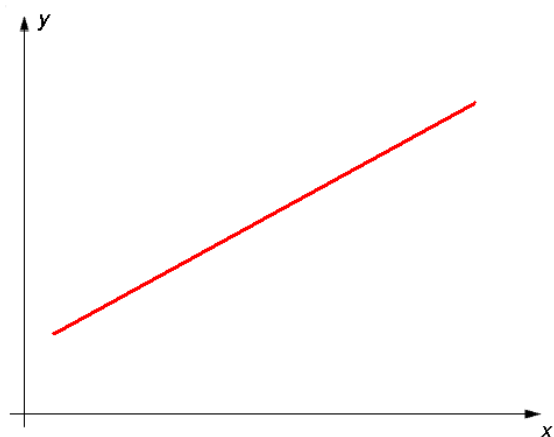
От правильно выбранной спецификации модели зависит величина случайных ошибок: они тем меньше, чем в большей мере теоретические значения результативного признака $y(x)$ подходят к фактическим данным.

К ошибкам спецификации будут относиться не только неправильный выбор той или иной математической функции $y=f(x)$, но и недоучет в уравнении регрессии какого-либо существенного фактора, т.е. использование парной регрессии вместо множественной модели.

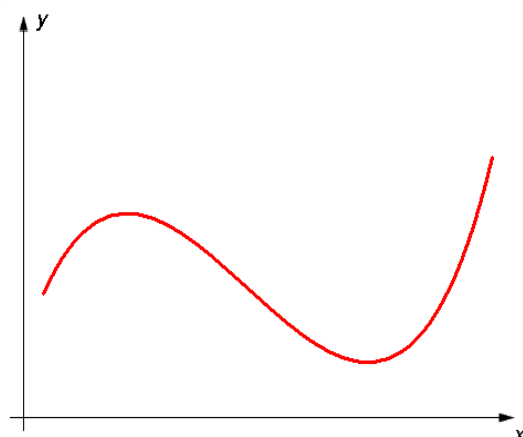
Наряду с ошибками спецификации могут иметь место ошибки выборки, поскольку исследователь чаще всего имеет дело с выборочными данными при установлении закономерной связи между признаками. Ошибки выборки имеют место и в силу неоднородности данных в исходной статистической совокупности, что, как правило, бывает при изучении сложных социальных процессов.

Если ошибки спецификации можно уменьшить, изменяя форму модели (вид математической формулы), а ошибки выборки – увеличивая объем исходных данных, то ошибки измерения практически лишают возможности дать количественную оценку связи между признаками. Статистическое измерение социально-криминологических показателей сопряжено с рядом трудностей и не лишено возможных ошибок, например, в результате наличия незарегистрированных событий.

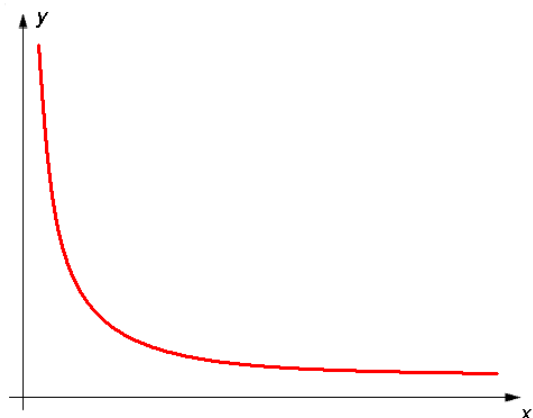
Предполагая, что ошибки измерения сведены к минимуму, основное внимание в статистических исследованиях уделяется ошибкам спецификации.



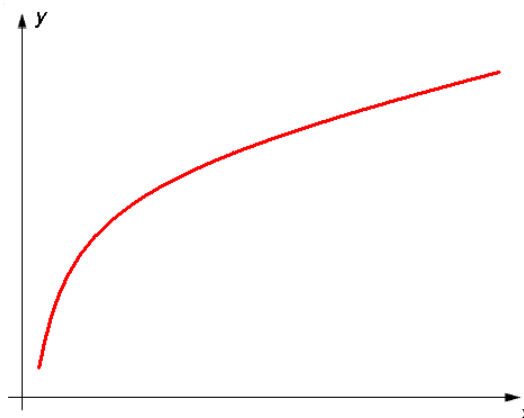
$$y = a + bx$$



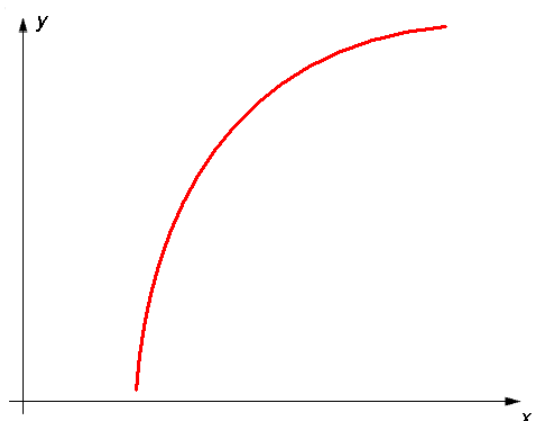
$$y = a + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_nx^n + \varepsilon$$



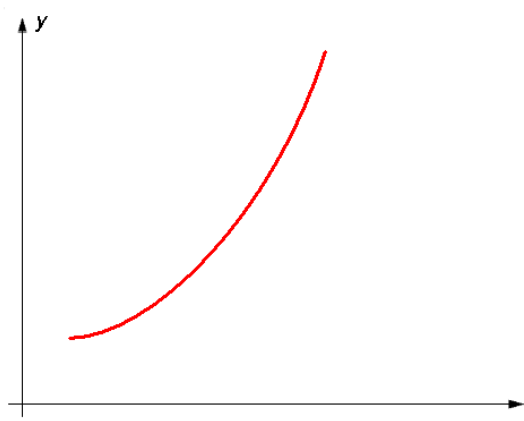
$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$$



$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$$



$$y = a \log_b x \cdot \varepsilon$$



$$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$$

Рис. 9.1. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей между двумя переменными.

В парной регрессии выбор вида математической функции $y=f(x)$ может быть осуществлен тремя методами: графическим, аналитическим и

экспериментальным. При изучении зависимости между признаками *графический метод* подбора вида уравнения регрессии достаточно нагляден.

Метод основан на поле корреляции. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей, представлены на рис. 9.1.

Значительный интерес представляет *аналитический метод* выбора типа уравнения регрессии. Он основан на изучении материальной природы связи исследуемых признаков.

Однако при обработке информации на компьютере выбор вида уравнения регрессии обычно осуществляется *экспериментальным методом*, т.е. путем сравнения оценок полученных уравнений, рассчитанных при разных типах уравнений.

Если уравнение регрессии проходит через все точки корреляционного поля, что возможно только при функциональной связи, когда все точки лежат на линии регрессионной функции $y=f(x)$ фактические значения результативного признака совпадают с теоретическими $y(x_i)=y_i$, т.е. они полностью обусловлены влиянием фактора x . В практических исследованиях, как правило, имеет место некоторое рассеяние точек относительно линии регрессии. Оно обусловлено влиянием прочих не учитываемых в уравнении регрессии факторов.

Результаты исследований подтверждают, что число наблюдений должно в 6 – 7 раз превышать число рассчитываемых параметров при переменной x . Это означает, что искать линейную регрессию, имея менее 7 наблюдений, вообще не имеет смысла. Если вид функции усложняется, то требуется увеличение объема наблюдений, ибо каждый параметр при x должен рассчитываться хотя бы по 7 наблюдениям. Значит, если мы выбираем параболу второй степени

$$y = a + bx + cx^2 + \varepsilon, \quad (9.9)$$

то требуется объем информации уже не менее 14 наблюдений.

9.2. Построение и верификация парной линейной регрессии

Рассмотрим в качестве примера следующую регрессионную зависимость. По восьми исследуемым регионам известны значения двух социально-криминологических признаков (Таблица 9.1).

Таблица 9.1

№ региона	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y_i	42,5	81,2	52,3	58,2	76,2	48,8	69,9	72,8
x_{i1}	39,9	17,2	37,1	31,8	10,3	32,9	21,8	7,8

Можно предположить корреляционную зависимость значений фактора y от фактора x . Для наглядности изобразим эту зависимость графически точками на координатной плоскости. Такое графическое отображение статистической зависимости называется полем корреляции.

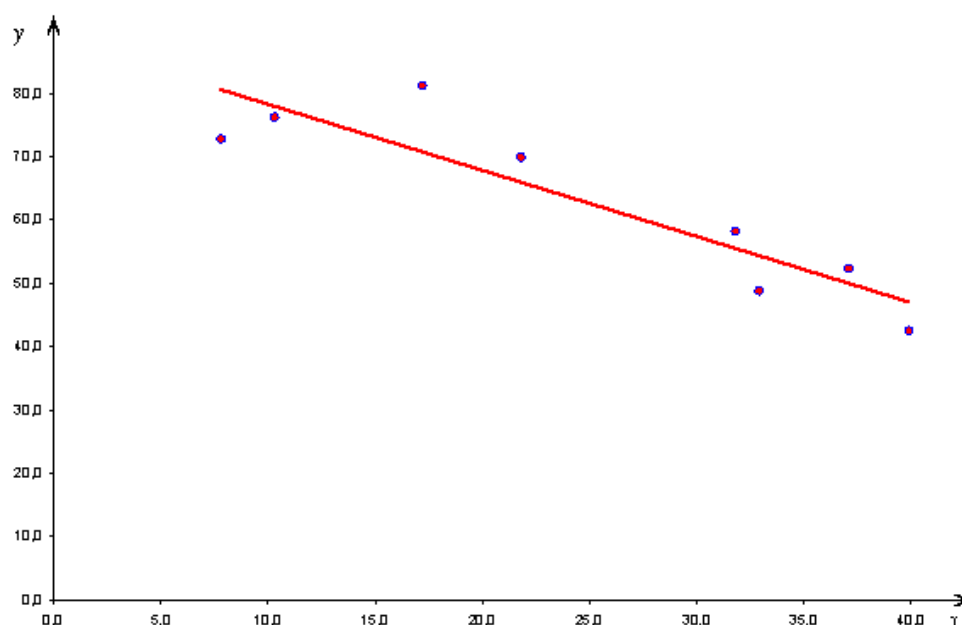


Рис. 9.2. Поле корреляции регрессионной зависимости.

По расположению эмпирических точек можно предположить наличие линейной регрессионной (корреляционной) зависимости между переменными x и y . В нашем случае точки на плоскости лежат вблизи от некоторой прямой, поэтому уравнение регрессии будем искать в виде линейного уравнения

$$y = a + bx.$$

Построение линейной регрессии сводится к оценке ее параметров – a и b . Оценки параметров линейной регрессии могут быть найдены разными методами. Можно обратиться к полю корреляции и, выбрав на графике две точки, провести через них прямую линию. Далее по графику можно определить значения параметров. Параметр a определим, как точку пересечения линии регрессии с осью OY , а параметр b оценим, исходя из угла наклона линии

регрессии, как dy/dx , где dy – приращение результата y , а dx – приращение фактора x .

9.2.1. Метод наименьших квадратов

Классический подход к оцениванию параметров линейной регрессии основан на методе наименьших квадратов (МНК). МНК позволяет получить такие оценки параметров a и b , при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y_i от расчетных (теоретических) $y(x_i)$ минимальна:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2 \rightarrow \min. \quad (9.10)$$

На основании необходимого условия экстремума функции двух переменных $S(a, b)$ приравняем к нулю ее частные производные. Получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)x_i = 0 \end{cases}, \quad (9.11)$$

откуда после преобразований получим систему нормальных уравнений для определения параметров линейной регрессии:

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases}. \quad (9.12)$$

Разделив обе части системы на n , получим систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y}, \\ a\bar{x} + b\bar{x}^2 = \overline{xy}, \end{cases}, \quad (9.13)$$

где соответствующие средние определяются по формулам:

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \text{среднее значение квадрата фактора } x_i, \quad (9.14)$$

$$\bar{x}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 - \text{квадрат среднего значения фактора } x_i, \quad (9.15)$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \text{среднее значение квадрата фактора } y, \quad (9.16)$$

$$\overline{y}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)^2 - \text{квадрат среднего значения фактора } y. \quad (9.17)$$

9.2.2. Определение параметров уравнения линейной модели

Для расчета параметров модели построим таблицу:

Таблица 9.2

№ региона	y_i	x_i	y_i^2	$x_i y_i$	x_i^2
1	42,5	39,9	1806,25	1695,75	1592,01
2	81,2	17,2	6593,44	1396,64	295,84
3	52,3	37,1	2735,29	1940,33	1376,41
4	58,2	31,8	3387,24	1850,76	1011,24
5	76,2	10,3	5806,44	784,86	106,09
6	48,8	32,9	2381,44	1605,52	1082,41
7	69,9	21,8	4886,01	1523,82	475,24
8	72,8	7,8	5299,84	567,84	60,84
Σ	501,9	198,8	32895,95	11365,52	6000,08
Ср. зн.	62,7375	24,85	4111,99375	1420,69	750,01

Таблица заполняется следующим образом. В первом столбце расчетной таблицы вводятся идентификаторы исследуемых объектов. В нашем случае это номера исследуемых регионов. По каждому объекту в столбец y_i вносятся соответствующие значения $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ наблюдаемого фактора y , а в столбец x_i — значения $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ наблюдаемого фактора x . Затем столбец y_i^2 заполняется квадратами значений $y_1^2, y_2^2, y_3^2, \dots, y_n^2$, столбец $x_i y_i$ — произведениями значений по соответствующей строке $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \dots, x_n y_n$, столбец x_i^2 заполняется квадратами значений $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_n^2$.

Например, для первого региона (при $i=1$) вписываем значение y_1 , равное 42,5, в следующий столбец вставляем значение x_1 , равное 39,9. Произведем вычисления по региону в третьем, четвертом и пятом столбцах расчетной таблицы:

$$y_1^2 = 42,5^2 = 1806,25;$$

$$x_1 y_1 = 42,5 \cdot 39,9 = 1695,75;$$

$$x_1^2 = 39,9^2 = 1592,01.$$

После соответствующих заполнений по каждому объекту необходимо суммировать элементы таблицы по каждому столбцу, а затем рассчитать средние значения этих элементов.

Рассчитаем выборочные дисперсии $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ и $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$ переменных x и y , используя средние значения, полученные в расчетной таблице:

$$\sigma_x^2 = 750,01 - 24,85^2 = 750,01 - 617,52 = 132,4875;$$

$$\sigma_y^2 = 4111,99375 - 62,7375^2 = 4111,99375 - 3935,9939 = 175,99985.$$

Найдем значения средних квадратичных отклонений:

$$\sigma_x = \sqrt{132,4875} = 11,5104;$$

$$\sigma_y = \sqrt{175,99985} = 13,2665.$$

Произведем оценку коэффициентов линейного регрессионного уравнения $y = a + bx$.

Коэффициент b называется выборочным коэффициентом регрессии y по x . Он показывает, на сколько единиц в среднем изменяется переменная y при увеличении переменной x на одну единицу. Выборочный коэффициент регрессии можно найти по формуле:

$$b = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x^2}, \quad (9.18)$$

где

$$\text{Cov}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x} \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y} \quad (9.19)$$

– выборочный корреляционный момент или выборочная ковариация.

Рассчитаем выборочную ковариацию:

$$\text{Cov}(x,y)=1420,69-24,85 \cdot 62,7375=1420,69-1559,0269=-138,3369.$$

Тогда выборочный коэффициент регрессии будет равен:

$$b = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma^2_x} = \frac{-138,336875}{132,4875} = -1,044131.$$

Коэффициент a линейного регрессионного уравнения получим, подставляя в уравнение средние значения факторов x и y :

$$\bar{y} = a + b\bar{x}. \quad (9.20)$$

Откуда можно выразить и коэффициент a :

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (9.21)$$

Оценим коэффициент a .

$$a=62,7375-1,044131 \cdot 24,85=88,684628.$$

Таким образом, линейная регрессионная модель будет выглядеть следующим образом:

$$y=88,684628-1,044131x.$$

Из полученного уравнения регрессии следует, что при увеличении значения фактора x , значение фактора y будет уменьшаться в 1,044131 раз. Таким образом, регрессионную зависимость между исследуемыми факторами следует считать обратной.

После нахождения коэффициентов уравнения линейной регрессионной модели, для определения его пригодности для использования в исследованиях проводится оценка значимости как уравнения в целом, так и отдельных его параметров. Оценка значимости уравнения регрессии сводится к установлению соответствия математической модели, выражающей зависимость между факторами, экспериментальным данным.

9.2.3. Верификация построенной регрессионной модели

Одним из наиболее простых способов проверки качества полученной модели является нахождение средней ошибки аппроксимации.

Средняя ошибка аппроксимации – это среднее отклонение расчетных значений результирующей переменной регрессионного уравнения от фактически

наблюдаемых значений зависимого фактора. Эту оценку можно получить в процентном выражении с помощью следующей формулы:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - y(x_i)}{y_i} \right| \cdot 100\%. \quad (9.22)$$

Воспользуемся предложенной формулой, предварительно рассчитав все значения $y(x_i)$:

$$y(x_1) = 88,684628 - 1,044131x_1 = 88,684628 - 1,044131 \cdot 39,9 = 47,023043;$$

$$y(x_2) = 88,684628 - 1,044131x_2 = 88,684628 - 1,044131 \cdot 17,2 = 70,725248;$$

$$y(x_3) = 88,684628 - 1,044131x_3 = 88,684628 - 1,044131 \cdot 37,1 = 49,946663;$$

$$y(x_4) = 88,684628 - 1,044131x_4 = 88,684628 - 1,044131 \cdot 31,8 = 55,480658;$$

$$y(x_5) = 88,684628 - 1,044131x_5 = 88,684628 - 1,044131 \cdot 10,3 = 77,929883;$$

$$y(x_6) = 88,684628 - 1,044131x_6 = 88,684628 - 1,044131 \cdot 32,9 = 54,332093;$$

$$y(x_7) = 88,684628 - 1,044131x_7 = 88,684628 - 1,044131 \cdot 21,8 = 65,922158;$$

$$y(x_8) = 88,684628 - 1,044131x_8 = 88,684628 - 1,044131 \cdot 7,8 = 80,540258.$$

Полученные значения регрессионной функции от значений фактора x_i занесем в соответственные строки столбца $y(x_i)$ нашей таблицы. Следующий столбец заполним разностями значений фактора y_i и регрессионной функции $y(x_i)$. Последний столбец расчетной таблицы будет содержать значения ошибки аппроксимирующей функции для каждого значения факторного признака. Среднее значение полученных ошибок регрессионной функции и является искомой оценкой. В таблице 2.3 показана полная расчетная таблица.

Таблица 9.3

№	y_i	x_i	y_i^2	$x_i y_i$	x_i^2	$y(x_i)$	$y_i - y(x_i)$	A_i
1	42,5	39,9	1806,25	1695,75	1592,01	47,023043	-4,523043	10,6424541%
2	81,2	17,2	6593,44	1396,64	295,84	70,725248	10,474752	12,8999409%
3	52,3	37,1	2735,29	1940,33	1376,41	49,946663	2,353337	4,4996883%
4	58,2	31,8	3387,24	1850,76	1011,24	55,480658	2,719342	4,6724089%
5	76,2	10,3	5806,44	784,86	106,09	77,929883	-1,729883	2,2701877%
6	48,8	32,9	2381,44	1605,52	1082,41	54,332093	-5,532093	11,3362561%
7	69,9	21,8	4886,01	1523,82	475,24	65,922158	3,977842	5,6907611%
8	72,8	7,8	5299,84	567,84	60,84	80,540258	-7,740258	10,6322225%
Σ	501,9	198,8	32895,95	11365,52	6000,08	501,900004		62,6439%
Ср. знач.	62,7375	24,85	4111,99375	1420,69	750,01	62,737501		7,8305%

Таким образом, средняя ошибка аппроксимации для нашей регрессионной модели составила 7,8305%. На практике можно считать

допустимым предел значений средней ошибки аппроксимации не более 8 – 10%. Значит, полученная парная линейная модель удовлетворяет данному критерию.

Уравнение регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи. Тесноту связи изучаемых явлений для линейных моделей оценивает линейный коэффициент парной корреляции r_{xy} .

Линейное уравнение регрессии для нахождения теоретических значений модели имеет вид:

$$y(x) = a + bx. \quad (9.23)$$

Подставляя значение a из формулы (9.21) в уравнение регрессии (9.23), получим:

$$y(x) = \bar{y} - b\bar{x} + bx$$

или

$$y(x) - \bar{y} = b(x - \bar{x}). \quad (9.24)$$

Представим это уравнение в эквивалентном виде:

$$\frac{y(x) - \bar{y}}{\sigma_y} = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}. \quad (9.25)$$

В этом уравнении величина

$$r_{xy} = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (9.26)$$

показывает, на сколько величин σ_y изменится в среднем y , если x увеличится на σ_x .

Найдем линейный коэффициент парной корреляции для нашего примера:

$$r_{xy} = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 1,044131 \cdot \frac{11,5104}{13,2664935} = 0,905919.$$

Линейный коэффициент изменяется в пределах: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$. Если коэффициент больше нуля, то это отражает прямую зависимость факторов, если меньше нуля, то зависимость факторов обратная.

Обычно в исследованиях связь изучаемых факторов считается высокой, если абсолютное значение r_{xy} близко к единице. Такая оценка является

приемлемой для полученных линейных моделей. Рассчитанный линейный коэффициент парной корреляции показывает высокий уровень связи факторов x и y , что подтверждает приемлемость полученной математической модели.

Еще одной наиболее используемой оценкой значимости уравнения регрессии является F -критерий Фишера. Он состоит в проверке гипотезы H_0 о статистической незначимости уравнения построенной регрессионной модели и найденного показателя тесноты связи r_{xy} . Для этого выполняется сравнение фактического $F_{факт}$ и критического $F_{табл}$ значений F -критерия Фишера.

Расчетное значение $F_{факт}$ для парной регрессионной модели определяется из соотношений значений факторной и остаточной дисперсий, рассчитанных на одну степень свободы:

$$F_{факт} = \frac{\sum_{i=1}^n (y(x_i) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2 / (n-2)}, \quad (9.27)$$

где n – количество значений исследуемых факторов, а $n-2$ – число степеней свободы остаточной суммы квадратов при линейной регрессии.

С использованием линейного коэффициента корреляции формула принимает вид:

$$F_{факт} = \frac{r_{xy}^2 (n-2)}{1 - r_{xy}^2}. \quad (9.28)$$

Найдем расчетное значение критерия $F_{факт}$:

$$F_{факт} = \frac{r_{xy}^2 (n-2)}{1 - r_{xy}^2} = \frac{0,905919^2 (8-2)}{1 - 0,905919^2} = \frac{0,820689 \cdot 6}{0,179311} = 27,46146.$$

Критическое значение F -критерия Фишера $F_{табл}$ – это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости α , то есть вероятности отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно в таблицах критических значений F -критерия Фишера уровень значимости α принимается равным 0,05, реже – 0,01.

Таблица 9.4

**Критические значения F -критерия Фишера при уровне
значимости $\alpha=0,05$**

	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Значение $F_{табл}$ возьмем из ячейки первого столбца (по количеству объясняющих переменных) и шестой (по числу степеней свободы) строки таблицы 2.4 критических значений F -критерия Фишера при уровне значимости $\alpha=0,05$. В нашем случае критическое значение $F_{табл}$ равно 5,99.

Если расчетное значение $F_{факт}$ больше критического значения $F_{табл}$, то H_0 – гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность. В противном случае гипотеза H_0 не отвергается и признается статистическая незначимость и ненадежность модели.

Поскольку расчетное значение $F_{факт}=27,4646$ больше критического $F_{табл}=5,99$, то этот факт указывает на необходимость отклонить гипотезу H_0 о случайной природе оцениваемых характеристик выявленной зависимости исследуемых факторов и признать статистическую значимость и надежность построенной парной линейной регрессионной модели.

Если между явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью нелинейных функций.

9.3. Нелинейные модели парной регрессии

9.3.1. Расчет параметров степенной модели

Рассмотрим *степенную модель* для приведенных выше значений двух социально-криминологических признаков из таблицы 9.1

$$y = ax^b. \quad (9.29)$$

Сведем данную модель к линейной регрессии с ее методами оценивания параметров. Для этого произведем логарифмирование обеих частей указанного уравнения (9.29):

$$\lg y = \lg(ax^b).$$

Используя основные свойства логарифмов, получим:

$$\lg y = \lg a + b \lg x \quad (9.30)$$

Произведя соответствующие замены

$$Y = \lg y, A = \lg a, B = b, X = \lg x, \quad (9.31)$$

получим новое линейное регрессионное уравнение

$$Y = A + BX. \quad (9.32)$$

Находим линейные параметры A и B , как и в предыдущей модели, используя замены (9.32). Для этого строим расчетную таблицу 9.5.

Таблица 9.5

№	Y_i	X_i	Y_i^2	$X_i Y_i$	X_i^2
1	1,628389	1,600973	2,651651	2,607007	2,563114
2	1,909556	1,235528	3,646404	2,359311	1,526531
3	1,718502	1,569374	2,953248	2,696972	2,462934
4	1,764923	1,502427	3,114953	2,651668	2,257287
5	1,881955	1,012837	3,541755	1,906114	1,025839
6	1,688420	1,517196	2,850761	2,561664	2,301883
7	1,844477	1,338456	3,402096	2,468752	1,791466
8	1,862131	0,892095	3,467533	1,661197	0,795833
Σ	14,298353	10,668887	25,628401	18,912685	14,724887
Ср.знач.	1,787294	1,333611	3,20355	2,364086	1,840611

Из данных таблицы получим:

$$\sigma^2_X = 1,840611 - 1,787294 \cdot 1,333611 = 0,062093;$$

$$\sigma^2_Y = 3,20355 - 1,787294 \cdot 1,333611 = 0,00913.$$

Тогда значения средних квадратичных отклонений равны:

$$\sigma_X = 0,249184; \quad \sigma_Y = 0,095552.$$

Рассчитаем выборочную ковариацию:

$$\text{Cov}(X, Y) = 2,364086 - 1,787294 \cdot 1,333611 = -0,019469.$$

Тогда выборочный коэффициент регрессии B будет равен:

$$B = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma^2_X} = \frac{-0,019469}{0,062093} = -0,313546.$$

Коэффициент A линейного регрессионного уравнения получим, подставляя в уравнение (2.21) средние значения факторов X и Y :

$$A = 1,787294 - 0,313546 \cdot 1,333611 = 2,205442.$$

Линейное уравнение $Y = A + BX$ будет выглядеть следующим образом:

$$Y = 2,205442 - 0,313546 X.$$

Вернемся к степенной модели $y = ax^b$, выполнив потенцирование уравнения $Y = A + BX$. В этом случае

$$a = 10^A = 10^{2,205442} = 160,487791,$$

$$b=B=0,313546.$$

тогда искомое уравнение парной регрессии для степенной модели имеет вид:

$$y = 160,487791x^{0,313546}.$$

Оценим качество построенной модели с помощью средней ошибки аппроксимации. Для этого построим вспомогательную таблицу 9.6.

Таблица 9.6

№	y_i	x_i	$y(x_i)$	$y_i - y(x_i)$	A_i
1	42,5	39,9	50,520001	-8,020001	18,870591%
2	81,2	17,2	65,772901	15,427099	18,998890%
3	52,3	37,1	51,685782	0,614218	1,174413%
4	58,2	31,8	54,245284	3,954716	6,795045%
5	76,2	10,3	77,2451	-1,045100	1,371522%
6	48,8	32,9	53,669963	-4,869963	9,979432%
7	69,9	21,8	61,062463	8,837537	12,643114%
8	72,8	7,8	84,280927	-11,480927	15,770504%
Σ	501,9	198,8	498,482421		85,603500%
Ср. знач.	62,7375	24,85	62,310303		10,700400%

Согласно формуле (9.22)

$$\bar{A} = \frac{85,603500\%}{8} = 10,7004\%.$$

Так как средняя ошибка аппроксимации превышает 10%, то данная модель считается непригодной для дальнейшего исследования. Поэтому оценивать модель другими критериями нет смысла.

9.3.2. Показательная регрессионная модель

Рассмотрим *показательную модель* для данных таблицы 2.1

$$y = ab^x. \quad (9.33)$$

Сведем данную модель к линейной регрессии. Для этого произведем логарифмирование обеих частей указанного уравнения (9.34):

$$\lg y = \lg(ab^x).$$

Используя основные свойства логарифмов получим:

$$\lg y = \lg a + x \lg b \quad (9.34)$$

Произведя соответствующие замены

$$Y = \lg y, \quad A = \lg a, \quad B = \lg b, \quad X = x, \quad (9.35)$$

получим новое линейное регрессионное уравнение

$$Y = A + BX. \quad (9.36)$$

Таблица 9.7

№	Y _i	X _i	Y _i ²	X _i Y _i	X _i ²
1	1,628389	39,9	2,651651	64,972718	1592,01
2	1,909556	17,2	3,646404	32,844364	295,84
3	1,718502	37,1	2,953248	63,756413	1376,41
4	1,764923	31,8	3,114953	56,124551	1011,24
5	1,881955	10,3	3,541755	19,384136	106,09
6	1,688420	32,9	2,850761	55,549012	1082,41
7	1,844477	21,8	3,402096	40,209602	475,24
8	1,862131	7,8	3,467533	14,524625	60,84
Σ	14,298353	198,8	25,628401	347,365421	6000,08
Ср. знач.	1,787294	24,85	3,20355	43,420678	750,01

Найдем линейные параметры A и B , как и в линейной модели, используя замены (9.36). Для этого строим расчетную таблицу 9.7.

Из данных таблицы получим:

$$\sigma^2_X = 750,01 - 617,5225 = 132,4875;$$

$$\sigma^2_Y = 3,20355 - 3,19442 = 0,00913.$$

Тогда значения средних квадратичных отклонений равны:

$$\sigma_X = 11,510321; \quad \sigma_Y = 0,095552.$$

Рассчитаем выборочную ковариацию:

$$\text{Cov}(X, Y) = 43,420678 - 1,787294 \cdot 24,85 = -0,993578.$$

Тогда выборочный коэффициент регрессии B будет равен:

$$B = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma^2_X} = \frac{-0,993578}{132,4875} = -0,007499.$$

Коэффициент A линейного регрессионного уравнения получим, подставляя в уравнение (2.21) средние значения факторов X и Y :

$$A = 1,787294 + 0,007499 \cdot 24,85 = 1,973644.$$

Таким образом, линейное уравнение $Y = A + BX$ будет выглядеть следующим образом:

$$Y = 1,973644 - 0,007499 X.$$

Вернемся к показательной модели $y = ab^x$, выполнив потенцирование уравнения $Y = A + BX$. В этом случае

$$a = 10^A = 10^{1,973644} = 94,111783,$$

$$b = 10^B = 10^{-0,007499} = 0,982881,$$

тогда искомое уравнение парной регрессии для показательной модели имеет вид:

$$y = 94,111783 \cdot 0,982881^x.$$

Оценим качество построенной модели с помощью средней ошибки аппроксимации. Для этого построим вспомогательную таблицу 9.8.

Таблица 9.8

№	y_i	x_i	$y(x_i)$	$y_i - y(x_i)$	A_i	$(y_i - y(x_i))^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	42,5	39,9	47,25323	-4,753230	11,184071%	22,593195	409,556406
2	81,2	17,2	69,929459	11,270541	13,879977%	127,025094	340,863906
3	52,3	37,1	49,593969	2,706031	5,174055%	7,322604	108,941406
4	58,2	31,8	54,346789	3,853211	6,620637%	14,847235	20,588906
5	76,2	10,3	78,77777	-2,577770	3,382900%	6,644898	181,238906
6	48,8	32,9	53,32427	-4,524270	9,271045%	20,469019	194,253906
7	69,9	21,8	64,589882	5,310118	7,596735%	28,197353	51,301406
8	72,8	7,8	82,252921	-9,452921	12,984782%	89,357715	101,253906
Σ	501,9	198,8	500,068290		70,094200%	316,457114	1407,998750
Ср. знач.	62,7375	24,85	62,508536		8,761800%		

Согласно формуле (9.22)

$$\bar{A} = \frac{70,0942\%}{8} = 8,7618\%.$$

Так как средняя ошибка аппроксимации не превышает 10%, то данная модель считается пригодной для дальнейшего исследования.

Тесноту связи наблюдаемых факторов для нелинейных моделей оценивает индекс парной корреляции ρ_{xy} . Он находится по формуле:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (9.37)$$

Найдем индекс парной корреляции для нашего примера:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{316,457114}{1407,99875}} = \sqrt{0,775243} = 0,880479.$$

Индекс парной корреляции изменяется в пределах:

$$0 \leq \rho_{xy} \leq 1.$$

Обычно в исследованиях связь изучаемых факторов считается высокой, если значение ρ_{xy} близко к единице. Такая оценка является приемлемой для всех нелинейных моделей.

Рассчитанный индекс парной корреляции показывает высокий уровень связи факторов x и y , что подтверждает приемлемость полученной математической модели.

Расчетное значение $F_{\text{факт}}$ критерия Фишера найдем аналогично формуле (2.28) для линейных моделей:

$$F_{\text{факт}} = \frac{\rho_{xy}^2 (n-2)}{1 - \rho_{xy}^2} = \frac{0,775243(8-2)}{1 - 0,775243} = 20,695537.$$

В нашем случае критическое значение $F_{\text{табл}}$ равно 5,99 (табл. 9.4).

Поскольку расчетное значение $F_{\text{факт}}=20,695537$ больше критического $F_{\text{табл}}=5,99$, то этот факт указывает на необходимость отклонить гипотезу H_0 о случайной природе оцениваемых характеристик выявленной зависимости исследуемых факторов и признать статистическую значимость и надежность построенной показательной регрессионной модели.

9.3.3. Гиперболическая модель парной регрессии

Рассмотрим *гиперболическую модель* для факторов, представленных в таблице 2.1.

$$y = a + \frac{b}{x}. \quad (9.38)$$

Сведем данную модель к линейной регрессии с ее методами оценивания параметров. Для этого произведем следующие замены:

$$Y = y, A = a, B = b, X = \frac{1}{x}. \quad (9.39)$$

Получим новое линейное регрессионное уравнение

$$Y = A + BX. \quad (9.40)$$

Найдем линейные параметры A и B , как и в предыдущей модели, используя замены (9.40). Для этого строим расчетную таблицу:

Таблица 9.9

№	Y _i	X _i	Y _i ²	X _i Y _i	X _i ²
1	42,5	0,025063	1806,25	1,065163	0,000628
2	81,2	0,058140	6593,44	4,720930	0,003380
3	52,3	0,026954	2735,29	1,409704	0,000727
4	58,2	0,031447	3387,24	1,830189	0,000989
5	76,2	0,097087	5806,44	7,398058	0,009426
6	48,8	0,030395	2381,44	1,483283	0,000924
7	69,9	0,045872	4886,01	3,206422	0,002104
8	72,8	0,128205	5299,84	9,333333	0,016437
Σ	501,9	0,443162	32895,95	30,447082	0,034614
Ср. знач.	62,7375	0,055395	4111,99375	3,805885	0,004327

Из данных таблицы получим:

$$\sigma^2_X = 0,004327 - 0,003069 = 0,001258; \quad \sigma^2_Y = 4111,99375 - 3935,993906 = 175,999844.$$

Тогда значения средних квадратичных отклонений равны:

$$\sigma_X = 0,035474; \quad \sigma_Y = 13,266493.$$

Рассчитаем выборочную ковариацию:

$$\text{Cov}(X, Y) = 3,805885 - 62,7375 \cdot 0,055395 = 0,330541.$$

Тогда коэффициенты регрессии B и A будут равны:

$$B = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma^2_X} = \frac{0,330541}{0,001258} = 262,751192.$$

$$A = 62,7375 - 262,751192 \cdot 0,055395 = 48,182398.$$

Линейное уравнение $Y = A + BX$ будет выглядеть следующим образом:

$$Y = 48,182398 + 262,751192 X.$$

Вернемся к гиперболической модели $y = a + \frac{b}{x}$, выполнив обратные преобразования. Получим $a = A = 48,182398$, $b = B = 262,751192$, тогда искомое уравнение регрессии для гиперболической модели имеет вид:

$$y = 48,182398 + \frac{262,751192}{x}.$$

Согласно формуле (9.22) $\bar{A} = 13,009\%$. Так как средняя ошибка аппроксимации превышает 10%, то данная модель считается непригодной для дальнейшего исследования и оценивать модель другими критериями нет смысла.

Глава 10. Многомерный статистический анализ

Рассмотренная ранее парная регрессионная модель может дать хороший результат, если при построении модели выбрать единственный, безусловно доминирующий, фактор, а влиянием других факторов, воздействующих на объект исследования можно пренебречь. Однако многие социально-криминологические процессы зависят от целого ряда факторов различной природы. Таковыми могут быть экономические, социальные, географические, политические и другие процессы и явления. Степени влияния каждого из них на изучаемый объект могут быть различными, но на практике пренебрегать этими факторами в исследовании нельзя, так как в интегральной совокупности эффект их воздействия на результативный признак будет значимым.

Для того чтобы иметь правильное представление о влиянии каждого объясняющего фактора на исследуемый объект, необходимо изучить корреляцию всех признаков в совокупности. В связи с этим часто возникает задача исследования зависимости результирующего фактора y от нескольких объясняющих признаков $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$. Такая задача решается с помощью множественного регрессионного анализа.

10.1. Понятие множественной регрессии

Введя в регрессионное уравнение одну результирующую переменную y и p объясняющих переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$, получим множественную регрессионную модель:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p).$$

В настоящее время множественная регрессия – один из наиболее распространенных методов в моделировании социально-экономических явлений. Основная цель множественного регрессионного анализа – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также их совокупное воздействие на моделируемый показатель.

10.1.1. Спецификация модели множественной регрессии

Построение уравнения множественной регрессии начинается с решения вопроса о спецификации модели. Для этого необходимо осуществить отбор объясняющих факторов и выбрать вида уравнения.

Включение в уравнение множественной регрессии того или иного набора факторов связано, прежде всего, с представлением исследователя о природе взаимосвязи моделируемого показателя с другими явлениями и процессами. Факторы, включаемые в уравнение множественной регрессионной модели, должны отвечать следующим требованиям:

1. Факторы должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность, то есть ввести ранговую систему характеристик признака.

2. Объясняющие факторы не должны быть интеркоррелированы. Это требование означает, что они не должны находиться в точной функциональной связи. Если между признаками существует высокая корреляция, то невозможно определить их изолированное влияние на результативный показатель и параметры уравнения регрессии окажутся неинтерпретируемыми.

Теоретически регрессионная модель позволяет учесть любое количество факторов, однако практически в этом нет необходимости. Первоначальный отбор факторов производится на основе качественного теоретического анализа изучаемых явлений. Однако такой анализ не позволяет должным образом определить качественную взаимосвязь рассматриваемых признаков, и поэтому их отбор происходит в два этапа. На первом этапе подбираются факторы исходя из сущности проблемы, а на втором – на основе рассчитанных показателей корреляции исключаются незначащие и дублирующие факторы.

Наибольшие трудности в использовании аппарата множественной регрессии возникают при наличии мультиколлинеарности факторов, когда два и более факторов связаны между собой линейной зависимостью. Наличие мультиколлинеарных факторов может привести к ненадежной оценке

распределения влияния отдельных факторов на исследуемый объект. В такой модели будет затруднена интерпретация параметров модели, что делает модель непригодной для анализа и прогнозирования.

10.1.2. Виды уравнений множественной регрессии

Как и в парной регрессии, множественная регрессионная модель строится с использованием различных видов уравнений: линейных и нелинейных. В силу четкой интерпретации параметров регрессии наиболее широко используются линейная и степенная функции.

Линейную множественную модель регрессионной зависимости результирующего фактора y и p объясняющих факторов $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ можно представить в виде линейного уравнения:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots + b_p x_p \quad (10.1)$$

Коэффициенты $b_1, b_2, b_3, \dots, b_p$ при неизвестных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ характеризуют среднее изменение результата с изменением соответствующего фактора на единицу при неизменном значении других факторов, закрепленных на среднем уровне.

В степенной функции множественной регрессионной модели

$$y = b_0 \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot x_3^{b_3} \cdot \dots \cdot x_p^{b_p} \quad (10.2)$$

коэффициенты показывают, на сколько процентов изменяется в среднем результат с изменением соответствующего фактора на 1% при неизменности других факторов.

Возможно использование и других функций нескольких переменных, для построения множественной регрессионной модели:

экспоненциальная модель

$$y = e^{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots + b_p x_p}; \quad (10.3)$$

гиперболическая модель

$$y = \frac{1}{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots + b_p x_p}. \quad (10.4)$$

Для построения модели можно использовать практически любые функции, однако, чем сложнее функции, тем менее интерпретируемы ее

параметры. Если число наблюдений факторов невелико, то увеличение числа параметров функции приведет к их статистической незначимости и соответственно потребует упрощения вида функции. Если один и тот же фактор вводится в регрессию в разных степенях, то каждая степень рассматривается как самостоятельный фактор. Например, для модели построенной на полиноме второй степени потребуется не менее 30-35 наблюдений, поэтому полиномиальные модели высоких порядков используются очень редко.

10.2. Построение линейной множественной регрессионной модели

Включение в регрессионную модель новых объясняющих переменных усложняет получаемые формулы и вычисления. Это приводит к целесообразности использования матричной формы записей и вычислений.

10.2.1. Матричная форма записи

Обозначим i -е наблюдение результирующей переменной y_i , а значения соответствующих объясняющих переменных – $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ip}$. Тогда для оценки параметров множественной линейной регрессионной модели (10.1)

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_px_p,$$

учитывая введенные обозначения, построим следующие матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2p} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{матрица значений объясняющих факторов } x_1, x_2, x_3, \dots, x_p;$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \dots & x_{n2} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \dots & x_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1p} & x_{2p} & x_{3p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{транспонированная матрица } X;$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Отметим, что первый столбец матрицы X содержит только единицы, а начиная со второго столбца в ней размещены значения объясняющих факторов $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$. Таким образом, матрица X будет состоять из n строк и $p+1$ столбцов, где n – это количество значений каждого фактора, p – количество объясняющих факторов. Матрица X' представляет собой транспонированную матрицу X , в которой строки и столбцы поменяны местами, так что новая матрица X' будет содержать $p+1$ строк и n столбцов. Матрица Y содержит единственный столбец из n значений результирующего фактора y , а матрица B – столбец из $p+1$ коэффициентов уравнения множественной линейной регрессионной модели.

Для оценки элементов матрицы B строится система нормальных уравнений, решение которой позволяет получить оценки параметров регрессии:

[illegible]

Ее решение может быть осуществлено методом Крамера, однако, используя матричный метод решения этой системы можно использовать следующую формулу, отвечающую требованиям метода наименьших квадратов:

$$B=(X'X)^{-1}X'Y. \quad (10.6)$$

Рассмотрим пример. Имеются данные о значениях четырех факторов Y , X_1 , X_2 и X_3 по двадцати исследуемым регионам. Полагая, что между изучаемыми факторами существует линейная корреляционная зависимость, необходимо найти ее аналитическое выражение и оценить модель. Значения наблюдений изучаемых факторов отражены в таблице 10.1.

Таблица 10.1

№	y_i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}
1	45,5	21,1	23,4	134,3
2	107,8	82,1	50,5	162,8
3	71,7	28,1	47,8	73,7
4	154,8	102,6	90	100,3
5	167,5	91,8	119,3	106,5
6	149,4	128,1	54,5	79,1
7	204,5	175,4	82,9	76,1
8	206,3	201,5	53,9	20,5
9	154,4	130	58,1	62,1
10	167,6	135	75,3	108
11	139	120,3	50,2	105,4
12	117,4	106,2	39	160
13	101,3	32,9	87,7	113,7
14	141	139,5	26,7	28
15	226,5	185,4	109,3	146,2
16	129,9	65,4	91,3	77
17	123,7	104,3	46,2	117,8
18	224,9	204,2	83,4	93,4
19	207,6	192,2	71,9	99,2
20	99,1	64,3	51,6	104,3

Для построения линейной множественной регрессионной модели $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ составим матрицы X , X' , Y и B .

По условию нашей задачи количество объясняющих факторов $p = 3$, а количество наблюдаемых значений факторов $n = 20$, следовательно, матрица X будет состоять из четырех столбцов и двадцати строк. Первый столбец матрицы X заполняем единицами, второй, третий и четвертый столбцы – значениями факторов x_1 , x_2 , x_3 соответственно. Матрица Y будет содержать столбец из $n = 20$ значений результирующего фактора y :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 21,1 & 23,4 & 134,3 \\ 1 & 82,1 & 50,5 & 162,8 \\ 1 & 28,1 & 47,8 & 73,7 \\ 1 & 102,6 & 90 & 100,3 \\ 1 & 91,8 & 119,3 & 106,5 \\ 1 & 128,1 & 54,5 & 79,1 \\ 1 & 175,4 & 82,9 & 76,1 \\ 1 & 201,5 & 53,9 & 20,5 \\ 1 & 130 & 58,1 & 62,1 \\ 1 & 135 & 75,3 & 108 \\ 1 & 120,3 & 50,2 & 105,4 \\ 1 & 106,2 & 39 & 160 \\ 1 & 32,9 & 87,7 & 113,7 \\ 1 & 139,5 & 26,7 & 28 \\ 1 & 185,4 & 109,3 & 146,2 \\ 1 & 65,4 & 91,3 & 77 \\ 1 & 104,3 & 46,2 & 117,8 \\ 1 & 204,2 & 83,4 & 93,4 \\ 1 & 192,2 & 71,9 & 99,2 \\ 1 & 64,3 & 51,6 & 104,3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 45,5 \\ 107,8 \\ 71,7 \\ 154,8 \\ 167,5 \\ 149,4 \\ 204,5 \\ 206,3 \\ 154,4 \\ 167,6 \\ 139 \\ 117,4 \\ 101,3 \\ 141 \\ 226,5 \\ 129,9 \\ 123,7 \\ 224,9 \\ 207,6 \\ 99,1 \end{pmatrix}.$$

Для получения матрицы X' необходимо транспонировать матрицу X . Таким образом, строки и столбцы матрицы X в новой матрице меняются местами:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 21,1 & 82,1 & 28,1 & 102,6 & 91,8 & 128,1 & \dots & 192,2 & 64,3 \\ 23,4 & 50,5 & 47,8 & 90 & 119,3 & 54,5 & \dots & 71,9 & 51,6 \\ 134,3 & 162,8 & 73,7 & 100,3 & 106,5 & 79,1 & \dots & 99,2 & 104,3 \end{pmatrix}.$$

Наконец, матрица параметров B , будет содержать искомые коэффициенты линейного регрессионного уравнения. Она будет состоять из

одного столбца и четырех ($p+1=4$) строк: $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$

10.2.2. Оценка параметров множественной регрессионной модели

Все вычисления по формуле (10.6) лучше выполнять, разбив их на четыре элементарных действия, предварительно заполнив расчетную таблицу 10.2.

В первый столбец расчетной таблицы вводим номера регионов. Вторым, третьим, четвертым и пятым столбцы заполняем значениями факторов u_i , x_{i1} , x_{i2} , x_{i3} данными нам в условии. В шестой, седьмой, восьмой и девятый столбцы вносим квадраты наблюдаемых значений u_i^2 , x_{i1}^2 , x_{i2}^2 , x_{i3}^2 . Десятый, одиннадцатый и двенадцатый столбцы будут содержать всевозможные произведения значений объясняющих факторов $x_{i1} x_{i2}$, $x_{i1} x_{i3}$, $x_{i2} x_{i3}$, а последние три столбца – произведения $u_i x_{i1}$, $u_i x_{i2}$, $u_i x_{i3}$. Две нижних строки таблицы представляют собой сумму и среднее арифметическое значение каждого расчетного столбца.

1) Найдем произведение матриц $A=X'X$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 21,1 & 82,1 & 28,1 & 102,6 & 91,8 & 128,1 & \dots & 192,2 & 64,3 \\ 23,4 & 50,5 & 47,8 & 90 & 119,3 & 54,5 & \dots & 71,9 & 51,6 \\ 134,3 & 162,8 & 73,7 & 100,3 & 106,5 & 79,1 & \dots & 99,2 & 104,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 21,1 & 23,4 & 134,3 \\ 1 & 82,1 & 50,5 & 162,8 \\ 1 & 28,1 & 47,8 & 73,7 \\ 1 & 102,6 & 90 & 100,3 \\ 1 & 91,8 & 119,3 & 106,5 \\ 1 & 128,1 & 54,5 & 79,1 \\ 1 & 175,4 & 82,9 & 76,1 \\ 1 & 201,5 & 53,9 & 20,5 \\ 1 & 130 & 58,1 & 62,1 \\ 1 & 135 & 75,3 & 108 \\ 1 & 120,3 & 50,2 & 105,4 \\ 1 & 106,2 & 39 & 160 \\ 1 & 32,9 & 87,7 & 113,7 \\ 1 & 139,5 & 26,7 & 28 \\ 1 & 185,4 & 109,3 & 146,2 \\ 1 & 65,4 & 91,3 & 77 \\ 1 & 104,3 & 46,2 & 117,8 \\ 1 & 204,2 & 83,4 & 93,4 \\ 1 & 192,2 & 71,9 & 99,2 \\ 1 & 64,3 & 51,6 & 104,3 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 2310,4 & 1313 & 1968,4 \\ 2310,4 & 328426,22 & 158282,25 & 215193,64 \\ 1313 & 158282,25 & 99158,28 & 131090,54 \\ 1968,4 & 215193,64 & 131090,54 & 220406,86 \end{pmatrix}.$$

Таблица 10.2

№	y_i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	y_i^2	x_{i1}^2	x_{i2}^2	x_{i3}^2	$x_{i1} x_{i2}$	$x_{i1} x_{i3}$	$x_{i2} x_{i3}$	$y_i x_{i1}$	$y_i x_{i2}$	$y_i x_{i3}$
1	45,5	21,1	23,4	134,3	2070,25	445,21	547,56	18036,49	493,74	2833,73	3142,62	960,05	1064,7	6110,65
2	107,8	82,1	50,5	162,8	11620,84	6740,41	2550,25	26503,84	4146,05	13365,88	8221,4	8850,38	5443,9	17549,84
3	71,7	28,1	47,8	73,7	5140,89	789,61	2284,84	5431,69	1343,18	2070,97	3522,86	2014,77	3427,26	5284,29
4	154,8	102,6	90	100,3	23963,04	10526,76	8100	10060,09	9234	10290,78	9027	15882,48	13932	15526,44
5	167,5	91,8	119,3	106,5	28056,25	8427,24	14232,49	11342,25	10951,74	9776,7	12705,45	15376,5	19982,75	17838,75
6	149,4	128,1	54,5	79,1	22320,36	16409,61	2970,25	6256,81	6981,45	10132,71	4310,95	19138,14	8142,3	11817,54
7	204,5	175,4	82,9	76,1	41820,25	30765,16	6872,41	5791,21	14540,66	13347,94	6308,69	35869,3	16953,05	15562,45
8	206,3	201,5	53,9	20,5	42559,69	40602,25	2905,21	420,25	10860,85	4130,75	1104,95	41569,45	11119,57	4229,15
9	154,4	130	58,1	62,1	23839,36	16900	3375,61	3856,41	7553	8073	3608,01	20072	8970,64	9588,24
10	167,6	135	75,3	108	28089,76	18225	5670,09	11664	10165,5	14580	8132,4	22626	12620,28	18100,8
11	139	120,3	50,2	105,4	19321	14472,09	2520,04	11109,16	6039,06	12679,62	5291,08	16721,7	6977,8	14650,6
12	117,4	106,2	39	160	13782,76	11278,44	1521	25600	4141,8	16992	6240	12467,88	4578,6	18784
13	101,3	32,9	87,7	113,7	10261,69	1082,41	7691,29	12927,69	2885,33	3740,73	9971,49	3332,77	8884,01	11517,81
14	141	139,5	26,7	28	19881	19460,25	712,89	784	3724,65	3906	747,6	19669,5	3764,7	3948
15	226,5	185,4	109,3	146,2	51302,25	34373,16	11946,49	21374,44	20264,22	27105,48	15979,66	41993,1	24756,45	33114,3
16	129,9	65,4	91,3	77	16874,01	4277,16	8335,69	5929	5971,02	5035,8	7030,1	8495,46	11859,87	10002,3
17	123,7	104,3	46,2	117,8	15301,69	10878,49	2134,44	13876,84	4818,66	12286,54	5442,36	12901,91	5714,94	14571,86
18	224,9	204,2	83,4	93,4	50580,01	41697,64	6955,56	8723,56	17030,28	19072,28	7789,56	45924,58	18756,66	21005,66
19	207,6	192,2	71,9	99,2	43097,76	36940,84	5169,61	9840,64	13819,18	19066,24	7132,48	39900,72	14926,44	20593,92
20	99,1	64,3	51,6	104,3	9820,81	4134,49	2662,56	10878,49	3317,88	6706,49	5381,88	6372,13	5113,56	10336,13
Сумма:	2939,9	2310,4	1313	1968,4	479703,67	328426,22	99158,28	220406,86	158282,25	215193,64	131090,54	390138,82	206989,48	280132,73
Ср.зн.	146,995	115,52	65,65	98,42	23985,1835	16421,311	4957,914	11020,343	7914,1125	10759,682	6554,527	19506,941	10349,474	14006,6365

Матрицу $A=X'X$ легко получить из расчетной таблицы 10.2, учитывая, что

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1+1+1+1+1+1+\dots+1+1=20; & a_{12} &= a_{21} = \sum_{i=1}^{20} x_{i1} = 2310,4; \\ a_{13} &= a_{31} = \sum_{i=1}^{20} x_{i2} = 1313; & a_{14} &= a_{41} = \sum_{i=1}^{20} x_{i3} = 1968,4; \\ a_{22} &= \sum_{i=1}^{20} x_{i1}^2 = 328426,22; & a_{23} &= a_{32} = \sum_{i=1}^{20} x_{i1}x_{i2} = 158282,25; \\ a_{24} &= a_{42} = \sum_{i=1}^{20} x_{i1}x_{i3} = 215193,64; & a_{33} &= \sum_{i=1}^{20} x_{i2}^2 = 99158,28; \\ a_{34} &= a_{43} = \sum_{i=1}^{20} x_{i2}x_{i3} = 131090,54; & a_{44} &= \sum_{i=1}^{20} x_{i3}^2 = 220406,86. \end{aligned}$$

2) Для нахождения матрицы обратной $X'X$ необходимо вычислить алгебраические дополнения A_{ij} всех ее элементов и определитель $\det(A)=\det(X'X)$.

Найдем алгебраические дополнения матрицы $X'X$. Заметим, что $A_{12} = A_{21}$, $A_{13}=A_{31}$, $A_{14}=A_{41}$, $A_{23}=A_{32}$, $A_{24}=A_{42}$, $A_{34}=A_{43}$. В силу симметричности матрицы $X'X$ достаточно найти только десять алгебраических дополнений.

$$A_{11}=(-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 328426,22 & 158282,25 & 215193,64 \\ 158282,25 & 99158,28 & 131090,54 \\ 215193,64 & 131090,54 & 220406,86 \end{vmatrix} = 350366308663336;$$

$$A_{12}=A_{21}=(-1)^{1+2} \cdot M_{12} = - \begin{vmatrix} 2310,4 & 158282,25 & 215193,64 \\ 1313 & 99158,28 & 131090,54 \\ 1968,4 & 131090,54 & 220406,86 \end{vmatrix} = -864900387655;$$

$$A_{13}=A_{31}=(-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2310,4 & 328426,22 & 215193,64 \\ 1313 & 158282,25 & 131090,54 \\ 1968,4 & 215193,64 & 220406,86 \end{vmatrix} = -1115808241711;$$

$$A_{14}=A_{41}=(-1)^{1+4} \cdot M_{14} = - \begin{vmatrix} 2310,4 & 328426,22 & 158282,25 \\ 1313 & 158282,25 & 99158,28 \\ 1968,4 & 215193,64 & 131090,54 \end{vmatrix} = -1620948070191;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 20 & 1313 & 1968,4 \\ 1313 & 99158,28 & 131090,54 \\ 1968,4 & 131090,54 & 220406,86 \end{vmatrix} = 6844999605;$$

$$A_{23}=A_{32}=(-1)^{2+3} \cdot M_{23} = - \begin{vmatrix} 20 & 2310,4 & 1968,4 \\ 1313 & 158282,25 & 131090,54 \\ 1968,4 & 215193,64 & 220406,86 \end{vmatrix} = -3978678240;$$

$$A_{24}=A_{42}=(-1)^{2+4} \cdot M_{24} = \begin{vmatrix} 20 & 2310,4 & 1313 \\ 1313 & 158282,25 & 99158,28 \\ 1968,4 & 215193,64 & 131090,54 \end{vmatrix} = 3407501116;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 20 & 2310,4 & 1968,4 \\ 2310,4 & 328426,22 & 215193,64 \\ 1968,4 & 215193,64 & 220406,86 \end{vmatrix} = 29853185480;$$

$$A_{34}=A_{43}=(-1)^{3+4} \cdot M_{34} = - \begin{vmatrix} 20 & 2310,4 & 1313 \\ 2310,4 & 328426,22 & 158282,25 \\ 1968,4 & 215193,64 & 131090,54 \end{vmatrix} = -3906080824;$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4} \cdot M_{44} = \begin{vmatrix} 20 & 2310,4 & 1313 \\ 2310,4 & 328426,22 & 158282,25 \\ 1313 & 158282,25 & 99158,28 \end{vmatrix} = 5075673109.$$

Разложим определитель матрицы $A=X'X$ по первому столбцу:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 20 & 2310,4 & 1313 & 1968,4 \\ 2310,4 & 328426,22 & 158282,25 & 215193,64 \\ 1313 & 158282,25 & 99158,28 & 131090,54 \\ 1968,4 & 215193,64 & 131090,54 & 220406,86 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^4 a_{i1} A_{i1} = \\ &= 20 \cdot 350366308663336 + 2310,4 \cdot (-864900387655) + \\ &+ 1313 \cdot (-1115808241711) + 1968,4 \cdot (-1620948070191) = 353329914899929. \end{aligned}$$

Тогда матрица $(X'X)^{-1}$ будет выглядеть следующим образом:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{35332991489929} \begin{pmatrix} 35036630863336 & -86490038765 & -111580824711 & -1620948070191 \\ -86490038765 & 6844999605 & -3978678240 & 3407501116 \\ -111580824711 & -3978678240 & 29853185480 & -3906080824 \\ -1620948070191 & 3407501116 & -3906080824 & 5075673109 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим произведение матриц $X'Y$:

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 21,1 & 82,1 & 28,1 & 102,6 & 91,8 & 128,1 & \dots & 192,2 & 64,3 \\ 23,4 & 50,5 & 47,8 & 90 & 119,3 & 54,5 & \dots & 71,9 & 51,6 \\ 134,3 & 162,8 & 73,7 & 100,3 & 106,5 & 79,1 & \dots & 99,2 & 104,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45,5 \\ 107,8 \\ 71,7 \\ 154,8 \\ 167,5 \\ \vdots \\ 207,6 \\ 99,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2939,9 \\ 390138,82 \\ 206989,48 \\ 280132,73 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $X'Y$ также можно получить из расчетной таблицы 10.2, учитывая, что

ее первый элемент – это $\sum_{i=1}^{20} y_i = 2939,9$, второй элемент – сумма произведений

вида $\sum_{i=1}^{20} x_{i1}y_i = 390138,82$, третий элемент – сумма произведений

$\sum_{i=1}^{20} x_{i2}y_i = 206989,48$ и четвертый элемент – сумма произведений

$\sum_{i=1}^{20} x_{i3}y_i = 280132,73$.

4) Вычислим произведение матриц $(X'X)^{-1}$ и $X'Y$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y =$$

$$= \frac{1}{35332991489929} \begin{pmatrix} 35036630863336 & -86490038765 & -111580824711 & -1620948070191 \\ -86490038765 & 6844999605 & -3978678240 & 3407501116 \\ -111580824711 & -3978678240 & 29853185480 & -3906080824 \\ -1620948070191 & 3407501116 & -3906080824 & 5075673109 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 2939,9 \\ 390138,82 \\ 206989,48 \\ 280132,73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21,423372 \\ 0,732424 \\ 0,714552 \\ -0,060439 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получив параметры регрессии, построим множественную линейную модель:

$$y = 21,423372 + 0,732424x_1 + 0,714552x_2 - 0,060439x_3.$$

10.3. Верификация множественной модели

После того как найдено уравнение множественной линейной регрессии, для определения его пригодности, как и в случае парной регрессии, проводится оценка значимости как уравнения в целом, так и отдельных его параметров. Оценка значимости уравнения регрессии сводится к установлению соответствия математической модели, выражающей зависимость между факторами, экспериментальным данным.

10.3.1. Средняя ошибка аппроксимации

Средняя ошибка аппроксимации – это среднее отклонение расчетных значений результирующей переменной регрессионного уравнения от фактически наблюдаемых значений зависимого фактора. Эту оценку можно получать, как и в случае парной регрессии, с помощью формулы (10.22):

В таблице 10.3 рассчитаем значения аппроксимирующей функции. Полученные значения регрессионной функции от значений факторов x_{i1} , x_{i2} , и x_{i3} заносятся в соответствующие строки столбца $y(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ нашей таблицы. Следующий столбец заполняется разностями значений фактора y_i и регрессионной функции $y(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$. Последний столбец расчетной таблицы будет содержать значения ошибки аппроксимирующей функции для каждого значения факторного признака. Среднее значение полученных ошибок регрессионной функции и является искомой оценкой. В таблице 10.3 показан расчет средней ошибки аппроксимации.

Таблица 10.3

№	y _i	x _{i1}	x _{i2}	x _{i3}	y(x _{i1} , x _{i2} , x _{i3})	y _i – y(x _{i1} , x _{i2} , x _{i3})	A _i
1	45,5	21,1	23,4	134,3	50,545882	-5,045882	11,089851%
2	107,8	82,1	50,5	162,8	114,751332	-6,951332	6,448360%
3	71,7	28,1	47,8	73,7	70,720590	0,979410	1,365984%
4	154,8	102,6	90	100,3	153,669461	1,130539	0,730322%
5	167,5	91,8	119,3	106,5	170,612118	-3,112118	1,857981%
6	149,4	128,1	54,5	79,1	149,179654	0,220346	0,147487%
7	204,5	175,4	82,9	76,1	205,869355	-1,369355	0,669611%
8	206,3	201,5	53,9	20,5	204,009767	2,290233	1,110147%
9	154,4	130	58,1	62,1	153,602987	0,797013	0,516200%
10	167,6	135	75,3	108	171,072433	-3,472433	2,071857%
11	139	120,3	50,2	105,4	143,047444	-4,047444	2,911830%
12	117,4	106,2	39	160	121,773887	-4,373887	3,725628%
13	101,3	32,9	87,7	113,7	106,572666	-5,272666	5,205001%
14	141	139,5	26,7	28	136,069141	4,930859	3,497063%
15	226,5	185,4	109,3	146,2	229,797363	-3,297363	1,455789%
16	129,9	65,4	91,3	77	131,770288	-1,870288	1,439790%
17	123,7	104,3	46,2	117,8	125,786947	-2,086947	1,687103%
18	224,9	204,2	83,4	93,4	226,232552	-1,332552	0,592509%
19	207,6	192,2	71,9	99,2	210,453018	-2,853018	1,374286%
20	99,1	64,3	51,6	104,3	26,032638	73,067362	73,730940%
Сумма:	2939,9	2310,4	1313	1968,4	2901,569525		121,627742%
Ср. знач.	146,995	115,52	65,65	98,42	145,078476		6,081400%

Таким образом, средняя ошибка аппроксимации для нашей регрессионной модели составила 6,0814%. Следовательно, полученная парная линейная модель вполне удовлетворяет данному критерию.

10.3.2. Стандартизованный коэффициент регрессии

На практике часто бывает необходимо сравнение влияния на зависимую переменную различных объясняющих переменных, когда последние выражаются разными единицами измерения. В этом случае используют стандартизованные коэффициенты регрессии и коэффициенты эластичности.

Стандартизованный коэффициент регрессии показывает, на сколько величин σ_y изменится в среднем зависимая переменная y при увеличении только j -той объясняющей переменной на σ_{x_j} . Стандартизованный коэффициент регрессии находится по формуле:

$$b'_j = b_j \cdot \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_y}, \quad (10.7)$$

где $j=1, 2, 3$.

Найдем стандартизованные коэффициенты регрессии, предварительно рассчитав σ_{x1} , σ_{x2} , σ_{x3} σ_y :

$$\sigma_{x1} = \sqrt{x_1^2 - \bar{x}_1^2} = \sqrt{3076,4406} = 55,46567;$$

$$\sigma_{x2} = \sqrt{x_2^2 - \bar{x}_2^2} = \sqrt{647,9915} = 25,455677;$$

$$\sigma_{x3} = \sqrt{x_3^2 - \bar{x}_3^2} = \sqrt{1333,8466} = 36,521865;$$

$$\sigma_y = \sqrt{y^2 - \bar{y}^2} = \sqrt{2377,653475} = 48,761188.$$

Тогда

$$b'_1 = b_1 \cdot \frac{\sigma_{x1}}{\sigma_y} = 0,732424 \cdot \frac{55,46567}{48,761188} = 0,83313;$$

$$b'_2 = b_2 \cdot \frac{\sigma_{x2}}{\sigma_y} = 0,714552 \cdot \frac{25,455677}{48,761188} = 0,373031;$$

$$b'_3 = b_3 \cdot \frac{\sigma_{x3}}{\sigma_y} = -0,060439 \cdot \frac{36,521865}{48,761188} = -0,045269.$$

Полученные коэффициенты указывают на значимость каждого объясняющего фактора. Сравнивая стандартизованные коэффициенты регрессии, можно заключить, что первый и второй факторы имеют большую степень влияния на зависимую переменную, чем третий. Столь большая (на порядок) разница между стандартизованными коэффициентами констатирует о незначимости третьего фактора в нашей модели.

10.3.3. Коэффициент эластичности

Коэффициент эластичности E_j показывает на сколько процентов (от средней) изменится в среднем y при увеличении только x_j на 1%. Коэффициент эластичности рассчитывается по следующей формуле:

$$E_j = b_j \cdot \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}. \quad (10.8)$$

Рассчитаем коэффициенты эластичности:

$$E_1 = b_1 \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}} = 0,732424 \cdot \frac{115,52}{146,995} = 0,575596;$$

$$E_2 = b_2 \cdot \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} = 0,714552 \cdot \frac{65,65}{146,995} = 0,319129;$$

$$E_3 = b_3 \cdot \frac{\bar{x}_3}{\bar{y}} = -0,060439 \cdot \frac{98,42}{146,995} = -0,040467.$$

10.3.4. Коэффициент детерминации

Полученные коэффициенты эластичности также подтверждают факт незначимости третьего объясняющего признака. Обычно на практике без особого ущерба для модели такие факторы убирают, что приводит к существенному упрощению статистических исследований и использования таких моделей.

Коэффициент детерминации R^2 является одной из наиболее эффективных оценок адекватности регрессионной модели, мерой качества уравнения регрессии, характеристикой точности прогноза. Он рассчитывается как отношение суммы квадратов отклонений, обусловленных регрессией к сумме квадратов отклонений зависимой переменной от средней, то есть

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q}, \quad (10.9)$$

где $Q_R = Y'Y - n\bar{y}^2 - (Y'Y - B'X'Y) = B'X'Y - n\bar{y}^2,$ (10.10)

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = Y'Y - n\bar{y}^2. \quad (10.11)$$

Подставляя (10.10) и (10.11) в формулу (10.9) получим:

$$R^2 = \frac{B'X'Y - n\bar{y}^2}{Y'Y - n\bar{y}^2} \quad (10.12)$$

Коэффициент детерминации R^2 характеризует долю вариации зависимой переменной, обусловленной регрессией или изменчивостью объясняющих переменных; чем ближе R^2 к единице, тем лучше регрессия описывает зависимость между объясняющими и зависимой переменными.

Для расчета R^2 найдем матричные произведения $B'X'Y$ и $Y'Y$:

$$B'X'Y = \begin{pmatrix} 21,423372 & 0,732424 & 0,714552 & -0,060439 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2939,9 \\ 390138,82 \\ 206989,48 \\ 280132,73 \end{pmatrix} = 479703,6626$$

Значение $Y'Y$ получим из расчетной таблицы 10.2 в столбце y_i^2 :

$$Y'Y = \begin{pmatrix} 45,5 & 107,8 & 71,7 & 154,8 & 167,5 & \dots & 207,6 & 99,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45,5 \\ 107,8 \\ 71,7 \\ 154,8 \\ 167,5 \\ \vdots \\ 207,6 \\ 99,1 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 479703,67.$$

Тогда значение коэффициента детерминации будет равно

$$R^2 = \frac{479703,626 - 20 \cdot 21607,530025}{479703,67 - 20 \cdot 21607,530025} = \frac{47553,0621}{47553,0695} = 0,99999984.$$

Найденное значение коэффициента детерминации указывает на высокий уровень зависимости между объясняющими и зависимой переменными.

Оценим качество уравнения регрессии по F -критерию Фишера. Для этого выполним сравнение фактического $F_{\text{факт}}$ и критического $F_{\text{табл}}$ значений F -критерия Фишера.

Расчетное значение $F_{\text{факт}}$ для множественной регрессионной модели определяется по формуле:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2(n-p-1)}{(1-R^2)p}, \quad (10.13)$$

где n – количество наблюдений исследуемых факторов; p – количество объясняющих факторов.

Найдем расчетное значение критерия $F_{\text{факт}}$:

$$F_{\text{факт}} = \frac{0,99999984 \cdot (20 - 3 - 1)}{(1 - 0,99999984) \cdot 2} = 34272476,920785.$$

Критическое значение $F_{табл}$ возьмем из ячейки столбца p и строки $n-p-1$ таблицы критических значений F -критерия Фишера при уровне значимости $\alpha=0,05$. В нашем случае критическое значение $F_{табл}$ берется из третьего столбца шестнадцатой строки и равно 3,24 (табл. 1.4).

Поскольку расчетное значение $F_{факт}$ больше критического, то это указывает на необходимость отклонить гипотезу H_0 о случайной природе оцениваемых характеристик выявленной зависимости исследуемых факторов и признать статистическую значимость и надежность построенной множественной линейной регрессионной модели.

Глава 11. Временные ряды

Изучение причинно-следственных зависимостей факторов, наблюдаемых в течение некоторого промежутка времени, является одной из наиболее востребованных задач математического моделирования. Применение традиционных методов корреляционно-регрессионного анализа может привести к ряду серьезных проблем, возникающих как на этапе построения, так и на этапе анализа изучаемых моделей. В первую очередь эти проблемы связаны со спецификой фактора времени при формировании исходных данных. В отличие от пространственных задач выборки при временных наблюдениях нельзя считать независимыми, поэтому необходимы специфические методы исследования временных рядов.

11.1. Основные элементы временного ряда

Временной ряд (ряд динамики) – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов времени. Каждый уровень временного ряда формируется под воздействием большого числа факторов, которые условно можно подразделить на три группы:

- 1) факторы, формирующие тенденцию ряда – трендовая компонента (Т);
- 2) факторы, формирующие циклические колебания ряда – циклическая компонента (S);
- 3) случайные факторы – случайная компонента (E).

Рассмотрим воздействие каждого фактора на временной ряд в отдельности.

Большинство временных рядов экономических показателей имеют тенденцию, характеризующую совокупное долговременное воздействие множества факторов на динамику изучаемого показателя. Все эти факторы, взятые в отдельности, могут оказывать разнонаправленное воздействие на исследуемый показатель. Однако в совокупности они формируют его возрастающую или убывающую тенденцию. На рис. 11.1 показан гипотетический временной ряд, содержащий возрастающую тенденцию.

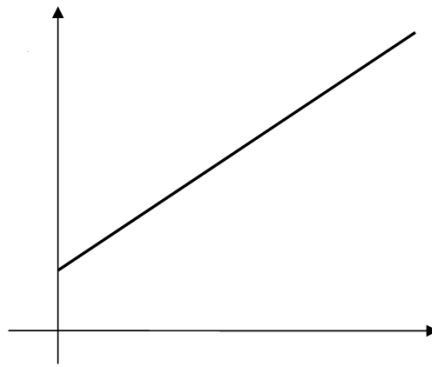


Рис. 11.1. Ряд, содержащий только тенденцию

Также изучаемый показатель может быть подвержен циклическим колебаниям. Эти колебания могут носить сезонный характер, поскольку экономическая деятельность ряда отраслей экономики зависит от времени года (например, цены на сельскохозяйственную продукцию в летний период выше, чем в зимний; уровень безработицы в курортных городах в зимний период выше по сравнению с летним). При наличии больших массивов данных за длительные промежутки времени можно выявить циклические колебания, связанные с общей динамикой конъюнктуры рынка. На рис. 11.2 представлен гипотетический временной ряд, содержащий только сезонную компоненту.

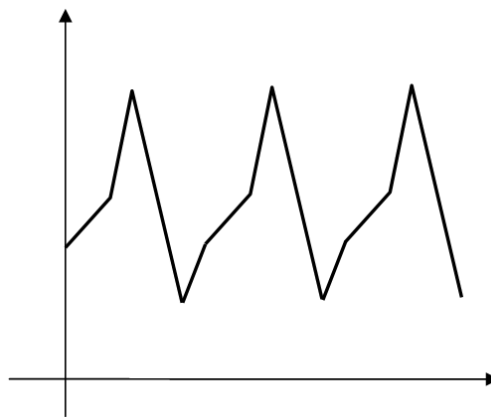


Рис. 11.2. Ряд, содержащий только сезонную компоненту.

Некоторые временные ряды не содержат тенденции и циклической компоненты, а каждый следующий их уровень образуется как сумма среднего уровня ряда и некоторой (положительной или отрицательной) случайной компоненты. Пример ряда, содержащего только случайную компоненту, приведен на рис. 11.3.

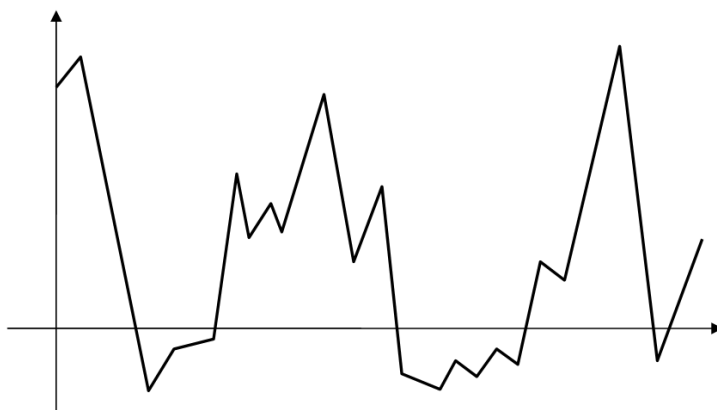


Рис. 11.3. Ряд, содержащий только случайную компоненту

Очевидно, что реальные данные не следуют целиком и полностью из каких-либо описанных выше моделей. Чаще всего они содержат все три компоненты. Каждый их уровень формируется под воздействием тенденции, сезонных колебаний и случайной компоненты.

В большинстве случаев фактический уровень временного ряда можно представить как сумму или произведение трендовой, циклической и случайной компонент. Модель, в которой временной ряд представлен как сумма перечисленных компонент, называется *аддитивной моделью* временного ряда. Модель, в которой временной ряд представлен как произведение перечисленных компонент, называется *мультипликативной моделью* временного ряда. Основная задача эконометрического исследования отдельного временного ряда – выявление и придание количественного выражения каждой из перечисленных выше компонент с тем, чтобы использовать полученную информацию для прогнозирования будущих значений ряда или при построении моделей взаимосвязи двух или более временных рядов.

11.2. Автокорреляция уровней временного ряда

При наличии во временном ряде тенденции и циклических колебаний значения каждого последующего уровня ряда зависят от предыдущих. Корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда называют *автокорреляцией* уровней ряда.

Количественно ее можно измерить с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого

ряда, сдвинутыми на несколько шагов во времени. Формула для расчета коэффициента автокорреляции имеет вид:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}}, \quad (11.1)$$

где

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n y_t, \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n y_{t-1}.$$

Эту величину называют *коэффициентом автокорреляции уровней ряда первого порядка*, так как он измеряет зависимость между соседними уровнями ряда y_t и y_{t-1} .

Коэффициент автокорреляции второго порядка характеризует тесноту связи между уровнями y_t и y_{t-2} и определяется по формуле:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3) \cdot (y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^n (y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}}, \quad (11.2)$$

где

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^n y_t, \quad \bar{y}_4 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^n y_{t-2}.$$

Аналогично можно определить коэффициенты автокорреляции более высоких порядков:

$$r(\tau) = \frac{(n-\tau) \sum_{t=\tau+1}^n y_t y_{t+\tau} - \sum_{t=\tau+1}^n y_t \sum_{t=\tau+1}^n y_{t+\tau}}{\sqrt{(n-\tau) \sum_{t=\tau+1}^n y_t^2 - (\sum_{t=\tau+1}^n y_t)^2} \sqrt{(n-\tau) \sum_{t=1+\tau}^n y_{t+\tau}^2 - (\sum_{t=1+\tau}^n y_{t+\tau})^2}}. \quad (11.3)$$

Число периодов, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, называют *лагом*. С увеличением лага число пар значений, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, уменьшается. Считается целесообразным для обеспечения статистической достоверности

коэффициентов автокорреляции использовать правило – максимальный лаг должен быть не больше $n/4$.

Свойства коэффициента автокорреляции.

1. Он строится по аналогии с линейным коэффициентом корреляции и таким образом характеризует тесноту только линейной связи текущего и предыдущего уровней ряда. Поэтому по коэффициенту автокорреляции можно судить о наличии линейной (или близкой к линейной) тенденции. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию (например, параболу второго порядка или экспоненту), коэффициент автокорреляции уровней исходного ряда может приближаться к нулю.

2. По знаку коэффициента автокорреляции нельзя делать вывод о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда. Большинство временных рядов экономических данных содержат положительную автокорреляцию уровней, однако при этом могут иметь убывающую тенденцию.

Последовательность коэффициентов автокорреляции уровней первого, второго и т.д. порядков называют *автокорреляционной функцией* временного ряда. График зависимости ее значений от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) называется *коррелограммой*.

Анализ автокорреляционной функции и коррелограммы позволяет определить лаг, при котором автокорреляция наиболее высокая, а следовательно, и лаг, при котором связь между текущим и предыдущими уровнями ряда наиболее тесная, т.е. при помощи анализа автокорреляционной функции и коррелограммы можно выявить структуру ряда.

Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, исследуемый ряд содержит только тенденцию. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка k , то ряд содержит циклические колебания с периодичностью в k моментов времени. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, можно сделать одно из двух предположений относительно структуры этого ряда: либо ряд не

содержит тенденции и циклических колебаний, либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой нужно провести дополнительный анализ. Поэтому коэффициент автокорреляции уровней и автокорреляционную функцию целесообразно использовать для выявления во временном ряде наличия или отсутствия трендовой компоненты и циклической (сезонной) компоненты.

Пример. Пусть имеются некоторые условные данные об общем количестве правонарушений на таможне одного из субъектов РФ поквартально за последние 4 года.

Таблица 11.1.

Год	Квартал	t	Количество возбужденных дел, y_t
2000	I	1	375
	II	2	371
	III	3	869
	IV	4	1015
2001	I	5	357
	II	6	471
	III	7	992
	IV	8	1020
2002	I	9	390
	II	10	355
	III	11	992
	IV	12	905
2003	I	13	461
	II	14	454
	III	15	920
	IV	16	927

Построить поле корреляции. Вычислить коэффициенты автокорреляции и построить коррелограмму.

Решение.

1) Построение поля корреляции.

По исходным данным построим поле корреляции (рис.11.4).



Рисунок 11.4. Поле корреляции

Уже исходя из графика видно, что значения y образуют пилообразную фигуру.

2) Вычисление коэффициентов автокорреляции и построение коррелограммы.

Рассчитаем несколько последовательных коэффициентов автокорреляции. Для этого составляем вспомогательную таблицу 2-4.

Для удобства вычислений воспользуемся следующей формулой:

$$r(\tau) = \frac{(n - \tau)a - d \cdot b}{\sqrt{(n - \tau)e - d^2} \sqrt{(n - \tau)c - b^2}},$$

где a, b, c, d, e – суммы исходных данных, расположенные в последних строках вспомогательных таблиц

a	b	c
	d	e

Таблица 11.2.

t	y_t	y_t^2	$y_t y_{t-1}$	y_{t-1}	y_{t-1}^2	$y_t y_{t-2}$	y_{t-2}	y_{t-2}^2	$y_t y_{t-3}$	y_{t-3}	y_{t-3}^2
1	375,00	140625,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	371,00	137641,00	139125,00	375,0	140625,00	-	-	-	-	-	-
3	869,00	755161,00	322399,00	371,0	137641,00	325875,00	375,0	140625,00	-	-	-
4	1015,00	1030225,00	882035,00	869,0	755161,00	376565,00	371,0	137641,00	380625,00	375,0	140625,00
5	357,00	127449,00	362355,00	1015,0	1030225,00	310233,00	869,0	755161,00	132447,00	371,0	137641,00
6	471,00	221841,00	168147,00	357,0	127449,00	478065,00	1015,0	1030225,00	409299,00	869,0	755161,00
7	992,00	984064,00	467232,00	471,0	221841,00	354144,00	357,0	127449,00	1006880,00	1015,0	1030225,00
8	1020,00	1040400,00	1011840,00	992,0	984064,00	480420,00	471,0	221841,00	364140,00	357,0	127449,00
9	390,00	152100,00	397800,00	1020,0	1040400,00	386880,00	992,0	984064,00	183690,00	471,0	221841,00
10	355,00	126025,00	138450,00	390,0	152100,00	362100,00	1020,0	1040400,00	352160,00	992,0	984064,00
11	992,00	984064,00	352160,00	355,0	126025,00	386880,00	390,0	152100,00	1011840,00	1020,0	1040400,00
12	905,00	819025,00	897760,00	992,0	984064,00	321275,00	355,0	126025,00	352950,00	390,0	152100,00
13	461,00	212521,00	417205,00	905,0	819025,00	457312,00	992,0	984064,00	163655,00	355,0	126025,00
14	454,00	206116,00	209294,00	461,0	212521,00	410870,00	905,0	819025,00	450368,00	992,0	984064,00
15	920,00	846400,00	417680,00	454,0	206116,00	424120,00	461,0	212521,00	832600,00	905,0	819025,00
16	927,00	859329,00	852840,00	920,0	846400,00	420858,00	454,0	206116,00	427347,00	461,0	212521,00
S_{t+r}	-	-	7036322,00	9947,00	7783657,00	5495597,00	9027,00	6937257,00	6068001,00	8573,00	6731141,00
S_t	-	-	-	10499,0	8502361,00	-	10128,0	8364720,00	-	9259,0	7609559,00

Таблица 11.3.

t	y _t	y _t y _{t-4}	y _{t-4}	y ² _{t-4}	y _t y _{t-5}	y _{t-5}	y ² _{t-5}	y _t y _{t-6}	y _{t-6}	y ² _{t-6}
1	375,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	371,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	869,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	1015,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	357,00	133875,00	375,0	140625,00	-	-	-	-	-	-
6	471,00	174741,00	371,0	137641,00	176625,00	375,0	140625,00	-	-	-
7	992,00	862048,00	869,0	755161,00	368032,00	371,0	137641,00	372000,00	375,0	140625,00
8	1020,00	1035300,00	1015,0	1030225,00	886380,00	869,0	755161,00	378420,00	371,0	137641,00
9	390,00	139230,00	357,0	127449,00	395850,00	1015,0	1030225,00	338910,00	869,0	755161,00
10	355,00	167205,00	471,0	221841,00	126735,00	357,0	127449,00	360325,00	1015,0	1030225,00
11	992,00	984064,00	992,0	984064,00	467232,00	471,0	221841,00	354144,00	357,0	127449,00
12	905,00	923100,00	1020,0	1040400,00	897760,00	992,0	984064,00	426255,00	471,0	221841,00
13	461,00	179790,00	390,0	152100,00	470220,00	1020,0	1040400,00	457312,00	992,0	984064,00
14	454,00	161170,00	355,0	126025,00	177060,00	390,0	152100,00	463080,00	1020,0	1040400,00
15	920,00	912640,00	992,0	984064,00	326600,00	355,0	126025,00	358800,00	390,0	152100,00
16	927,00	838935,00	905,0	819025,00	919584,00	992,0	984064,00	329085,00	355,0	126025,00
S _{t+r}	-	6512098,0	8112,0	6518620,0	5212078,0	7207,0	5699595,0	3838331,0	6215,0	4715531,0
S _t	-	-	8244,0	6579334,00	-	7887,0	6451885,00	-	7416,0	6230044,00

Таблица 11.4.

t	y _t	y _t y _{t-7}	y _{t-7}	y ² _{t-7}	y _t y _{t-8}	y _{t-8}	y ² _{t-8}	y _t y _{t-9}	y _{t-9}	y ² _{t-9}
1	375,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	371,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	869,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	1015,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	357,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	471,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	992,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	1020,00	382500,00	375,0	140625,00	-	-	-	-	-	-
9	390,00	144690,00	371,0	137641,00	146250,00	375,0	140625,00	-	-	-
10	355,00	308495,00	869,0	755161,00	131705,00	371,0	137641,00	133125,00	375,0	140625,00
11	992,00	1006880,00	1015,0	1030225,00	862048,00	869,0	755161,00	368032,00	371,0	137641,00
12	905,00	323085,00	357,0	127449,00	918575,00	1015,0	1030225,00	786445,00	869,0	755161,00
13	461,00	217131,00	471,0	221841,00	164577,00	357,0	127449,00	467915,00	1015,0	1030225,00
14	454,00	450368,00	992,0	984064,00	213834,00	471,0	221841,00	162078,00	357,0	127449,00
15	920,00	938400,00	1020,0	1040400,00	912640,00	992,0	984064,00	433320,00	471,0	221841,00
16	927,00	361530,00	390,0	152100,00	945540,00	1020,0	1040400,00	919584,00	992,0	984064,00
S _{t+r}	-	4133079,0	5860,0	4589506,0	4295169,0	5470,0	4437406,0	3270499,0	4450,0	3397006,0
S _t	-	-	6424,0	5245980,00	-	5404,0	4205580,00	-	5014,0	4053480,00

Все полученные значения заносим в сводную таблицу 11.5:

Таблица 11.5.

Лаг	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	0,0633	-0,9612	-0,0363	0,9647	0,0506	-0,9765	-0,0694	0,9646	0,1621

По найденным значениям коэффициентов автокорреляции построим коррелограмму (рис.11.5):

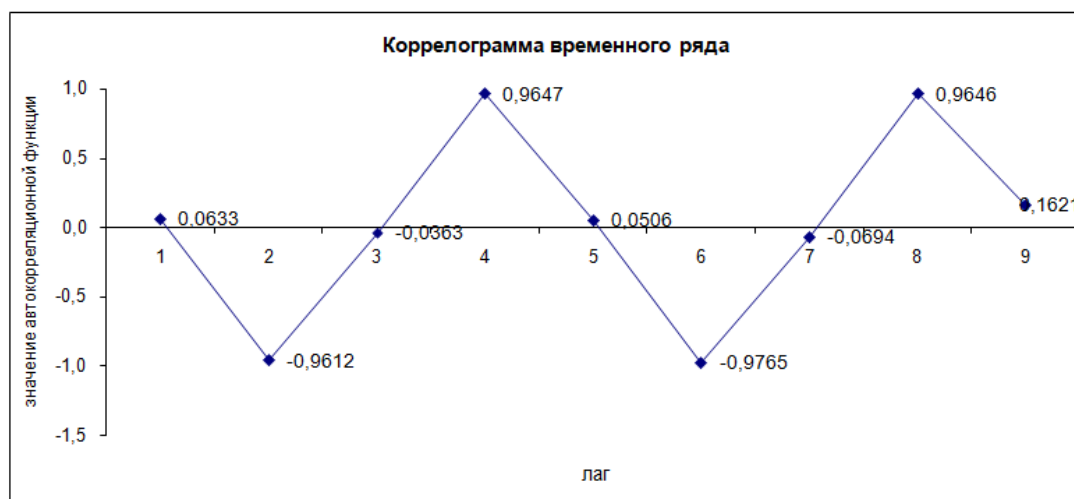


Рис.11.5. Коррелограмма

Анализ коррелограммы и графика исходных уровней временного ряда позволяет сделать вывод о наличии в изучаемом временном ряде сезонных колебаний периодичностью в четыре квартала (т.к. количество правонарушений в первый-второй кварталы ниже, чем в третий-четвертый).

11.3. Моделирование тенденции временного ряда

Распространенным способом моделирования тенденции временного ряда является построение аналитической функции, характеризующей зависимость уровней ряда от времени, или тренда. Этот способ называют *аналитическим выравниванием временного ряда*.

Поскольку зависимость от времени может принимать разные формы, для ее формализации можно использовать различные виды функций. Для построения трендов чаще всего применяются следующие функции:

- линейный тренд: $y_t = a + b \cdot t$;
- гипербола: $y_t = a + \frac{b}{t}$;

- экспоненциальный тренд: $y_t = e^{a+b \cdot t}$ или $y_t = a \cdot b^t$;
- тренд в форме степенной функции: $y_t = a \cdot t^b$;
- полиномы различной степени: $y_t = a + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \dots + b_k \cdot t^k$.

Параметры каждого из перечисленных выше трендов можно определить обычным МНК, используя в качестве независимой переменной время $t = 1, 2, \dots, n$, а в качестве зависимой переменной – фактические уровни временного ряда y_t . Для нелинейных трендов предварительно проводят стандартную процедуру их линеаризации.

Существует несколько способов определения типа тенденции. К числу наиболее распространенных способов относятся качественный анализ изучаемого процесса, построение и визуальный анализ графика зависимости уровней ряда от времени. В этих же целях можно использовать и коэффициенты автокорреляции уровней ряда. Тип тенденции можно определить путем сравнения коэффициентов автокорреляции первого порядка, рассчитанных по исходным и преобразованным уровням ряда. Если временной ряд имеет линейную тенденцию, то его соседние уровни y_t и y_{t-1} тесно коррелируют. В этом случае коэффициент автокорреляции первого порядка уровней исходного ряда должен быть высоким. Если временной ряд содержит нелинейную тенденцию, например, в форме экспоненты, то коэффициент автокорреляции первого порядка по логарифмам уровней исходного ряда будет выше, чем соответствующий коэффициент, рассчитанный по уровням ряда. Чем сильнее выражена нелинейная тенденция в изучаемом временном ряде, тем в большей степени будут различаться значения указанных коэффициентов.

Выбор наилучшего уравнения в случае, когда ряд содержит нелинейную тенденцию, можно осуществить путем перебора основных форм тренда, расчета по каждому уравнению скорректированного коэффициента детерминации и средней ошибки аппроксимации. Этот метод легко реализуется при компьютерной обработке данных.

11.4. Моделирование сезонных колебаний

Простейший подход к моделированию сезонных колебаний – это расчет значений сезонной компоненты методом скользящей средней и построение аддитивной или мультипликативной модели временного ряда.

Общий вид аддитивной модели следующий:

$$Y = T + S + E \quad (11.4)$$

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как сумма трендовой (T), сезонной (S) и случайной (E) компонент.

Общий вид мультипликативной модели выглядит так:

$$Y = T \cdot S \cdot E \quad (11.5)$$

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как произведение трендовой (T), сезонной (S) и случайной (E) компонент.

Выбор одной из двух моделей осуществляется на основе анализа структуры сезонных колебаний. Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, строят аддитивную модель временного ряда, в которой значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов. Если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается, строят мультипликативную модель временного ряда, которая ставит уровни ряда в зависимость от значений сезонной компоненты.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений T , S и E для каждого уровня временного ряда. Процесс построения модели включает в себя следующие шаги.

1) Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.

2) Расчет значений сезонной компоненты S .

3) Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных $(T+E)$ в аддитивной или $(T \cdot E)$ в мультипликативной модели.

4) Аналитическое выравнивание уровней $(T+E)$ или $(T \cdot E)$ и расчет значений T с использованием полученного уравнения тренда.

5) Расчет полученных по модели значений $(T+E)$ или $(T \cdot E)$.

6) Расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

7) Прогноз будущих значений уровней временного ряда на основе построенной модели.

Пример. Для примера, условие которого представлено выше, построим аддитивную модель временного ряда и сделаем прогноз для $t=17$ и $t=18$.

Решение.

Рассчитаем компоненты аддитивной модели временного ряда.

Шаг 1. Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Для этого:

1.1. Просуммируем уровни ряда последовательно за каждые четыре квартала со сдвигом на один момент времени и определим условные годовые объемы потребления электроэнергии (гр. 3 табл. 11.6).

1.2. Разделив полученные суммы на 4, найдем скользящие средние (гр. 4 табл. 11.6). Полученные таким образом выровненные значения уже не содержат сезонной компоненты.

Таблица 11.6.

t	y_t	Итого за 4 квартала	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	9,42				
2	8,74				
3	4,23	2630,0	657,5000	655,2500	213,7500
4	27,34	2612,0	653,0000	665,5000	349,5000
5	11,92	2712,0	678,0000	693,3750	-336,3750
6	10,64	2835,0	708,7500	709,3750	-238,3750
7	6,75	2840,0	710,0000	714,1250	277,8750
8	29,52	2873,0	718,2500	703,7500	316,2500
9	14,58	2757,0	689,2500	689,2500	-299,2500
10	13,49	2757,0	689,2500	674,8750	-319,8750
11	9,03	2642,0	660,5000	669,3750	322,6250
12	31,52	2713,0	678,2500	690,6250	214,3750
13	16,41	2812,0	703,0000	694,0000	-233,0000
14	14,89	2740,0	685,0000	687,7500	-233,7500
15	10,63	2762,0	690,5000		
16	34,78				

1.3. Приведем эти значения в соответствие с фактическими моментами времени, для чего найдем средние значения из двух последовательных

скользящих средних – центрированные скользящие средние (гр. 5 табл. 11.6)

Шаг 2. Найдем оценки сезонной компоненты как разность между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними (гр. 6 табл. 11.6). Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты S_i (табл. 11.7). Для этого найдем средние за каждый квартал (по всем годам) оценки сезонной компоненты S_i .

Таблица 11.7.

Показатели		№ квартала, i			
		I	II	III	IV
Год	1			213,7500	349,5000
	2	-336,3750	-238,3750	277,8750	316,2500
	3	-299,2500	-319,8750	322,6250	214,3750
	4	-233,0000	-233,7500		
Итого i кв.			-868,6250	-792,0000	814,2500
Ср. оцен. сезонной компонент.		-289,5417	-264,0000	271,4167	293,3750
S_j - скорректирован. сез. комп.		-292,3542	-266,8125	268,6042	290,5625

В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимопогашаются. В аддитивной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна нулю.

Для данной модели имеем: $-289,5417 - 264,00 + 271,4167 + 293,3750 = 11,25$.

Корректирующий коэффициент: $k = 11,25 / 4 = 2,813$.

Рассчитываем скорректированные значения сезонной компоненты (скорректирован. сез. комп. = Ср. оцен. сезонной компонент. - корректирующий коэффициент k) и заносим полученные данные в таблицу 11.7.

Проверим равенство нулю суммы значений сезонной компоненты:

$-292,355 - 266,813 + 268,604 + 290,562 = 0,00$.

Шаг 3. Исключим влияние сезонной компоненты, вычитая ее значение из каждого уровня исходного временного ряда. Получим величины $T + E = Y - S$ (гр. 4 табл. 11.8). Эти значения рассчитываются за каждый момент времени и содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 11.8.

t	y _t	t ²	S _j	T+E=y _t -S _j	(T+E) ²	t(T+E)	T(t)	T+S	E=y _t -(T+S)	E ²
1	375,0	1,0	-292,3542	667,3542	445361,5838	667,3542	672,6838	380,3297	-5,3297	28,4052
2	371,0	4,0	-266,8125	637,8125	406804,7852	1275,6250	673,6093	406,7968	-35,7968	1281,4119
3	869,0	9,0	268,6042	600,3958	360475,1567	1801,1875	674,5348	943,1390	-74,1390	5496,5870
4	1015,0	16,0	290,5625	724,4375	524809,6914	2897,7500	675,4603	966,0228	48,9772	2398,7667
5	357,0	25,0	-292,3542	649,3542	421660,8338	3246,7708	676,3858	384,0316	-27,0316	730,7084
6	471,0	36,0	-266,8125	737,8125	544367,2852	4426,8750	677,3113	410,4988	60,5012	3660,3983
7	992,0	49,0	268,6042	723,3958	523301,5317	5063,7708	678,2368	946,8409	45,1591	2039,3415
8	1020,0	64,0	290,5625	729,4375	532079,0664	5835,5000	679,1623	969,7248	50,2752	2527,6003
9	390,0	81,0	-292,3542	682,3542	465607,2088	6141,1875	680,0877	387,7336	2,2664	5,1367
10	355,0	100,0	-266,8125	621,8125	386650,7852	6218,1250	681,0132	414,2007	-59,2007	3504,7271
11	992,0	121,0	268,6042	723,3958	523301,5317	7957,3542	681,9387	950,5429	41,4571	1718,6918
12	905,0	144,0	290,5625	614,4375	377533,4414	7373,2500	682,8642	973,4267	-68,4267	4682,2154
13	461,0	169,0	-292,3542	753,3542	567542,5004	9793,6042	683,7897	391,4355	69,5645	4839,2142
14	454,0	196,0	-266,8125	720,8125	519570,6602	10091,3750	684,7152	417,9027	36,0973	1303,0154
15	920,0	225,0	268,6042	651,3958	424316,5317	9770,9375	685,6407	954,2449	-34,2449	1172,7100
16	927,0	256,0	290,5625	636,4375	405052,6914	10183,0000	686,5662	977,1287	-50,1287	2512,8842
136		1496,0		10874,0000	7428435,2847	92743,6667	СУММА			37901,8138
8,5		93,5		679,6250	464277,2053	5796,4792	СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ			

Шаг 4. Определим компоненту T данной модели. Для этого проведем аналитическое выравнивание ряда $(T+E)$ с помощью линейного тренда. Результаты аналитического выравнивания следующие:

$$T_t = 671,759 + 0,9255 \cdot t.$$

Подставляя в это уравнение значения $t=1, 2, \dots, 16$, найдем уровни T для каждого момента времени (гр. 5 табл. 11.8).

Шаг 5. Найдем значения уровней ряда, полученные по аддитивной модели. Для этого прибавим к уровням T значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов (гр. 6 табл. 11.8).

На одном графике отложим фактические значения уровней временного ряда и теоретические, полученные по аддитивной модели.



Рис. 11.6. Фактические и теоретические значения временного ряда

Шаг 6. Для оценки качества построенной модели применим сумму квадратов полученных абсолютных ошибок.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum E^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{37901,872}{1252743,75} = 0,9.$$

Следовательно, можно сказать, что аддитивная модель объясняет 97% общей вариации уровней временного ряда количества правонарушений по кварталам за 4 года.

Шаг 7. Прогнозирование по аддитивной модели. Предположим, что по нашему примеру необходимо дать прогноз об общем объеме правонарушений на I и II кварталы 2004 года. Прогнозное значение F_t уровня временного ряда в

аддитивной модели есть сумма трендовой и сезонной компонент. Для определения трендовой компоненты воспользуемся уравнением тренда: $T = 671,777 + 0,9233 \cdot t$.

Получим

$$T_{17} = 671,777 + 0,9233 \cdot 17 = 687,473;$$

$$T_{18} = 671,777 + 0,9233 \cdot 18 = 688,396.$$

Значения сезонных компонент за соответствующие кварталы равны: $S_1 = -292,448$ и $2 S = -266,781$.

Таким образом,

$$F_{17} = T_{17} + S_1 = 687,473 - 292,448 = 395;$$

$$F_{18} = T_{18} + S_2 = 688,396 - 266,781 = 422.$$

Т.е. в первые два квартала 2004 г. следовало ожидать порядка 395 и 422 правонарушений соответственно.

Пример. Для примера, условие которого представлено выше, построим мультипликативную модель временного ряда и сделаем прогноз для $t=17$ и $t=18$.

Решение.

Рассчитаем компоненты мультипликативной модели временного ряда.

Шаг 1. Методика, применяемая на этом шаге, полностью совпадает с методикой построения аддитивной модели.

Таблица 11.9.

t	y _t	Итого за 4 квартала	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	9,42				
2	8,74				
3	4,23				
4	27,34				
5	11,92	2630,0	657,5000	655,2500	1,3262
6	10,64	2612,0	653,0000	665,5000	1,5252
7	6,75	2712,0	678,0000	693,3750	0,5149
8	29,52	2835,0	708,7500	709,3750	0,6640
9	14,58	2840,0	710,0000	714,1250	1,3891
10	13,49	2873,0	718,2500	703,7500	1,4494
11	9,03	2757,0	689,2500	689,2500	0,5658
12	31,52	2757,0	689,2500	674,8750	0,5260
13	16,41	2642,0	660,5000	669,3750	1,4820
14	14,89	2713,0	678,2500	690,6250	1,3104
15	10,63	2812,0	703,0000	694,0000	0,6643
16	34,78	2740,0	685,0000	687,7500	0,6601
17		2762,0	690,5000		

Шаг 2. Найдем оценки сезонной компоненты как частное от деления фактических уровней ряда на центрированные скользящие средние (гр. 6 табл. 9). Эти оценки используются для расчета сезонной компоненты S (табл. 10). Для этого найдем средние за каждый квартал оценки сезонной компоненты $i S$. Так же как и в аддитивной модели считается, что сезонные воздействия за период взаимопогашаются. В мультипликативной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна числу периодов в цикле. В нашем случае число периодов одного цикла равно 4.

Таблица 11.10.

Показатели		№ квартала			
		I	II	III	IV
Год	1			1,3262	1,5252
	2	0,5149	0,6640	1,3891	1,4494
	3	0,5658	0,5260	1,4820	1,3104
	4	0,6643	0,6601		
Итого за i-й кв.		2,5337	1,7450	1,8501	4,1973
Ср. оцен. сезонной компонент., $S_{ср.}$		0,5817	0,6167	1,3991	1,4283
S_j - скорек-тирован. сез. комп		0,5779	0,6128	1,3901	1,4192

Имеем: $0,5816+0,6167+1,3991+1,4283=4,0257$.

Определяем корректирующий коэффициент: $k=4/4,0257=0,9936$.

Скорректированные значения сезонной компоненты S_i получаются при умножении ее средней оценки S_i на корректирующий коэффициент k .

Проверяем условие равенство 4 суммы значений сезонной компоненты:
 $0,5779+0,6128+1,3901+1,4192=4$.

Шаг 3. Разделим каждый уровень исходного ряда на соответствующие значения сезонной компоненты. В результате получим величины $T \cdot E=Y/S$ (гр. 4 табл. 11.11), которые содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 11.11.

t	y _t	t ²	S _j	T·E=y _t /S _j	(T·E) ²	t(T·E)	T(t)	T·S	E=y _t /(T·S)	E ²
1	375	1	0,5779	648,8652	421026,0712	648,8652	654,9157	378,4968	0,9908	0,9816
2	371	4	0,6128	605,4625	366584,8723	1210,9251	658,1970	403,3133	0,9199	0,8462
3	869	9	1,3901	625,1162	390770,2062	1875,3485	661,4783	919,5485	0,9450	0,8931
4	1015	16	1,4192	715,2060	511519,5590	2860,8238	664,7596	943,4080	1,0759	1,1575
5	357	25	0,5779	617,7197	381577,6124	3088,5984	668,0409	386,0822	0,9247	0,8550
6	471	36	0,6128	768,6600	590838,1562	4611,9598	671,3222	411,3558	1,1450	1,3110
7	992	49	1,3901	713,5963	509219,7454	4995,1744	674,6035	937,7944	1,0578	1,1189
8	1020	64	1,4192	718,7291	516571,5733	5749,8331	677,8848	962,0349	1,0603	1,1241
9	390	81	0,5779	674,8198	455381,7986	6073,3784	681,1661	393,6677	0,9907	0,9815
10	355	100	0,6128	579,3509	335647,5071	5793,5094	684,4474	419,3983	0,8465	0,7165
11	992	121	1,3901	713,5963	509219,7454	7849,5598	687,7287	956,0403	1,0376	1,0766
12	905	144	1,4192	637,6960	406656,1254	7652,3514	691,0100	980,6618	0,9228	0,8516
13	461	169	0,5779	797,6716	636280,0474	10369,7313	694,2913	401,2532	1,1489	1,3200
14	454	196	0,6128	740,9164	548957,1242	10372,8297	697,5726	427,4409	1,0621	1,1281
15	920	225	1,3901	661,8031	437983,2943	9927,0459	700,8539	974,2862	0,9443	0,8917
16	927	256	1,4192	653,1980	426667,5640	10451,1672	704,1352	999,2887	0,9277	0,8606
136		1496		10872,4071	7444901,0024	93531,1016	СУММА			16,1141
8,5		93,5		679,5254	465306,3126	5845,6939	СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ			

Шаг 4. Определим компоненту T в мультипликативной модели. Для этого рассчитаем параметры линейного тренда, используя уровни $T \cdot E$. В результате получим уравнение тренда: $T=651,6364+3,2809 \cdot t$.

Подставляя в это уравнение значения $t=1, 2, \dots, 16$, найдем уровни T для каждого момента времени (гр. 5 табл. 11.11).

Шаг 5. Найдем уровни ряда, умножив значения T на соответствующие значения сезонной компоненты (гр. 6 табл. 11.11).

На одном графике откладываем фактические значения уровней временного ряда и теоретические, полученные по мультипликативной модели.



Рис. 11.7. Фактические и теоретические значения временного ряда

Шаг 6. Расчет ошибки в мультипликативной модели производится по формуле: $E=Y(T \cdot S)$.

Для сравнения мультипликативной модели и других моделей временного ряда можно, по аналогии с аддитивной моделью, использовать сумму квадратов абсолютных ошибок $(y_t - T \cdot S)^2$:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum E^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{43065,02}{1252743,75} = 0,966.$$

Сравнивая показатели детерминации аддитивной и мультипликативной моделей, делаем вывод, что они примерно одинаково аппроксимируют исходные данные.

Шаг 7. Прогнозирование по мультипликативной модели. Если предположить, что по нашему примеру необходимо дать прогноз об общем объеме правонарушений на I и II кварталы 2004 года, прогнозное значение F_t уровня временного ряда в мультипликативной модели есть произведение трендовой и сезонной компонент. Для определения трендовой компоненты воспользуемся уравнением тренда: $T=651,6364+3,2809 \cdot t$.

Получим

$$T_{17}=651,6364+3,2809 \times 17=707,4117;$$

$$T_{18}=651,6364+3,2809 \times 18=710,6926.$$

Значения сезонных компонент за соответствующие кварталы равны:

$$S_1=0,5779 \text{ и } S_2=0,6128.$$

Таким образом,

$$F_{17}=T_{17} \cdot S_1=707,4117 \cdot 0,5779=409;$$

$$F_{18}=T_{18} \cdot S_2=710,6926 \cdot 0,6128=436.$$

Т.е. в первые два квартала 2004 г. следовало ожидать порядка 409 и 436 правонарушений соответственно.

Таким образом, в рассматриваемом примере аддитивная и мультипликативная модели дают примерно одинаковый результат по прогнозу.

Раздел IV. Методы оптимизации

Глава 12. Задачи линейного программирования

Исследование различных, в том числе и экономических, процессов обычно начинается с их моделирования, т.е. отражения реального процесса через математические соотношения. При этом производится составление уравнений или неравенств, связывающих различные показатели (переменные) исследуемого процесса, которые образуют систему ограничений.

В этих соотношениях выделяются такие переменные, меняя которые, можно получить оптимальное значение основного показателя данной системы (прибыль, доход, затраты и т.п.). Соответствующие методы, позволяющие решать указанные задачи, объединяются в общее название «математическое программирование» или «математический метод» исследования операций.

Математическое программирование включает в себя такие разделы математики как линейное, нелинейное и динамическое программирование. Сюда же обычно относят стохастическое программирование, теорию игр, теорию массового обслуживания, теорию управления запасами и некоторые другие.

Математическое программирование – это раздел высшей математики, занимающийся решением задач, связанных с нахождением экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений на переменные.

Методами математического программирования решаются задачи распределения ресурсов, планирования выпуска продукции, ценообразования, транспортные задачи и т.п.

Математическое программирование возникло в 30–е годы XX века. Венгерский математик Б. Эгервари в 1931 году решил задачу, называемую проблемой выбора. Американский ученый Г.У. Куй обобщил этот метод, после чего он получил название венгерского метода. В 1939 году российский ученый Л.В. Канторович разработал метод разрешающих множителей решения задач линейного программирования. Большой вклад в развитие математического

12.1.1. Метод Жордана-Гаусса

12.1.1. Метод Жордана-Гаусса

[illegible]

Все расчеты по методу Жордана–Гаусса будем проводить в таблице.

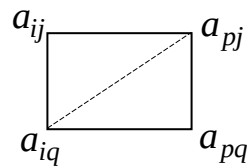
$$\tilde{a}_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} \ .$$

a_{i0}	x_1	x_2	$\dots$	x_j	$\dots$	x_q	$\dots$	x_n	$\tilde{a}_i$
a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1q}	$\dots$	a_{1n}	$\tilde{a}_1$
a_{20}	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2q}	$\dots$	a_{2n}	$\tilde{a}_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{i0}	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{iq}	$\dots$	a_{in}	$\tilde{a}_i$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{p0}	a_{p1}	a_{p2}	$\dots$	a_{pj}	$\dots$	a_{pq}	$\dots$	a_{pn}	$\tilde{a}_p$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mq}	$\dots$	a_{mn}	$\tilde{a}_m$

3. Все элементы разрешающей строки (с номером p) делим на a_{pq} .

4. Остальные элементы разрешающего столбца (с номером q) заменяем нулями.

5. Все остальные элементы, включая и элементы контрольного столбца, вычисляем по правилу прямоугольника, т.е. $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{pj} \cdot a_{iq}}{a_{pq}}$.



6. После заполнения всей таблицы осуществляем контроль: все новые элементы контрольного столбца должны быть равны сумме всех элементов строки.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока все строки не побывают разрешающими.

Замечания.

1. Для удобства вычислений обычно выбирают $a_{pq} = 1$.

2. Если в процессе решения какая-нибудь строка полностью обнулится, то её вычеркиваем.

3. Если в процессе решения получим строку, у которой все элементы кроме свободного члена, отличного от нуля, равны нулю, то такая система решения не имеет.

4. Если в разрешающей строке какой-либо элемент равен нулю, то весь столбец, в котором стоит этот элемент, в новую таблицу переписывается без изменения.

5. Если в разрешающем столбце какой-либо элемент равен нулю, то строка, в которой стоит этот элемент, в новую таблицу переписывается без изменений.

Переменные, которым соответствуют единичные вектора, называют *базисными*.

Переменные, которые не входят в базис, называют *свободными*.

Решения, полученные при приравнении к нулю свободных переменных, называются *базисными*.

Максимально возможное число базисных решений системы равно C_n^r .

Те базисные решения, которые не содержат отрицательных переменных ($x_j \geq 0$) называются *опорными*.

Теорема.

1. Если число базисных переменных равно общему числу переменных системы, то система имеет единственное решение.

2. Если число базисных переменных меньше общего числа переменных системы, то система имеет бесконечное множество решений.

Пример. Решить систему методом Жордана–Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение.

1-й шаг. По данным системы составим таблицу. В исходной части таблицы записываем расширенную матрицу системы и дополняем ее последним контрольным столбцом, элементы которого $\tilde{a}_i$ получаем путем суммирования всех элементов по строкам.

	Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\tilde{a}_i$
<i>1-й шаг</i>		2	2	-1	1	4
		-2	3	2	2	5
		1	1	-2	1	1
<i>2-й шаг</i>	x_3	2	2	-1	1	4
		-6	-1	4	0	-3
		-1	-1	-1	0	-3

3-й шаг	x_3	-10	0	7	1	-2
	x_1	6	1	-4	0	3
		5	0	-5	0	0
4-й шаг	x_3	-3	0	0	1	-2
	x_1	2	1	0	0	3
	x_2	-1	0	1	0	0

Выбираем разрешающий элемент $a_{pq} \neq 0$, для удобства вычислений берем $a_{13} = 1$.

Все элементы первой строки a_{1j} ($j = 1, 2, 3$) делим на этот разрешающий элемент. Все элементы разрешающего столбца a_{i3} ($i = 2, 3$), кроме элемента a_{13} , обнуляем. Все остальные элементы таблицы вычисляем по правилу прямоугольника, результат записываем в новую таблицу.

	Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\tilde{a}_i$
1-й шаг		2	2	-1	1	4
		-2	3	2	2	5
		1	1	-2	1	1
2-й шаг	x_3	2	2	-1	1	4
		-6	-1	4	0	-3
		-1	-1	-1	0	-3
3-й шаг	x_3	-10	0	7	1	-2
	x_1	6	1	-4	0	3
		5	0	-5	0	0
4-й шаг	x_3	-3	0	0	1	-2
	x_1	2	1	0	0	3
	x_2	-1	0	1	0	0

$$a'_{20} = a_{20} - \frac{a_{10} \cdot a_{23}}{a_{13}} = -2 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -2 - 4 = -6; \quad a'_{30} = a_{30} - \frac{a_{10} \cdot a_{33}}{a_{13}} = 1 - \frac{2 \cdot 1}{1} = 1 - 2 = -1;$$

$$a'_{21} = a_{21} - \frac{a_{11} \cdot a_{23}}{a_{13}} = 3 - \frac{2 \cdot 2}{1} = 3 - 4 = -1; \quad a'_{31} = a_{31} - \frac{a_{11} \cdot a_{33}}{a_{13}} = 1 - \frac{2 \cdot 1}{1} = 1 - 2 = -1;$$

$$\tilde{a}'_2 = \bar{a}_2 - \frac{\bar{a}_1 \cdot a_{23}}{a_{13}} = 5 - \frac{2 \cdot 4}{1} = 5 - 8 = -3; \quad \tilde{a}'_3 = \bar{a}_3 - \frac{\bar{a}_1 \cdot a_{33}}{a_{13}} = 1 - \frac{4 \cdot 1}{1} = 1 - 4 = -3.$$

Записываем полученные данные в таблицу. Осуществляем контроль:

$$\tilde{a}'_1 = 2 + 2 + (-1) + 1 = 4 ;$$

$$\tilde{a}'_2 = -6 + (-1) + 4 + 0 = -3 ;$$

$$\tilde{a}'_3 = -1 + (-1) + (-1) + 0 = -3 .$$

Если элементы контрольного столбца, вычисленные по правилу прямоугольника, равны элементам контрольного столбца, вычисленным суммированием элементов по строке, то полученная таблица составлена верно. Выбранному разрешающему элементу соответствовала переменная x_3 , следовательно, переменную x_3 записываем в базис.

Переходим к следующему шагу.

2-й шаг. Выбираем разрешающий элемент $a_{pq} \neq 0$ из второй и третьей строки, для удобства вычислений берем $a_{21} = -1$. Все элементы второй строки a_{2j} ($j = 1, 2, 3$) делим на этот разрешающий элемент. Все элементы разрешающего столбца a_{i1} ($i = 1, 3$), кроме элемента a_{21} , обнуляем. Все остальные элементы таблицы вычисляем по правилу прямоугольника.

$$a'_{10} = a_{10} - \frac{a_{20} \cdot a_{11}}{a_{21}} = 2 - \frac{(-6) \cdot 2}{(-1)} = 2 - 12 = -10 ;$$

$$a'_{30} = a_{30} - \frac{a_{20} \cdot a_{31}}{a_{21}} = -1 - \frac{(-6) \cdot (-1)}{(-1)} = -1 + 6 = 5 ;$$

$$a'_{12} = a_{12} - \frac{a_{11} \cdot a_{22}}{a_{21}} = (-1) - \frac{2 \cdot 4}{(-1)} = -1 + 8 = 7 ;$$

$$a'_{32} = a_{32} - \frac{a_{22} \cdot a_{31}}{a_{21}} = (-1) - \frac{4 \cdot (-1)}{(-1)} = -1 - 4 = -5 .$$

Третий столбец в новую таблицу можно переписать без изменений, т.к. в разрешающей строке в третьем столбце стоит ноль. Записываем полученные данные в таблицу. Осуществляем контроль:

$$\tilde{a}'_1 = -10 + 0 + 7 + 1 = -2 ;$$

$$\tilde{a}'_2 = 6 + 1 + (-4) + 0 = 3 ;$$

$$\tilde{a}'_3 = 5 + 0 + (-5) + 0 = 0 .$$

Так как элементы контрольного столбца, вычисленные по правилу прямоугольника, равны элементам контрольного столбца, вычисленным

суммированием элементов по строке, то полученная таблица составлена верно. Выбранному разрешающему элементу соответствовала переменная x_1 , следовательно, переменную x_1 записываем в базис. Переходим к следующему шагу.

3-й шаг. Выбираем разрешающий элемент из третьей строчки, т.к. в этой третьей строке только один элемент отличный от нуля, то в качестве разрешающего элемента выбираем этот элемент $a_{32} = -5$. Все элементы третьей строки a_{3j} ($j=1,2,3$) делим на этот разрешающий элемент. Все элементы разрешающего столбца a_{i2} ($i=1,2$), кроме элемента a_{32} , обнуляем. Все остальные элементы таблицы вычисляем по правилу прямоугольника.

$$a'_{10} = a_{10} - \frac{a_{30} \cdot a_{12}}{a_{32}} = -10 - \frac{5 \cdot 7}{(-5)} = -10 + 7 = -3; \quad a'_{20} = a_{20} - \frac{a_{30} \cdot a_{22}}{a_{32}} = 6 - \frac{5 \cdot (-4)}{(-5)} = 6 - 4 = 2.$$

Первый, третий и контрольный столбцы в новую таблицу можно переписать без изменений, т.к. в разрешающей строке в первом, третьем и контрольном столбцах стоят нули. Записываем полученные данные в таблицу. Осуществляем контроль:

$$\tilde{a}'_1 = -3 + 0 + 0 + 1 = -2; \quad \tilde{a}'_2 = 2 + 1 + 0 + 0 = 3; \quad \tilde{a}'_3 = -1 + 0 + 1 + 0 = 0.$$

Если элементы контрольного столбца, вычисленные по правилу прямоугольника, равны элементам контрольного столбца, вычисленным суммированием элементов по строке, то полученная таблица составлена верно. Выбранному разрешающему элементу соответствовала переменная x_2 , следовательно, переменную x_2 записываем в базис.

Если все строки побывали разрешающими и система приведена к

единичному базису, то выписываем ответ:
$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;-3).

Пример. Решить систему методом Жордана–Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3; \\ x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Составим таблицу.

	Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\tilde{a}_i$
1-й шаг		5	3	1	4	13
		-3	1	-1	2	-1
		1	1	3	0	5
2-й шаг		2	0	-8	4	-2
		-4	0	-4	2	-6
	x_1	1	1	3	0	5
3-й шаг		10	0	0	0	10
	x_3	-2	0	-2	1	-3
	x_1	1	1	3	0	5

Система не имеет решений, так как в первой строке последней части таблицы коэффициенты при всех переменных равны нулю, а свободный член отличен от нуля.

Ответ: система не совместна.

Пример. Решить систему методом Жордана–Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Составим таблицу.

	Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\tilde{a}_i$
1-й шаг		5	3	1	4	13
		-3	1	-1	2	-1
		-1	5	-1	8	11
2-й шаг	x_2	5	3	1	4	13
		2	4	0	6	12
		4	8	0	12	24
3-й шаг	x_2	7/2	0	1	-1/2	4
	x_1	1/2	1	0	3/2	3
		0	0	0	0	0

Система имеет бесконечное множество решений, так как последняя строка последней части таблицы обнулилась. Из последней части таблицы восстановим систему:

$$\begin{cases} x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{7}{2}; \\ x_1 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные через свободные, получим

$$\begin{cases} x_2 = 3,5 + 0,5x_3; \\ x_1 = 0,5 - 1,5x_3. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение системы можно записать в виде

$$X = (0,5 - 1,5x_3; 3,5 + 0,5x_3; x_3), \quad x_3 \in R.$$

Ответ: $X = (0,5 - 1,5x_3; 3,5 + 0,5x_3; x_3), \quad x_3 \in R.$

12.1.2. Преобразование однократного замещения

Если в системе m линейных уравнений с n неизвестными, которая приведена к единичному базису (т.е. найдено какое-либо базисное решение), перейдем к любому другому базисному решению, то одну свободную переменную вводим в базис, а одну базисную превращаем в свободную. Такое преобразование называется *однократным замещением*.

Пример. Найти все базисные решения системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Прежде чем найти все базисные решения системы линейных уравнений, необходимо методом Жордана–Гаусса найти первое базисное решение.

Составим таблицу.

	Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\tilde{a}_i$
1-й шаг		5	3	1	4	13
		-3	1	-1	2	-1
		-1	5	-1	8	11
2-й шаг	x_2	5	3	1	4	13
		2	4	0	6	12
		4	8	0	12	24
3-й шаг	x_2	7/2	0	1	-1/2	4
	x_1	1/2	1	0	3/2	3
		0	0	0	0	0
4-й шаг	x_2	11/3	1/3	1	0	5
	x_3	1/3	2/3	0	1	2
5-й шаг	x_1	11	1	3	0	15
	x_3	-7	0	-2	1	-8

На 3-м шаге найдено первое базисное решение $X_{\text{баз.1}} = (1/2; 7/2; 0)$.

Находим количество всех базисных решений исходной системы (C_n^r , где n – количество переменных системы, r – число базисных переменных):

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3.$$

Далее вновь выбираем разрешающий элемент и по правилу прямоугольника пересчитываем все элементы таблицы. На 4-м шаге находим новое базисное решение $X_{\text{баз.2}} = (0; 11/3; 1/3)$.

На 5-м шаге базисное решение имеет вид: $X_{\text{баз.3}} = (11; 0; -7)$.

$$\text{Ответ: } X_{\text{баз.1}} = \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; 0\right), X_{\text{баз.2}} = \left(0; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right), X_{\text{баз.3}} = (11; 0; -7).$$

12.1.3. Симплексные преобразования

С помощью симплексных преобразований находят опорные решения.

Симплексными преобразованиями называются такие преобразования однократного замещения, при которых на выбор разрешающего элемента накладываются следующие ограничения:

а) разрешающий элемент выбирают только в том столбце, где есть положительные элементы;

б) если положительный элемент один, то он берется в качестве разрешающего элемента;

в) если положительных элементов несколько, то в качестве разрешающего элемента берем тот, для которого отношение свободного члена к нему будет наименьшим.

Замечание. При нахождении опорных решений в правой части системы все свободные члены должны быть неотрицательными.

Пример. Найти все опорные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 1; \\ -x_3 + 2x_5 = -3. \end{cases}$$

Решение. Согласно замечанию, указанному выше, преобразуем систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 1; \\ -x_3 + 2x_5 = -3. \end{cases} \quad | \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 1; \\ x_3 - 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Рассматриваемая система может иметь $C_5^3 = 10$ базисных решений, однако только часть из них может быть опорными.

Составим таблицу.

	Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\tilde{a}_i$	
1-й шаг	x_2	2	1	1	0	0	-3		
	x_4	1	3	0	0	1	1		
	x_3	3	0	0	1	0	-2		
2-й шаг	x_2	5	10	1	0	3	0	5:10=0,5	
	x_5	1	3	0	0	1	1	1:3≈0,3 - min	
	x_3	5	6	0	1	2	0	5:6≈0,8	
3-й шаг	x_2	5/3	0	1	0	-1/3	-10/3	-	-
	x_1	1/3	1	0	0	1/3	1/3	1/3:1/3=1	1/3:1/3=1
	x_3	3	0	0	1	0	-2	-	-

Таким образом, получаем 3 опорных решения:

$$X_{опор.1} = (0; 2; 3; 1; 0), \quad X_{опор.2} = (0; 5; 5; 0; 1), \quad X_{опор.3} = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; 3; 0; 0\right).$$

Ответ: $X_{опор.1} = (0; 2; 3; 1; 0)$, $X_{опор.2} = (0; 5; 5; 0; 1)$, $X_{опор.3} = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; 3; 0; 0\right)$.

12.2. Модели задач линейного программирования

12.2.1. Формулировка задачи линейного программирования

Математической моделью экономической задачи называется совокупность математических соотношений, описывающих рассматриваемый экономический процесс.

Для составления математической модели необходимо:

- 1) выбрать переменные задачи;
- 2) составить систему ограничений;
- 3) задать целевую функцию.

Переменными задачи называются величины $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые полностью характеризуют экономический процесс. Их обычно записывают в виде вектора $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Системой ограничений задачи называется совокупность уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических условий, например, условия положительности переменных. В общем случае они имеют вид

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = (\leq, \geq) a_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Целевой функцией называют функцию $Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ переменных задачи,

которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти.

Те решения $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, которые удовлетворяют системе ограничений, называются *возможными* решениями.

Те возможные решения $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, которые удовлетворяют условиям неотрицательности, называются *допустимыми* решениями.

То допустимое решение $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, при котором целевая функция достигает своего максимума или минимума, называется *оптимальным* решением.

12.2.2. Основные виды задач линейного программирования

Существует три вида задач линейного программирования (ЗЛП):



Если требуется найти такое решение $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, которое удовлетворяет системе ограничений $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq a_{i0}, \quad i=1, 2, \dots, m$, условиям неотрицательности $x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n$, при которых функция $Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$, то такая задача называется *стандартной (симметричной)* ЗЛП.

Если требуется найти такое решение $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, которое удовлетворяет системе ограничений $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{i0}, \quad i=1, 2, \dots, m$, условиям неотрицательности $x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n$, при котором функция $Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min)$, то такая задача называется *канонической (основной)* ЗЛП.

Если требуется найти такое решение $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, которое удовлетворяет системе ограничений $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq (=, \geq) a_{i0}, \quad i=1, 2, \dots, m$, условиям

неотрицательности $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, при котором функция

$$Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min), \text{ то такая задача называется } \textit{общей ЗЛП}.$$

12.2.3. Переход от общей ЗЛП к канонической

Каноническая форма записи ЗЛП от других форм отличается тем, что система ограничений является системой уравнений, причем все переменные неотрицательные.

Для того чтобы в ограничениях от неравенства перейти равенству необходимо ввести новые неотрицательные переменные по следующему алгоритму:

Неравенство	Равенство
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq a_{i0}$	$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + a_{in+1}x_{n+1} = a_{i0},$ $x_{n+1} \geq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq a_{i0}$	$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - a_{in+1}x_{n+1} = a_{i0},$ $x_{n+1} \geq 0$

При этом в целевую функцию новая переменная входит с коэффициентом равным нулю.

Пример. Привести к каноническому виду задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} z(x) &= 3x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение. Перейдем в системе ограничений из ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам.

Первое ограничение системы содержит знак « $\leq$ », следовательно, для того чтобы перейти к равенству необходимо добавить в левую часть ограничения новую неотрицательную балансовую переменную x_4 . Третье ограничение содержит знак « $\geq$ », следовательно, для того чтобы перейти к равенству

необходимо отнять от левой части ограничения новую неотрицательную балансовую переменную x_5 . В целевую функцию переменные x_4 и x_5 будут входить с коэффициентом «0». Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования, заданную в канонической форме

$$\begin{aligned} z(x) &= 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

12.2.4. Переход от канонической к стандартной ЗЛП

Пример. Привести к стандартному виду задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} z(x) &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 9x_1 - x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 6, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Решение. Методом Жордана-Гаусса приведем систему уравнений-ограничений задачи к равносильной разрешенной. Одновременно разрешенные неизвестные исключим из целевой функции. Для этого в таблице решения задачи наряду с коэффициентами уравнений системы ограничений в дополнительной строке запишем коэффициенты целевой функции. В столбце a_{i0} запишем свободный член целевой функции, равный нулю.

	Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4
1-й шаг	Целевая функция	0	2	-1	2	-1
		2	-1	1	2	-1
		6	9	-1	-6	5
2-й шаг	Целевая функция x_2	2	1	0	4	-2
		2	-1	1	2	-1
		8	8	0	-4	4
3-й шаг	Целевая функция x_2 x_4	6	5	0	3	0
		4	1	1	1	0
		2	2	0	-1	1

При вычислениях учитываем, что разрешающий элемент в первой строке, соответствующей целевой функции, выбирать нельзя.

В результате всех преобразований задача примет вид:

$$\begin{aligned} z(x) &= 5x_1 + 3x_3 - 6 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 &= 2, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как переменные x_2 и x_4 неотрицательные, то отбросив их можно записать задачу в симметричном виде:

$$\begin{aligned} z(x) &= 5x_1 + 3x_3 - 6 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_3 &\leq 4, \\ 2x_1 - x_3 &\leq 2, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

12.3. Методы решения задач линейного программирования

12.3.1. Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} Z &= C_1x_1 + C_2x_2 \rightarrow \max (\min), \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq (\geq) a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq (\geq) a_{20}, \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leq (\geq) a_{m0}, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(неравенства в системе ограничений могут содержать знаки $\leq$ или $\geq$).

Если задача задана в стандартной форме (все ограничения-неравенства), то решение задачи происходит по следующим этапам:

а) строим прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях задачи знаков неравенств на знаки равенств, т. е.

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_{10},$$

$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_{20},$$

. . .

$$(m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = a_{m0},$$

б) находим полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи. Для этого, например, в первое неравенство подставляют координаты любой точки, не лежащей на прямой (1). Если координаты этой точки удовлетворяют первому неравенству, то заштриховывают ту полуплоскость, где находится точка, а если нет, то противоположную относительно прямой (1) полуплоскость. Пересечение всех полуплоскостей дает область возможных решений (ОВР);

в) из этой области выделяем область допустимых решений (ОДР), т.е. пересечение области допустимых решений и первой четверти, где $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Таким образом, находим ОДР. Если ОДР пуста, то задача линейного программирования решений не имеет;

г) строим вектор-градиент целевой функции $Z = C_1x_1 + C_2x_2$, равный $\vec{N} = (C_1; C_2)$;

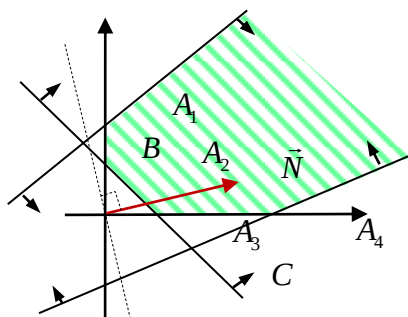
д) строим линию уровня $k = C_1x_1 + C_2x_2$, перпендикулярно вектору градиенту (k – константа). Линий уровня бесконечно много и они все параллельны между собой;

е) передвигая линию уровня в направлении вектора $\vec{N}$, находим точку «входа» в ОДР – это точка минимума, и точку «выхода» из ОДР – это точка максимума;

ж) определяем координаты точки минимума или максимума (в зависимости от условия задачи) аналитически и вычисляем значение целевой функции Z в этой точке.

Приведем основные виды ОВР и ОДР.

1.



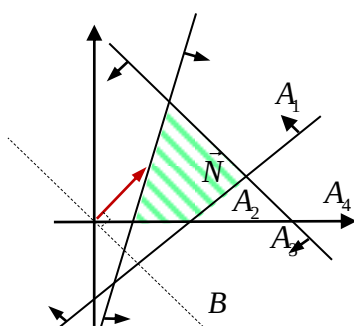
ОВР – открытый многоугольник BSA_4 ,

ОДР – открытый многоугольник $A_1A_2A_3A_4$,

$Z_{\min}$ достигается в точке A_2 ,

$Z_{\max} \rightarrow +\infty$.

2.



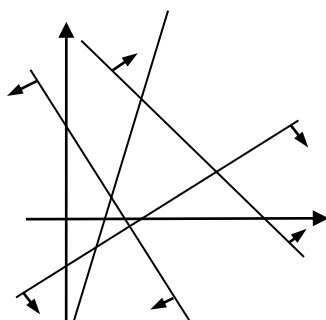
ОВР – треугольник BA_1A_4 ,

ОДР – многоугольник $A_1A_2A_3A_4$,

$Z_{\min}$ достигается в точке A_2 ,

$Z_{\max}$ во всех точках отрезка $[A_1; A_2]$, т.е. оптимальных решений бесконечное множество, причем $X = (1-t)A_1 + tA_4$, $0 \leq t \leq 1$.

3.



ОВР и ОДР являются пустыми множествами, задача не имеет решения в виду несовместности системы ограничений.

Пример. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max (\min),$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_2 \leq 3. \end{cases}$$

Решение. Построим область допустимых решений. Каждое неравенство в системе ограничений заменяем на равенство. В прямоугольной декартовой

системе координат x_1Ox_2 строим прямые

$$(1) \quad x_1 - x_2 = -2 \qquad (2) \quad 3x_1 - 2x_2 = 6$$

$$(3) \quad 2x_1 + x_2 = 2 \qquad (4) \quad x_2 = 3$$

Для того чтобы построить прямую достаточно знать координаты двух точек этой прямой. Прямые зададим таблично.

$$(1) \quad x_1 - x_2 = -2$$

x_1	0	-2
x_2	2	0

$$(2) \quad 3x_1 - 2x_2 = 6$$

x_1	0	2
x_2	-3	0

$$(3) \quad 2x_1 + x_2 = 2$$

x_1	0	1
x_2	2	0

$$(4) \quad x_2 = 3 - \text{прямая параллельна оси } Ox_1$$

Построив прямые, находим полуплоскости, определяемые данными неравенствами.

Так как первая прямая не проходит через начало координат, то подставим координаты точки $O(0;0)$ в первое неравенство, получим $0 - 0 \geq -2$, $0 \geq -2$ (верно), следовательно, первое неравенство определяет полуплоскость, лежащую ниже прямой (1).

Так как вторая прямая не проходит через начало координат, то подставим координаты точки $O(0;0)$ во второе неравенство, получим $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \leq 6$, $0 \leq 6$ (верно), следовательно, второе неравенство определяет полуплоскость, лежащую выше прямой (2).

Так как третья прямая не проходит через начало координат, то подставим координаты точки $O(0;0)$ в третье неравенство, получим $2 \cdot 0 + 0 \geq 2$, $0 \geq 2$ (не верно), следовательно, третье неравенство определяет полуплоскость, лежащую выше прямой (3).

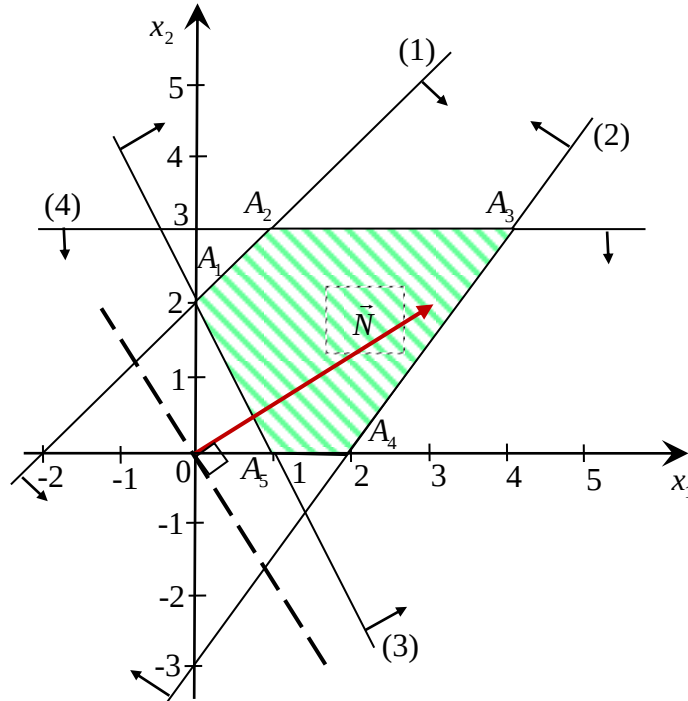
Четвертое неравенство определяет полуплоскость, лежащую ниже прямой (4).

Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности. Заштрихованный многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$

является областью допустимых решений (ОДР).

Строим вектор градиент $\bar{N} = (3; 2)$.

Строим линию уровня $3x_1 + 2x_2 = 0$ перпендикулярно вектору $\bar{N}$.



По условию задачи нужно найти максимум и минимум функции Z . Передвигая линию уровня параллельно самой себе в направлении возрастания вектора градиента, находим точку «входа» в ОДР – это точка A_5 . Найденная точка является точкой минимума. Найдём координаты точки A_5 аналитически. Эта точка является пересечением прямых (3) и $x_2 = 0$. Решим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2; \\ x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $A_5(1;0)$. Вычислим значение целевой функции в этой точке. $Z_{\min}(1;0) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3$.

Аналогично, находим точку «выхода» из ОДР – это точка A_3 . Найденная точка является точкой максимума.

Найдём координаты точки A_3 аналитически. Эта точка является пересечением прямых (2) и (4). Составим и решим систему, состоящую из

второго и четвертого уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 6; \\ x_2 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4; \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, $A_3(4;3)$. Вычислим значение целевой функции в этой точке. $Z_{\max}(4;3) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 = 18$.

Ответ: $Z_{\min}(1;0)=3$, $Z_{\max}(4;3)=18$.

12.3.2. Симплексный метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования

[illegible]

1. Прежде чем решать задачу симплексным методом, надо проверить, что правые части системы ограничений неотрицательны, т.е. $a_{i0} \geq 0$. Если это не так, то в соответствующем ограничении меняем знак.

2. Далее исходную задачу надо записать в канонической форме, если она не имеет такой формы записи. Для этого каждое ограничение – неравенство вида " $\leq$ " надо превратить в равенство добавлением дополнительной неотрицательной (балансовой) переменной, а каждое ограничение – неравенство вида " $\geq$ " превратить в равенство вычитанием балансовой переменной. Таким образом, все ограничения в задаче будут уравнения с неотрицательными правыми частями.

3. Далее систему уравнений при помощи симплексных преобразований надо привести к единичному базису, т.е. найти исходное опорное решение X_1 .

4. Для того, чтобы проверить будет ли это решение оптимальным, надо составить оценочную строку (Z – строку) по следующему правилу:

$$Z_j = C_{\bar{\sigma}a3} \cdot A_j - C_j, \quad j=0,1,\dots,n,$$

где Z_j – искомый элемент Z – строки; $C_{\text{баз}}$ – столбец коэффициентов целевой функции при базисных переменных; A_j – столбец коэффициентов при неизвестном x_j ; A_0 – столбец свободных членов; $C_{\text{баз}} \cdot A_j$ – скалярное произведение указанных столбцов – векторов; C_j – коэффициент целевой функции при неизвестном x_j .

5. *Для задачи на максимум.* Если в Z – строке все элементы положительные $Z_j \geq 0$, то найдено оптимальное решение $X_{\text{max}} = X_1$, $Z_{\text{max}} = Z_0$. Если же в Z – строке есть хоть один отрицательный элемент, то найденное решение не оптимально. Есть возможность его улучшения. Для этого среди отрицательных элементов Z – строки находим минимальный (например, Z_p). Столбец с номером p становится разрешающим. Разрешающую строку выбираем по симплексным преобразованиям (для этого в симплексной таблице заводится последний столбец). В столбце с номером p в качестве разрешающего элемента берется положительный элемент, если он один. Если в этом столбце положительных элементов несколько, то берется тот из них, для которого отношение свободных членов к этим положительным элементам будет наименьшее. Если в столбце с номером p вообще нет положительных элементов, то задача не имеет оптимального решения и $Z_{\text{max}} \rightarrow \infty$. После того, как разрешающий элемент найден, производим расчеты по методу Гаусса, включая и элементы Z – строки. Получаем новое опорное решение. После этого возвращаемся к началу пункта 5.

6. *Для задачи на минимум.* Если в Z – строке все элементы $Z_j \leq 0$, то найдено оптимальное решение $X_{\text{min}} = X_1$, $Z_{\text{min}} = Z_0$. Если же в Z – строке есть хоть один положительный элемент, то найденное решение не оптимально. Для улучшения решения среди положительных элементов Z – строки находим максимальный (например, Z_q). Столбец с номером q становится

разрешающим. Разрешающую строку ищем по симплексным преобразованиям (смотреть задачу на максимум.) Если в столбце с номером q нет положительных элементов, то задача не имеет оптимального решения и $Z_{\min} \rightarrow -\infty$. После того, как разрешающий элемент выбран, выполняем расчеты по методу Гаусса, включая и элементы Z – строки, и получаем новое опорное решение. Переходим к началу пункта 6. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение или пока не убедимся, что его нет.

Пример. Решить следующую задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} z(x) &= 7x_1 - 5x_2 + 10x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 24, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду. В левую часть каждого неравенства типа " $\leq$ " добавляем новые дополнительные переменные x_4, x_5, x_6 (новые балансовые переменные). Таким образом, задача примет вид

$$\begin{aligned} z(x) &= 7x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 12, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 24, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

Составляем симплексную таблицу.

$C_{\text{базис}}$	Базис	a_{i0}	7	-5	10	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_{ij}
0	x_4	12	2	-2	3	1	0	0	—
0	x_5	2	-1	①	-1	0	1	0	2:1=2 – min
0	x_6	24	2	1	2	0	0	1	24:1=24
	z	0	-7	<u>5</u>	-10	0	0	0	
	x_4	16	0	0	1	1	2	0	
	x_2	2	-1	1	-1	0	1	0	
	x_6	22	3	0	3	0	-1	1	
	z	-10	-2	0	-5	0	-5	0	

Если есть исходное опорное решение, то составляем оценочную Z – строку по следующему правилу: $Z_j = C_{\text{баз}} \cdot A_j - C_j$, $j = 0, 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \cdot 12 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 24 = 0, & z_1 &= 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 - 7 = -7, \\ z_2 &= 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - (-5) = 5, & z_3 &= 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 - 10 = -10, \\ z_4 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0, & z_5 &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0, \\ z_6 &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Если среди z_j есть одно положительное число, то столбик, в котором содержится этот элемент, выбираем в качестве разрешающего. Разрешающий элемент выбираем по методу минимального элемента (a_{i0} / a_{ij}).

Далее вычисления производим по методу Жордана – Гаусса.

Если все $z_j \leq 0$, то найденное решение оптимально, при этом $X_{\text{opt}} = (0; 2; 0; 16; 0; 22)$, $Z_{\text{min}} = -10$. Исходная задача имела три переменных, поэтому в ответе в оптимальном решении последние три дополнительные переменные не записываем.

Ответ: $X_{\text{opt}} = (0; 2; 0)$, $Z_{\text{min}} = -10$.

Пример. Решить задачу линейного программирования симплексным методом

$$\begin{aligned} z(x) &= 3x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду, для этого введем две новые балансовые неотрицательные переменные x_4 и x_5 .

$$z(x) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Составляем симплексную таблицу.

$C_{\text{базис}}$	Базис	a_{i0}	3	-1	-4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	x_4	1	0	-1	1	1	0	—
		2	-5	(1)	1	0	0	2:1=2 – min
		3	-8	1	2	0	-1	3:1=3
	x_4	3	-5	0	2	1	0	3:2=1,5
	x_2	2	-5	1	1	0	0	2:1=2
		1	-3	0	(1)	0	-1	1:1=1 – min
0	x_4	1	(1)	0	0	1	2	1:1=1
-1	x_2	1	-2	1	0	0	1	—
-4	x_3	1	-3	0	1	0	-1	—
	z	-5	<u>11</u>	0	0	0	3	
	x_1	1	1	0	0	1	2	
	x_2	3	0	1	0	2	5	
	x_3	4	0	0	1	4	5	
	z	-16	0	0	0	-11	-19	

Таким образом, получаем $X_{\text{opt}} = (1; 3; 4; 0; 0)$, $Z_{\text{min}} = -16$. Поскольку исходная задача содержит три переменные x_1, x_2, x_3 , то решением исходной системы является $X_{\text{opt}} = (1; 3; 4)$, $Z_{\text{min}} = -16$.

Ответ: $X_{\text{opt}} = (1; 3; 4)$, $Z_{\text{min}} = -16$.

12.4. Теория двойственности

Любой задаче линейного программирования, называемой *исходной* или *прямой*, можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется *двойственной* или *сопряженной*. Обе эти задачи образуют пару двойственных (или сопряженных) задач. Каждая из задач является двойственной к другой задаче рассматриваемой пары.

В теории двойственности используются четыре пары двойственных задач (приведем их в матричной форме записи):

Исходная задача	Двойственная задача
<i>Симметричные пары</i>	
1 $Z(X) = CX \rightarrow \max,$ $AX \leq A_0,$ $X \geq 0;$	$T(Y) = YA_0 \rightarrow \min,$ $YA \geq C,$ $Y \geq 0.$
2 $Z(X) = CX \rightarrow \min,$ $AX \geq A_0,$ $X \geq 0;$	$T(Y) = YA_0 \rightarrow \max,$ $YA \leq C,$ $Y \geq 0.$

Исходная задача	Двойственная задача
<i>Несимметричные пары</i>	
3 $Z(X) = CX \rightarrow \max,$ $AX = A_0,$ $X \geq 0;$	$T(Y) = YA_0 \rightarrow \min,$ $YA \geq C.$
4 $Z(X) = CX \rightarrow \min,$ $AX = A_0,$ $X \geq 0;$	$T(Y) = YA_0 \rightarrow \max,$ $YA \leq C.$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{m0} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$

12.4.1. Правила составления двойственных задач

1. Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными – в левой.
2. Ограничения – неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.
3. Если знаки неравенств в ограничениях исходной задачи « $\leq$ », то целевая функция $Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ должна максимизироваться, а если « $\geq$ », то минимизироваться.
4. Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в

двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестное, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.

5. Целевая функция двойственной задачи имеет вид

$$T(Y) = c_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_n y_n,$$

где c_0 – свободный член целевой функции $Z(X)$ исходной задачи, $b_1, b_2, \dots, b_m$ – свободные члены в ограничениях исходной задачи, при этом b_i – свободный член именно того ограничения исходной задачи, которому соответствует неизвестная y_i , а $y_1, y_2, \dots, y_n$ неизвестные в двойственной задаче.

6. Целевая функция $T(Y)$ двойственной задачи должна оптимизироваться противоположным по сравнению с $Z(X)$ образом, т.е. если $Z(X) \rightarrow \max$, то $T(Y) \rightarrow \min$, и если $Z(X) \rightarrow \min$, то $T(Y) \rightarrow \max$.

7. Каждому неизвестному x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ исходной задачи соответствует ограничение в двойственной задаче. Совокупность этих n ограничений (вместе с условиями неотрицательности неизвестных y_i , соответствующих ограничениям-неравенствам исходной задачи) образует систему ограничений двойственной задачи. Все ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств, свободные члены которых находятся в правых частях, а члены с неизвестными $y_1, y_2, \dots, y_m$ – в левых. Все знаки неравенств имеют вид « $\geq$ », если $T(Y) \rightarrow \min$, и « $\leq$ », если $T(Y) \rightarrow \max$.

Коэффициенты, с которыми неизвестные $y_1, y_2, \dots, y_m$ входят в ограничение, соответствующее неизвестному x_j , совпадают с коэффициентами при этом неизвестном x_j в ограничениях исходной задачи, а именно: коэффициент при y_i совпадает с тем коэффициентом при x_j , с которым x_j входит в ограничение исходной задачи, соответствующее неизвестному y_i .

Пример. Составить задачу, двойственную к данной

$$\begin{aligned} Z(X) &= 2x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 5, \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 \geq 0, \\ x_1 - 4x_2 \geq 1, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Решение. Используем общие правила составления двойственных задач. Поскольку исходная задача на «минимум», то все ограничения в системе ограничений должны содержать знак « $\geq$ ». Умножим первое ограничение – неравенство на -1 . Задача примет вид одной из задач симметричной пары двойственных задач.

$$\begin{aligned} Z(X) &= 2x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq -5, \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 \geq 0, \\ x_1 - 4x_2 \geq 1, \end{cases} & \begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Так как система ограничений исходной задачи содержит три ограничения, то двойственная задача будет содержать три переменные: y_1 , y_2 и y_3 .

Умножим правые части ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим целевую функцию

$$T(Y) = -5y_1 + y_3 \rightarrow \max.$$

Функция $T(Y)$ максимизируется, так как целевая функция исходной задачи минимизируется.

Умножим коэффициенты при x_1 в системе ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим $-y_1 + 5y_2 + y_3$. Данная сумма меньше или равна коэффициенту при x_1 в целевой функции $-y_1 + 5y_2 + y_3 \leq 2$. Неравенство имеет вид « $\leq$ », потому что целевая функция двойственной задачи максимизируется. Аналогично составляют ограничение двойственной задачи для переменных x_2 и x_3 :

$$-2y_1 + 3y_2 - 4y_3 \leq 1,$$

$$4y_1 - 7y_2 \leq -3.$$

Все переменные двойственной задачи удовлетворяют условию неотрицательности, так как все ограничения исходной задачи – неравенства.

Таким образом, искомая двойственная задача имеет вид.

$$T(Y) = -5y_1 + y_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -y_1 + 5y_2 + y_3 \leq 2, \\ -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 \leq 1, \\ 4y_1 - 7y_2 \leq -3, \\ y_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Пример. Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = 3x_1 - x_3 + 5x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4 \geq -5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 4. \end{cases}$$

Решение. Используем общие правила составления двойственных задач. Умножим первое ограничение – неравенство на -1 . Задача примет вид одной из задач несимметричной пары двойственных задач.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \end{cases} \quad \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \end{array}$$

Если система ограничений исходной задачи имеет два ограничения, то двойственная задача будет содержать две переменные: y_1 и y_2 .

Умножим правые части ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим целевую функцию

$$T(Y) = 5y_1 + 3y_2 \rightarrow \min.$$

Функция $T(Y)$ минимизируется, так как целевая функция исходной задачи максимизируется.

Умножим коэффициенты при x_1 в системе ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим

$-y_1 + 3y_2$. Данная сумма больше или равна коэффициенту при x_1 в целевой функции $-y_1 + 3y_2 \geq 3$. Неравенство имеет вид « $\geq$ », потому что целевая функция двойственной задачи минимизируется. Аналогично составляют ограничение двойственной задачи для переменной x_2 :

$$\begin{cases} -y_1 + 3y_2 \geq 3, \\ y_1 + 2y_2 \geq 0, \\ 4y_1 - 5y_2 = -1, \\ 5y_1 + y_2 \geq 5. \end{cases}$$

Третье ограничение в системе ограничений двойственной задачи является равенством, так как третья переменная исходной задачи не удовлетворяет условию неотрицательности, т.е. может быть любого знака.

Первая переменная двойственной задачи удовлетворяет условию неотрицательности, так как первое ограничение исходной задачи – неравенство, а вторая переменная может быть любого знака, т.к. второе ограничение – равенство.

$$y_1 \geq 0.$$

Таким образом, двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned} T(Y) &= 5y_1 + 3y_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -y_1 + 3y_2 \geq 3, \\ y_1 + 2y_2 \geq 0, \\ 4y_1 - 5y_2 = -1, \\ 5y_1 + y_2 \geq 5, \end{cases} \\ y_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Установить взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач позволяют теоремы двойственности. Решив одну из пары двойственных задач, можно или найти оптимальное решение другой задачи, не решая ее, или установить его отсутствие.

Возможны следующие случаи:

- обе задачи из пары двойственных имеют оптимальные решения;

- одна из задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, а другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

12.4.2. Первая и вторая теоремы двойственности

Первая теорема двойственности.

1. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и двойственная к ней имеет оптимальное решение; причем значения целевых функций задач на своих оптимальных решениях совпадают.

2. Если одна из пары двойственных задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Пусть имеется симметричная пара двойственных задач

$$\begin{aligned} Z(X) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, & T(Y) &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. & y_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Вторая теорема двойственности.

Для того чтобы допустимые решения $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ являлись оптимальными решениями пары, двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{aligned} x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j \right) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Иначе, если при подстановке оптимального решения в систему ограничений i -е ограничение исходной задачи выполняется как строгое неравенство, то i -я координата оптимального решения двойственной задачи равна нулю, и, наоборот, если i -я координата оптимального решения двойственной задачи

отлична от нуля, то i -е ограничение исходной задачи удовлетворяется оптимальным решением как равенство.

Пример. Составить задачу, двойственную к данной, решить ее и найти решение исходной задачи.

$$\begin{aligned} Z(X) &= 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 3, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Решение. Преобразуем систему ограничений, получим

$$\begin{aligned} Z(X) &= 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 3, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Используя вторую симметричную пару двойственных задач, составляем задачу двойственную к исходной:

$$\begin{aligned} T(Y) &= y_1 - y_2 + 3y_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 6, \\ y_1 + y_2 - y_3 \leq 2, \end{cases} \\ y_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Найдем решение полученной задачи симплексным методом. Для составления симплекс-таблицы запишем двойственную задачу в каноническом виде.

$$\begin{aligned} T(Y) &= y_1 - y_2 + 3y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 2, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 + y_5 = 6, \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_6 = 2, \end{cases} \\ y_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

$C_{\text{базис}}$	Базис	a_{i0}	1	-1	3	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	2	-1	2	(1)	1	0	0	2:1=2 – min
0	y_5	6	1	3	1	0	1	0	6:1=6
0	y_6	2	1	1	-1	0	0	1	–
	T	0	-1	1	-3	0	0	0	
	y_3	2	-1	2	1	0	0	0	–
	y_5	4	(2)	1	0	-1	1	0	4:2=2
	y_6	4	0	3	0	1	0	1	–
	T	6	-4	7	0	3	0	0	
	y_3	4	0	5/2	1	-1/2	1/2	0	
	y_1	2	1	1/2	0	-1/2	1/2	0	
	y_6	4	0	3	0	1	0	1	
	T	14	0	9	0	1	2	0	

Оптимальное решение двойственной задачи, записанной в канонической форме, имеет вид $Y = (2; 0; 4; 0; 0; 4)$. Значение целевой функции $T_{\max}(Y) = 14$. Базисными являются переменные y_1 , y_3 и y_6 . Согласно первой теореме двойственности, если двойственная задача имеет решение, то и исходная задача также имеет решение. Значение целевой функции исходной задачи $Z_{\min}(X) = T_{\max}(Y) = 14$.

Оптимальное решение исходной задачи можно найти по формуле

$$x_j = z_j + c_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Для этого к оценкам, расположенным в T – строке последней таблицы, соответствующим базисным переменным y_4 , y_5 , y_6 начального опорного решения, необходимо прибавить соответствующие коэффициенты целевой функции.

$$x_1 = 1 + 0 = 1, \quad x_2 = 2 + 0 = 2, \quad x_3 = 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, оптимальное решение исходной задачи $X = (1; 2; 0)$.

Ответ: $Y = (2; 0; 4)$, $T_{\max}(Y) = 14$, $X = (1; 2; 0)$, $Z_{\min}(X) = 14$.

Пример. Составить задачу, двойственную к данной, решить ее и найти решение исходной задачи.

$$\begin{aligned} Z(X) &= 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 10x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Решение. Составим двойственную задачу по отношению к данной, получим

$$\begin{aligned} T(Y) &= 3y_1 + 10y_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -y_1 + 2y_2 \leq 6, \\ y_1 - y_2 \leq 4, \\ -y_1 - y_2 \leq -2, \\ y_1 + 2y_2 \leq 10, \end{cases} \\ \forall y_i, \quad i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Переменные y_i , $i=1,2$ могут принимать любые значения, так как все ограничения в системе ограничений исходной задачи являются равенствами. Получили несимметричную пару двойственных задач.

Решим двойственную задачу графическим методом.

$$(1) \quad -y_1 + 2y_2 = 6$$

y_1	0	-6
y_2	3	0

$$(2) \quad y_1 - y_2 = 4$$

y_1	0	4
y_2	-4	0

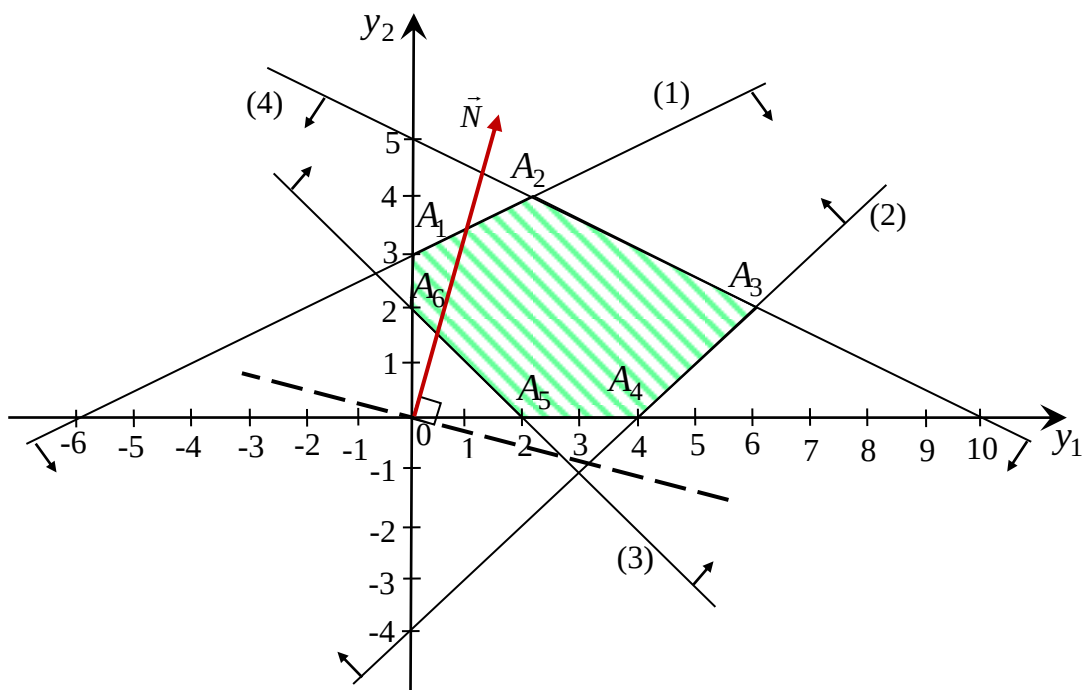
$$(3) \quad -y_1 - y_2 = -2$$

y_1	0	2
y_2	2	0

$$(4) \quad y_1 + 2y_2 = 10$$

y_1	0	10
y_2	5	0

В плоскости y_1Oy_2 строим область допустимых решений, вектор-градиент целевой функции $\vec{N}(3;10)$, линию уровня $3y_1 + 10y_2 = 0$. Так как двойственная задача на «максимум», то, передвигая линию уровня в направлении возрастания вектора – градиента, определяем точку «выхода» из ОДР. В этой точке целевая функция будет достигать своего максимума.



Областью допустимых решений является многоугольник $A_1A_2A_3A_4$. Точка «выхода» – A_2 . Найдём координаты точки $A_2 = (1) \cap (4)$. Составим и решим систему

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 6, \\ y_1 + 2y_2 = 10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальное решение двойственной задачи $Y = (2; 4)$,
 $T_{\max}(Y) = T(2; 4) = 3 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 46$.

Найдём решение исходной задачи. Подставим оптимальное решение $Y = (2; 4)$ в систему ограничений двойственной задачи, получим

$$\begin{cases} -2 + 2 \cdot 4 = 6, \\ 2 - 4 < 4, \\ -2 - 4 < -2, \\ 2 + 2 \cdot 4 = 10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

Второе и третье ограничения выполняются как строгие неравенства. Согласно второй теореме двойственности соответствующие переменные оптимального решения исходной задачи равны нулю, т.е. $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Учитывая это, найдём оптимальное решение из системы ограничений исходной

задачи

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_4 = 10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_4 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, получаем $X = (1; 0; 0; 4)$, $Z_{\min}(X) = T_{\max}(Y) = 46$.

Ответ: $Y = (2; 4)$, $T_{\max}(Y) = 46$, $X = (1; 0; 0; 4)$, $Z_{\min}(X) = 46$.

Глава 13. Транспортная задача линейного программирования

Транспортные задачи представляют собой специальный класс задач линейного программирования. В этих задачах обычно описывается перемещение какого-либо товара из пунктов отправления (мест производства) в пункты назначения (склады, магазины). Основная цель состоит в определении объема перевозок из пунктов отправления в пункты назначения с минимальной суммарной стоимостью перевозок. При этом должны учитываться ограничения, налагаемые на объем грузов в пункте назначения (ограничения предложения) и ограничения, учитывающие потребность в грузах в пунктах назначения (ограничения спроса). В транспортной задаче предполагается, что стоимость перевозки груза по какому-либо маршруту прямо пропорциональна объёму груза, перевозимого по этому маршруту.

Несмотря на то, что транспортная задача может быть решена как обыкновенная задача линейного программирования, ее специфическая структура позволяет использовать для решения упрощённый алгоритм.

13.1. Линейная транспортная задача

Транспортная задача – это задача о перевозке некоторого груза от m поставщиков к n потребителям. Обычно условия транспортной задачи задаются в таблице.

$A \setminus B$	b_1	b_2	b_3		b_n
a_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}		C_{1n}
a_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}		C_{2n}
.....					
a_n	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}		C_{mn}

В этой таблице:

a_i – запас груза у поставщика A_i ;

b_j – потребность в грузе у потребителя B_j ;

C_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от поставщика к потребителю (тариф перевозки).

Если суммарный запас равен суммарным потребностям, т.е. $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$,

то имеем *закрытую модель* транспортной задачи. Если нет, то *открытую модель*.

13.1.1. Алгоритм решения транспортной задачи с правильным балансом

Рассмотрим решение закрытой модели транспортной задачи.

1. Как и при решении ЗЛП симплексным методом, определение оптимального плана транспортной задачи начинают с нахождения исходного опорного плана. Этот план наиболее рационально находить *методом минимального элемента* (существуют и другие методы его нахождения). Для этого в таблице тарифов выбираем минимальный (например C_{ij}), и в клетку, которая ему соответствует, помещаем наименьшее из чисел a_i и b_j . Затем из рассмотрения исключаем либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы; либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены. Так на каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если клетка подлежит заполнению, но запасы равны нулю, то на этом шаге в соответствующую клетку заносится базисный нуль (0). Из оставшейся части таблицы снова выбираем минимальный тариф и т.д. до тех пор, пока все запасы не будут распределены, потребители удовлетворены. Если минимальных элементов несколько, то выбираем ту клетку, которой соответствует наибольшая перевозка. Таким образом, находим исходный опорный план. Этот опорный план должен содержать $(m + n - 1)$ занятую клетку.

2. Для проверки найденного плана на оптимальность используется *метод потенциалов*.

1.1. Для «занятых» клеток составляем систему уравнений $U_i + V_j = C_{ij}$, где U_i – потенциалы поставщиков, V_j – потенциалы потребителей. Получаем $(m+n-1)$ линейных уравнений с $(m+n)$ неизвестными. Такая система имеет множество решений. Чтобы найти любое из них, надо одной из переменных дать произвольное значение (например $U_1 = 0$). Находим значения остальных потенциалов.

1.2. Для «свободных» клеток находим числа $\Delta_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$. Если все $\Delta_{ij} \leq 0$, то найденный опорный план будет оптимальным. Если есть хотя бы один $\Delta_{ij} > 0$, то найденное решение не оптимально. Среди всех положительных Δ_{ij} находим одно максимальное (например, Δ_{pq}) и делаем перераспределение поставок груза относительно свободной клетки $(p; q)$. Если среди всех положительных Δ_{ij} имеется несколько одинаковых максимальных, то выбираем любое.

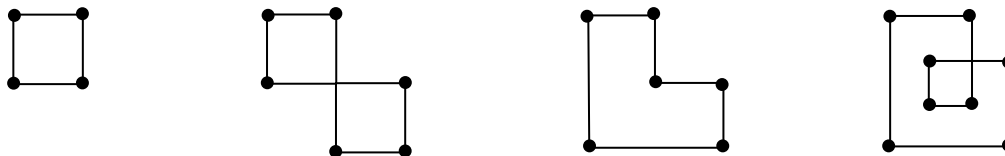
Перераспределение поставок в таблице условий транспортной задачи производится по циклу.

Цикл – это цепь, многоугольник, все вершины которого находятся в занятых клетках, углы прямые, число вершин четное. После того, как цикл пересчета построен, в вершинах цикла, начиная со свободной клетки $(p; q)$, ставим поочередно «+» и «-». Далее в «-» клетках находим минимальный груз λ , который прибавляем к грузам в «+» клетках и отнимаем от грузов в «-» клетках. Таким образом, свободная клетка $(p; q)$ становится занятой с грузом, а одна занятая клетка освобождается. Общее число занятых клеток в новом опорном плане должно сохраняться, т.е. $(m+n-1)$.

Этот новый план распределения поставок проверяем на оптимальность (переходим к пункту 2). Процесс продолжаем до тех пор, пока не получим, что

все $\Delta_{ij} \leq 0$. После того как оптимальный план перевозок будет найден, выпишем опорный план и находим минимальную стоимость перевозок.

Замечание. Основные виды циклов:



Пример. Имеется четыре пункта поставки однородного груза A_1, A_2, A_3, A_4 , в каждом из которых находится груз соответственно в количестве a_1, a_2, a_3, a_4 тонн и пять пунктов потребления этого груза B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 . В пункты B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 требуется доставить соответственно b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 тонн груза. Транспортные расходы при перевозке единицы груза из пункта A_i в пункт B_j равны c_{ij} . Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками, чтобы затраты по перевозкам были минимальными.

$a_1 = 12, a_2 = 17, a_3 = 18, a_4 = 13$ – пункты поставки груза,

$b_1 = 10, b_2 = 8, b_3 = 12, b_4 = 14, b_5 = 16$ – пункты потребления,

$$C = c_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 20 & 17 & 8 \\ 1 & 25 & 3 & 18 & 17 \\ 9 & 39 & 16 & 30 & 31 \\ 23 & 15 & 4 & 3 & 28 \end{pmatrix} - \text{тарифы.}$$

Решение. По условию задачи составим таблицу:

$\begin{matrix} b_j \\ a_i \end{matrix}$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	6	11	20	17	8	12
a_2	1	25	3	18	17	17
a_3	9	39	16	30	31	18
a_4	23	15	4	3	28	13
	10	8	12	14	16	

1. Найдем суммарный запас и суммарные потребности:

$$\sum_{i=1}^m a_i = 12 + 17 + 18 + 13 = 60, \quad \sum_{j=1}^n b_j = 10 + 8 + 12 + 14 + 16 = 60.$$

Так как суммарный запас равен суммарным потребностям, т.е. $60 = 60$, то имеем закрытую модель транспортной задачи.

2. Находим исходный опорный план методом минимального элемента.

Число занятых клеток должно равняться: $(m + n - 1) = 4 + 5 - 1 = 8$.

$b_j \backslash a_i$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	6	11	20	17	8	12
a_2	1 ~~—~~ 10	25	3 ~~—~~ 7	18	17	17
a_3	9 ~~—~~ +	39	16 ~~—~~ 8	30	31	18
a_4	23	15	4	3 ~~—~~ 13	28	13
	10	8	12	14	16	

Среди всех тарифов перевозки c_{ij} находим наименьший. В нашей задаче $c_{21} = 1$, в клетку $(2; 1)$ пишем наименьшее из чисел: запаса поставщика a_2 или потребности потребителя b_1 , т.е. $\min(10; 17) = 10$. Так как потребность первого потребителя b_1 полностью удовлетворили, то его исключаем из дальнейшего рассмотрения, а запас у поставщика a_2 остался равным $17 - 10 = 7$. Далее из оставшейся части таблицы снова выбираем наименьший тариф перевозки. И т.д. до тех пор, пока все запасы не будут распределены, потребители удовлетворены.

3. Проверяем найденный план на оптимальность методом потенциалов:

3.1 Для «занятых» клеток составляем уравнения $U_i + V_j = C_{ij}$:

$$\begin{cases} U_1 + V_5 = 8, \\ U_2 + V_1 = 1, \\ U_2 + V_3 = 3, \\ U_3 + V_2 = 39, \\ U_3 + V_3 = 16, \\ U_3 + V_4 = 30, \\ U_3 + V_5 = 31, \\ U_4 + V_4 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 0, \\ V_5 = 8, \\ U_3 = 23, \\ V_2 = 16, \\ V_3 = -7, \\ V_4 = 7, \\ U_2 = 10, \\ V_1 = -9, \\ U_4 = -4. \end{cases}$$

3.2 Для «свободных» клеток находим $\Delta_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$:

$$\Delta_{11} = 0 - 9 - 6 = -15 < 0, \quad \Delta_{31} = 23 - 9 - 9 = \underline{5} > 0, \quad \vee$$

$$\Delta_{13} = 0 - 7 - 20 = -27 < 0, \quad \Delta_{41} = -4 - 9 - 23 = -36 < 0,$$

$$\Delta_{14} = 0 + 7 - 17 = -10 < 0, \quad \Delta_{42} = -4 + 16 - 15 = -3 < 0,$$

$$\Delta_{22} = 10 + 16 - 25 = \underline{1} > 0, \quad \Delta_{43} = -4 - 7 - 4 = -15 < 0,$$

$$\Delta_{24} = 10 + 7 - 18 = -1 < 0, \quad \Delta_{45} = -4 + 8 - 28 = -24 < 0.$$

Строим в таблице цикл пересчета относительно клетки (3, 1). Он пойдет следующим образом $(3, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3)$.

Расставляем знаки «+» и «-» в вершинах цикла, начиная с клетки (3, 1). В «-» клетках ищем минимальный груз $\lambda = \min(10, 5) = 5$. Этот груз $\lambda = 5$ прибавляем к грузам в «+» клетках и отнимаем от грузов в «-» клетках.

Получаем новый план перевозок:

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	6	11	20	17	8 12	12
a_2	1- 5	25	3 12	18	17+ 12	17
a_3	9+ 5	39 8	16	30 1	31- 4	18
a_4	23	15	4	3 13	28	13
	10	8	12	14	16	

4. Проверяем найденный план на оптимальность методом потенциалов:

4.1 Для «занятых» клеток:

$$\begin{cases} U_1 + V_5 = 8, \\ U_2 + V_1 = 1, \\ U_2 + V_3 = 3, \\ U_3 + V_1 = 9, \\ U_3 + V_2 = 39, \\ U_3 + V_4 = 30, \\ U_3 + V_5 = 31, \\ U_4 + V_4 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 0, \\ V_5 = 8, \\ U_3 = 23, \\ V_1 = -14, \\ V_2 = 16, \\ V_4 = 7, \\ U_2 = 15, \\ V_3 = -12, \\ U_4 = -4. \end{cases}$$

4.2 Для «свободных» клеток:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 0 - 14 - 6 = -20 < 0, & \Delta_{25} &= 15 + 8 - 17 = \underline{6} > 0, & \checkmark \\ \Delta_{12} &= 0 + 16 - 11 = \underline{5} > 0, & \Delta_{33} &= 23 - 12 - 16 = -5 < 0, \\ \Delta_{13} &= 0 - 12 - 20 = -32 < 0, & \Delta_{41} &= -4 - 14 - 23 = -41 < 0, \\ \Delta_{14} &= 0 + 7 - 17 = -10 < 0, & \Delta_{42} &= -4 + 16 - 15 = -3 < 0, \\ \Delta_{22} &= 15 + 16 - 25 = \underline{6} > 0, & \Delta_{43} &= -4 - 12 - 4 = -20 < 0, \\ \Delta_{24} &= 15 + 7 - 18 = \underline{4} > 0, & \Delta_{45} &= -4 + 8 - 28 = -24 < 0. \end{aligned}$$

Строим в таблице цикл пересчета относительно клетки (2, 5). Он пойдет следующим образом (2, 5) → (2, 1) → (3, 1) → (3, 5).

Расставляем знаки «+» и «-» в вершинах цикла, начиная с клетки (2, 5).

В «-» клетках ищем минимальный груз $\lambda = \min(5, 4) = 4$. Этот груз $\lambda = 4$ прибавляем к грузам в «+» клетках и отнимаем от грузов в «-» клетках. Получаем новый план перевозок груза.

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	6	11 +	20	17	8 -	12
a_2	1 -	25	3	18	17 +	17
a_3	9 +	39 -	16	30 1	31	18
a_4	23	15	4	3 13	28	13
	10	8	12	14	16	

5. Проверяем найденный план на оптимальность:

5.1 Для «занятых» клеток:

$$\begin{cases} U_1 + V_5 = 8, \\ U_2 + V_1 = 1, \\ U_2 + V_3 = 3, \\ U_2 + V_5 = 17, \\ U_3 + V_1 = 9, \\ U_3 + V_2 = 39, \\ U_3 + V_4 = 30, \\ U_4 + V_4 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 0, \\ V_5 = 8, \\ U_2 = 9, \\ V_1 = -8, \\ V_3 = -6, \\ U_3 = 17, \\ V_2 = 22, \\ V_4 = 3, \\ U_4 = -10. \end{cases}$$

5.2 Для «свободных» клеток:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 0 - 6 - 8 = -14 < 0, & \Delta_{33} &= 17 - 6 - 16 = -5 < 0, \\ \Delta_{12} &= 0 + 22 - 11 = \underline{11} > 0, & \Delta_{35} &= 17 + 8 - 31 = -6 < 0, \\ \Delta_{13} &= 0 - 6 - 20 = -26 < 0, & \Delta_{41} &= 0 - 8 - 23 = -31 < 0, \\ \Delta_{14} &= 0 + 3 - 17 = -14 < 0, & \Delta_{42} &= 0 + 22 - 15 = \underline{7} > 0, \\ \Delta_{22} &= 9 + 22 - 25 = \underline{6} > 0, & \Delta_{43} &= 0 - 6 - 4 = -10 < 0, \\ \Delta_{24} &= 9 + 3 - 18 = -6 < 0, & \Delta_{45} &= 0 + 8 - 28 = -20 < 0. \end{aligned}$$

Строим в таблице цикл пересчета относительно клетки (1, 2). Он пойдет следующим образом (1,2) → (1,5) → (2,5) → (2,1) → (3,1) → (3,2).

Расставляем знаки «+» и «-» в вершинах цикла, начиная с клетки (1, 2). В

«-» клетках ищем минимальный груз $\lambda = \min(12, 1, 8) = 1$. Этот груз $\lambda = 1$ прибавляем к грузам в «+» клетках и отнимаем от грузов в «-» клетках. Получаем новый план перевозок груза

$b_j \backslash a_i$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	6	11 + 1	20	17	8 -	12
a_2	1	25	3 -	18	17 +	17
a_3	9 10	39 - 7	16 +	30 1	31	18
a_4	23	15	4	3 13	28	13
	10	8	12	14	16	

6. Проверяем найденный план на оптимальность:

6.1 Для «занятых» клеток:

$$\begin{cases} U_1 + V_2 = 11, \\ U_1 + V_5 = 8, \\ U_2 + V_3 = 3, \\ U_2 + V_5 = 17, \\ U_3 + V_1 = 9, \\ U_3 + V_2 = 39, \\ U_3 + V_4 = 30, \\ U_4 + V_4 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 0, \\ V_2 = 11, \\ V_5 = 8, \\ U_2 = 9, \\ V_3 = -6, \\ U_3 = 28, \\ V_4 = 2, \\ V_1 = -19, \\ U_4 = 2. \end{cases}$$

6.2 Для «свободных» клеток:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 0 - 19 - 6 = -15 < 0, & \Delta_{33} &= 28 - 6 - 16 = \underline{6} > 0, & \vee \\ \Delta_{13} &= 0 - 6 - 20 = -26 < 0, & \Delta_{35} &= 28 + 8 - 31 = \underline{5} > 0, \\ \Delta_{14} &= 0 + 2 - 17 = -15 < 0, & \Delta_{41} &= 1 - 19 - 23 = -41 < 0, \\ \Delta_{21} &= 9 - 19 - 1 = -11 < 0, & \Delta_{42} &= 1 + 11 - 15 = -3 < 0, \\ \Delta_{22} &= 9 + 11 - 25 = -5 < 0, & \Delta_{43} &= 1 - 6 - 4 = -9 < 0, \\ \Delta_{24} &= 9 + 2 - 18 = -7 < 0, & \Delta_{45} &= 1 + 8 - 28 = -19 < 0. \end{aligned}$$

Строим в таблице цикл пересчета относительно клетки $(3, 3)$.

Он пойдет следующим образом $(3,3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (2,5) \rightarrow (1,5) \rightarrow (1,2) \rightarrow (3,2)$.

Расставляем знаки «+» и «-» в вершинах цикла, начиная с клетки $(3, 3)$. В

«-» клетках ищем минимальный груз $\lambda = \min(11, 12, 7) = 7$. Этот груз $\lambda = 7$ прибавляем к грузам в «+» клетках и отнимаем от грузов в «-» клетках. Получаем новый план перевозок:

$b_j \backslash a_i$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	6	11 8	20	17	8 4	12
a_2	1	25	3 5	18	17 12	17
a_3	9 10	39 7	16	30 1	31	18
a_4	23	15	4	3 13	28	13
	10	8	12	14	16	

7. Проверяем найденный план на оптимальность:

7.1 Для «занятых» клеток:

$$\begin{cases} U_1 + V_2 = 11, \\ U_1 + V_5 = 8, \\ U_2 + V_3 = 3, \\ U_2 + V_5 = 17, \\ U_3 + V_1 = 9, \\ U_3 + V_3 = 16, \\ U_3 + V_4 = 30, \\ U_4 + V_4 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 0, \\ V_2 = 11, \\ V_5 = 8, \\ U_2 = 9, \\ V_3 = -6, \\ U_3 = 22, \\ V_4 = 8, \\ V_1 = -13, \\ U_4 = -5. \end{cases}$$

7.2 Для «свободных» клеток:

$$\Delta_{11} = 0 - 13 - 6 = -19 < 0,$$

$$\Delta_{32} = 22 + 11 - 39 = -6 < 0,$$

$$\Delta_{13} = 0 - 6 - 20 = -26 < 0,$$

$$\Delta_{35} = 22 + 8 - 31 = -1 < 0,$$

$$\Delta_{14} = 0 + 8 - 17 = -9 < 0,$$

$$\Delta_{41} = -5 - 13 - 23 = -41 < 0,$$

$$\Delta_{21} = 9 - 13 - 1 = -5 < 0,$$

$$\Delta_{42} = -5 + 11 - 15 = -9 < 0,$$

$$\Delta_{22} = 9 + 11 - 25 = -5 < 0,$$

$$\Delta_{43} = -5 - 6 - 4 = -15 < 0,$$

$$\Delta_{24} = 9 + 8 - 18 = -1 < 0,$$

$$\Delta_{45} = -5 + 8 - 28 = -15 < 0.$$

Так как все $\Delta_{ij} \leq 0$, то найденный план является оптимальным.

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 12 \\ 10 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Найдем минимальную стоимость перевозок

$$Z_{\min} = 11 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 17 \cdot 12 + 9 \cdot 10 + 16 \cdot 7 + 30 \cdot 1 + 3 \cdot 13 = 610.$$

Ответ: $Z_{\min} = 610$.

13.1.2. Особенности решения транспортных задач с неправильным балансом

Если суммарные запасы поставщиков превосходят суммарные запросы потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то необходимо ввести фиктивного $(n+1)$ -го потребителя, с запросами равными $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза.

Если суммарные запросы потребителей превосходят суммарные запасы поставщиков, т.е. $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то необходимо ввести фиктивного $(m+1)$ -го поставщика, с запасами равными $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза.

При составлении начального опорного решения в последнюю очередь следует распределять запасы фиктивного поставщика и удовлетворять запросы фиктивного потребителя несмотря на то, что им соответствует наименьшая стоимость перевозок, равная нулю.

13.2. Транспортная задача с ограничениями

При решении ТЗ иногда необходимо ограничить перевозки от l – го поставщика к k – му потребителю. Возможны ограничения двух типов:

а) $x_{lk} \geq a$;

б) $x_{lk} \leq b$.

Если $x_{lk} \geq a$, то необходимо сначала сократить (уменьшить) запасы l – го поставщика и запросы k – го потребителя на величину a , т.е. зарезервировать перевозку $x_{lk} = a$. В полученном оптимальном решении следует увеличить объем перевозки x_{lk} на величину a .

Если $x_{lk} \leq b$, то необходимо вместо k – го потребителя с запросами b_k ввести двух новых, один с номером k , с запросами $b'_k = b$, а другой с номером $(n+1)$, запросы которого $b_{n+1} = b_k - b$. Стоимости перевозок для этих потребителей остаются прежними, за исключением $c_{l(n+1)}$, которая принимается равной сколь угодно большому числу M един. ($M \gg 1$).

После получения оптимального решения величины грузов, перевозимых к $(n+1)$ – му потребителю прибавляют к величинам грузов k –го потребителя. Так как $c_{lk} = M$ самый большой тариф, то в оптимальном решении эта клетка останется не занятой и объем перевозки $x_{lk} \leq b$.

Пример. Решить транспортную задачу при дополнительных условиях: объем перевозки от второго поставщика второму потребителю должен быть не менее 200 ед., а от третьего первому – не более 300 ед.

Запасы поставщиков a_i	Запросы потребителей b_j		
	600	500	400
300	2	9	10
400	3	11	13
500	4	15	12

Решение. Для того, чтобы удовлетворить условию $x_{31} \leq 300$, вместо первого потребителя введем двух других: $b_1 = 300$ с прежними стоимостями перевозок; $b_4 = 600 - 300 = 300$, имеющий те же стоимости, что и первого

потребителя, за исключением $c_{34} = M$. После нахождения оптимального решения задачи объемы перевозок для четвертого потребителя необходимо прибавить к соответствующим объемам перевозок для первого потребителя.

Для того, чтобы удовлетворить условию $x_{22} \geq 200$, при решении задачи будем предполагать, что запасы второго поставщика и запросы второго потребителя меньше фактических на 200 ед., после получения оптимального решения объем перевозки x_{22} увеличиваем на 200 ед.

В результате указанных преобразований таблица исходных данных задачи будет иметь следующий вид:

$a_i \backslash b_j$	300	300	400	300
300	2	9	10	2
200	3	11	13	3
500	4	15	12	M

Далее задачу решаем обычным методом потенциалов. Так как суммарные запасы поставщиков – 1000, а суммарные потребности потребителей – 1300, то эта задача с неправильным балансом. Вводим фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1300 - 1000 = 300$.

Составляем начальное опорное решение X_1 методом минимальной стоимости и находим потенциалы:

$v_1 = 2 \quad v_2 = 0 \quad v_3 = 2 \quad v_4 = 2$				
$a_i \backslash b_j$	300	300	400	300
300	2 300	9	10	2 0*
200	3	11	13	3 200
500	4	10 300	12 200	M
300	0	0	0 200	0 100

$u_1 = 0$

$u_2 = 1$

$u_3 = 10$

$u_4 = -2$

Все оценки свободных клеток неположительные, за исключением $\Delta_{31} = 8$.

Для клетки (3, 1) строим цикл. Он состоит из клеток (3, 1), (1, 1), (1, 4), (4, 4), (4, 3), (3, 3). Находим величину груза для перераспределения по циклу, т.е. $\min(200, 100, 300) = 100$. Осуществляем сдвиг по циклу на величину, равную 100. Получаем новое опорное решение X_2 .

	$v_1 = 4$	$v_2 = 10$	$v_3 = 12$	$v_4 = 4$	
b_j	300	300	400	300	
a_i					
300	² 200	⁹	¹⁰	² 100	$u_1 = -2$
200	³	¹¹	¹³	³ 200	$u_2 = -1$
500	⁴ 100	¹⁰ 300	¹² 100	^M	$u_3 = 0$
300	⁰	⁰	⁰ 300	⁰	$u_4 = -12$

Если все оценки неположительные, решение X_2 оптимальное. Для записи оптимального решения увеличим объем перевозки x_{22} на 200ед. и объединим объемы перевозок четвертого потребителя с объемами перевозок первого потребителя.

Получим следующее решение $X^* = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 200 & 200 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix}$.

Глава 14. Теория игр и принятия решений

Теория игр – это раздел прикладной математики, изучает специфические задачи исследования операций. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущие борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу – в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

Математическая теория игр берёт своё начало в начале XX века, когда в своих работах Эммануил Ласкер (1868–1941), Эрнст Цермело (1871–1853) и Эмиль Борель (1871–1956) выдвинули идею математической теории конфликта интересов. Впервые обоснованные математические аспекты и приложения теории игр были изложены в 1944 году в книге Джона фон Неймана (1903–1957) и Оскара Моргенштерна (1902–1977) «*Theory of Games and Economic Behavior*». Развитие практических приложений теории игр прослеживается в трудах Джона Форбса Нэша (1928–2015), где он разработал принципы «управленческой динамики».

Математическая теория игр в настоящее время – стремительно развивающаяся наука. И если в XX веке большая часть исследований осуществлялось в области экономики, управления и военных наук, то XXI веке – это теоретические и практические разработки в области информационных технологий и искусственного интеллекта.

14.1. Основные понятия теории игр

В математике решая прикладные задачи, иногда приходится рассматривать события, на которые осознанно или случайным образом, одновременно или последовательно влияют два или более участников, цели которых могут быть не только различными, но и конфликтными.

Это могут быть взаимные действия следователя, прокурора, свидетеля и подозреваемого, взаимоотношения между конкурирующими на рынке

компаниями, подготовка политических партий к выборным компаниям, ведение противниками боевых действий, спортивные соревнования. Похожие ситуации также складываются и в классических играх, таких как «орел-решка», кости, лото, рулетка, шахматы, шашки, нарды, карточные игры.

Игра – это математическая модель конфликтной ситуации с участием не менее двух лиц, использующих несколько различных способов для достижения своих целей.

Если на ход игры влияют действия только двух участников, то такая игра называется *парной*. Если в парной игре выигрыш одного участника равен проигрышу другого, то игра называется *антагонистической*. В антагонистических играх достаточно задать величины выигрышей только одного игрока в различных ситуациях.

Любой способ действия игрока в зависимости от сложившейся ситуации называется *стратегией*. Каждый игрок располагает определенным набором стратегий. Если число стратегий конечно, то игра называется *конечной*, в противном случае – *бесконечной*. Стратегии называются *чистыми*, если каждый из игроков выбирает только одну стратегию определенным, а не случайным образом.

Решение игры заключается в выборе такой стратегии, которая удовлетворяет *условию оптимальности*. Это условие состоит в том, что первый игрок получит *максимальный выигрыш*, при условии, что второй придерживается стратегии, которая ему выгодна. И, соответственно, второй игрок получит *минимальный проигрыш* при использовании первым игроком своей. В этом случае стратегии игроков называются *оптимальными*.

Таким образом, *цель игры* сводится к определению оптимальных стратегий для каждого игрока.

Рассмотрим общепринятую классификацию игр.

По виду ходов игры	стратегические
	азартные
В зависимости от числа участников	парные
	множественные
По характеру взаимоотношений игроков	бескоалиционные
	коалиционные
	кооперативные
По количеству стратегий игроков	конечные
	бесконечные
По количеству информации	полной информацией
	неполной информацией
По виду описания	позиционные игры
	игры в нормальной форме
По сумме выигрышей всех игроков	игры с нулевой суммой
	игры с ненулевой суммой

14.2. Основные понятия матричной игры

14.2.1. Платежная матрица

Рассмотрим игру двух участников. Назовем участников данной игры *игроками*. В нашей игре каждый игрок имеет возможность выбора одного из нескольких возможных для него действий. Осознанные выборы игроком таких действий называется *стратегиями* данного игрока.

Пусть у первого игрока имеются m возможных для него стратегий, а второму игроку доступны n стратегий. Упорядочим наборы стратегий каждого игрока. Тогда если первый игрок выбрал i -тую стратегию, а второй игрок – j -тую стратегию, то выигрыш первого игрока составит a_{ij} , в то же время выигрыш второго игрока будет равен $-a_{ij}$.

Если $a_{ij} > 0$, то результат игры выгоден первому игроку, а если $a_{ij} < 0$, то результат выгоден второму. Можно, например, представить, что при $a_{ij} > 0$ первый игрок получает от второго денежную сумму или иные материальные ценности в размере a_{ij} , а в противном случае первый игрок отдает эти ценности второму игроку.

Данную игру можно однозначно определить матрицей:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (14.1)$$

В матричных играх эта матрица называется *платежной*. Строки платежной матрицы определяют стратегии первого игрока, а столбцы – стратегии второго.

Описанная игра состоит из партий. Каждая партия состоит в том, что каждый игрок делает по одному ходу одновременно, после чего происходит расплата. Количество партий конечно и заранее обговаривается. Цель игроков – получить наибольшую прибыль в ходе игры.

Заметим, что каждый игрок делает свои выборы осознанно. Кроме того, принято считать игроков разумными и способными выбирать наиболее выигрышные ходы.

В данной игре выигрыш (прибыль) первого игрока равен проигрышу (убыткам) второго игрока. Такая игра называется игрой с *нулевой суммой*.

Согласно нашей классификации, описанную игру можно определить, как стратегическую бескоалиционную парную конечную позиционную игру с полной информацией и нулевой суммой.

14.2.2. Максиминные и минимаксные стратегии

Рассмотрим матричную игру с позиции первого игрока. Назовем первого игрока именем A , а второго – B . Тогда значения элементов платежной матрицы будем интерпретировать как выигрыш игрока A и, соответственно, проигрыш игрока B .

Если первый игрок останавливает свой выбор на i -той стратегии, которой соответствует i -тая строка платежной матрицы (a_{ij}) , то второй игрок для получения наибольшего выигрыша возьмет стратегию, соответствующую столбцу j , в которой платеж его игроку A минимален.

Перебирая стратегии игрока A , выберем такую из них, при которой игрок

B , действуя с выгодой для себя, отдаст нам наибольшую сумму.

Эту величину

$$\alpha = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right) \quad (14.2)$$

будем называть *нижней ценой игры*, а соответствующую ей стратегию игрока A определим, как *максиминную*.

В свою очередь, Игрок B также выберет такую стратегию, в которой игрок A , действуя с максимальной выгодой для себя, получит наименьшую сумму.

Данную величину

$$\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right) \quad (14.3)$$

назовем *верхней ценой игры*, а соответствующую ей стратегию игрока B определим, как *минимаксную*.

Согласно данным определениям нижнюю цену игры можно представить, как минимальный гарантированный выигрыш игрока A . На самом деле, используя свою максиминную стратегию, игрок A при самом худшем для него ходе игрока B выиграет, по крайней мере, сумму α . В свою очередь верхняя цена игры – это максимальный гарантированный проигрыш игрока B . То есть, используя свою минимаксную стратегию, игрок B при самом худшем для него ходе игрока A проиграет, по крайней мере, сумму β .

Очевидно, что в матричных играх всегда выполняется неравенство $\alpha \leq \beta$.

В частном случае, когда $\alpha = \beta$, говорят, что игра имеет *седловую точку*. Значение $\alpha = \beta$ называют *ценой игры* и обозначают символом $v = \alpha = \beta$. Стратегии игроков A и B , соответствующие седловой точке, обеспечивают игроку A наибольший гарантированный выигрыш, не меньший цены игры v , а игроку B наименьший гарантированный проигрыш, не больший цены игры v . Такие стратегии являются наиболее выгодными для обоих игроков и называются *оптимальными чистыми стратегиями*.

14.2.3. Основная теорема теории игр

Теорема. В матричной игре с нулевой суммой каждый из игроков имеет оптимальные стратегии.

Можно отметить, что любую матричную игру можно интерпретировать, как пару взаимно двойственных задач линейного программирования.

Интересно отметить, что игры с полной информацией (когда игроки при каждом своем ходе знают результаты всех предыдущих ходов) имеют седловую точку, а значит, и решение в чистых стратегиях. В частности, играми с полной информацией являются шахматы, шашки, «крестики-нолики» и др. Оптимальные стратегии при игре в шахматы пока не найдены ввиду слишком большого числа стратегий, однако прогресс в области компьютерной техники позволяет прогнозировать решение этой задачи в обозримом будущем.

Пример. Найти нижнюю и верхнюю цену игры, если ее платежная матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1). Находим α – *нижнюю цену игры*. В каждой строке платежной матрицы определяем минимальный элемент

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right.$$

а затем выбираем наибольший из них $\alpha = \max\{2; 3; 1\} = 3$.

2). Находим β – *верхнюю цену игры*. Из столбцов платежной матрицы выбираем максимальные элементы

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\underline{\begin{array}{cccc} 4 & 4 & 6 & 5 \end{array}}$$

а затем выбираем наименьший из них тогда $\beta = \min\{4; 4; 6; 5\} = 4$.

Таким образом, нижняя цена матричной игры $\alpha = 3$, верхняя цена $\beta = 4$.

Пример. Найти нижнюю и верхнюю цену игры, если известна ее платежная матрица

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 6 & 5 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выпишем значения платежной матрицы в таблицу.

Для определения оптимальной стратегии игрока A добавим к платежной матрице столбец, содержащий минимальные значения α_i элементов матрицы по каждой строке. Выделим наибольшее из значений α_i . Наибольшему значению $\alpha_4 = 5$ соответствует стратегия A_4 . Выбирая данную стратегию, игрок A может быть уверен, что при самом худшем для него ходе игрока B он выиграет сумму $\alpha = 5$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	6	7	4	5	4
A_2	3	10	6	5	6	3
A_3	12	5	3	9	8	3
A_4	6	7	5	6	10	5

Для определения оптимальной стратегии игрока B добавим к платежной матрице строку, содержащую максимальные значения β_j элементов матрицы по каждому столбцу. Выделим наименьшее из значений β_j . Наименьшему значению $\beta_3 = 7$ соответствует стратегия B_3 . Выбирая данную стратегию, игрок B может быть уверен, что при самом худшем для него ходе игрока A он проиграет, по крайней мере, сумму $\beta = 7$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	6	7	4	5	4
A_2	3	10	6	5	6	3
A_3	12	5	3	9	8	3
A_4	6	7	5	6	10	5
β_i	12	10	7	9	10	

Подводя итог, получим: нижняя цена игры $\alpha = 5$, а верхняя цена игры $\beta = 7$.

Пример. Найти цену игры с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем платежную матрицу в виде таблицы и рассчитаем значения α_i и β_j .

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0	-1	-2	-2
A_2	3	2	-1	-1
A_3	6	3	0	0
β_i	6	3	0	

Согласно нашим расчетам нижняя цена игры равна $\alpha = 0$, а верхняя $\beta = 0$. Данная матричная игра также имеет седловую точку $\alpha = \beta = 0$. В данной игре для игрока A оптимальной стратегией является стратегия A_3 , а для игрока B – стратегия B_3 .

Таким образом, цена игры $v = 0$.

В матричных играх бывают случаи, когда платежная матрица имеет две и более седловых точек. В таких случаях можно говорить об эквивалентности выбора стратегий, которые соответствуют разным седловым точкам. Выбор соответствующей стратегии не повлияет на решение задачи.

Пример. Найти решение матричной игры с платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 6 \\ 8 & 4 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Элементы платежной матрицы поместим в таблицу и рассчитаем значения α_i и β_j .

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	6	9	6	6
A_2	8	4	3	4	3
A_3	7	6	8	6	6
β_j	8	6	9	6	

В результате расчетов получили значения нижней и верхней цен $\alpha = 6$, $\beta = 6$. Описываемая игра имеет четыре седловые точки, которым соответствуют стратегии: A_1B_2 , A_1B_4 , A_3B_2 и A_3B_4 . Независимо от выбора пары стратегий игроков A и B цена игры будет равна $v = 6$.

Таким образом, цена игры $v = 6$.

14.3. Использование чистых и смешанных стратегий

14.3.1. Равновесные стратегии

Игра, в которой каждый из противников применяет одну и только одну стратегию, называется *игрой в чистых стратегиях*. В этом случае используемые игроками стратегии называются *чистыми стратегиями*, а цену игры

$$v = \alpha = \beta \quad (14.4)$$

называют *чистой ценой игры*.

Пара стратегий (A_i, B_j) называется равновесной или устойчивой, если в матричной игре ни одному из игроков не выгодно отходить от своей стратегии.

Пример. Найти решение матричной игры с платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 & 8 \\ 10 & 9 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Элементы платежной матрицы поместим в таблицу и таблицы и рассчитаем.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	5	7	10	8	5
A_2	10	9	11	10	9
A_3	8	6	7	4	4
β_i	10	9	11	10	

Нижняя цена игры $\alpha = 9$, верхняя цена игры $\beta = 9$, то есть игра имеет седловую точку $v = 9$.

Предположим, что игрок A узнал, о том, что противник применяет стратегию B_2 , тогда он будет по-прежнему придерживаться своей стратегии A_2 , так как любое отступление игрока от выбранной стратегии только уменьшит его выигрыш.

Пусть игрок B знает, что игрок A применяет стратегию A_2 . Это не заставит его отступить от своей стратегии B_2 . В этой задаче игрокам в любом случае выгодно придерживаться выбранных стратегий A_2 и B_2 вне зависимости от поведения противника. Следовательно, пара стратегий (A_2, B_2) будет равновесной.

Ответ: Таким образом, решение матричной игры $v=9$.

14.3.2. Оптимальные чистые стратегии

Стратегии A_i и B_j , при которых выполняется равенство нижней и верхней цены игры, называются *оптимальными чистыми стратегиями*, а их совокупность – *решением игры*.

Признаком устойчивости (равновесности) пары стратегии является равенство нижней и верхней цены игры.

Если $v > 0$, то игра выгодна для игрока A , если $v < 0$ – для игрока B ; при $v = 0$ игра является одинаково выгодной для обоих участников.

Игра, решаемая в чистых стратегиях, является игрой с *полной информацией*.

Теорема. Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, а следовательно, решается в чистых стратегиях, т.е. имеется пара оптимальных чистых стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный v .

Если платежная матрица игры содержит седловую точку, то ее решение сразу же находится по принципу максимина.

14.3.3. Смешанные стратегии

Смешанной стратегией называется случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии с соответствующими им вероятностями. Смешанную стратегию игрока A удобно записывать в виде следующей подстановки

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix} \text{ или } S_A = \|p_1, p_2, \dots, p_m\|, \quad (14.5)$$

где $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_m \geq 0$,

$$\sum_{k=1}^m p_k = 1. \quad (14.6)$$

Аналогично, смешанную стратегию игрока B также удобно записывать в виде следующей подстановки

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \text{ или } S_B = \|q_1, q_2, \dots, q_n\|, \quad (7)$$

где $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_n \geq 0$,

$$\sum_{k=1}^n q_k = 1. \quad (8)$$

Очевидно, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии, так как чистой стратегии A_1 соответствует подстановка

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ или } S_A = \|1, 0, \dots, 0\|,$$

а чистой стратегии B_2 – подстановка

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ или } S_B = \|0, 1, \dots, 0\|.$$

В общем случае чистой стратегии A_i соответствует следующий набор вероятностей:

$$p_1 = 0, p_2 = 0, \dots, p_i = 1, \dots, p_m = 0,$$

а чистой стратегии B_j – набор вероятностей

$$q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_j = 1, \dots, q_n = 0.$$

Будем считать, что для соблюдения секретности каждый из игроков применяет свои стратегии независимо друг от друга.

Если игрок A применяет смешанную стратегию $S_A = \|p_1, p_2, \dots, p_m\|$, а игрок B смешанную стратегию $S_B = \|q_1, q_2, \dots, q_n\|$, то средний выигрыш игрока A определяется соотношением

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i \cdot q_j. \quad (14.9)$$

Очевидно что, ожидаемый проигрыш игрока B также можно вычислить по формуле (14.9).

Решением матричной игры в смешанных стратегиях называется набор (S_A, S_B, v) , состоящий из оптимальных смешанных стратегий S_A и S_B игроков A и B соответственно и цены игры v .

Если игрок A формирует свою стратегию S_A в соответствии с принципом максимина, то он должен выбрать такую стратегию, при которой минимально возможный выигрыш был бы максимален, т.е.

$$\max_i \min_j \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i \cdot q_j = v_A. \quad (14.10)$$

Аналогично, если игрок B формирует свою стратегию S_B в соответствии с принципом минимакса, то он должен выбрать такую стратегию, при которой максимально возможный выигрыш был бы минимален, т.е.

$$\min_j \max_i \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i \cdot q_j = v_B \quad (14.11)$$

Теорема о максимине. В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой матричной игры при $\alpha \neq \beta$ имеет место равенство

$$v_A = v_B. \quad (14.12)$$

Данная теорема показывает существование равновесия в случае $v_A = v_B$, при $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.

Теорема Неймана. Любая матричная игра в общем случае имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение в смешанных стратегиях и соответствующую цену v .

Чистая стратегия, которая входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, называется *активной стратегией*.

Таким образом, если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v , при условии, что второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

14.4. Решение игры с платежной матрицей 2x2

Рассмотрим матричную игру 2x2 с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (14.13)$$

1) Предположим, что игра (14.13) не имеет седловой точки, т.е. $\alpha \neq \beta$.

Найдем оптимальное решение $S_A = \|p_1, p_2\|$ в смешанных стратегиях для игрока A .

В игре 2x2, если отсутствует седловая точка, любая чистая стратегия противника является активной. Выигрыш игрока A – это случайная величина, математическое ожидание которой равно цене игры v . Следовательно, средний выигрыш игрока A будет равен v для любой стратегии игрока B .

Таким образом, средний выигрыш игрока A , если он использует оптимальную смешанную стратегию, а игрок B – чистую стратегию B_1 , равен цене игры v :

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v.$$

Если игрок B использует свою чистую активную стратегию B_2 , то выигрыш игрока A будет равен:

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v.$$

Также необходимо учесть, что $p_1 + p_2 = 1$.

Таким образом, для определения оптимальной стратегии S_A игрока A получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \quad (14.14)$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \\ p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \\ v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \end{cases} \quad (14.15)$$

Рассуждая аналогичным образом, для нахождения оптимальной смешанной стратегии игрока B получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1, \end{cases} \quad (14.16)$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \\ q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \\ v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \end{cases} \quad (14.17)$$

Замечание. Для того чтобы выражения (14.15) и (14.17) имели смысл ($0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < 1$, $0 < q_1 < 1$, $0 < q_2 < 1$) необходимо, чтобы

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0; \\ a_{11} - a_{12} > 0; \\ a_{22} - a_{12} > 0; \\ a_{11} - a_{21} > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0; \\ a_{11} - a_{12} < 0; \\ a_{22} - a_{12} < 0; \\ a_{11} - a_{21} < 0. \end{cases}$$

Пример. Найдем оптимальные стратегии игры с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

	B_1	B_2	α_i
A_1	5	8	5
A_2	7	6	6
β_i	7	8	

Нижняя цена игры $\alpha = 6$, верхняя цена игры $\beta = 7$. Данная игра не имеет седловую точку, следовательно, имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях.

Для игрока A оптимальные вероятности применения стратегий A_1 и A_2 вычисляем по формулам (14.14), (14.15):

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{6 - 7}{5 + 6 - 7 - 8} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} = 0,25,$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{5 - 8}{5 + 6 - 7 - 8} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = 0,75,$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{5 \cdot 6 - 8 \cdot 7}{5 + 6 - 7 - 8} = \frac{-26}{-4} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Для игрока B оптимальные вероятности применения стратегий B_1 и B_2 вычисляем по формулам (14.16), (14.17):

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{6 - 8}{5 + 6 - 7 - 8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{5 - 7}{5 + 6 - 7 - 8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{5 \cdot 6 - 8 \cdot 7}{5 + 6 - 7 - 8} = \frac{-26}{-4} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A = \|0,25; 0,75\|$, $S_B = \|0,5; 0,5\|$, цена игры $\nu = 3,5$. Так как $\nu > 0$, то игра выгодна для игрока A .

2) Предположим, что игра (14.13) имеет седловую точку, т.е. $\alpha = \beta$.

При $p_1=0$, игрок A применяет чистую стратегию A_2 . Если при этом игрок B применяет чистую стратегию B_1 , то выигрыш игрока A равен a_{21} , а если игрок B применяет чистую стратегию B_2 , то выигрыш игрока A равен a_{22} .

При $p_1=1$, игрок A применяет чистую стратегию A_1 . Если при этом игрок B применяет чистую стратегию B_1 , то выигрыш игрока A равен a_{11} , а при применении чистой стратегии B_2 — a_{12} .

Пример. Найти оптимальные стратегии игры с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

	B_1	B_2	α_i
A_1	4	6	4
A_2	2	5	2
β_i	4	5	

Нижняя цена игры $\alpha = 4$, верхняя цена игры $\beta = 4$. Данная игра имеет седловую точку (1; 1), следовательно, имеет оптимальное решение в чистых стратегиях.

Цена игры $v = 4$. Оптимальные чистые стратегии игроков $S_A = \|1; 0\|$, $S_B = \|1; 0\|$.

14.5. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пусть имеется матричная игра $m \times n$ без седловой точки с матрицей выигрышей $\|a_{ij}\|$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Допустим, что все выигрыши a_{ij} положительны (этого всегда можно добиться, прибавляя ко всем элементам матрицы достаточно большое число C ; при этом цена игры увеличится на C , а оптимальные решения S_A и S_B не изменятся).

Если все a_{ij} положительны, то и цена игры v при оптимальной стратегии тоже положительна, т.к. $\alpha \leq v \leq \beta$.

В соответствии с основной теоремой матричных игр, если платежная матрица не имеет седловой точки, то имеется пара оптимальных смешанных стратегий $S_A = \|p_1, p_2, \dots, p_m\|$ и $S_B = \|q_1, q_2, \dots, q_n\|$, применение которой обеспечивает игрокам получение цены игры v .

Предположим, что игрок A имеет стратегии $A_1, A_2, \dots, A_m$, а игрок B стратегии $B_1, B_2, \dots, B_n$. Найдем оптимальные стратегии

$$S_A = \|p_1, p_2, \dots, p_m\|, S_B = \|q_1, q_2, \dots, q_n\|,$$

где p_i, q_j – вероятности применения чистых стратегий A_i и B_j ($i=1,2,\dots,m$,

$j=1,2,\dots,n$), причем $\sum_{k=1}^m p_k = 1, \sum_{k=1}^n q_k = 1$.

При любой стратегии игрока B оптимальная стратегия игрока A обеспечивает ему средний выигрыш не меньше цены игры v и выигрыш, равный цене игры v , при оптимальной стратегии игрока B . Пусть игрок A применяет смешанную стратегию A против какой-нибудь чистой стратегии B_j игрока B , тогда он получает средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша)

$$a_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \dots + a_{mj} p_m, \quad j=1,2,\dots,n.$$

Таким образом, для нахождения оптимальной стратегии игрока A получаем следующую систему линейных неравенств (систему ограничений)

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq v, \quad j=1,2,\dots,n$$

или

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq v, \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq v. \end{cases} \quad (14.18)$$

Разделим каждое неравенство системы на v .

Обозначим

$$x_i = \frac{p_i}{v}, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (14.19)$$

Следовательно, система (14.18) примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1. \end{cases} \quad (14.20)$$

С учетом равенства $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ и обозначения (14.19), получаем

$$Z(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{v}. \quad (21)$$

Игрок A старается максимизировать свой выигрыш. Это эквивалентно минимизации функции $Z(x)$. Таким образом, задача поиска оптимальной стратегии A свелась к задаче линейного программирования (14.20), (14.21).

При любой стратегии игрока A оптимальная стратегия игрока B обеспечивает ему средний проигрыш не больше цены игры v и проигрыш, равный цене игры v , при оптимальной стратегии игрока A . Пусть игрок B применяет смешанную стратегию B против какой-нибудь чистой стратегии A_i игрока A , тогда он получает средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша)

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}q_j = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{in}q_n, \quad i=1,2,\dots,m$$

Таким образом, для нахождения оптимальной стратегии игрока B получаем следующую систему линейных неравенств (систему ограничений)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}q_j \leq v, \quad i=1,2,\dots,m$$

или

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \leq v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \leq v, \\ \dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}p_m \leq v. \end{cases} \quad (14.22)$$

Разделим каждое неравенство системы на v .

Обозначим

$$y_j = \frac{q_j}{v}, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (14.23)$$

Следовательно, система (14.23) примет вид

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq 1, \\ \dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \leq 1. \end{cases} \quad (14.24)$$

С учетом равенства $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$ и обозначения (14.23), получаем

$$F(y) = y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{v} \quad (14.25)$$

Игрок B старается максимизировать свой выигрыш. Это эквивалентно минимизации функции $F(y)$. Таким образом, задача поиска оптимальной стратегии B свелась к задаче линейного программирования (14.24), (14.25).

Замечание. Задачи (14.20), (14.21) и (14.24), (14.25) являются взаимно двойственными.

Пример. Найти оптимальные стратегии игры с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для нахождения оптимальных стратегий игры, составим и решим соответствующие задачи линейного программирования.

1. Для нахождения оптимальной стратегии игрока A получаем следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} Z(x) = x_1 + x_2 &\rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 1, \\ 3x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

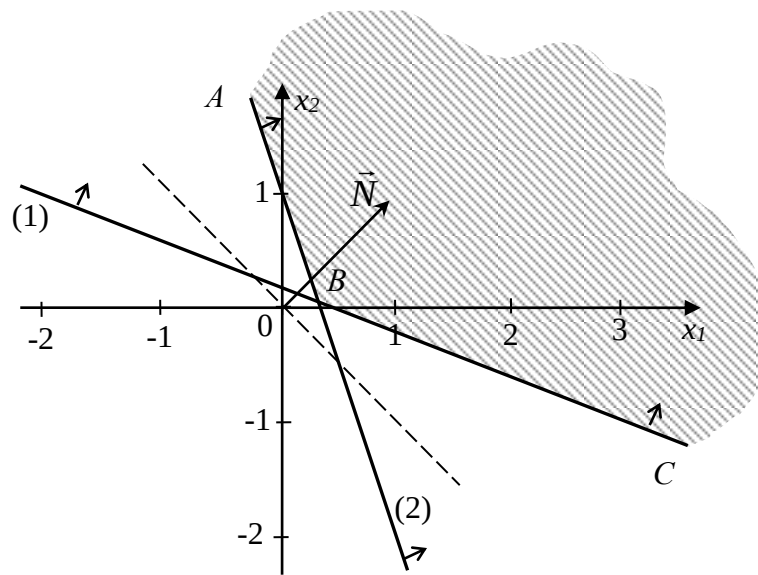
Полученную задачу решим графическим методом. Строим область допустимых значений.

$$(1) \quad 2x_1 + 5x_2 = 1$$

$$\begin{array}{c|c|c} x_1 & -2 & 3 \\ \hline x_2 & 1 & -1 \end{array}$$

$$(2) \quad 3x_1 + x_2 = 1$$

$$\begin{array}{c|c|c} x_1 & 1 & 0 \\ \hline x_2 & -2 & 1 \end{array}$$



Областью допустимых значений является открытый многоугольник ABC . Строим вектор – градиент $\vec{N}(1;1)$, линию уровня $x_1 + x_2 = k$, $k - const$.

Передвигая линию уровня в направлении возрастания вектора–градиента, получаем, что минимальное значение целевая функция достигает в точке $B = (1) \cap (2)$. Найдём координаты точки B .

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{13}, \\ x_2 = \frac{1}{13}. \end{cases}$$

Следовательно, $X_{opt} = B\left(\frac{4}{13}; \frac{1}{13}\right)$, $Z(x) = x_1 + x_2 = \frac{4}{13} + \frac{1}{13} = \frac{5}{13}$.

Оптимальные стратегии игрока A и цену игры находим по формулам (14.19) и (14.21).

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{5}{13} \Rightarrow v = \frac{13}{5},$$

$$x_1 = \frac{p_1}{v} \Rightarrow p_1 = x_1 \cdot v = \frac{4}{5},$$

$$x_2 = \frac{p_2}{v} \Rightarrow p_2 = x_2 \cdot v = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, $S_A = \left\| \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right\|$, $\nu = \frac{13}{5}$.

2. Для нахождения оптимальной стратегии игрока B получаем следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} F(y) &= y_1 + y_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \leq 1, \\ 5y_1 + y_2 \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Полученная задача является двойственной к предыдущей, решение которой можно находить как графическим методом, так и пользуясь теоремами двойственности.

Максимальное значение целевая функция достигает в точке

$$Y_{opt} = \left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13} \right), \quad F(y) = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} = \frac{5}{13}.$$

Оптимальные стратегии игрока B и цену игры находим по формулам (14.23) и (14.25).

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\nu} = \frac{5}{13} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{13}{5},$$

$$y_1 = \frac{q_1}{\nu} \quad \Rightarrow \quad q_1 = y_1 \cdot \nu = \frac{2}{5},$$

$$y_2 = \frac{q_2}{\nu} \quad \Rightarrow \quad q_2 = y_2 \cdot \nu = \frac{3}{5}.$$

Таким образом, $S_B = \left\| \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right\|$, $\nu = \frac{13}{5}$.

$$\text{Ответ: } S_A = \left\| \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right\|, \quad S_B = \left\| \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right\|, \quad \nu = \frac{13}{5}.$$

Пример. Определить, является ли игра в чистых или смешанных стратегиях. Найти нижнюю и верхнюю цены игры, седловую точку. Свести

матричную игру к задаче линейного программирования. Найти оптимальные стратегии S_A и S_B для игроков A и B . Определить цену игры.

$$\begin{pmatrix} -5 & 24 & 89 & -64 \\ -37 & 93 & -51 & -94 \\ -95 & 8 & 12 & 85 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	-5	24	89	-64	-64
A_2	-37	93	-51	-94	-94
A_3	-95	8	12	85	-95
β_i	-5	93	89	85	

Нижняя цена игры $\alpha = -64$, верхняя цена игры $\beta = -5$, следовательно, игра в смешанных стратегиях.

Сведем матричную игру к задаче линейного программирования.

1. Проверяем выигрыши a_{ij} на наличие отрицательных значений.

Так как в матричной игре все выигрыши a_{ij} положительны, то прибавим ко всем элементам матрицы достаточно большое число C , при этом цена игры увеличится на C , а оптимальные решения S_A и S_B не изменятся.

Пусть $C=95$, тогда получим следующую матричную игру:

$$\begin{pmatrix} 90 & 119 & 184 & 31 \\ 58 & 188 & 44 & 1 \\ 0 & 103 & 107 & 180 \end{pmatrix}$$

2. Найдем оптимальные стратегии $S_A = \|p_1; p_2; p_3\|$ игрока A .

Для нахождения оптимальной стратегии игрока A получаем следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
Z(x) &= x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\
\begin{cases} 90x_1 + 58x_2 \geq 1, \\ 119x_1 + 188x_2 + 103x_3 \geq 1, \\ 184x_1 + 44x_2 + 107x_3 \geq 1, \\ 31x_1 + x_2 + 180x_3 \geq 1, \end{cases} \\
x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Решаем полученную задачу линейного программирования симплексным методом, получаем $X_{opt.}=(0,011111; 0; 0,003642)$, $Z(x)=0,01475$.

Так как $Z(x)=\frac{1}{v}$, то $v=67,7824$.

С учетом поправки $C=95$ имеем: $v=-27,218$.

Так как $x_i = \frac{p_i}{v}$, $i = 1, 2, 3$, то $p_1=0,75314$, $p_2=0$, $p_3=0,24686$.

Таким образом, оптимальные стратегии игрока A и цена игры v равны: $v=-27,218$, $S_A=||0,75314; 0; 0,24686||$.

3. Найдем оптимальные стратегии $S_B = ||q_1; q_2; q_3; q_4||$ игрока B .

Для нахождения оптимальной стратегии игрока B получаем следующую двойственную задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
F(y) &= y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max, \\
\begin{cases} 90y_1 + 119y_2 + 184y_3 + 31y_4 \leq 1, \\ 58y_1 + 188y_2 + 44y_3 + y_4 \leq 1, \\ 103y_2 + 107y_3 + 180y_4 \leq 1, \end{cases} \\
y_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

Решаем полученную задачу линейного программирования симплексным методом, получаем $Y_{opt.}=(0,009198; 0; 0; 0,0055556)$, $F(y)=0,01475$.

Так как $F(y)=\frac{1}{v}$, то $v=67,7824$.

С учетом поправки $C=95$ имеем: $v=-27,218$.

Так как $y_j = \frac{q_j}{v}$, $j = 1, 2, 3, 4$, то $q_1=0,623431$, $q_2=0$, $q_3=0$, $q_4=0,376569$.

Таким образом, оптимальные стратегии игрока B и цена игры v равны:
 $v = -27,218$, $S_B = \|0,623431; 0; 0; 0,376569\|$.

Ответ: $S_A = \|0,75314; 0; 0,24686\|$, $S_B = \|0,623431; 0; 0; 0,376569\|$, $v = -27,218$.

14.6. Уменьшение размерностей платежных матриц

Решения игр с платежной матрицей большей размерности также можно найти, используя, например, методы линейного программирования. Однако при увеличении количества строк и столбцов решение матричных задач становится значительно сложнее.

Основной подход для решения матричных игр с платежной матрицей $m \times n$ сводится к уменьшению их размерности за счет дублирующих и доминируемых стратегий.

Формально матричная игра может содержать одинаковые стратегии как игрока A , так и игрока B .

Если платежная матрица игры содержит две или более строки с равными коэффициентами, то стратегии игрока A соответствующие этим строкам называются *дублирующими*. Таким же образом, если в платежной матрице имеются одинаковые столбцы, то можно говорить о *дублирующих* стратегиях игрока B .

Использование дублирующих стратегий в матричных играх не имеет смысла. Поэтому из одинаковых строк платежной матрицы можно оставить только одну строку, а из равных столбцов – только один столбец. При этом решение матричной игры не изменится.

В платежной матрице игры часто можно найти строку, все элементы которой меньше или равны соответствующим элементам другой строки матрицы. Такая стратегия игрока A называется доминируемой. Доминируемую стратегию игрок A не будет использовать, так как эта стратегия является заведомо невыгодной по сравнению со стратегией, у которой соответствующие элементы строки больше или равны.

Аналогичное название можно дать стратегиям игрока B , все элементы столбца которой больше или равны элементам некоторой другой строки.

Доминируемая стратегия игрока B также будет невыгодной, так как проигрыш в случае ее применения проигрыш будет больше, чем при использовании стратегии с меньшими значениями элементов соответствующего столбца.

В силу вышеуказанных обстоятельств невыгодности использования доминируемых стратегий из платежной матрицы игры можно исключить строки и столбцы соответствующие доминируемым стратегиям игроков A и B . При каждом исключении доминирующей строки или столбца размерность платежной матрицы будет уменьшаться, а решение матричной игры не изменится.

Пример. Рассмотрим матричную игру, платежная матрица которой имеет вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	8	9	5	4	3
A_2	8	10	6	4	7
A_3	8	9	5	4	3
A_4	5	7	7	6	4
A_5	4	2	6	4	5
A_6	7	7	5	6	6

Исследуя стратегии игрока A можно увидеть, что стратегии A_1 и A_3 дублируют друг друга, следовательно, либо первую либо третью строки матрицы можно исключить. После удаления третьей строки получим:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	8	9	5	4	3
A_2	8	10	6	4	7
A_4	5	7	7	6	4
A_5	4	2	6	4	5
A_6	7	7	5	6	6

Рассмотрим стратегии A_1 и A_2 . Видно, что все элементы первой строки платежной матрицы меньше либо равны элементам второй строки, поэтому можно исключить первую стратегию игрока A . Пятая стратегия игрока A также является доминируемой второй. Вычеркивая первую и пятую строки матрицы имеем:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_2	8	10	6	4	7
A_4	5	7	7	6	4
A_6	7	7	5	6	6

Теперь проанализируем стратегии игрока B . Дублирующих стратегий у него, очевидно, нет. Однако, сравнивая первый и второй столбец платежной матрицы, заметим, что стратегия B_2 доминирует над стратегиями B_1 , B_3 и B_4 . Следовательно, доминируемые стратегии B_1 , B_3 и B_4 можно также исключить. В результате получим:

	B_2	B_5
A_2	10	7
A_4	7	9
A_6	7	6

Теперь снова вернемся к стратегиям игрока A . Из платежной матрицы видно, что стратегия A_6 является доминируемой в сравнении с любой другой стратегией первого игрока. Вычеркнем и стратегия A_6 . Таким образом, окончательный вид платежной матрицы будет следующим:

	B_2	B_5
A_2	10	7
A_4	7	9

Таким образом, из матричной игры с платежной матрицей 6×5 получили игру с матрицей 2×2 . Решение такой игры значительно проще.

Литература

1. Астафьев, Е. Р. Математика: курс лекций / Е.Р. Астафьев, В.В. Василенко, Е.В. Михайленко, И.Н. Старостенко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2006. –347 с.
2. Горошко, И. В. Математические методы исследования социальных систем: курс лекций / И. В. Горошко, Б. А. Торопов, Ш. Х. Гонов. – М.: Академия управления МВД России, 2019. – 80 с.
3. Думачев, В. Н. Математика. Дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление: учеб. / В. Н. Думачев, С. А. Телкова. – Электрон. текстовые дан. – Текст: электронный // Труды сотрудников Воронежского института МВД России. – Воронеж: Воронежский институт МВД России, 2015.
4. Михайленко, Е. В. Автоматизация обработки табличных данных для сбора и анализа социально–экономических показателей сотрудниками подразделений ОВД: учеб. пособие / Е. В. Михайленко, А. А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2021. – 148 с.
5. Михайленко, Е. В. Введение в высшую математику: лекция / Е.В. Михайленко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2008. – 30 с.
6. Михайленко, Е. В. Введение в общую алгебру: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 400 с.
7. Михайленко, Е. В. Дискретная математика: учеб. пособие / Е. В. Михайленко, А. А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2016.
8. Михайленко, Е. В. Дискретная математика: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2016. – 104 с.
9. Михайленко, Е. В. Комбинаторный анализ: лекция / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015.
10. Михайленко, Е. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. пособие / Е. В. Михайленко, М. А. Жукова. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2010. – 163 с.
11. Михайленко, Е. В. Математика: курс лекций. Ч. 1. Элементы общей

алгебры / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2019. – 120 с.

12. Михайленко, Е. В. Математика: курс лекций. Ч. 3. Математический анализ / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2020. – 90 с.

13. Михайленко, Е. В. Математика и информатика: курс лекций / Е.В. Михайленко, И.Н. Старостенко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2009. – 420 с.

14. Михайленко, Е. В. Математика: курс лекций. Ч. 1. Элементы общей алгебры / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2019. – 120 с.

15. Михайленко, Е. В. Математика: курс лекций. Ч. 2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2021. – 98 с.

16. Михайленко, Е. В. Математика: курс лекций. Ч. 3. Математический анализ / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2020. – 90 с.

17. Михайленко, Е. В. Матрицы и определители: лекция / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2008. – 28 с.

18. Михайленко, Е. В. Матричные игры: лекция / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 28 с.

19. Михайленко, Е. В. Методы оптимизации: сборник задач / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 140 с.

20. Михайленко, Е. В. Методы оптимизации: сб. задач / Е. В. Михайленко, А. А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 140 с.

21. Михайленко, Е. В. Прикладная математика: курс лекций / Е. В. Михайленко, А. А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2014. – 192 с.

22. Михайленко, Е. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / Е. В. Михайленко, М. А. Жукова, Ф. Ф. Бараненко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2011. – 142 с.

23. Михайленко, Е. В. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / Е.В. Михайленко, М.А. Жукова, Ф.Ф. Бараненко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2011.

24. Старостенко, И. Н. Высшая математика для экономистов. Элементы линейной алгебры: учеб.-практич. пособие / И. Н. Старостенко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2021. – 76 с. – ISBN 978-5-9266-1726-6: Б. ц. – Текст: непосредственный + Текст: электронный. – <http://ebs.libkrumvd.ru/elib/4180/>, требуется авторизация.

25. Старостенко, И. Н. Множественная регрессия: учеб. пособие / сост.: И. Н. Старостенко, А. А. Хромых. – Электрон. текстовые дан. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2019. – эл. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-9266-1504-0: Б. ц. – Текст: электронный. <http://ebs.libkrumvd.ru/elib/5807/>, требуется авторизация.

26. Старостенко, И. Н. Парная регрессия и корреляция: учеб. пособие / И. Н. Старостенко, А. А. Хромых. – Электрон. текстовые дан. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2017. – эл. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-9266-1243-8: Б. ц. – Текст: электронный. – <http://ebs.libkrumvd.ru/elib/6350/>, требуется авторизация.

27. Старостенко, И. Н. Элементы статистической обработки данных: учеб. пособие / И. Н. Старостенко, А. А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2020.

Учебное издание

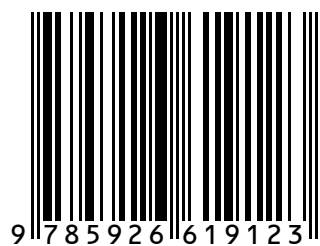
**Старостенко Игорь Николаевич
Михайленко Евгений Владимирович
Хромых Анна Алексеевна**

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник

В авторской редакции

ISBN 978-5-9266-1912-3



Подписано в печать 12.05.2023. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 22,0. Тираж 100 экз. Заказ 140.

Краснодарский университет МВД России.
350005, г. Краснодар, ул. Ярославская, 128.