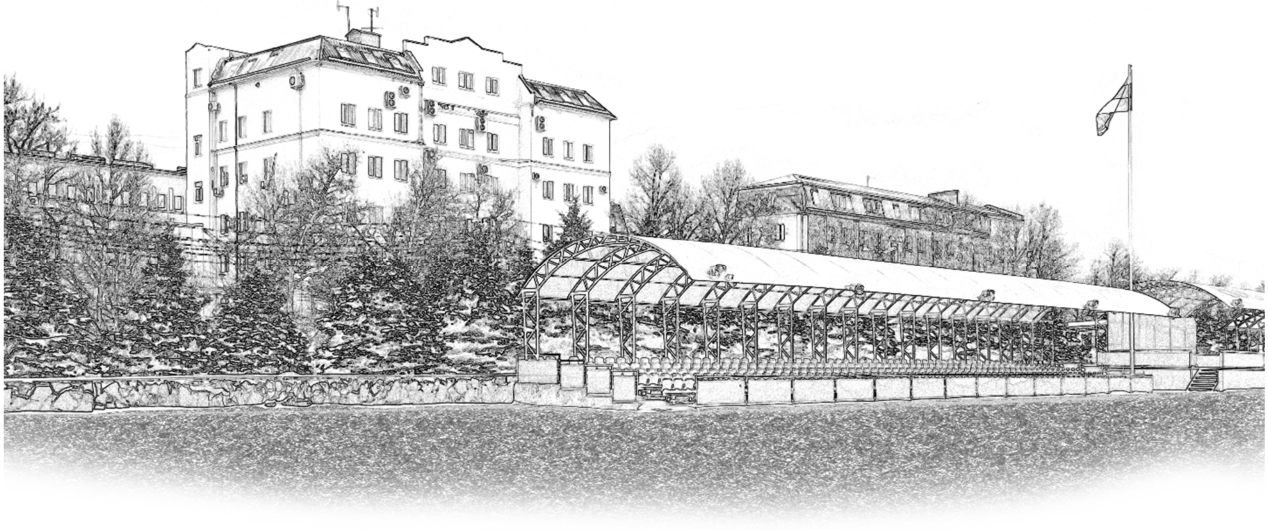
Краснодарский университет МВД России

Е. В. Михайленко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник
В двух частях
Часть 2



Краснодар
2024

Краснодарский университет МВД России

Е. В. Михайленко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник

В двух частях

Часть 2

Краснодар
2024

УДК 511.2+512.5+512.6+514.1+517.1
+517.2+517.3+517.9
ББК 22.1
М690

Одобрено
редакционно-издательским советом
Краснодарского университета
МВД России

Рецензенты:

В. М. Бакулин, кандидат физико-математических наук (Волгоградская академия МВД России);

Н. А. Миронов, кандидат физико-математических наук (Нижегородская академия МВД России);

Е. Г. Левченко (Главное управление МВД России по Краснодарскому краю).

Михайленко Е. В.

М690 Высшая математика : учебник : в 2 ч. / Е. В. Михайленко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2024. – Ч. 2. – 338 с.

ISBN 978-5-9266-2126-3 (ч. 2)
ISBN 978-5-9266-2033-4

Содержит разделы математики «Комбинаторика», «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Дискретная математика».

Для профессорско-преподавательского состава, курсантов и слушателей образовательных организаций МВД России, обучающихся по информационно-техническим, судебно-экспертным и экономическим направлениям (специальностям), и сотрудников органов внутренних дел Российской Федерации.

УДК 511.2+512.5+512.6+514.1+517.1
+517.2+517.3+517.9
ББК 22.1

ISBN 978-5-9266-2126-3 (ч. 2)
ISBN 978-5-9266-2033-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Во второй части учебника «Высшая математика» представлены три математических раздела: «Теория вероятностей и математическая статистика», «Дискретная математика» и «Методы оптимизации».

Четвертый раздел учебника «Теория вероятностей и математическая статистика» предназначен для изучения комбинаторики, основ теории вероятностей, случайных величин и элементов математической статистики. В разделе рассматриваются основные понятия и правила комбинаторики, комбинаторные конфигурации без повторений и с повторениями, разбиения. Изучаются основные понятия и классификация событий, операции над событиями, определения классической, статистической и геометрической вероятности, рассматриваются вероятность суммы и произведения несовместных, совместных независимых и произвольных событий, методы использования формулы полной вероятности и вычисления вероятностей гипотез по формуле Байеса. Существенное место в учебнике отведено нахождению вероятностей при повторных испытаниях.

Помимо этого, рассматриваются понятия и определения случайных величин, математические операции над ними, числовые характеристики и законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин. При изучении математической статистики предлагаются основные понятия дискретного и интервального вариационных рядов, определяется эмпирическая функция распределения, представлены некоторые приемы графического изображения статистического распределения, формулы для нахождения выборочного среднего, выборочной дисперсии, среднего квадратического отклонения, выборочных моментов и коэффициентов.

В пятом разделе «Дискретная математика» содержатся учебные материалы, включающие основы математической логики, булеву алгебру, элементы теории графов.

В разделе описываются основные понятия логики высказываний, логические операции, их свойства, понятие равносильности логических формул, рассматриваются основные законы логики высказываний, а также известные тавтологии. Особое внимание уделяется основным понятиям логики предикатов: определению предиката, множеству истинности предиката, равносильности предикатов, следованию предикатов, операциям над предикатами, методам использования кванторов всеобщности и существования.

В разделе также рассматриваются основные понятия булевой алгебры. Описываются определения и свойства булевых операций, формы записи булевых выражений, дается определение булевой функции, перечислены основные способы задания булевых функций, алгоритмы разложения булевых функций. В работе раскрываются методы исследования булевых функций с помощью карт Вейча, методы нахождения инверсии, конъюнкции и дизъюнкции булевых функций, а также представления булевых функций в совершенной дизъюнктивной и совершенной конъюнктивной нормальных формах.

Особое место в учебнике уделено методам теории графов. В издании рассматриваются основные определения и классификация графов, представлены алгебраическая, геометрическая формы представления графов, а также методы идентификации графов с помощью матрицы смежностей, матрицы инцидентности. В работе изучаются изоморфизм графов, маршруты и пути графов, связность графов, расстояния в графах.

Завершающий, шестой раздел учебника «Методы оптимизации» посвящен задачам математического программирования и теории игр.

В издании представлены основные понятия математического программирования, задачи линейного программирования, основные формы записи задач линейного программирования, методы решения задач линейного программирования. В работе подробно описываются принципы графического метода решений задачи линейного программирования, рассматривается метод Жордана-Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений, однократные и симплексные преобразования, предлагается подробное описание алгоритма симплексного метода решения задач линейного программирования, правила составления двойственных задач и принципы использования первой и второй теорем двойственности.

Достаточно большое внимание в работе уделяется решению транспортных задач. Рассматриваются основные математические модели линейной транспортной задачи, алгоритмы нахождения начального опорного решения задачи методами северо-западного угла и минимального элемента. В разделе даются понятия циклов и потенциалов, пошагово описаны технологии отыскания оптимального решения и верификации модели методом потенциалов.

В издании также представлены методы теории игр. Даны основные понятия теории игр, описаны элементы матричных игр, максиминные и минимаксные стратегии, раскрыта основная теорема теории игр, рассмотрены методы использования чистых и смешанных стратегий, алгоритмы решения игры с платежной матрицей 2x2, а также процедуры уменьшения размерностей платежных матриц.

Для лучшего восприятия учебного материала все вводимые понятия, определения, теоремы, формулы и вычислительные методы поясняются рисунками и примерами решения задач с подробным описанием хода решений.

Раздел 4. Теория вероятностей и математическая статистика

Глава 15. Комбинаторный анализ

Задачи выбора элементов изучаемых объектов и размещения их в заданном порядке возникают и решаются во многих отраслях науки, промышленности, социальной и правоохранительной сферах деятельности человека. Для развития современных научных направлений математики, физики, химии, биологии, информатики, экономики, создания новых промышленных, строительных и сельскохозяйственных технологий, коммуникаций и средств обработки информации, формирования эффективных методов защиты информации невозможно обойтись без определения количества способов отбора изучаемых объектов, порядка расположения элементов в структурных множествах, распределения имеющихся ресурсов. Такими проблемами занимается комбинаторика.

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов (подмножеств) некоторого дискретного множества в соответствии с заданными правилами. Термин «*комбинаторика*» имеет происхождение от латинского «combina», что означает – «сочетать», «соединять».

Комбинаторика изучает не сами свойства выбранного множества или его элементов, а определяет методы нахождения количества комбинаций, выполнения различных действий над изучаемыми объектами, способов выбора, группировки и расположения элементов множества, подчиненные тем или иным условиям.

15.1. Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика – одна из самых древних отраслей математики. Несколько тысяч лет назад в Юго-восточной Азии из чисел и других знаков составлялись различные последовательности и таблицы с заданными свойствами. Определялись способы положения и перестановок элементов в данных структурах. В Древней Греции подсчитывали количество различных комбинаций сочетаний слов в словосочетаниях, способы построений геометрических фигур из заданных элементов. В Средние века в Европе предпринимались попытки вывода математических законов для существующих в то время азартных игр с использованием монет, игральных костей, карт, домино и т.д.

Научное обоснование комбинаторика получает в XVI-XVII веках, как приложение для решения задач из области теории вероятностей. Развитие комбинаторики обусловлено было необходимостью расчета количества возможных вариантов наступления того или иного события, комбинаций выбора предметов или иных действий, выполняемых случайным образом. В это время элементы комбинаторных расчетов появились в работах итальянских ученых Николо Тартальи (1499–1557), Джероламо Кардано (1501–1576), Галилео Галилея (1564–1642), и французских математиков Блеза Паскаля (1623–1662) и Пьера Ферма (1601–1665).

Понятие «*комбинаторика*», как термин, введено немецким математиком Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646 - 1716). В работе «Рассуждения о комбинаторном искусстве» (1666). Лейбниц, впервые опубликовал формулы сочетаний без повторений из k элементов по n, ввел специальные символы для определения количества конфигураций, высказывался о приложениях комбинаторики в различных сферах человеческой деятельности.

Развитием методов решения комбинаторных задач также занимались выдающиеся математики: *Якоб Бернулли* (1654–1705) и Леонард Эйлер (1707–1783). В работах этих ученых рассматривались методы определения числа перестановок, сочетаний и размещений, как без повторений, так и с повторениями, исследовались возможности использования комбинаторики в алгебре, аналитической геометрии, теории вероятности, математической статистике.

В XIX веке изучением *геометрических конфигураций* занимался известный немецкий математик Теодор Карл Рейе (1838–1892), а в работах американского ученого Элиакима Гастингса Мура (1862–1932) рассматривались *тактические конфигурации.* В XX веке с помощью *перечислительной комбинаторики* известных математиков Дж.-К. Рота и Ричарда Стенли изучались свойства упорядоченных множеств, различных алгебраических структур, специальных алгебраических функций. В настоящее время комбинаторных методов исследования широко востребованы и интегрированы в современной математике и других науках.

15.1.1. Правило сложения

Комбинаторными принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор. Такие способы построения некоторой конструкции из элементов исходного множества называются *комбинаторными конфигурациями.*

Рассмотрим задачи комбинаторики, описывающие наиболее общие и простые комбинаторные конфигурации. Многие такие задачи решаются с помощью основных теорем комбинаторики – *правила сложения и правила умножения.*

Правило сложения. Пусть некоторое множество A состоит из k элементов: $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$. Тогда, если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами; элемент $A_2 – n_2$ способами, элемент $A_3 – n_3$ способами, ..., элемент $A_k – n_k$ способами, отличными от первых $k – 1$ способов, то выбор одного из элементов: или A_1, или A_2, ..., или A_k может быть осуществлен $n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$ способами.

Данное правило можно сформулировать иначе. Пусть имеется k различных групп A_1: $A_2, A_3, ..., A_k$, причем каждая i-ая группа содержит n_i элементов. Если один элемент из группы A_i можно выбрать n_i способами, и при этом любые две группы A_i и A_j не имеют общих элементов, то выбор одного элемента или из A_1, или из A_2, ..., или из A_k можно осуществить $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ способами.

Решим комбинаторные задачи, используя правило сложения.

Пример. В ящиках имеется 140 обычных, 30 трассирующих и 65 холостых патронов. Сколько существует способов извлечения из ящиков либо одного обычного, либо одного трассирующего, либо одного холостого патрона?

Решение. Так как количество способов выбора одного обычного патрона $n_1 = 140$, количество способов выбора одного трассирующего патрона $n_2 = 30$, а количество способов выбора одного трассирующего патрона $n_3 = 65$, то согласно правилу сложения количество способов извлечения из ящиков обычного или трассирующего или холостого патрона $n = n_1 + n_2 + n_3 = 140 + 30 + 65 = 21$.

Пример. В подразделении имеются три легковых автомобиля и два микроавтобуса. Для перевозки семи сотрудников к месту патрулирования можно выбрать либо два легковых автомобиля, либо один микроавтобус. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Снова будем использовать правило сложения. Легко рассчитать, что количество способов выбора двух легковых автомобилей из трех $n_1 = 3$. На самом деле, первый способ – можно взять первый и второй автомобили, второй способ – берем первый и третий автомобили, третий способ – выбрали второй и третий автомобили. Количество способов выбора одного микроавтобуса из двух, естественно, равно $n_2 = 2$. Тогда количество всех способов выбора транспортных средств для перевозки личного состава равно $n = n_1 + n_2 = 3 + 2 = 5$.

15.1.2. Правило умножения

Правило умножения. Пусть некоторое множество A состоит из k элементов: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$. *Если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами, после каждого такого выбора элемент A_2 может быть выбран n_2 способами, ..., после каждого $k - 1$ выбора элемент A_k может быть выбран n_k способами, то выбор всех элементов A_1, A_2, ..., A_k в указанном порядке может быть осуществлен $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.*

Сформулируем это правило по-другому. Пусть имеется k групп $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$, причем i-ая группа содержит n_i элементов. Тогда общее число n способов, которыми можно получить упорядоченную совокупность $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$, где $a_i \in A_i$ (т.е. выбрать по одному элементу из каждой группы и расставить их в определенном порядке), равно $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пример. В учебной группе 17 курсантов. Сколько способов может быть при назначении заместителя командира взвода и двух командиров отделений при условии, что каждый учащийся может быть выбран только на одну из этих должностей?

Решение. Пусть сначала назначается заместитель командира взвода, это может сделать одним из 17 способами; командира первого отделения можно выбрать из оставшихся курсантов 16-ю способами, а затем остается 15 вариантов назначения командира второго отделения. Используя правило произведения, найдем количество способов одновременного назначения заместителя командира взвода и двух командиров отделений: $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080.$

Пример. Два почтальона должны разнести 10 писем,15 газет и 2 бандероли по 12 адресам. Сколькими способами они могут распределить свою работу, учитывая, что двум почтальонам ходить по одному адресу нецелесообразно?

Решение. Первый адрес имеет $n_1=2$ альтернативы – либо к адресату идет первый почтальон, либо второй. Для второго адресата также есть $n_2=2$ альтернативы и т.д., т.е. $n_1=n_2=\ldots=n_{12}=2$. Следовательно, в силу правила умножения общее число способов распределений доставки корреспонденции между двумя почтальонами равно $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{12} = 2^{12} = 4096.$

15.2. Комбинаторные конфигурации без повторений

В комбинаторных задачах часто определяется количество всех подмножеств данного множества, удовлетворяющих определенным условиям. Однако, в одних конфигурациях рассматриваются подмножества, отличающиеся не только элементами, но и установленным порядком следования элементов, в других порядок следования элементов не важен и подмножества, отличающиеся только расположением в них элементов, не считаются различными. Кроме того, в одних случаях исследуемые подмножества могут содержать неограниченное количество повторений выбранных элементов, а в других эти элементы могут браться только однократно. Все эти обстоятельства необходимо учитывать при решении комбинаторных задач.

Способы построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, в которых все выбранные элементы представлены только по одному разу, называются *конфигурациями без повторений*.

15.2.1 Размещения без повторений

Определение размещения без повторений. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением* (размещением без повторений) из n элементов по k элементов.

Можно привести другую формулировку определения размещения без повторений.

Размещение из n элементов по k – это все k-элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Для обозначения числа размещений принят специальный математический символ: A_n^k (число размещений из n элементов по k). Рассчитать количество размещений можно, используя следующую теорему.

Теорема 1.1. Количество размещений из n элементов по k элементов равно произведению k последовательных натуральных чисел от n до $n - k + 1$ включительно, т. е.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1),\ \ k > 0. \tag{15.1}$$

Формулу (15.1) удобно записывать в другом виде, используя понятие факториала.

Напомним, что факториалом числа n называют произведение первых n натуральных чисел и обозначают $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n - 1) \cdot n$. Кроме того, полагают, что 0! = 1. Умножив и разделив нашу формулу на (n – k)!, имеем:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}. \qquad (15.2)$$

Учитывая, что *(n – k)! = 1 · 2 · 3 · ... · (n – k),* после преобразования числителя окончательно получим:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (15.3)$$

Пример. Найдем количество размещений из пяти элементов по три.

Решение. Используя формулу размещений без повторений (15.3) имеем:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60.$$

Пример. Для решения оперативной задачи необходимо назначить 4 сотрудников из 12 имеющихся. Определить количество всех возможных вариантов составления списка назначенных сотрудников.

Решение. Обратим внимание на то, что порядок следования сотрудников в составляемом списке имеет значение (например, сотрудники направляются на разные объекты или могут выполнять различные обязанности) и в списке сотрудники повторяться не могут, то данная конфигурация будет размещением без повторений. Тогда, используя формулу (15.3) для нахождения количества размещений из двенадцати по четыре, получим:

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, число всех возможных вариантов составления списка назначенных сотрудников равно 11880.

Пример. В учебной лаборатории находится 10 столов. Сколькими способами за ними могут сесть 15 курсантов, если каждый стол рассчитан не более чем на двух человек?

Решение. Установим, что количество посадочных мест в аудитории равно 20. Затем отметим, что из этих двадцати мест будет использовано только 15 (по числу курсантов в группе). Очевидно, что каждый курсант может занять только одно место за столом, то есть каждое место будет использовано только один раз, без повторов. Теперь мы видим, что данная конфигурация является размещением без повторений из двадцати по пятнадцати, следовательно:

$$A_{20}^{15} = \frac{20!}{(20-15)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot 20 = 20\,274\,183\,401\,472\,000.$$

Значит, существует 20 274 183 401 472 000 способов посадки пятнадцати курсантов за десять столов.

Можно рассуждать иначе. Для первого курсанта существует 20 способов выбора места в аудитории. Так как одно место уже занято, то для второго курсанта способов занять место остается 19. После того, как расселись 14 курсантов, последнему пятнадцатому придется выбирать только из 6 оставшихся мест. В виду того, что способы для каждого курсанта могут последовательно состояться, то согласно правилу произведения перемножим все натуральные числа от шести до двадцати включительно и получим тот же ответ.

Конечно, полученное значение для количества способов огромно. Ведь, если все способы проверить на практике, то отводя на реализацию каждой новой конфигурации только одну секунду, для непрерывного выполнения всех пересадок курсантов потребуется 642 450 104 года.

15.2.2. Перестановки без повторений

Частным случаем размещений без повторений являются перестановки.

Определение перестановок без повторений. Размещение из n элементов по n элементов называется перестановкой из n элементов. Различные перестановки из n элементов отличаются только порядком элементов. Обозначаются перестановки знаком P_n.

Формулу перестановок из n элементов легко получить из формулы для размещений. По определению перестановок имеем:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Таким образом,

$$P_n = n! \tag{15.4}$$

Пример. Сколькими способами можно расположить шесть автомобилей в одной колонне?

Решение. В нашей задаче мы выбираем все шесть элементов из имеющегося множества автомобилей. Порядок нахождения машин в колонне важен. Каждый автомобиль уникален, и поставить его в колонну два или более раз мы не сможем. Тогда по формуле перестановок без повторений имеем:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Пример. На книжной полке находятся пять книг по математике, две по физике и четыре по программированию. Необходимо определить, сколькими способами можно разместить эти издания на полке, если книги по каждому научному разделу должны стоять вместе.

Решение. Данная задача содержит дополнительные ограничения порядка элементов. Разобьем представленное множество книг на 3 части согласно представленным научным разделам: математика, физика, программирование. Каждый раздел на полке должен иметь свое место. Количество способов установления порядка разделов можно определить, как число перестановок из трех элементов:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Но и в каждом научном разделе книги также могут иметь свой порядок. Аналогично рассчитаем количество способов размещения книг по каждой дисциплине.

по математике $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$

по физики $P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2;$

по программированию $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

Учитывая все вышесказанное и используя правило умножения, получим:

$$P_3 \cdot P_5 \cdot P_2 \cdot P_4 = 6 \cdot 120 \cdot 2 \cdot 24 = 34560.$$

15.2.3. Сочетания без повторений

Мы рассматривали конфигурации, в которых место элементов в выбранном подмножестве имел существенное значение. Но на практике часто порядок элементов не имеет никакого значения.

Определение сочетания без повторений. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется сочетанием из n элементов по k элементов.

Это определение имеет и другую формулировку. Сочетания из n элементов по k элементов – это все k-элементные подмножества n-элементного множества, причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют только неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, в этом случае не считаются различными. Обозначаются сочетания символом C_n^k (число сочетаний из n по k).

Пусть количество всевозможные неупорядоченные подмножества, содержащие k элементов, их число равно C_n^k. Тогда из каждого указанного подмножества (содержащего k элементов) перестановкой его элементов можно получить все упорядоченные подмножества, которых будет ровно в $k!$ раз больше, так как каждое k-элементное множество можно упорядочить $k!$ способами. Значит

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = P_k C_n^k . \tag{15.5}$$

Следовательно,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{15.6}$$

Таким образом, количество сочетаний из n по k определяется формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{15.7}$$

Пример. Необходимо выбрать для букета семь из пятнадцати имеющихся у продавца алых роз. Сколькими способами это можно осуществить?

Решение. Суть задачи заключается в выборе семи элемента из множества, содержащего пятнадцать элементов. В отличие от размещения выбранное подмножество элементов является неупорядоченным, так как отобранные розы будут помещены в один букет и порядок расположения в нем цветов неважен. Кроме того, будем считать, что каждая роза уникальна, следовательно, повторений выбранных элементов не будет. Тогда, используя формулу количества сочетаний без повторений, имеем:

$$C_{15}^{7} = \frac{15!}{(15-7)!7!} = \frac{15!}{8!7!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 15}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 8 \cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 15} = 6435.$$

Таким образом, количество способов данного выбора равна 6435.

Пример. В учебной группе девять юношей и семь девушек. Для несения наряда необходимо выделить восемь курсантов. Сколькими способами это можно сделать, если среди выделяемых курсантов должно быть три девушки?

Решение. Для решения задачи определимся, что производится одновременный выбор элементов из двух множеств. Из девяти юношей мы выбираем пять человек, а из семи девушек – три человека. По условию задачи все выбираемые элементы не могут повторяться, а их порядок в выбранных подмножествах неважен. По формуле количества сочетаний без повторений получим:

для юношей $$C_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!5!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 126;$$

для девушек $$C_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

Таким образом, количество комбинаций выбора юношей равно 126, а девушек – 35. Так как оба выбора осуществляются одновременно, то необходимо использовать правила произведения:

$$C_9^5 \cdot C_7^3 = 126 \cdot 35 = 4760.$$

Значит, количество вариантов назначения в наряд курсантов равно 4760.

Пример. Сколько существует способов расстановки двадцати полицейских для охраны трех объектов, если для выполнения задания на каждый из этих объектов требуется пять сотрудников?

Решение. Задачу разделим на три этапа, по количеству охраняемых объектов. На первый объект требуется пять полицейских, следовательно, количество вариантов расстановки сотрудников будет:

$$C_{20}^{5}=\frac{20!}{(20-5)!5!}=\frac{20!}{15!\cdot 5!}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 20}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 15\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 5}=15505.$$

На второй объект выберем следующие пять полицейских из пятнадцати оставшихся:

$$C_{15}^{5}=\frac{15!}{(15-5)!5!}=\frac{15!}{10!\cdot 5!}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 15}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 5}=3003.$$

И, наконец, на третий объект выберем еще пять полицейских из десяти:

$$C_{10}^{5}=\frac{10!}{(10-5)!5!}=\frac{10!}{5!\cdot 5!}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 5}=252.$$

Так как все вышеперечисленные выборы осуществляются одновременно, то используя правило умножения получим ответ:

$$C_{20}^{5}\cdot C_{15}^{5}\cdot C_{10}^{5}=15505\cdot 3003\cdot 252=11\ 733\,501\,780.$$

Таким образом, для охраны трех объектов можно выделить полицейских 11 733 501 780 способами.

15.3. Комбинаторные конфигурации с повторениями

В ряде комбинаторных задач требуется исследовать конфигурации, связанные с неоднократным выбором одних и тех же элементов заданного множества либо с действиями с неограниченным количеством элементов, объединенных по какому-либо определяющему признаку. Такие конфигурации называют конфигурациями с повторениями. Существенная часть прикладных задач комбинаторики содержит размещения, сочетания и перестановки с повторениями.

15.3.1. Размещения с повторениями

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Упорядоченный набор из k элементов, среди которых могут быть одинаковые элементы, называется размещением с повторениями из n элементов по k элементов.

Можно привести другую формулировку определения размещений с повторениями.

Размещение с повторениями из n элементов по k – это все k-элементные множества, в которых каждый элемент исходного множества может повторяться, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Размещение с повторением часто называют последовательным выбором с возвращением, так как эта конфигурация описывает повторные выборки при статистической обработке данных.

Количество размещений с повторениями обозначаются символом $\overline{A}_n^k$ (число размещений с повторениями из n по k). Из правила произведения можно получить формулу для подсчета количества размещений с повторениями:

$$\overline{A}_n^k = n^k. \qquad (15.8)$$

Пример. Сейф имеет сложный цифровой замок, состоящий из 10 дисков. На каждом диске можно выставить цифру от «0» до «9» или латинскую букву от «A» до «F». Сколькими различными наборами знаков может быть представлен код замка.

Решение. В настоящей задаче представлено множество, состоящее из 16 элементов: «0», «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9», «A», «B», «C», «D»,.«E»,.«F». Из заданного множества необходимо выбрать 10 элементов, причем составленные конфигурации являются упорядоченными, а каждый элемент в наборе может повторяться не более 10 раз. Например, набор

«A», «A», «A», «7», «7», «7», «7», «7», «7», «7» содержит три буквы «А» и семь цифр «7». Тогда, используя формулу числа размещений с повторениями из 16 по 10, получим:

$$\overline{A}_{16}^{10} = 16^{10} = 1\,099\,511\,627\,776.$$

Таким образом, символьный код для описанного замка имеет более триллиона комбинаций.

В конфигурации размещение с повторением количество выборок *k* может быть больше, чем количество элементов *n* исследуемого множества.

Пример. Имеется 23 красных, 42 синих и 19 желтых шаров. Шары отличаются только цветом. Случайным образом отобраны 8 шаров и расставлены в ряд. Сколькими способами может быть составлен такой ряд?

Решение. В условии задачи указаны точные количества красных, синих и желтых шаров. Однако для решения данной задачи нам важно знать лишь то, что количество шаров каждого цвета превышает восемь. Будем считать, что у нас только три элемента, назовем их «красный», «синий» и «желтый», и каждый элемент может повторяться, по крайней мере, 8 раз. Порядок цвета элементов в выбранном ряду важен. Таким образом, используем формулу числа размещений с повторениями из трех элементов по восемь:

$$\overline{A}_{3}^{8} = 3^{8} = 6\,561.$$

Следовательно, количество способов составления упорядоченного ряда из 8 шаров равно 6 561.

Пример. Сколькими способами можно разместить 7 служебных автомобилей в 5 секторах охраняемой территории при условии, что в каждом секторе осталось достаточно свободных парковочных мест для размещения всех автомобилей.

Решение. Эту задачу можно рассмотреть следующим образом. Будем исходить из того, что для размещения каждого автомобиля имеется множество из пяти повторяемых свободных парковочных мест, по одному на каждом секторе. Мы выбираем сектор! Номер места в каждом секторе не важен, зато упорядочены автомобили, то есть имеет значение, в каком секторе разместится тот или иной автомобиль. Следовательно, применяя формулу числа размещений с повторениями из пяти элементов по семь, получим:

$$\overline{A}_5^7 = 5^7 = 78125.$$

Значит, количество способов для размещения 7 служебных автомобилей в 5 секторах охраняемой территории равно 78 125.

15.3.2. Перестановки с повторениями

Определение. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Упорядоченный набор k элементов этого множества такой, что 1-й элемент взят k_1 раз, 2-й элемент - k_2 раза, …, n-й элемент - k_n раз ($k_1 + k_2 + ... + k_n = k$) называется перестановкой с повторениями длины k из n элементов.

Приведем другую формулировку определения размещений с повторениями. Перестановкой с повторениями из n элементов по k называется всякое k-элементное множество, в котором каждый i-й элемент заданного множества повторяется k_i раз, отличающееся составом элементов или порядком их следования.

Количество перестановок с повторениями длины k из n разных элементов, взятых соответственно по k_1, k_2, …, k_n раз каждый, обозначается $P(k_1, k_2, …, k_n)$. Формула для числа перестановок с повторениями получается непосредственно из правила умножения:

$$P(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}. \tag{15.9}$$

Пример. Для посадки декоративных деревьев в парке Краснодарского университета МВД подготовлены 20 лунок. Сколькими способами можно разместить в них 8 лип, 5 кленов и 7 катальп, если считать деревья одного сорта одинаковыми?

Решение. Можно считать, что мы имеем множество сортов декоративных деревьев, состоящее из n = 3 элементов: «липа», «клен» и «катальпа». Каждый элемент повторяется: количество лип $k_1 = 8$, кленов $k_2 = 5$, катальп $k_3 = 7$. Всего k = 20 деревьев. Тогда, используя формулу числа перестановок с повторениями, получим:

$$P(8,5,7) = \frac{20!}{8!\cdot 5!\cdot 7!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 20}{1\cdot \ldots \cdot 8\cdot 1\cdot \ldots \cdot 5\cdot 1\cdot \ldots \cdot 7} = 99\,768\,240.$$

Сократив значения факториалов, получим, что посадку деревьев можно сделать 99 768 240 способами, считая деревья одного сорта одинаковыми.

Если бы в условии задачи количество лунок было бы больше, чем количество саженцев, тогда после посадки остались бы пустые лунки и следовало бы ввести еще один сорт деревьев – «пусто» и решать задачу уже с множеством из четырех повторяющихся элементов.

15.3.3. Сочетания с повторениями

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Любой неупорядоченный набор из k элементов, среди которых могут быть одинаковые элементы исходного множества, называется сочетанием с повторениями из n элементов по k элементов.

Можно привести другую формулировку определения размещений с повторениями.

Сочетание с повторениями из n элементов по k – это все k-элементные множества, в которых каждый элемент может повторяться, отличающиеся только составом элементов.

Количество сочетаний с повторениями обозначаются $\overline{C}_n^k$ (число сочетаний с повторениями из n по k). Формула для подсчета количества сочетаний с повторениями выглядит следующим образом:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} \quad . \qquad (15.10)$$

Пример. В буфете продаются 4 вида пирожных. Сколькими способами можно приобрести 10 пирожных, при условии наличия на прилавке большого количества пирожных каждого вида?

Решение. Итак, по условию задачи имеется множество, состоящее из четырех пирожных, каждое из которых может повторяться, по крайней мере, 10 раз. Все пирожные приобретаются одновременно, порядок их появления на прилавке или, например, поедания не важен. Следовательно, данная конфигурация – сочетания с повторениями. Используя первую часть формулы числа сочетаний с повторениями из 4 по 10, рассчитаем количество способов покупки:

$$\overline{C}_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{(13-10)! \cdot 10!} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = 286 .$$

Значит, существует 286 способов приобретения десяти пирожных при условиях, описанных в условии задачи.

15.4. Разбиения

Разбиением исходного n-элементного множества называется совокупность непересекающихся k подмножеств данного множества, содержащих $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ элементов данного множества, причем $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$.

Разбиения бывают упорядоченными и неупорядоченными. Если подмножества пронумерованы и их номера зафиксированы, то разбиения считаются упорядоченными. В противном случае разбиения являются неупорядоченными. Как в упорядоченных, так и в неупорядоченных разбиениях порядок расположения элементов в получившихся подмножествах не важен.

На практике обычно используют упорядоченные разбиения множеств. Упорядоченное разбиение множества из n элементов на k подмножеств обозначаются следующим выражением: $R(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$. Данная запись указывает на то, что в первое подмножество содержит ровно n_1 элементов, второе – n_2 элементов, третье – n_3 элементов, …, k-ое – n_k элементов.

Для подсчета числа упорядоченных разбиений можно использовать следующую формулу:

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} . \qquad (15.11)$$

Пример. Шесть книг нужно расставить по трем полкам так, чтобы на одной полке оказалось две книги, на второй – три книги, а на третьей – одна. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В данной задаче мы имеем упорядоченные разбиения множества из n = 6 книг на k = 3 подмножества. Причем, первое подмножество содержит n_1 = 2 элемента, втрое – n_2 = 3 элемента, а третье n_3 = 1 элемент. Используя формулу числа упорядоченных разбиений получим:

$$R(2,3,1) = \frac{6!}{2!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{2} = 60.$$

Таким образом, если не учитывать внутренний порядок книг на каждой полке, расставить книги указанным способом можно 60 способами.

Пример. Сколькими способами можно разбить группу из 25 курсантов на три подгруппы по 6, 9 и 10 человек в каждой группе?

Решение. По условию задачи общее количество курсантов в группе n = 25, количество подгрупп, на которые разбивается наша группа, k = 3, а количество курсантов в каждой подгруппе определены соответственно, как n_1=6, n_2=9, n_3=10. Число упорядоченных разбиений группы рассчитаем по формуле:

$$R(6,9,10) = \frac{25!}{6!\cdot 9!\cdot 10!} = 16\,360\,143\,800.$$

Таким образом, группу курсантов из 25 человек можно разбить на три подгруппы по 6, 9 и 10 человек 16 360 143 800 способами. Число впечатляет!

Пример. Сколькими способами можно разделить группу из восьми оперативных сотрудников на две части для проведения поиска и задержания преступников в городском парке и торговом центре, учитывая, что в каждой группе должно быть не менее трех человек?

Решение. Решение данной задачи сводится к исследованию всех возможных вариантов разбиений группы из восьми человек на две части, содержащих не менее трех сотрудников.

Варианты	Городской парк	Торговый центр
Вариант 1	3	5
Вариант 2	4	4
Вариант 3	5	3

Таких вариантов получилось равно три. Рассчитаем число возможных разбиений в каждой конфигурации:

$$R(3,5) = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56; \qquad R(4,4) = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70; \qquad R(5,3) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$$

Сложив количества разбиений в каждом из выше перечисленных вариантов, получим:

$$R = R(3,5) + R(4,4) + R(5,3) = 56 + 70 + 56 = 182.$$

Значит, группу из восьми оперативных сотрудников можно разделить на две части 182 способами.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение комбинаторных конфигураций. Приведите примеры комбинаторных конфигураций.
2. Каким образом используется правило сложения для комбинаторных конфигураций? Приведите пример применения правила сложения.
3. Сформулируйте правило умножения для комбинаторных конфигураций. Приведите примеры.
4. В чем особенности определения количества комбинаторных конфигураций с помощью правил сложения и умножения?
5. Какие конфигурации без повторений вы знаете? В чем особенности каждой конфигурации?
6. Сформулируйте определение перестановок без повторений. Приведите примеры перестановок без повторений.
7. Что такое сочетания без повторений? В каких случаях можно использовать формулу количества сочетаний без повторений?
8. Определите понятие комбинаторных конфигураций. Приведите примеры комбинаторных конфигураций.
9. Сформулируйте правило сложения для комбинаторных конфигураций.
10. Приведите примеры использования правило умножения для комбинаторных конфигураций.
11. В каких случаях используются перестановки без повторений?

12. Как в комбинаторике применяются размещения без повторений?

13. Приведите пример использования сочетания без повторений. Каким образом можно определить количество сочетаний без повторений?

14. В чем основное отличие комбинаторных задач, при решении которых используются перестановки без повторений, сочетания без повторений, размещения без повторений?

15. Дайте понятие перестановок с повторениями.

16. Определите метод нахождения количества размещений с повторениями.

17. Выпишете формулу определения количества сочетаний с повторениями.

18. Определите область применения конфигураций с повторениями при решении комбинаторных задач.

19. Каким образом можно определить количество упорядоченных разбиений?

20. Приведите пример использования формулы Бинома Ньютона.

21. Опишите алгоритмы использования треугольника Паскаля в комбинаторных исследованиях.

Глава 16. Теория вероятностей

Функционирование органов внутренних дел связано с различными явлениями, процессами, деятельностью людей (правонарушителей, сотрудников, вспомогательного состава), которые часто имеют непредсказуемый характер. Эффективность борьбы с преступностью зависит от многих факторов, порой неизвестных заранее или известных лишь частично. Так, раскрытие преступных действий и выявление преступников осуществляется при наличии и действии случайных факторов. Изучением закономерностей в случайных явлениях и процессах занимается специальная наука - теория вероятностей.

Большинство задач, которые решают специалисты органов внутренних дел, содержат элементы неопределенности. Объясняется это тем, что процессы формирования объектов исследования протекают под влиянием множества факторов. В каждом конкретном случае их комбинации и степень воздействия различны. Поэтому признаки объектов, возникающие под влиянием совокупности факторов, не поддаются однозначной оценке и приобретают вероятностный характер. Решением такого рода задач и занимается раздел математики, называемый теорией вероятностей.

16.1. Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей – это наука, изучающая количественные закономерности однородных случайных событий массового характера и разрабатывающая методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные события.

Теория вероятностей, подобно другим математическим наукам возникла из потребностей практики. Первые ростки этой теории относятся к началу XVII в. Уже тогда знаменитый физик Галилео Галилей (1564 – 1642) пытался подвергнуть научному исследованию ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятности. Однако теория вероятностей, как математическая наука, сформировалась, в основном, на более простом материале. Таким материалом исторически оказались так называемые «азартные» игры. Само слово «азарт» означает «случай». Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине XVII в. и связано с исследованиями Блеза Паскаля (1623 – 1662), Пьера Ферма (1601 – 1665), Христиана Гюйгенса (1629 – 1695) в области азартных игр. Для всего XVIII в. и начала XIX в. характерно бурное развитие теории вероятностей. Эта теория становится «модной» наукой. Ее пытаются применять к изучению общественных явлений.

Важный вклад в теорию вероятностей внёс Якоб Бернулли (1655 – 1705): он дал доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний.

В XVIII веке важное значение для развития теории вероятностей имели работы Томаса Байеса (1702 –1761), сформулировавшего и доказавшего знаменитую Теорему Байеса.

Выдающаяся роль в развитии теории вероятностей принадлежит знаменитому математику Пьеру-Симону Лапласу (1749-1827). Он впервые дал стройное и систематическое изложение основ теории вероятностей и развил ряд замечательных приложений к вопросам практики, в частности к анализу ошибок наблюдений и измерений.

В первой половине XIX века теория вероятностей начинает применяться к анализу ошибок наблюдений. Французский ученый Семион Пуассон (1781 – 1840) доказал первые предельные теоремы. Величайший немецкий математика Иоганн Карл Гаусс (1855 –1777) детально исследовал нормальное распределение случайной величины, также называемое «распределением Гаусса». Среди ученых Петербургской школы теории вероятностей следует назвать Виктора Буняковского (1804-1889) – автора первого курса теории вероятностей на русском языке. В этой работе автор наряду с оригинальным изложением методов теории вероятностей осветил вопросы ее практического применения.

Во второй половине XIX века значительный вклад внёс ряд европейских учёных. Среди них исключительный научный вклад внесли русские ученые:

Пафнутий Чебышев (1821 – 1824), Андрей Марков (1856 – 1922) и Александр Ляпунов (1857 – 1918). В это время были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, разработана теория Марковских цепей.

Наследие русских математиков получило развитие в работах советских математиков Евгения Слуцкого (1880-1948), Сергея Бернштейна (1880-1968), Александра Хинчина (1894-1959), Юрия Линника (1904-1972).

Современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматизации, предложенной Андреем Колмогоровым (1903 – 1987). В результате теория вероятностей приобрела строгий математический вид и окончательно стала восприниматься как один из важнейших разделов математики.

16.1.1. Основные понятия и классификация событий

Случайным событием (событием) называется любой исход опыта или наблюдения, который может произойти или не произойти.

Рассмотрим следующие примеры.

Подбрасываем монету. Появился орел. А ведь могла появиться и решка. То, что появился орел – случайное событие.

При задержании особо опасного преступника оперативный работник произвел выстрел из пистолета. Попал. Но мог и не попасть (произошла осечка, подвел глаз, дрогнула рука). Попадание - событие случайное.

На месте преступления обнаружен отпечаток указательного пальца левой руки предполагаемого преступника. Конечно, это дело случая: мог быть оставлен отпечаток указательного пальца правой руки, большого пальца или вообще ничего. То, что обнаружен отпечаток именно указательного пальца левой руки - случайное событие.

В этих примерах *случайные события* - последствия определенных действий или результаты наблюдений при реализации комплекса условий (подбрасывание монеты, выстрел, снятие отпечатка).

Для простоты *случайные события* называют *событиями*. События обозначаются заглавными латинскими буквами (часто с добавлением цифровых обозначений), например, A, B, C, A_1, B_2, D_8.

Классифицируются события по следующим видам:

1) достоверные, невозможные, случайные, неопределенные;
2) совместные, несовместные;
3) зависимые, независимые;
4) простые, сложные.

Достоверным событием называется такое событие, которое при реализации данного комплекса условий непременно произойдет.

Пример. Бросается игральный кубик, содержащий шесть граней с числами «1», «2», «3», «4», «5», «6». Определим событие A_1, как «выпадение натурального числа». Очевидно, что все числа от одного до шести являются натуральными числами, следовательно, Событие A_1 «выпадение натурального числа» является достоверным.

Невозможное - это такое событие, которое при соблюдении некоторых условий не может произойти.

Пример. Теперь бросим два игральных кубика. Определим событие A_2, как «сумма выпавших чисел равна одному». Так как на каждом кубике могут выпасть числа от одного до шести, следовательно, минимальная сумма будет равна $1 + 1 = 2$. Таким образом, событие A_2 «сумма выпавших чисел равна одному» является невозможным.

Случайным событием называется такой исход эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

Пример. Снова бросаем кубик. Определим событие A_3, как «выпадение шестерки». Данное событие A_3, является случайным событием, так как в нашем опыте «шестерка» может выпасть, в может и не выпасть.

Пример. Факт совершения преступления на обслуживаемой органами внутренних дел территории в какой-либо период времени является случайным событием.

Неопределенным называется событие, исход которого заранее не может быть предсказан, так как невозможно проводить многократные эксперименты при одних и тех же условиях.

Пример. Поиск и задержание конкретного преступника невозможно многократно повторять, соблюдая одни и те же условия.

Два события А и В называются *совместными* при данном испытании (наблюдении), если появление одного из них не исключает возможности появления другого.

Пример. Снова бросим два кубика. Событие A_1 определим, как «Выпадение шестерки на первом кубике», а событие A_2, как «Выпадение шестерки на первом кубике». Так как при одном испытании одновременно могут выпасть две шестерки сразу, следовательно, события A_1 и A_2 являются совместными.

Пример. Представим, что в тире по мишени одновременно стреляют два курсанта. Событие A_1 определим, как «поражение мишени первым курсантом», а событие A_2 определим, как «поражение мишени вторым курсантом». Так как при выстрелах двух курсантов мишень может быть поражена двумя пулями, то события A_1 и A_2 являются совместными.

Пример. Если входная дверь банка блокирована двумя независимо срабатывающими устройствами, то событие А (срабатывание первого устройства) и событие В (срабатывание второго устройства) являются совместными, так как оба датчика могут сработать одновременно.

События А и В называются *несовместными*, если появление одного из них исключает возможность появления другого.

Пример. По мишени производится выстрел одним стрелком. Определим событие А, как попадание в мишень, а событие В, как промах. Очевидно, что указанные события А и В исключают появление друг друга: одним выстрелом попасть в мишень и промахнуться стрелок не может. Таким образом, определенные события А и В являются несовместными.

Пример. Если предложены две версии раскрытия преступления, то событие А (верна первая версия) и событие В (верна вторая версия) несовместны, так как не могут быть верны одновременно обе версии.

События А и В являются *зависимыми* друг от друга, если наступление или не наступление события А влияет на возможность наступления события В.

Пример. Возьмем колоду игральных карт и последовательно вытащим из нее две карты. Определим события. Событие А определим, как «первая карта является тузом», а событие В, как «вторая карта является тузом». Тогда наступление событие А влияет на наступление события В, поскольку если событие А наступит, то в колоде останется только три туза, а если первая карта не оказалась тузом, то в колоде перед выбором второй карты останется четыре туза, а возможность наступления события В изменится.

Пример. Если событие А – наступление холодного сезона, а событие В – переход на зимнюю форму одежды, то событие В зависит от наступления события А.

События А и В являются *независимыми*, если появление одного из них никак не влияет на появление другого.

Пример. В тире по мишени одновременно стреляют два курсанта. Событие A_1 определим, как «поражение мишени первым курсантом», а событие A_2 определим, как «поражение мишени вторым курсантом». Очевидно, события A_1 и A_2 являются независимы.

Пример. Сообщения граждан, поступающие в дежурную часть по телефону, тоже можно считать независимыми.

События A_1, A_2, …, A_n называются *попарно-несовместными*, если любые два из них несовместны

Пример. Производится один выстрел в тире по мишени с концентрическими зонами поражения. Пулей может быть поражена одна из зон, а стрелку начисляется 10, 9, 8, 7, 0 баллов. События A_1 «получение 10 баллов»,

A_2 «получение 9 баллов», A_3 «получение 8 баллов», A_4 «получение 7 баллов» и A_5 «получение 0 баллов» являются попарно-несовместными.

N несовместных событий A_1, A_2, … , A_n образуют *полную группу*, если в результате данного испытания обязательно должно произойти одно из них.

Пример. Бросая игральный кубик, можно определить шесть событий: A_1 «Выпадение единицы», A_2 «Выпадение двойки», A_3 «Выпадение тройки», A_4 «Выпадение четверки», A_5 «Выпадение пятерки», A_6 «Выпадение шестерки». Все указанные события являются попарно-несовместными и образуют полную группу.

Пример. Предложено 4 версии, образующих полную группу. Тогда в результате практической разработки одна из них обязательно окажется верной.

Два единственно возможных и несовместных события образуют полную группу событий. Такие события называются *противоположными* и обозначаются A и $\overline{A}$.

Пример. Пусть событие A - «попадание стрелка в цель», а событие $\overline{A}$ – «промах». События A и $\overline{A}$ образуют полную группу и являются противоположными.

Пример. Подбрасывается монета. «Выпадение орла» и «Выпадение решки» также являются противоположными.

Простое событие – это событие, которое нельзя разложить на другие события.

Пример. Событие «получение пятерки на экзамене» является простым.

Комбинируя вышеуказанные простые события определенным образом, можно получать так называемые сложные события, имеющие важные практические приложения.

Пример. Сравним следующие события:

A - появление двух очков при бросании игральной кости;

B - появление четного числа очков при бросании игральной кости.

Заметим следующее отношение между событиями: если произошло A, то обязательно произойдет и событие B.

Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если появление события A влечет за собой появление события B.

Тот факт, что A благоприятствует B (или B является следствием A), записывается в виде:

$$A \subset B \text{ или } B \supset A.$$

Событие A является частью события B, поскольку событие B состоит в осуществлении трех элементарных событий: появление двух очков, появление четырех очков, появление шести очков.

Пример. Сопоставим события:

A – появление герба при подбрасывании монеты,

B – не появление цифры при подбрасывании монеты.

Если же монета не может укатиться и застрять в щели пола или стать на ребро, тогда если произошло A, то произошло и B и в то же время если произошло B, то произошло и A. Тогда запишем: $A = B$ и будем говорить, что события A и B равносильны.

События A и B называются *равносильными*, если появление события A влечет за собой появление события B и в то же время появление события B влечет за собой появление события A.

Равносильные события не следует путать с равновозможными.

События называются *равновозможными*, если есть основание считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие.

Пример. Появление «орла» и появление «решки» при бросании монеты – равновозможные события, так как предполагается, что монета изготовлена из однородного металла, имеет правильную цилиндрическую форму, и наличие чеканки не оказывает влияния на результат.

Пример. Появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости равновозможные события, если игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не оказывает влияния на выпадение любой грани.

16.1.2. Операции над событиями

Мы привыкли к тому, что математические действия выполняются в основном над числами. Но оказывается, что их можно проводить и над событиями. Этим и занимается раздел математики, который называется *алгебра событий*.

Суммой (объединением) двух событий A и B называется третье событие C, состоящее в появлении или события A, или события B, или обоих этих событий.

Обозначение: $C = A + B$ или $C = A \cup B$.

Пример. Если событие A – попадание в цель при первом выстреле, B – попадание в цель при втором выстреле. Тогда событие $C = A + B$ есть попадание в цель вообще, безразлично при каком выстреле - при первом, при втором или при обоих вместе.

Пример. В ящике находятся 20 деталей первого сорта и 17 деталей втор ого. Из ящика последовательно вытаскивают две детали. Определим события:

A – первая деталь окажется высшего сорта;

B – вторая деталь окажется высшего сорта.

Тогда суммой $A + B$ является событие, состоящее в том, что хотя бы одна деталь из двух взятых будет первого сорта.

Суммой (объединением) нескольких событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

Пример. Производится 5 выстрелов по мишени. Рассмотрим события: A_0 – «ни одного попадания», A_1 – «одно попадание», A_2 – «два попадания», A_3 – «три попадания», A_4 – «четыре попадания», A_5 – «пять попаданий». Тогда $A = A_0 + A_1 + A_2$ есть событие – «не более двух попаданий», $B = A_3 + A_4 + A_5$ есть событие – «не менее трех попаданий».

Произведением (пересечением) двух событий A и B называется такое третье событие C, которое состоит в совместном появлении и события A, и события B.

Обозначение: $C = AB$ или $C = A \cap B$.

Пример. Событие A – «попадание в цель при первом выстреле», событие B – «попадание в цель при втором выстреле». Тогда AB состоит в попадании в цель при обоих выстрелах.

Произведением (пересечением) нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Пример. Бросается игральный кубик. Рассмотрим следующие события: A – «число выпавших очков меньше 5», B – «число выпавших очков больше 2», C – «число выпавших очков нечетное. Тогда событие $D = ABC$ заключается в том, что выпало 3 очка.

16.2. Вероятность события

Вероятность события - это численная мера объективной возможности его появления.

Идея выражать числами степень возможности появления тех или иных событий возникла давно и возникла на основе первых попыток исчисления шансов в азартных играх. Исторически первым определением понятия вероятности является то определение, которое в настоящее время принято называть классическим определением вероятности.

Если опыт таков, что подразделяется только на конечное число элементарных событий, которые к тому же являются равновероятными, то говорят, что речь идет о классическом случае.

Примерами таких опытов являются броски монеты (два равновероятных элементарных события) или бросание игральной кости (шесть равновероятных элементарных событий).

16.2.1. Классическая вероятность

Классическая формула вероятности. В общем случае, когда имеется n равновероятных элементарных событий, вероятность любого составного события A, состоящего из m элементарных событий определяется как отношение элементарных событий, благоприятствующих событию A, и общему числу элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример. Какова вероятность появления «решки» при бросании монеты?

В нашем примере можно определить всего 2 равновероятных элементарных событий, а благоприятствует событию A только одно из них. Тогда вероятность появления «решки» при одном бросании монеты равна:

$$P(A_1) = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Пример. В случае с игральной костью вероятность события A_1, состоящего в выпадении шестерки равна $P(A_1) = \frac{1}{6}$, а вероятность событий A_2, состоящего в выпадении четного числа очков равна $P(A_2) = \frac{3}{6} = 0{,}5.$

Пример. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 13?

Каждый из кубиков может упасть шестью различными способами.

Тогда два кубика по правилу умножения могут упасть 66=36 различными способами. Любой из этих исходов благоприятствует наступлению события A, заключающегося в том, что сумма выпавших очков меньше 13. Действительно, максимальная сумма очков выпадет тогда, когда на каждом кубике выпадет по 6 очков. Но эта сумма равна 12, и она меньше 13. Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{36}{36} = 1.$$

Из формулы для вычисления вероятности вытекают следующие свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, если событие A достоверное, то любой исход испытания благоприятствует этому событию, но тогда . Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна 0.

Действительно, если событие A невозможное, то ни один из исходов испытания не благоприятствует ему. Следовательно, $m = 0$, но тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Свойство 3.Вероятность события A удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Число исходов, благоприятствующих наступлению события, либо равно 0, либо m, либо, по определению вероятности, является частью всех n исходов испытания.

Пример. Цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 написаны на карточках, которые тщательно перемешаны. Произвольным образом выбираются подряд три карточки и кладутся в ряд. Какова вероятность того, что число, составленное из трех цифр, которые написаны на карточках, больше 987?

Найдем число исходов, благоприятствующих событию A, вероятность которого следует определить. Однако это число равняется нулю, так как из данных карточек нельзя составить число, которое больше 987. Действительно, любое число, которое больше 987, например, 988, 991, предполагает повторение цифр, что невозможно по условию задачи.

Таким образом, число благоприятствующих исходов $m = 0$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Для нахождения вероятности с помощью формулы классической вероятности часто приходится использовать элементы комбинаторики. Рассмотрим примеры

Пример. В урне находятся 12 красных и 8 зеленых шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что он красный?

Введем обозначения:

A – вынутый из урны шар окажется красным.

Тогда число случаев, благоприятствующих событию A, совпадает с количеством красных шаров в урне $m = 12$; а общее число случаев рассчитаем, как общее количество шаров в урне, $n = 12 + 8 = 20$.

Тогда, используя классическую формулу вероятностей получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{20} = 0{,}6 .$$

Таким образом, вероятность того, что вынутый из урны шар окажется красным, равна 0,6.

Пример. В урне находятся 12 красных и 8 зеленых шаров. Вынули три шара. Какова вероятность того, что один из них красный и два зеленых?

Введем обозначения:

A – вынули один красный шар и два зеленых.

Учитывая тот факт, что порядок вытаскивания трех шаров не важен, общее число вариантов n вытаскивания трех шаров из двадцати будет равно сочетанию из двадцати по трем:

$$n = C_{20}^{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140 .$$

Число благоприятных исходов m можно представить, как произведение количества комбинаций выбора одного красного шара из двенадцати C_{12}^{1} на количество комбинаций выбора двух шаров зеленого цвета из восьми C_{8}^{2}:

$$m = C_{12}^{1} \cdot C_{8}^{2} = \frac{12!}{1! \cdot 11!} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 12 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} = 336 .$$

Тогда, используя классическую формулу вероятностей получим:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{336}{1140}\neq 0{,}294737\ .$$

Таким образом, вероятность того, что среди вынутых из урны шаров один красный и два зеленых, равна 0,294737.

16.2.2. Статистическая вероятность

На практике очень часто встречаются испытания, число возможных исходов которых велико или бесконечно. Так же встречаются задачи, в которых элементарные события не являются равновозможными. В таких случаях классическое определение вероятности неприемлемо.

Во многих случаях трудно указать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы являются равновозможными. В связи с этим появилась необходимость введения еще одного определения вероятности, называемого *статистическим*. Чтобы дать это определение, предварительно вводят понятие относительной частоты события.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

$$\omega(A)=\frac{m}{n}\ .$$

Здесь $\omega(A)$ – относительная частота события A; m – число появлений события; n – общее число испытаний.

Частота события обладает следующими свойствами:

1) Частота достоверного события U равна единице:

$$\omega(U)=1\ .$$

2) Частота невозможного события V равна нулю:

$$\omega(V)=0\ .$$

3) Частота случайного события A заключена между нулем и единицей:

$$0\leq\omega(A)\leq 1\ .$$

4) Частота суммы двух несовместных событий A и B равна сумме частот этих событий:

Наблюдения позволили установить, что относительная частота обладает свойствами статистической устойчивости: в различных сериях многочленных испытаний (в каждом из которых может появиться или не появиться это событие) она принимает значения, достаточно близкие к некоторой постоянной. Эту постоянную, являющуюся объективной числовой характеристикой явления, считают вероятностью данного события.

Статистической вероятностью события А называется относительная частота появления этого события в n произведенных испытаниях.

$$P(A)=\omega(A)=\frac{m}{n}.$$

Пример. В результате 200 выстрелов по мишени получено 176 попаданий. Определить вероятность поражения цели при одном выстреле и вероятное число попаданий при 25 выстрелах.

Введем обозначения:

А – попадание в мишень.

Из условия задачи следует, что число испытаний, в котором появилось событие A, m = 176, а общее число фактически произведенных испытаний n = 200. Найдем вероятность поражения цели при одном выстреле:

$$P(A)=\omega(A)=\frac{m}{n}=\frac{176}{200}=0{,}88.$$

Из формулы статистической вероятности следует, что $m=\omega(A)\cdot n$, тогда подставляя числовые значения n и $\omega(A)$ получим:

$$m=\omega(A)\cdot n=0{,}88\cdot 25=22.$$

Таким образом, частота попаданий по мишени и вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,88, а вероятное число попаданий при 25 выстрелах равно 22.

16.2.3. Геометрическая вероятность

Пусть случайное испытание можно представить, как *бросание точки* наудачу в некоторую геометрическую область G (на прямой, плоскости, в пространстве). Элементарные исходы – это отдельные точки области G, любое событие A – это подмножество области, пространства элементарных исходов G.

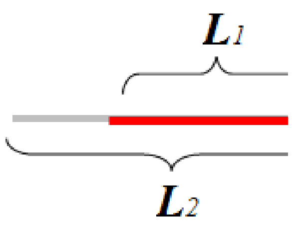
Если для простоты считать, что выбор точек равномерен внутри области G, то вероятность попадания точки в некоторое подмножество пропорциональна его мере (длине, площади, объему) и не зависит от его расположения и формы.

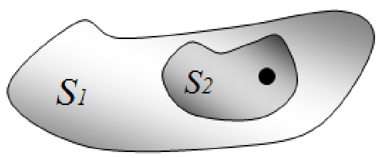
Геометрическая вероятность – это вероятность попадания точки в некоторую, заранее определенную область (отрезок, часть плоскости, объемной фигуры). Она определяется отношением:

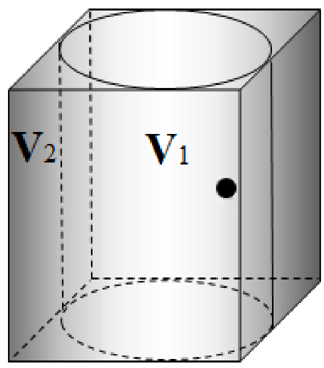
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(G)},$$

где $m(G)$ и $m(A)$ – геометрические меры (длины, площади или объемы) всего пространства элементарных исходов G и события A соответственно.

Чаще всего, в одномерном случае речь будет идти о длинах отрезков, в двумерном – о площадях фигур, в трехмерном – об объемах тел.







$$P(A) = \frac{\text{длина } l}{\text{длина } L}$$

$$P(A) = \frac{\text{площадь } S_1}{\text{площадь } S_2}$$

$$P(A) = \frac{\text{объем } V_1}{\text{объем } V_2}$$

Основная сложность при решении задач с использованием геометрической вероятности – построить математическую модель эксперимента, нужным образом выбрать пространство элементарных исходов, обозначить событие, выразить его математически как некоторую область.

Пример. В прямоугольник со сторонами 7 и 4 см вписан круг радиуса 2 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

Введем обозначения:

A – точка окажется внутри круга.

Согласно геометрической интерпретации искомая вероятность равна отношению площади круга, в который точка должна попасть, к площади прямоугольника, в который попадает поставленная точка:

$$P(A) = \frac{S_{круга}}{S_{прямоугольника}} = \frac{\pi 2^2}{7 \cdot 4} \approx 0,448799.$$

Таким образом, вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга, приближенно равна 0,448799.

Пример. Какова вероятность встречи двух курсантов, если они договорились встретиться в определенном месте, с 19.00 до 20.00 и могут ждать друг друга в течение 5 минут?

Введем обозначения:

A – курсанты встретятся.

Для решения задачи будем использовать геометрическое определение вероятности события. Обозначим x и y время прихода первого и второго курсантов соответственно. На значения переменных накладываются ограничения:

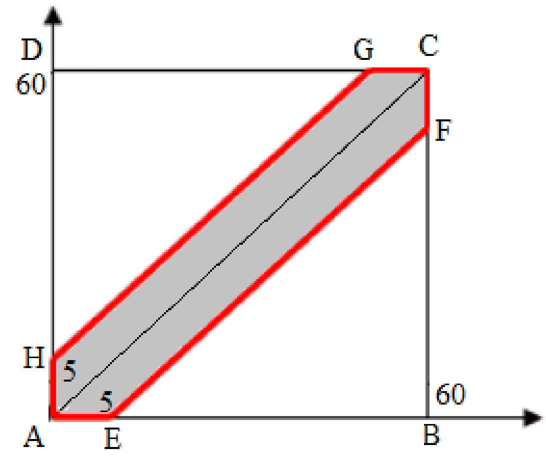
$$0 \le x \le 60; \quad 0 \le y \le 60.$$

В прямоугольной системе координат этому условию удовлетворяют точки, лежащие внутри квадрата *ABCD*.

Курсанты встретятся, если между моментами их прихода пройдет не более 5 минут. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} y - x < 5, & при\ x < y \\ x - y < 5, & при\ x > y \end{cases}.$$

Изобразим геометрически решение системы неравенств:



Тогда вероятность встречи равна отношению площадей шестиугольника *AEFCGH* и квадрата *ABCD*.

$$P(A) = \frac{S_{AEFCGH}}{S_{ABCD}} = \frac{60 \cdot 60 - 55 \cdot 55}{60 \cdot 60} \approx 0{,}159722 .$$

Таким образом, вероятность встречи двух курсантов равна 0,159722.

16.3. Вероятности суммы и произведения несовместных событий

Самыми простыми случаями применения формулы классической вероятности можно считать задачи, в условиях которых используются два или более несовместных событий.

Напомним, что два или несколько событий называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании. Рассмотрим методы нахождения вероятностей для случаев суммы и произведения несовместных событий.

16.3.1. Вероятность суммы несовместных событий

Теорема 16.1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B).$$

Пример. Найдем вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет либо шестерка, либо нечетное число.

Введем обозначения событий:

A_1 – «выпадение шестерки»; A_2 – «выпадение нечетного числа».

Вероятности наступления указанных событий будут равны:

$$P(A_1)=\frac{1}{6} \text{ и } P(A_2)=\frac{1}{2}.$$

События A_1 и A_2 являются несовместными, следовательно, для нахождения вероятности того, что при бросании игрального кубика выпадет либо шестерка, либо нечетное число можно воспользоваться формулой вероятности суммы двух несовместных событий:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1+3}{6}=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет либо шестерка, либо нечетное число равно $\frac{2}{3}$.

Теорема о вероятности суммы двух несовместных событий обобщается на случай произвольного числа попарно несовместных событий.

Теорема 16.2. Вероятность суммы двух или более попарно несовместных событий равна сумме вероятностей всех этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Пример. Стрелок производит выстрел по мишени. Вероятность его попадания в десятку равна 0,2, в девятку – 0,3, в восьмерку – 0,2 и в семерку – 0,1. Найти вероятность поражения цели.

Введем обозначения событий:

A_1 – «попадание в десятку»; A_2 – «попадание в девятку»;

A_3 – «попадание в восьмерку»; A_2 – «попадание в семерку».

Тогда вероятности наступления указанных событий будут равны:

$$P(A_1) = 0{,}2;\ P(A_2) = 0{,}3;\ P(A_3) = 0{,}2;\ P(A_4) = 0{,}1.$$

Все определенные события A_1, A_2, A_3, A_4 являются попарно несовместными. На самом деле, одним выстрелом одновременно попасть в две, три или четыре зоны поражения невозможно. Следовательно, для нахождения вероятности поражения цели, то есть наступления одного из вышеперечисленных событий A_1, A_2, A_3, A_4 можно найти по теореме вероятности суммы двух или более несовместных событий:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) =$$
$$= 0,2 + 0,3 + 0,2 + 0.1 = 0,8.$$

Таким образом, вероятность поражения цели стрелком равна *0,8.*

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример. Вероятность того, что событие А произойдет в течении суток равна 0,348. Определить вероятность того, что событие А не произойдет в течении суток.

Преобразуем формулу из следствия, перенеся в правую часть вероятность события А:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Подставив в полученное выражение вероятность события А, получим:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,348 = 0,652.$$

Таким образом, вероятность того, что событие А не произойдет в течении суток равна 0,652.

16.3.2. Вероятность произведения несовместных событий

Рассмотрим произведение двух или более попарно несовместных событий. Из определения несовместных событий следует, что одновременно эти события произойти не могут, а, следовательно, и вероятность их произведения всегда будет равна нулю.

Теорема 16.3. Вероятность произведения двух или более попарно несовместных событий равна нулю.

Пример. Найти вероятность того, что выбранная наудачу карта из колоды будет тузом и девяткой.

Введем обозначения:

A_1 – «выбран туз»; A_2 – «выбрана девятка».

События A_1 и A_2 являются несовместными, следовательно, вероятность того, что выбранная наудачу карта из колоды будет тузом и девяткой равна нулю.

16.4. Вероятность суммы и произведения совместных независимых событий

В этом вопросе лекции мы изучим еще один частный случай нахождения вероятности. Рассмотрим вероятности суммы и произведения для совместных независимых событий.

Напомним, что событие A называется *независимым* от события B, если появление события A не зависит от появления события В. В противном случае события называются *зависимыми*. Если речь идет о нескольких независимых событиях, то подразумевают, что исследуемые события являются попарно независимыми. Рассмотрим сначала метод нахождения вероятности произведения двух или более совместных независимых событий.

16.4.1. Вероятность произведения совместных независимых событий

Теорема 16.4. Вероятность произведения совместных, независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n) .$$

Пример. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения первым равна 0,8, а вторым – 0,7.

Введем обозначения событий:

A – поражение первым орудием; B – поражение вторым орудием.

Вероятности поражения цели первым и вторым орудиями равны соответственно: P(A) = 0.8; P(B) = 0.7.

События A и B являются совместными и независимыми, так как оба орудия одновременно, независимо друг от друга могут поразить цель. Тогда для нахождения вероятности совместного поражения цели двумя орудиями можно использовать формулу вероятности произведения совместных независимых событий:

$$\mathrm{P(AB)} = \mathrm{P(A)P(B)} = 0{,}8\,0{,}7 = 0{,}56\ .$$

Таким образом, вероятность совместного поражения цели двумя орудиями равна 0,56.

Пример. Курсант разыскивает формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула окажется: только в одном справочнике; только в двух справочниках; во всех трех справочниках.

По условию вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны

$$p_1 = 0{,}6;\ p_2 = 0{,}7;\ p_3 = 0{,}8.$$

Тогда вероятности того, что формула не окажутся в этих справочниках будут равны: $q_1 = 0{,}4$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}2$.

Найдем вероятность того, что формула содержится только в одном справочнике:

$$P(A) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}188.$$

Теперь определим вероятность нахождения формулы только в двух справочниках:

$$P(B) = p_1 p_2 q_3 + q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3 =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}452.$$

А теперь рассчитаем вероятность того, что формула можно найти во всех трех справочниках:

$$P(C) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}336.$$

Теперь рассмотрим алгоритм нахождения вероятности суммы совместных независимых событий.

Пример. Агент передаёт некоторое сообщение по рации. В целях повышения надёжности передачи сообщения в условиях действия помех, сообщение дублируется 4 раза. Сообщение считается искаженным, если все 4 посылки окажутся искаженными помехами. Какова вероятность искажения сообщения, если вероятность его искажения при каждой посылке 0,3?

Введем обозначения:

А – искажение команды вообще;

B_i – искажение команды при i-й посылке.

Так как события B_i – независимые по условию задачи, то

$$P(A) = P(B_1B_2B_3B_4) = P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(B_4) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = (0{,}3)^4 = 0{,}0081.$$

16.4.2. Вероятность суммы совместных независимых событий

Теорема 16.5. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Пример. Три стрелка производят залп по мишени. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,9, третьим – 0,75. Определить вероятность поражения мишени после залпа.

Введем обозначения событий:

A – поражение цели хотя бы одним стрелком;

A_1 – поражение цели первым стрелком;

A_2 – поражение цели вторым стрелком;

A_2 – поражение цели вторым стрелком.

Вероятности событий равны: P(A_1) = 0,8; P(A_2) = 0,9; P(A_3) = 0,75.

Все события являются совместными и попарно независимыми. Учитывая это применим формулу вероятности суммы совместных независимых событий:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3).$$

Рассчитаем вероятности событий противоположных для A_1, A_2 и A_3:

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2; \quad P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1; \quad P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

Подставляя значения рассчитанных вероятностей получим:

$$P(A) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}25 = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$$

Таким образом, вероятность поражения мишени после залпа равна 0,995.

Пример. Курсант разыскивает формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что формула окажется хотя бы в одном справочнике.

По условию вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}6; \qquad p_2 = 0{,}7; \qquad p_3 = 0{,}8.$$

Тогда вероятности того, что формула отсутствует в справочниках:

$$q_1 = 0{,}4; \qquad q_2 = 0{,}3; \qquad q_3 = 0{,}2.$$

Тогда вероятность того, что формула окажется хотя бы в одном справочнике можно найти следующим образом:

$$P(A) = 1 - q_1\, q_2\, q_3 = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}976.$$

Пример. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем ящике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что деталь содержится не более чем в двух ящиках.

Введем обозначения событий:

A – деталь содержится не более чем в двух ящиках;

A_1 – нужная сборщику деталь находится в первом ящике;

A_2 – нужная сборщику деталь находится во втором ящике;

A_3 – нужная сборщику деталь находится в третьем ящике.

Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем ящике соответственно равны:

$$\mathrm{p}_1 = 0{,}6; \qquad \mathrm{p}_2 = 0{,}7; \qquad \mathrm{p}_3 = 0{,}8.$$

Вероятности того, что нужной детали не окажется в первом, втором, третьем ящике соответственно равны:

$$\mathrm{q}_1 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4; \;\; \mathrm{q}_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3; \;\; \mathrm{q}_3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Вероятность того, что деталь содержится не более чем в двух ящиках можно выразить следующим образом:

$$P_3(m \le 2) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2).$$

Рассчитаем находящиеся в правой части равенства значения. Сначала найдем вероятность того, что нужная деталь не окажется ни в одном из ящиков:

$$P_3(0)=q_1q_2q_3=0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}2=0{,}024.$$

Затем найдем вероятность того, что нужная деталь окажется только в одном ящике. Для этого сложим вероятности нахождения детали только в первом ящике, только во втором ящике и только в третьем ящике:

$$P_3(1)=p_1q_2q_3+p_2q_1q_3+p_3q_1q_2=0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}2+0{,}7\cdot0{,}4\cdot0{,}2+$$

$$+0{,}8\cdot0{,}4\cdot0{,}3=0{,}036+0{,}056+0{,}096=0{,}188\,.$$

Теперь найдем вероятность того, что нужная деталь окажется только в двух ящиках. Снова рассчитываем и складываем три варианта – первый и второй ящики, первый и третий ящики, второй и третий ящики:

$$P_3(2)=p_1p_2q_3+p_1p_3q_2+p_2p_3q_1=0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}2+0{,}6\cdot0{,}8\cdot0{,}3+$$

$$+0{,}7\cdot0{,}8\cdot0{,}4=0{,}084+0{,}144+0{,}224=0{,}452\,.$$

Теперь складываем полученные вероятности $P_3(0), P_3(1), P_3(2)$:

$$P_3(m\le2)=P_3(0)+P_3(1)+P_3(2)=0{,}024+0{,}188+0{,}452=0{,}664.$$

Таким образом, вероятности того, что деталь содержится не более чем в двух ящиках равна 0,664.

16.5. Вероятность суммы и произведения произвольных событий

Если совместные события являются зависимыми, то есть если появление события *A* зависит от появления события В или наоборот, то использование выше приведенных формул для вычисления вероятностей суммы и произведения для независимых событий дадут неверный результат

Рассмотрим несколько новых методов, которые могут использоваться для любых произвольных событий, зависимых и независимых.

16.5.1. Условная вероятность

Условной вероятностью P(A/B) называют вероятность события *A*, вычисленную в предположении, что событие *B* уже наступило.

Теорема 16.6. Для условной вероятности Р(А/В) справедлива формула

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\,.$$

Аналогично можно найти и вероятность события B, при уже наступившем событии A:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Пример. В ящике 21 деталь: 14 стандартных, 7 нестандартных. Последовательно берут две детали, не возвращая их в ящик. Какова вероятность того, что при обоих испытаниях появятся нестандартные детали.

Введем обозначения событий:

A – при первом испытании появилась нестандартная деталь;

B – при испытании появилась нестандартная деталь.

Вероятность события A можно определить, как отношение количества нестандартных деталей к общему количеству деталей в ящике:

$$P(A) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}.$$

После наступления события A в ящике осталось 20 деталей, причем, только 13 оставшихся деталей будут нестандартными. Тогда условную вероятность события B можно определить, как отношение количества оставшихся нестандартных деталей к общему количеству оставшихся деталей в ящике.

$$P(B/A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Для нахождения вероятности того, что при обоих испытаниях появятся нестандартные детали, будем использовать формулу условной вероятности:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} - 0{,}1.$$

Таким образом, вероятность того, что при обоих испытаниях появятся нестандартные детали рана 0,1.

16.5.2. Вероятность произведения произвольных событий

Теорема 16.7. Вероятность произведения двух произвольных событий A и B равна вероятности одного из этих событий, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Пример. В ящике 50 деталей, 45 стандартных, 5 нестандартных. Последовательно берут две детали, не возвращая их в ящик.

Какова вероятность того, что:

а) при обоих испытаниях появятся стандартные детали;

б) при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м – нестандартная?

Введем обозначения:

A_1 - при 1-м испытании появилась стандартная деталь;

B_1 - при 1-м испытании появилась нестандартная деталь;

A_2 - при 2-м испытании появилась стандартная деталь;

B_2 - при 2-м испытании появилась нестандартная деталь.

а) Найдем вероятность того, что при обоих испытаниях появятся стандартные детали. Для этого необходимо найти вероятность одновременного наступления событий A_1 и A_2:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \approx 0{,}808.$$

б) Теперь найдем вероятность того, что при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м – нестандартная. Этого можно достичь, вычислив вероятность одновременного наступления событий A_1 и B_2:

$$P(A_1B_2) = P(A_1)P(B_2/A_1) = \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \approx 0{,}092.$$

Если необходимо вычислить вероятность произведения большего количества событий, то можно использовать следующую теорему.

Теорема 16.8. Вероятность совместного появления нескольких произвольных событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot...\cdot P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

Пример. В пепельнице на месте преступления обнаружено 8 окурков, 5 из которых со следами губной помады. В первый день на исследование берутся 4 окурка. Какова вероятность того, что все они будут со следами губной помады, если отбор объектов экспертизы случаен?

Введем обозначения событий:

A_1 – 1-й окурок имеет следы губной помады;

A_2 – 2-й окурок имеет следы губной помады;

A_3 – 3-й окурок имеет следы губной помады;

A_4 – 4-й окурок имеет следы губной помады.

Согласно теореме о вероятности совместного появления нескольких произвольных событий вероятность того, что все окурки будут со следами губной помады можно найти по формуле:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot P(A_4/A_1A_2A_3A_4).$$

Найдем соответствующие вероятности. Вероятность того, что 1-й окурок имеет следы губной помады, найдем разделив количество окурков со следами губной помады на общее количество окурков:

$$P(A_1)=\frac{5}{8}.$$

Найдем условные вероятности $P(A_2/A_1)$, $P(A_3/A_1A_2)$ и $P(A_4,/A_1A_2A_3)$, каждый раз уменьшая количество окурков со следами губной помады и общего количество оставшихся окурков:

$$P(A_2/A_1)=\frac{4}{7};\quad P(A_3/A_1A_2A_3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};\ P(A_4/A_1A_2A_3)=\frac{2}{5}.$$

Подставим полученные значения в формулу вероятности совместного появления нескольких произвольных событий:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot P(A_4/A_1A_2A_3A_4)=$$

$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{14}.$$

Пример. В ящике 50 деталей, 45 – стандартных, 5 – нестандартных. Берут последовательно 3 детали, не возвращая в ящик. Какова вероятность того, что:

а) при всех трех испытаниях появятся стандартные детали;

б) при 1-м испытании – стандартная деталь, при 2-м и 3-м – нестандартные?

Введем обозначения событий:

A_1 – при 1-м испытании появились стандартные детали;

B_1 – при 1-м испытании появились нестандартные детали;

A_2 – при 2-м испытании появились стандартные детали;

B_2 – при 2-м испытании появились нестандартные детали;

A_3 – при 3-м испытании появились стандартные детали;

B_3 – при 3-м испытании появились нестандартные детали.

Все рассматриваемые события являются зависимыми.

Сначала рассмотрим первый случай: при всех трех испытаниях появятся стандартные детали. Используя вероятности совместного появления нескольких произвольных событий получим:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2).$$

Определим вероятности наступления событий A_1, A_2, A_3:

$$P(A_1)=\frac{45}{50};\quad P(A_2/A_1)=\frac{44}{49};\quad P(A_3/A_1A_2)=\frac{43}{48}.$$

Подставив полученные значения в формулу произведения, найдем вероятность того, что при всех трех испытаниях появятся стандартные детали.

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)=\frac{45}{50}\cdot\frac{44}{49}\cdot\frac{43}{48}\approx 0{,}724.$$

Рассмотрим второй случай. Здесь при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м и 3-м – нестандартные. Снова будем использовать формулу произведения произвольных событий:

$$P(A_1B_2B_3) = P(A_1)\cdot P(B_2/A_1)\cdot P(B_3/A_1B_2).$$

Рассчитаем вероятности наступления событий A_1, B_2, B_3:

$$P(A_1)=\frac{45}{50};\quad P(B_2/A_1)=\frac{5}{49};\quad P(B_3/A_1B_2)=\frac{4}{48}.$$

Подставив полученные значения в формулу произведения, найдем вероятность того, что при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м и 3-м – нестандартные/

$$P(A_1B_2B_3) = P(A_1)\cdot P(B_2/A_1)\cdot P(B_3/A_1B_2) = \frac{45}{50}\cdot\frac{5}{49}\cdot\frac{4}{48} \approx 0{,}008.$$

16.5.3. Вероятность суммы произвольных событий

Теорема 16.9. Вероятность суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей событий без вероятности их произведения:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1\cdot A_2).$$

Пример. Бросают 2 игральных кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Введем обозначения:

А - появление шестерки при бросании 1-й кости;

В - появление шестерки при бросании 2-й кости.

Используя классическое определение вероятности, имеем:

$$P(A) = \frac{1}{6};\ P(B) = \frac{1}{6}.$$

Так как события А и В независимы, то совместное событие АВ при одновременном бросании двух костей, где элемент i, j выпадение чисел i и j на двух костях равно $P(AB) = \frac{1}{36}$.

Так как события А и В совместны, то

$$P(A+B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Пример. Три стрелка стреляют по одной цели. Найти вероятность поражения цели при одном залпе, если вероятности поражения цели соответственно равны: 0,8; 0,8; 0,9.

Введем обозначения:

B_i – поражение цели i-м стрелком (i = 1, 2, 3).

Так как события B_i совместны, используем формулу

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) – P(B_1B_2) – P(B_1B_3) – P(B_2B_3).$$

В нашем примере:

$$P(B_1B_2B_3) = 0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}8 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 =$$

$$= 2{,}5 - 0{,}8 \cdot (0{,}8 + 0{,}9 + 0{,}9) + 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 2{,}5 - 0{,}8 \cdot 2{,}04 = 0{,}868.$$

Пример. В ящике 50 деталей, из них 45 стандартных и 5 нестандартных. Из ящика берут одну деталь, затем возвращают в ящик и повторяют проделанную манипуляцию. Какова вероятность того, что, хотя бы одна деталь окажется стандартной?

Введем обозначения событий:

A_1 - при первом испытании появилась стандартная деталь.

A_2 - при втором испытании появилась стандартная деталь.

Используем формулу вероятности суммы двух произвольных событий:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2).$$

Так как деталь возвращается в ящик, то события A_1, A_2 – независимые, следовательно,

$$P(A_1A_2) = P(A_1)(A_2).$$

Найдем вероятности событий A_1, A_2, A_1A_2,

$$P(A_1) = \frac{45}{50}; \quad P(A_2) = \frac{45}{50}; \quad P(A_1A_2) = \frac{45}{50} \cdot \frac{45}{50}.$$

Тогда окончательно получим:

$$P(A_1 + A_2) = \frac{45}{50} + \frac{45}{50} - \frac{45}{50} \cdot \frac{45}{50} = 2 \cdot \frac{45}{50} - \left(\frac{45}{50}\right)^2 = \frac{45}{50}\left(2 - \frac{45}{50}\right) =$$

$$= \frac{45}{50} \cdot \frac{55}{50} = \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{99}{100} = 0{,}99.$$

Теорема 16.10. Вероятность суммы *n* произвольных событий можно определить следующим образом:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Ai\right) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) - \sum_{ij} P(AiAj) + \sum_{ijk} P(AiAjAk) + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^{n} Ai\right).$$

Пример. В ящике 50 деталей, из них 45 стандартных, 5 нестандартных. Из ящика берут наудачу 2 детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь окажется нестандартной?

Используется теорема: $P(A_1 + A_2 + \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$ (для попарно несовместимых событий).

Введем обозначения:

B – среди выбранных деталей появилась хотя бы одна нестандартная;

A_1 – выбраны стандартная и нестандартная детали;

A_2 – выбраны две нестандартные детали.

$$B = A_1 + A_2$$

Общее число возможных вариантов выбора двух деталей из пятидесяти равно C_{50}^2. Число событий, благоприятствующих событию A_1, равно $C_{45}^1 C_5^1$. А вероятность события A_1 равна

$$P(A_1) = \frac{C_{45}^1 C_5^1}{C_{50}^2} = \frac{45 \cdot 5 \cdot 48! \cdot 2!}{50!} = \frac{45}{245}.$$

Число событий, благоприятствующих событию A_2, равно C_5^2. Тогда вероятность события A_2 равна

$$P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{50}^2} = \frac{5! \cdot 48! \cdot 2!}{2! \cdot 3! \cdot 50!} = \frac{4 \cdot 5}{45 \cdot 50} = \frac{2}{245}.$$

Вероятность того, что среди выбранных деталей появилась хотя бы одна нестандартная, равна

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = \frac{45}{245} + \frac{2}{245} = \frac{47}{245}.$$

Пример. Выпущено 10000 лотерейных билетов и установлены размеры выигрышей и количества: 10 выигрышей по 200 долларов, 100 – по 100 долларов, 500 – по 25 долларов и 1000 – по 5 долларов. Был куплен один билет. Какова вероятность того, что он будет выигрышным и выиграет не меньше 25 долларов?

Введем обозначения:

A – выигрыш не менее 25 долларов;

A_1 – выигрыш равен 25 долларов (500 билетов);

A_2 – выигрыш равен 100 долларам (100 билетов);

A_3 – выигрыш равен 200 долларов (10 билетов).

Тогда

$$P(A_1)=\frac{500}{10000}=0{,}05;\ P(A_2)=\frac{100}{10000}=0{,}01;\ P(A_3)=\frac{10}{10000}=0{,}001;$$

P(A) = 0,05+0,01+0,001 = 0,061.

16.6. Формула полной вероятности

Следствием двух основных теорем теории вероятностей, теоремы сложения и теоремы умножения, является формула полной вероятности.

16.6.1. Основные понятия и формулы

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, то есть в результате испытания обязательно должно произойти одно и только одно из этих событий. Поскольку заранее не известно, какое из событий H_i наступит, события $H_1, H_2, \ldots, H_n$, будем называть *гипотезами*.

В силу того, что H_1, H_2, ..., H_n – полная группа попарно несовместных событий, используя теорему сложения для попарно несовместных событий, можно получить вероятность события A:

$$P(A)=P(A\cap H_1)+P(A\cap H_2)+\ldots+P(A\cap H_n)$$

Кратко полученную формулу можно записать в виде:

$$P(A)=\sum_{i+1}^{n}P(A\cap H_i).$$

Вероятности $P(A\cap H_i)$ можно представить, как произведение вероятности гипотезы H_i на условную вероятность события A при наступлении H_i:

$$P(A\cap H_i)=P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

В результате подстановки выражения $P(H_i)\cdot P(A/H_i)$ вместо $P(A\cap H_i)$ получим новую формулу вычисления вероятности события A:

$$P(A)=\sum_{i+1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

Полученная формула называется формулой *полной вероятности.*

Теорема 16.11. Если событие *A* может произойти только при условии появления одной из гипотез H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу, то вероятность события *A* равна сумме произведения вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующие условные вероятности события *A*:

$$P(A) = \sum_{i+1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)$$

В случае небольшого количества гипотез, образующих полную группу, формулы полной вероятности проще записывать в виде:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A / H_n) .$$

16.6.2. Вычисление вероятностей с помощью формулы полной вероятности

Формула полной вероятности используется в случаях, когда вероятность события *A* вычисляется сложно, гипотезы H_i образуют полную группу, а условные вероятности $P(A/H_I)$ и вероятности самих гипотез $P(H_i)$ вычисляются достаточно просто.

Пример. В пирамиде 20 винтовок, 8 из них с оптическим прицелом. Вероятность поражения цели при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,98; а для винтовки без оптического прицела – 0,7. Стрелок производит выстрел из наудачу взятой винтовки. Какова вероятность того, что цель будет поражена?

Введем обозначения событий.

A – цель поражена;

H_1 – выбрана винтовка с оптическим прицелом;

H_2 – выбрана винтовка без оптического прицела.

События H_1 и H_2 состоят в том, что будет выбрана винтовка с оптическим или без оптического прицела. Определим вероятности наступления этих гипотез. Используя теорему классической вероятности получим:

$$P(H_1) = \frac{8}{20} = 0{,}4; \quad P(H_2) = \frac{20-8}{20} = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

По условию задачи вероятности наступления события A при наступлении гипотез H_1, H_2 соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}98; \quad P(A/H_2) = 0{,}7.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}812.$$

Таким образом, вероятность того, что цель поражена рана 0,812.

Пример. Литье в болванках для дальнейшей обработки поступает из двух цехов: 70% из первого и 30% из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго – 20%. Найти вероятность того, что одна наудачу взятая болванка не имеет дефектов.

Введем обозначения:

А –болванка взята без дефектов;

H_1 – заготовка взята из 1-го цеха;

H_2 – заготовка взята из 2-го цеха.

События H_1 и H_2 состоят в том, что взятая болванка взята из первого или второго цеха. Определим вероятности наступления этих гипотез:

$$P(H_1) = \frac{70}{100} = 0{,}7; \quad P(H_2) = \frac{30}{100} = 0{,}3.$$

По условию вероятности наступления события А при условиях наступления гипотез H_1 и H_2 соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 1 - \frac{10}{100} = 1 - 0{,}1 = 0{,}9; \quad P(A/H_2) = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}87.$$

Таким образом, вероятность того, что взятая наудачу болванка не имеет дефектов равна 0,87.

Пример. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные – в третьем. Первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9; второй цех – с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

Введем обозначения событий.

А - выбрана деталь отличного качества.

гипотеза H_1 - выбранная деталь изготовлена в первом цехе;

гипотеза H_2 - выбранная деталь изготовлена во втором цехе;

гипотеза H_3 - выбранная деталь изготовлена в третьем цехе.

События H_1, H_2, H_3 состоят в том, что выбранная деталь изготовлена в первом, втором, третьем цехах, тогда

$$P(H_1)=\frac{18}{50};\quad P(H_2)=\frac{20}{50};\quad P(H_3)=\frac{12}{50}.$$

По условию вероятности наступления события А при наступлении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно равны:

$$P(A/H_1)=0{,}9;\quad P(A/H_2)=0{,}6;\quad P(H_3)=0{,}9.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$

$$=0{,}9\cdot\frac{18}{50}+0{,}6\cdot\frac{20}{50}+0{,}9\cdot\frac{12}{50}=\frac{39}{50}=0{,}78.$$

Таким образом, вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества равна 0,78.

Пример. На огневом рубеже три стрелка. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,75; вторым – 0,9; а третьим – 0,87. Стреляет произвольно выбранный стрелок. Найти вероятность попадания в цель.

Введем обозначения событий.

А – попадание в цель;

гипотеза H_1 – стреляет первый стрелок;

гипотеза H_2 – стреляет второй стрелок;

гипотеза H_3 – стреляет третий стрелок.

События H_1, H_2, H_3 состоят в том, что будет стрелять первый, второй или третий стрелок. Определим вероятности наступления этих гипотез. Поскольку стрелков всего три, то вероятности того, что будет стрелять первый, второй, третий одна и та же:

$$P(H_1) = \frac{1}{3}; \quad P(H_2) = \frac{1}{3}; \quad P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

По условию вероятности наступления события А при наступлении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}75; \quad P(A/H_2) = 0{,}9; \quad P(A/H_3) = 0{,}87.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}75 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}87 = \frac{1}{3} \cdot (0{,}75 + 0{,}9 + 0{,}87) = \frac{1}{3} \cdot 2{,}52 = 0{,}84.$$

Таким образом, вероятность того, что цель поражена рана 0,84.

Пример. В первой урне находится 4 белых и 6 черных шаров, во второй – 5 белых и 3 чёрных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар, а затем из этих двух наудачу берется один. Какова вероятность, что это будет белый шар?

Введем обозначения:

А – из двух урн вынули наудачу белый шар;

H_1 – из первой урны вытащили белый шар, а из второй – черный;

H_2 – из первой урны вытащили белый шар, а из второй – белый;

H_3 – из первой урны вытащили черный шар, а из второй – черный;

H_4 –из первой урны вытащили черный шар, а из второй – белый.

Найдем вероятности гипотез H_1, H_2, H_3, H_4, используя классическое определению вероятности:

$$P(H_1) = \frac{4}{4+6} \cdot \frac{3}{5+3} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{80} = \frac{3}{20};$$

$$P(H_2) = \frac{4}{4+6} \cdot \frac{5}{5+3} = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4};$$

$$P(H_3) = \frac{6}{4+6} \cdot \frac{3}{5+3} = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{18}{80} = \frac{9}{40};$$

$$P(H_4)=\frac{6}{4+6}\cdot\frac{5}{5+3}=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{8}=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}.$$

Найдем вероятности события А, при условии появления гипотез H_1, H_2, H_3, H_4. При появлении гипотез H_1 и H_3 условные вероятности наступления события А будут равны 0,5, поскольку в этих случаях мы выбираем один белый и один черный шары:

$$P(A/H_1)=\frac{1}{2};\quad P(A/H_4)=\frac{1}{2}.$$

При появлении H_2 событие A/H_2 будет достоверным, так как обо шара – белые, а при появлении H_4 событие A/H_4 будет невозможным, так как оба выбранных шара – черные:

$$P(A/H_2)=1;\quad P(A/H_3)=0.$$

Вероятность события А найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)+P(H_4)\cdot P(A/H_4)=$$

$$=\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{9}{40}\cdot 0+\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{8}=\frac{41}{80}=0{,}5152.$$

Таки образом, вероятность того, что в результате испытания появится белый шар равна 0,5152.

16.7. Формула гипотез Байеса

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является формула гипотез Байеса.

16.7.1. Теорема Байеса

Теорема 16.12. Если событие *А* может произойти только при условии появления одной из гипотез H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу, то условная вероятность события H_i в предположении, что событие А уже произошло, определяется по *формуле Байеса*:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

где *P(A)* вычисляют по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i+1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

Подставляя формулу полной вероятности в знаменатель дроби, запишем формулу гипотез Байеса в следующем виде:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}.$$

16.7.2. Вычисление вероятностей гипотез

Пример. Два полицейских выстрелили по преступнику, в результате чего он был поражен одной пулей. Вероятность попадания первым полицейским равна 0,8; а вторым – 0,7. Каковы вероятности того, что преступник был поражен первым или вторым полицейским?

Введем обозначения событий.

A – поражение преступника;

H_1 - в цель попал только первый полицейский;

H_2 - в цель попал только второй полицейский.

По условию задачи вероятности поражения преступника p_1 и p_2 двумя полицейскими соответственно равны:

$$p_1=0{,}8;\quad p_2=0{,}7.$$

Тогда вероятности промахов q_1 и q_2 первым и вторым полицейскими будут равны:

$$q_1=1-p_1=0{,}2;\quad q_2=1-p_2=0{,}3.$$

Вероятности поражения цели только первым или только вторым полицейскими будут равны:

$$P(H_1)=p_1q_2=0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}24;$$

$$P(H_2)=p_2q_1=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14.$$

Из условия задачи мы знаем, что преступник был поражен одной пулей, следовательно, события A/H_1 и A/H_2 являются достоверными и, следовательно:

$$P(A/H_1)=1;\quad P(A/H_2)=1.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=0{,}24\cdot 1+0{,}14\cdot 1=0{,}38.$$

Тогда вероятность поражения преступника только первым полицейским равна:

$$P(H_1/A)\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}24}{0{,}38}=\frac{12}{19};$$

а вероятность поражения преступника только вторым полицейским равна:

$$P(H_2/A)\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}14}{0{,}38}=\frac{7}{19}.$$

Таким образом, вероятности того, что преступник был поражен первым или вторым полицейским равны соответственно $\frac{12}{19}$ и $\frac{7}{19}$.

Пример. Литье в болванках для дальнейшей обработки поступает из двух цехов: 70% из первого и 30% из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго – 20%. Найти вероятность того, что наудачу взятая не имеющая дефектов болванка была взята из первого цеха.

Введем обозначения:

A – взятая болванка оказалась без дефектов;

H_1 – заготовка получена из первого цеха;

H_2 – заготовка получена из второго цеха.

Тогда по условию задачи вероятности того, что болванки получены из первого или второго цеха равны соответственно:

$$P(H_1)=0{,}7;\quad P(H_2)=0{,}3.$$

А вероятности события А при условии наступления гипотез H_1 и H_2 будут соответственно равны:

$$P(A/H_1)=1-0{,}1=0{,}9;\quad P(A/H_2)=1-0{,}2=0{,}8.$$

По формуле полной вероятности определим вероятность события А.

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=0{,}7\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}87.$$

Тогда по формуле Байеса проверим первую гипотезу:

$$P(H_1/A)\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0,7\cdot 0,9}{0,87}=\frac{0,63}{0,87}\approx 0,724138.$$

Таким образом, вероятность того, что наудачу взятая не имеющая дефектов болванка была взята из первого цеха приближенно равна 0,724138.

Пример. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 - во втором, остальные - в третьем. Первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью – 0,9; второй цех - с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь отличного качества изготовлена в первом цехе?

Введем обозначения.

А – выбрана деталь отличного качества;

гипотеза H_1 – выбранная деталь изготовлена в первом цехе;

гипотеза H_2 – выбранная деталь изготовлена во втором цехе;

гипотеза H_3 – выбранная деталь изготовлена в третьем цехе.

Вероятности изготовления выбранной детали в первом, втором или третьем цехе будут равны:

$$P(H_1)=\frac{18}{50};\quad P(H_2)=\frac{20}{50};\quad P(H_1)=\frac{12}{50}.$$

Из условия задачи мы знаем, первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью – 0,9; второй цех - с вероятностью 0,6. Таким образом выпишем вероятности события А, при условии, что выбранная деталь изготовлена в первом, втором или третьем цехе:

$$P(A/H_1)=0,9;\quad P(A/H_2)=0,6;\quad P(A/H_3)=0,9.$$

Тогда по формуле Байеса найдем решение задачи, вероятность того, что взятая наудачу деталь отличного качества изготовлена в первом цехе:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)}=$$

$$= \frac{0{,}9 \cdot \frac{18}{50}}{0{,}9 \cdot \frac{18}{50} + 0{,}6 \cdot \frac{20}{50} + 0{,}9 \cdot \frac{12}{50}} = \frac{9 \cdot 18}{9 \cdot 18 + 6 \cdot 20 + 9 \cdot 12} = \frac{162}{390} \approx 0{,}415385.$$

Таким образом, вероятность того, что взятая наудачу деталь отличного качества изготовлена в первом цехе равна примерно 0,415385.

Пример. Три стрелка одновременно стреляют в цель, причем обнаруживаются только 2 попадания. Найти вероятность того, что первый и второй стрелки попали в цель, если вероятность попадания первым стрелком равна 0,4; вторым – 0,5; третьим – 0,45.

Введем обозначения:

А – цель поражена двумя пулями;

H_1 – только первый и второй стрелки попали в цель;

H_2 – только первый и третий стрелки попали в цель;

H_3 – только второй и третий стрелки попали в цель.

По условию задачи вероятности p_1, p_2 и p_3 попадания в цель стрелками равны соответственно:

$$p_1 = 0{,}4; \quad p_2 = 0{,}5; \quad p_3 = 0{,}45.$$

Тогда вероятности промахов q_1, q_2 и q_3 первым, вторым и третьим полицейскими будут равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 0{,}62; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0{,}5; \quad q_3 = 1 - p_3 = 0{,}55.$$

Найдем вероятности наступления гипотез H_1, H_2 и H_3:

$$P(H_1) = p_1 p_2 q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}55 = 0{,}11;$$

$$P(H_2) = p_1 q_2 p_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}45 = 0{,}09;$$

$$P(H_3) = q_2 p_2 p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}45 = 0{,}135.$$

Условные вероятности поражения цели, при условии, что выполняются гипотезы H_1, H_2, H_3 равны:

$$P(A / H_1) = 1; \quad P(A / H_2) = 1; \quad P(A / H_3) = 1.$$

По формуле полной вероятности найдем вероятность того, что цель будет поражена двумя стрелками:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) =$$

$$= 0{,}11 \cdot 1 + 0{,}09 \cdot 1 + 0{,}135 \cdot 1 = 0{,}335.$$

Тогда по формуле гипотез Байеса вероятность поражения цели только первым и вторым стрелком равна:

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1/\mathrm{A}) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}11 \cdot 1}{0{,}335} = \frac{110}{335} = \frac{22}{67} \approx 0{,}328359.$$

Таким образом, вероятность поражения цели только первым и вторым стрелком приближенно равна 0,328359.

Пример. Из тридцати стрелков 12 попадает в цель с вероятностью 0,6, восемь – с вероятностью 0,5 и десять – с вероятностью 0,7. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

Введем обозначения:

A – выбранный стрелок попал в мишень;

H_1 – выбранный стрелок принадлежал первой группе;

H_2 – выбранный стрелок принадлежал второй группе;

H_3 – выбранный стрелок принадлежал третьей группе.

Согласно классическому определению вероятности гипотез H_1, H_2 и H_3 соответственно равны:

$$P(H_1) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}; \quad P(H_2) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}; \quad P(H_3) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Из условия задачи выпишем вероятности события A при условии наступления гипотез H_1, H_2 и H_3:

$$P(A/H_1) = 0{,}6; \quad P(A/H_2) = 0{,}5; \quad P(A/H_3) = 0{,}7.$$

По формуле полной вероятности найдем вероятность наступления события A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 0{,}6 + \frac{4}{15} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}7 = \frac{6 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 7}{150} = \frac{91}{150}.$$

Теперь формуле Байеса найдем вероятности того, что стрелок принадлежал *i*-ой группе, если он попал в цель:

$$\mathrm{P(H_1/A)} = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot 0{,}6}{\frac{91}{150}} = \frac{1{,}2\cdot 150}{5\cdot 91} = \frac{180}{455} = \frac{36}{91} \approx 0{,}395604.$$

$$\mathrm{P(H_2/A)} = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{15}\cdot 0{,}5}{\frac{91}{150}} = \frac{2\cdot 150}{15\cdot 91} = \frac{300}{1365} = \frac{20}{91} \approx 0{,}219780.$$

$$\mathrm{P(H_3/A)} = \frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}7}{\frac{91}{150}} = \frac{0{,}7\cdot 150}{3\cdot 91} = \frac{105}{273} = \frac{35}{91} \approx 0{,}384615.$$

Сравним полученные значения. Наибольшим значением является условная вероятность первой гипотезы $\mathrm{P(H_1/A)} \approx 0{,}395604$. Значит, вероятнее всего стрелок принадлежал первой группе.

Вопросы для самоконтроля

1. Определите понятия достоверных, невозможных, случайных, неопределенных событий. Приведите примеры.

2. Дайте подробную классификацию событий. Приведите примеры различных событий.

3. В чем отличие совместных событий от несовместных? Приведите примеры совместных и несовместных событий.

4. Сформулируйте понятия зависимых и независимых событий. Приведите примеры зависимых и независимых событий.

5. Какие математические операции можно совершать над элементарными событиями?

6. Сформулируйте понятие суммы двух или нескольких событий. Приведите примеры суммы событий.

7. Приведите примеры произведения двух или нескольких событий. Приведите примеры произведения событий.

8. Что такое вероятность события? Какие виды вероятностей вы знаете?

9. Перечислите и на примерах продемонстрируйте основные свойства вероятностей.

10. Дайте определение классическому определение вероятности события. Приведите примеры нахождения вероятностей.

11. Что такое сумма событий? Объясните принципы нахождения вероятностей суммы двух или более несовместных событий.

12. Дайте определение произведения событий. Чему равна вероятность произведения двух или более несовместных событий?

13. Приведите примеры использования теорем для определения суммы совместных независимых событий.

14. Продемонстрируйте методы нахождения вероятностей произведения совместных независимых событий. Чему равна эта вероятность?

15. Дайте определение условной вероятности. Приведите примеры использования условной вероятности.

16. Каковы алгоритмы нахождения вероятностей совместного наступления двух и более зависимых событий?

17. Приведите примеры использования теорем для определения суммы совместных зависимых событий.

18. Дайте определение полной вероятности событий.

19. Напишите формулу полной вероятности. В каких случаях данную формулу можно использовать?

20. Охарактеризуйте понятия полной группы и гипотез в формуле полной вероятности. Приведите примеры.

21. В каких случаях используется формула полной вероятности? Приведите примеры.

22. Продемонстрируйте на различных примерах метод использования формулы полной вероятности. В чем сходство и различие приведенных примеров?

23. Напишите формулу гипотез Байеса. В каких случаях данную формулу можно использовать?

24. Для чего и каким образом применяется формула гипотез Байеса?

25. Приведите примеры использования формулы гипотез Байеса.

Глава 17. Повторные испытания

В исследованиях часто приходится сталкиваться с такими задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний, в результате каждого из которых может появиться или не появиться событие A. При этом интерес представляет исход не каждого «отдельного» испытания, а общее количество появлений события A в результате определенного количества испытаний.

В подобных задачах нужно уметь определять вероятность любого числа m появлений события A в результате n испытаний. Рассмотрим случай, когда испытания являются независимыми и вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Такие испытания называются *повторными независимыми испытаниями*.

В настоящей главе мы рассмотрим важнейшие методы нахождения вероятностей событий при повторных испытаниях. Мы познакомимся с основными понятиями повторных испытаний, а также с теоремой Бернулли, позволяющей вычислять вероятности событий для относительно небольшого числа испытаний.

Использование формулы Бернулли при больших значениях количества испытаний вызывает большие трудности. Это связано с громоздкими вычислениями. Как решить такие проблемы, мы увидим из содержания нашей главы. Она включает вопросы, посвященные предельным теоремам схеме Бернулли. Здесь мы изучим методы нахождения вероятностей с помощью формулы Пуассона, рассмотрим принципы использования локальной теоремы Муавра-Лапласа, интегральной теоремы Муавра-Лапласа, а также детально разберем следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

И в заключении главы часто задаваемый вопрос: каково будет наивероятнейшее число наступления событий в схеме Бернулли. Здесь будет описан алгоритм нахождения наивероятнейшего числа появления события в повторных испытаниях, а также основные принципы использования этого алгоритма.

17.1. Формула Бернулли

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при данном комплексе условий, в которых представляет интерес вероятность числа m наступлений некоторого события A в n испытаниях.

Если вероятность наступления события A в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других, то такие испытания называются *независимыми относительно события А*.

Если независимые повторные испытания проводятся при одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события A в каждом испытании одна и та же. Описанная последовательность независимых испытаний получила название схемы Бернулли (Якоб Бернулли 1655 – 1705).

Теорема 17.1. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p, то вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях ровно m раз можно вычислить по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p.$$

Пример. По мишени производится 5 выстрелов, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена 3 выстрелами?

По условию задачи

$$n = 5;\ p = 0{,}8;\ m = 3.$$

Подставляя значения в формулу Бернулли, получим:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot (1-0{,}8)^{5-3} = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot\cdot 3} \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}008 = 2\cdot 5\cdot 0{,}512\cdot 0{,}04 = 0{,}2048.$$

Таким образом, вероятность того, что мишень будет поражена тремя выстрелами из пяти произведенных равна 0,2048.

Пример. Вероятность выиграть по лотерейному билету равна $\frac{1}{7}$. Найти вероятность выигрыша по двум билетам из пяти купленных лотерейных билетов.

По условию задачи

$$p = \frac{1}{7}; \quad n = 5; \quad k = 2; \quad q = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

Подставляя значения в формулу Бернулли, получим:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 2!} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{216}{343} =$$

$$= \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{216}{16807} \approx 0{,}128518.$$

Таким образом, вероятность выигрыша по двум билетам из пяти купленных лотерейных билетов приближенно равна 0,128518.

В ряде случаев требуется определить вероятности появления события A менее m раз, более m раз, не менее m раз, не более m раз. В этих случаях могут быть использованы формулы:

$$\textit{менее m раз} \quad P(X < m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1);$$

$$\textit{более m раз} \quad P(X > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n);$$

$$\textit{не менее m раз} \quad P(X \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n);$$

$$\textit{не более m раз} \quad P(X \leq m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m).$$

Пример. Найти вероятность того, что при шести бросках игрального кубика шестерка выпадет: а) менее 3 раз, б) не менее 3 раз.

В случае а) шестерка на игральном кубике может выпасть 0, 1 и 2 раза. Найдем соответствующие вероятности:

$$P_6(0) = C_6^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{15625}{46656} = \frac{15625}{46656} \approx 0{,}334898;$$

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{6!}{5!\cdot 1!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3125}{7776} = \frac{3125}{7776} \approx 0{,}401878;$$

$$P_6(2)=C_6^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{625}{1296}=\frac{15}{36}\cdot\frac{625}{1296}=\frac{3125}{15552}\approx 0{,}200939\,.$$

Для нахождения вероятности того, что шестерка на игральном кубике может выпасть 0, 1 и 2 раза сложим полученные значения $P_6(0)$, $P_6(1)$ и $P_6(2)$:

$$P(X<3)=P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)\approx 0{,}334898+0{,}401878+0{,}200939\approx 0{,}937714\,.$$

В случае б) шестерка на игральном кубике может выпасть 3, 4, 5 и 6 раз, тогда это событие является противоположным событию из случая а):

$$P(X\geq 3)=P_6(3)+P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)=1-P(X<3)\approx$$

$$\approx 1-0{,}937714\approx 0{,}062286\,.$$

Таким образом, вероятность того, что при шести бросках игрального кубика шестерка выпадет менее 3 раз равна 0,937714; не менее 3 раз вероятность равна 0,062286.

17.2. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Использование формулы Бернулли при больших значениях n и m вызывает большие трудности. Это связано с громоздкими вычислениями.

Пример. По мишени производится 10000 выстрелов, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена 7000 раз?

$$P_{10000}(7000)=C_{10000}^{7000}(0{,}8)^{7000}(0{,}2)^{3000}=\frac{10000!}{7000!\cdot 3000!}\cdot(0{,}8)^{7000}\cdot(0{,}2)^{3000}\,.$$

Вычисление $P_n(m)$ вызывает затруднения также при малых значениях p. Возникает необходимость в поиске приближенных формул для вычисления $P_n(m)$, обеспечивающих необходимую точность.

Такие формулы дают нам предельные теоремы. Они содержат так называемые асимптотические формулы, которые при больших значениях испытаний дают сколь угодно малую относительную погрешность. Рассмотрим три предельные теоремы, содержащие асимптотические формулы для вычисления биноминальной вероятности $P_n(m)$ при $n\to\infty$.

17.2.1. Формула Пуассона

Теорема 17.2. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \to 0$), при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n \to \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу λ ($np \to \lambda$), то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству:

$$\lim_{n \to \infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Данное выражение называется *асимптотической формулой Пуассона*.

Из предельного равенства при больших n и малых p вытекает *приближенная формула Пуассона:*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \text{где } \lambda = np,\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Формулу Пуассона применяют, если

1) вероятность p успеха крайне мала, то есть сам по себе успех (появление события A) является редким событием, но количество испытаний n велико, среднее число успехов $\lambda = np$ незначительно;

2) $n \geq 50$*;*

3) $np \leq 10$*.*

Формула Пуассона часто находит применение в *теории массового обслуживания*.

Пример. Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность звонка одного абонента в течение часа равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

По условию задачи:

$$n = 2000; \quad p = 0{,}003; \quad m = 5.$$

Тогда

$$\lambda = np = 2000 \cdot 0{,}003 = 6.$$

Применим формулу Пуассона

$$P_{2000}(5)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=\frac{(2000\cdot 0{,}003)^5 e^{-20000{,}003}}{5!}=\frac{6^5 e^{-6}}{5!}\approx 0{,}160623.$$

Таким образом, вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов равна 0,160623.

Пример. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность, что он обнаружит ровно 3 бракованных детали? Какова вероятность, что контролер обнаружит не меньше 3-х бракованных деталей?

По условию задачи мы имеем 1000 испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p=0,005, и произведением np <5.

Применяя пуассоновское приближение с np=5, рассчитаем вероятность, что контролер обнаружит ровно 3 бракованных детали:

$$\text{P1000(3)}\approx\frac{5^3\cdot e^{-5}}{3!}\approx 0{,}140374.$$

Вероятность того, что контролер обнаружит не меньше трех бракованных деталей, рассчитаем, как разность между единицей и вероятностью обнаружения менее трех бракованных деталей:

$$P_{1000}(m\ \geq 3)=1-P_{1000}(m<3)=\ 1-(P_{1000}(0)+P_{1000}(1)+P_{1000}(2)).$$

Найдем вероятности $p_{1000}(0)$, $p_{1000}(1)$, $p_{1000}(2)$:

$$\text{P1000(0)}\approx\frac{5^0\cdot e^{-5}}{0!}\approx 0{,}006738;\qquad \text{P1000(1)}\approx\frac{5^1\cdot e^{-5}}{1!}\approx 0{,}033680;$$

$$\text{P1000(2)}\approx\frac{5^2\cdot e^{-5}}{2!}\approx 0{,}084224.$$

Подставляя полученные значения в формулу для $P_{1000}(m\ \geq 3)$ получим:

$$P_{1000}(m\ \geq 3)\approx 1-(0{,}006738+0{,}033680+0{,}084224)=0{,}875358.$$

Таким образом, вероятность того, что контролер обнаружит ровно три бракованных детали равна 0,140374, а вероятность того, что контролер обнаружит не меньше трех бракованных деталей равна 0,875358.

17.2.2. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Теорема 17.3. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ — функция Гаусса, обладающая следующими свойствами:

1) функция $\varphi(x)$ является четной, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2) при $x \geq 4$ функция $\varphi(x) = 0$.

Для упрощения расчетов ниже представлена таблица значений функции Гаусса φ(x) (Таблица 1).

Пример. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

По условию задачи $n = 100$, $m = 75$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$. Применим локальную теорему Муавра-Лапласа.

Найдем значение аргумента x:

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = \frac{-5}{\sqrt{16}} = -1{,}25\,.$$

Используя Таблицу 1, определим значение функции Гаусса $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826\,.$$

Найдем вероятность $P_{100}(75)$:

$$P_{100}(75) = \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\cdot\varphi(-1{,}25) = \frac{1}{\sqrt{16}}\cdot 0{,}1826 = 0{,}04565\,.$$

Таким образом, вероятность того, что что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз равна 0,04565.

Таблица 1.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ГАУССА															
0	0,398942	0,5	0,352065	1	0,241971	1,5	0,129518	2	0,053991	2,5	0,017528	3	0,004432	3,5	0,000873
0,01	0,398922	0,51	0,350292	1,01	0,239551	1,51	0,127583	2,01	0,052919	2,51	0,017095	3,01	0,004301	3,51	0,000843
0,02	0,398862	0,52	0,348492	1,02	0,237132	1,52	0,125665	2,02	0,051864	2,52	0,016670	3,02	0,004173	3,52	0,000814
0,03	0,398763	0,53	0,346668	1,03	0,234714	1,53	0,123763	2,03	0,050824	2,53	0,016254	3,03	0,004049	3,53	0,000785
0,04	0,398623	0,54	0,344818	1,04	0,232297	1,54	0,121878	2,04	0,049800	2,54	0,015848	3,04	0,003928	3,54	0,000758
0,05	0,398444	0,55	0,342944	1,05	0,229882	1,55	0,120009	2,05	0,048792	2,55	0,015449	3,05	0,003810	3,55	0,000732
0,06	0,398225	0,56	0,341046	1,06	0,227470	1,56	0,118157	2,06	0,047800	2,56	0,015060	3,06	0,003695	3,56	0,000706
0,07	0,397966	0,57	0,339124	1,07	0,225060	1,57	0,116323	2,07	0,046823	2,57	0,014678	3,07	0,003584	3,57	0,000681
0,08	0,397668	0,58	0,337180	1,08	0,222653	1,58	0,114505	2,08	0,045861	2,58	0,014305	3,08	0,003475	3,58	0,000657
0,09	0,397330	0,59	0,335213	1,09	0,220251	1,59	0,112704	2,09	0,044915	2,59	0,013940	3,09	0,003370	3,59	0,000634
0,1	0,396953	0,6	0,333225	1,1	0,217852	1,6	0,110921	2,1	0,043984	2,6	0,013583	3,1	0,003267	3,6	0,000612
0,11	0,396536	0,61	0,331215	1,11	0,215458	1,61	0,109155	2,11	0,043067	2,61	0,013234	3,11	0,003167	3,61	0,000590
0,12	0,396080	0,62	0,329184	1,12	0,213069	1,62	0,107406	2,12	0,042166	2,62	0,012892	3,12	0,003070	3,62	0,000569
0,13	0,395585	0,63	0,327133	1,13	0,210686	1,63	0,105675	2,13	0,041280	2,63	0,012558	3,13	0,002975	3,63	0,000549
0,14	0,395052	0,64	0,325062	1,14	0,208308	1,64	0,103961	2,14	0,040408	2,64	0,012232	3,14	0,002884	3,64	0,000529
0,15	0,394479	0,65	0,322972	1,15	0,205936	1,65	0,102265	2,15	0,039550	2,65	0,011912	3,15	0,002794	3,65	0,000510
0,16	0,393868	0,66	0,320864	1,16	0,203571	1,66	0,100586	2,16	0,038707	2,66	0,011600	3,16	0,002707	3,66	0,000492
0,17	0,393219	0,67	0,318737	1,17	0,201214	1,67	0,098925	2,17	0,037878	2,67	0,011295	3,17	0,002623	3,67	0,000474
0,18	0,392531	0,68	0,316593	1,18	0,198863	1,68	0,097282	2,18	0,037063	2,68	0,010997	3,18	0,002541	3,68	0,000457
0,19	0,391806	0,69	0,314432	1,19	0,196520	1,69	0,095657	2,19	0,036262	2,69	0,010706	3,19	0,002461	3,69	0,000441
0,2	0,391043	0,7	0,312254	1,2	0,194186	1,7	0,094049	2,2	0,035475	2,7	0,010421	3,2	0,002384	3,7	0,000425
0,21	0,390242	0,71	0,310060	1,21	0,191860	1,71	0,092459	2,21	0,034701	2,71	0,010143	3,21	0,002309	3,71	0,000409
0,22	0,389404	0,72	0,307851	1,22	0,189543	1,72	0,090887	2,22	0,033941	2,72	0,009871	3,22	0,002236	3,72	0,000394
0,23	0,388529	0,73	0,305627	1,23	0,187235	1,73	0,089333	2,23	0,033194	2,73	0,009606	3,23	0,002165	3,73	0,000380
0,24	0,387617	0,74	0,303389	1,24	0,184937	1,74	0,087796	2,24	0,032460	2,74	0,009347	3,24	0,002096	3,74	0,000366
0,25	0,386668	0,75	0,301137	1,25	0,182649	1,75	0,086277	2,25	0,031740	2,75	0,009094	3,25	0,002029	3,75	0,000353
0,26	0,385683	0,76	0,298872	1,26	0,180371	1,76	0,084776	2,26	0,031032	2,76	0,008846	3,26	0,001964	3,76	0,000340
0,27	0,384663	0,77	0,296595	1,27	0,178104	1,77	0,083293	2,27	0,030337	2,77	0,008605	3,27	0,001901	3,77	0,000327
0,28	0,383606	0,78	0,294305	1,28	0,175847	1,78	0,081828	2,28	0,029655	2,78	0,008370	3,28	0,001840	3,78	0,000315
0,29	0,382515	0,79	0,292004	1,29	0,173602	1,79	0,080380	2,29	0,028985	2,79	0,008140	3,29	0,001780	3,79	0,000303
0,3	0,381388	0,8	0,289692	1,3	0,171369	1,8	0,078950	2,3	0,028327	2,8	0,007915	3,3	0,001723	3,8	0,000292
0,31	0,380226	0,81	0,287369	1,31	0,169147	1,81	0,077538	2,31	0,027682	2,81	0,007697	3,31	0,001667	3,81	0,000281
0,32	0,379031	0,82	0,285036	1,32	0,166937	1,82	0,076143	2,32	0,027048	2,82	0,007483	3,32	0,001612	3,82	0,000271
0,33	0,377801	0,83	0,282694	1,33	0,164740	1,83	0,074766	2,33	0,026426	2,83	0,007274	3,33	0,001560	3,83	0,000260
0,34	0,376537	0,84	0,280344	1,34	0,162555	1,84	0,073407	2,34	0,025817	2,84	0,007071	3,34	0,001508	3,84	0,000251
0,35	0,375240	0,85	0,277985	1,35	0,160383	1,85	0,072065	2,35	0,025218	2,85	0,006873	3,35	0,001459	3,85	0,000241
0,36	0,373911	0,86	0,275618	1,36	0,158225	1,86	0,070740	2,36	0,024631	2,86	0,006679	3,36	0,001411	3,86	0,000232
0,37	0,372548	0,87	0,273244	1,37	0,156080	1,87	0,069433	2,37	0,024056	2,87	0,006491	3,37	0,001364	3,87	0,000223
0,38	0,371154	0,88	0,270864	1,38	0,153948	1,88	0,068144	2,38	0,023491	2,88	0,006307	3,38	0,001319	3,88	0,000215
0,39	0,369728	0,89	0,268477	1,39	0,151831	1,89	0,066871	2,39	0,022937	2,89	0,006127	3,39	0,001275	3,89	0,000207
0,4	0,368270	0,9	0,266085	1,4	0,149727	1,9	0,065616	2,4	0,022395	2,9	0,005953	3,4	0,001232	3,9	0,000199
0,41	0,366782	0,91	0,263688	1,41	0,147638	1,91	0,064378	2,41	0,021862	2,91	0,005782	3,41	0,001191	3,91	0,000191
0,42	0,365263	0,92	0,261286	1,42	0,145564	1,92	0,063157	2,42	0,021341	2,92	0,005616	3,42	0,001151	3,92	0,000184
0,43	0,363714	0,93	0,258881	1,43	0,143505	1,93	0,061952	2,43	0,020829	2,93	0,005454	3,43	0,001112	3,93	0,000177
0,44	0,362135	0,94	0,256471	1,44	0,141460	1,94	0,060765	2,44	0,020328	2,94	0,005296	3,44	0,001075	3,94	0,000170
0,45	0,360527	0,95	0,254059	1,45	0,139431	1,95	0,059595	2,45	0,019837	2,95	0,005143	3,45	0,001038	3,95	0,000163
0,46	0,358890	0,96	0,251644	1,46	0,137417	1,96	0,058441	2,46	0,019356	2,96	0,004993	3,46	0,001003	3,96	0,000157
0,47	0,357225	0,97	0,249228	1,47	0,135418	1,97	0,057304	2,47	0,018885	2,97	0,004847	3,47	0,000969	3,97	0,000151
0,48	0,355533	0,98	0,246809	1,48	0,133435	1,98	0,056183	2,48	0,018423	2,98	0,004705	3,48	0,000936	3,98	0,000145
0,49	0,353812	0,99	0,244390	1,49	0,131468	1,99	0,055079	2,49	0,017971	2,99	0,004567	3,49	0,000904	3,99	0,000139

Рассмотрим еще один пример.

Пример. Монета подбрасывается 2020 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет 1000 раз?

По условию задачи $n = 2020$, $m = 1000$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$. Применим локальную теорему Муавра-Лапласа.

Найдем значение аргумента x:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1000 - 2020 \cdot 0{,}5}{\sqrt{2020 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = \frac{-10}{\sqrt{505}} = -0{,}445.$$

Используя Таблицу 1, определим значение функции Гаусса $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(-0{,}445) = \varphi(0{,}445) = 0{,}3621.$$

Найдем вероятность $P_{2020}(1000)$:

$$P_{2020}(1000) = \frac{1}{\sqrt{505}} \cdot 0{,}3621 = 0{,}0161.$$

Таким образом, вероятность того, что герб выпадет 1000 раз рана 0,0161.

17.2.3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз, т.е. $P_n(m_1 \le m \le m_2)$, используют интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Теорема 17.4. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n\,(m_1 \le m \le m_2)$ может быть вычислена по приближенной формуле:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ –

функция Лапласа, обладающая следующими свойствами:

1) функция $\Phi(x)$ нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
2) при $x \ge 5$ функция $\Phi(x) = 0{,}5$.

Для упрощения расчетов ниже представлена таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (Таблица 2).

Таблица 2.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА

0	0,000000	0,5	0,191500	1	0,341377	1,5	0,433219	2	0,477272	2,5	0,493809	3	0,498670	3,5	0,499787	4	0,499988
0,01	0,004029	0,51	0,195012	1,01	0,343784	1,51	0,434505	2,01	0,477807	2,51	0,493983	3,01	0,498713	3,51	0,499796	4,01	0,499990
0,02	0,008018	0,52	0,198506	1,02	0,346168	1,52	0,435771	2,02	0,478331	2,52	0,494151	3,02	0,498756	3,52	0,499804	4,02	0,499991
0,03	0,012006	0,53	0,201981	1,03	0,348527	1,53	0,437018	2,03	0,478844	2,53	0,494316	3,03	0,498797	3,53	0,499812	4,03	0,499992
0,04	0,015953	0,54	0,205439	1,04	0,350862	1,54	0,438246	2,04	0,479347	2,54	0,494477	3,04	0,498837	3,54	0,499820	4,04	0,499993
0,05	0,019939	0,55	0,208877	1,05	0,353172	1,55	0,439455	2,05	0,479840	2,55	0,494633	3,05	0,498876	3,55	0,499827	4,05	0,499994
0,06	0,023922	0,56	0,212297	1,06	0,355459	1,56	0,440646	2,06	0,480323	2,56	0,494786	3,06	0,498913	3,56	0,499834	4,06	0,499995
0,07	0,027903	0,57	0,215698	1,07	0,357722	1,57	0,441818	2,07	0,480796	2,57	0,494934	3,07	0,498949	3,57	0,499841	4,07	0,499996
0,08	0,031881	0,58	0,219079	1,08	0,359960	1,58	0,442972	2,08	0,481259	2,58	0,495079	3,08	0,498985	3,58	0,499848	4,08	0,499997
0,09	0,035856	0,59	0,222441	1,09	0,362174	1,59	0,444108	2,09	0,481713	2,59	0,495220	3,09	0,499019	3,59	0,499855	4,09	0,499998
0,1	0,039828	0,6	0,225783	1,1	0,364365	1,6	0,445226	2,1	0,482153	2,6	0,495358	3,1	0,499052	3,6	0,499861	4,1	0,499999
0,11	0,043795	0,61	0,229106	1,11	0,366531	1,61	0,446326	2,11	0,482589	2,61	0,495492	3,11	0,499084	3,61	0,499867	4,11	0,500000
0,12	0,047759	0,62	0,232407	1,12	0,368674	1,62	0,447409	2,12	0,483015	2,62	0,495623	3,12	0,499116	3,62	0,499873	4,12	0,500000
0,13	0,051717	0,63	0,235689	1,13	0,370792	1,63	0,448474	2,13	0,483432	2,63	0,495750	3,13	0,499146	3,63	0,499878	4,13	0,500000
0,14	0,055670	0,64	0,238950	1,14	0,372887	1,64	0,449523	2,14	0,483841	2,64	0,495874	3,14	0,499175	3,64	0,499884	4,14	0,500000
0,15	0,059657	0,65	0,242190	1,15	0,374958	1,65	0,450554	2,15	0,484240	2,65	0,495995	3,15	0,499203	3,65	0,499889	4,15	0,500000
0,16	0,063599	0,66	0,245409	1,16	0,377006	1,66	0,451568	2,16	0,484632	2,66	0,496112	3,16	0,499231	3,66	0,499894	4,16	0,500000
0,17	0,067535	0,67	0,248607	1,17	0,379030	1,67	0,452565	2,17	0,485015	2,67	0,496227	3,17	0,499258	3,67	0,499899	4,17	0,500000
0,18	0,071463	0,68	0,251784	1,18	0,381030	1,68	0,453546	2,18	0,485389	2,68	0,496338	3,18	0,499283	3,68	0,499903	4,18	0,500000
0,19	0,075385	0,69	0,254939	1,19	0,383007	1,69	0,454511	2,19	0,485756	2,69	0,496447	3,19	0,499308	3,69	0,499908	4,19	0,500000
0,2	0,079299	0,7	0,258072	1,2	0,384960	1,7	0,455459	2,2	0,486115	2,7	0,496552	3,2	0,499333	3,7	0,499912	4,2	0,500000
0,21	0,083206	0,71	0,261183	1,21	0,386890	1,71	0,456392	2,21	0,486466	2,71	0,496655	3,21	0,499356	3,71	0,499916	4,21	0,500000
0,22	0,087104	0,72	0,264273	1,22	0,388797	1,72	0,457308	2,22	0,486809	2,72	0,496755	3,22	0,499379	3,72	0,499920	4,22	0,500000
0,23	0,090993	0,73	0,267340	1,23	0,390681	1,73	0,458209	2,23	0,487145	2,73	0,496853	3,23	0,499401	3,73	0,499924	4,23	0,500000
0,24	0,094874	0,74	0,270385	1,24	0,392541	1,74	0,459095	2,24	0,487473	2,74	0,496947	3,24	0,499422	3,74	0,499928	4,24	0,500000
0,25	0,098746	0,75	0,273408	1,25	0,394379	1,75	0,459965	2,25	0,487794	2,75	0,497040	3,25	0,499443	3,75	0,499931	4,25	0,500000
0,26	0,102607	0,76	0,276408	1,26	0,396194	1,76	0,460820	2,26	0,488108	2,76	0,497129	3,26	0,499463	3,76	0,499935	4,26	0,500000
0,27	0,106459	0,77	0,279385	1,27	0,397987	1,77	0,461661	2,27	0,488415	2,77	0,497217	3,27	0,499482	3,77	0,499938	4,27	0,500000
0,28	0,110300	0,78	0,282339	1,28	0,399756	1,78	0,462486	2,28	0,488715	2,78	0,497302	3,28	0,499501	3,78	0,499941	4,28	0,500000
0,29	0,114131	0,79	0,285271	1,29	0,401503	1,79	0,463297	2,29	0,489008	2,79	0,497384	3,29	0,499519	3,79	0,499945	4,29	0,500000
0,3	0,117950	0,8	0,288179	1,3	0,403228	1,8	0,464094	2,3	0,489294	2,8	0,497464	3,3	0,499536	3,8	0,499948	4,3	0,500000
0,31	0,121758	0,81	0,291064	1,31	0,404930	1,81	0,464876	2,31	0,489574	2,81	0,497542	3,31	0,499553	3,81	0,499950	4,31	0,500000
0,32	0,125555	0,82	0,293926	1,32	0,406611	1,82	0,465644	2,32	0,489848	2,82	0,497618	3,32	0,499570	3,82	0,499953	4,32	0,500000
0,33	0,129339	0,83	0,296765	1,33	0,408269	1,83	0,466399	2,33	0,490116	2,83	0,497692	3,33	0,499586	3,83	0,499956	4,33	0,500000
0,34	0,133111	0,84	0,299580	1,34	0,409905	1,84	0,467139	2,34	0,490377	2,84	0,497764	3,34	0,499601	3,84	0,499958	4,34	0,500000
0,35	0,136869	0,85	0,302371	1,35	0,411520	1,85	0,467867	2,35	0,490632	2,85	0,497834	3,35	0,499616	3,85	0,499961	4,35	0,500000
0,36	0,140615	0,86	0,305139	1,36	0,413113	1,86	0,468581	2,36	0,490881	2,86	0,497901	3,36	0,499630	3,86	0,499963	4,36	0,500000
0,37	0,144347	0,87	0,307883	1,37	0,414684	1,87	0,469281	2,37	0,491125	2,87	0,497967	3,37	0,499644	3,87	0,499965	4,37	0,500000
0,38	0,148066	0,88	0,310604	1,38	0,416234	1,88	0,469969	2,38	0,491362	2,88	0,498031	3,38	0,499657	3,88	0,499968	4,38	0,500000
0,39	0,151770	0,89	0,313300	1,39	0,417763	1,89	0,470644	2,39	0,491595	2,89	0,498093	3,39	0,499670	3,89	0,499970	4,39	0,500000
0,4	0,155460	0,9	0,315973	1,4	0,419271	1,9	0,471307	2,4	0,491821	2,9	0,498154	3,4	0,499683	3,9	0,499972	4,4	0,500000
0,41	0,159135	0,91	0,318622	1,41	0,420757	1,91	0,471957	2,41	0,492043	2,91	0,498212	3,41	0,499695	3,91	0,499974	4,41	0,500000
0,42	0,162795	0,92	0,321247	1,42	0,422223	1,92	0,472594	2,42	0,492259	2,92	0,498269	3,42	0,499707	3,92	0,499976	4,42	0,500000
0,43	0,166440	0,93	0,323847	1,43	0,423669	1,93	0,473220	2,43	0,492469	2,93	0,498325	3,43	0,499718	3,93	0,499977	4,43	0,500000
0,44	0,170069	0,94	0,326424	1,44	0,425093	1,94	0,473833	2,44	0,492675	2,94	0,498379	3,44	0,499729	3,94	0,499979	4,44	0,500000
0,45	0,173683	0,95	0,328977	1,45	0,426498	1,95	0,474435	2,45	0,492876	2,95	0,498431	3,45	0,499740	3,95	0,499981	4,5	0,500000
0,46	0,177280	0,96	0,331505	1,46	0,427882	1,96	0,475025	2,46	0,493072	2,96	0,498481	3,46	0,499750	3,96	0,499982	4,7	0,500000
0,47	0,180860	0,97	0,334009	1,47	0,429246	1,97	0,475604	2,47	0,493263	2,97	0,498531	3,47	0,499760	3,97	0,499984	4,8	0,500000
0,48	0,184424	0,98	0,336489	1,48	0,430590	1,98	0,476171	2,48	0,493450	2,98	0,498578	3,48	0,499769	3,98	0,499985	4,9	0,500000
0,49	0,187971	0,99	0,338945	1,49	0,431914	1,99	0,476727	2,49	0,493632	2,99	0,498625	3,49	0,499778	3,99	0,499987	5	0,500000

Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа применяются, когда $npq \geq 20$, причем чем больше n, тем точнее формулы.

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

По условию задачи $n = 400$, $m_1 = 70$, $m_2 = 100$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 0{,}8$.

Решим задачу с использованием интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Найдем значение аргументов x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-10}{\sqrt{64}} = -1{,}25\,;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{20}{\sqrt{64}} = 2{,}5\,.$$

Используя Таблицу 2, определим значения функции Лапласа $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}25) = -\Phi(-1{,}25) = -0{,}3944\,;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(2{,}5) = 0{,}4938\,.$$

Определим вероятность $P_{400}(70 \le \mathrm{m} \le 100)$:

$$P_{400}(70 \le \mathrm{m} \le 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}4938 - (-0{,}3944) = 0{,}8882\,.$$

Таким образом, вероятность того, что что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей, равна 0,8882.

Пример. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятности того, что событие появится не менее 75 раз.

По условию задачи $n = 100$, $m_1 = 75$, $m_2 = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$.

Снова применим интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-5}{\sqrt{16}} = -1{,}25\,;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{20}{\sqrt{16}} = 5\,.$$

Используя Таблицу 2, определим значения функции Лапласа $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}25) = -\Phi(-1{,}25) = -0{,}3944;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(5) = 0{,}5.$$

Рассчитаем вероятность $P_{100}(75 \le \mathrm{m} \le 100)$:

$$P_{100}(75 \le \mathrm{m} \le 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}5 - (-0{,}3944) = 0{,}8944.$$

Таким образом, вероятности того, что событие появится не менее 75 раз равна 0,8944.

17.2.4. Следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа

Вероятность отклонения относительной частоты n_A от вероятности p в n независимых испытаниях вычисляется по формуле:

$$P_n\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ – некоторое число.

Пример. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 1200 независимых испытаниях отклонение частоты от вероятности по модулю не превышает 0,05.

В нашей задаче $n = 1200$; $p = 0{,}6$; $q = 1 - \mathrm{p} = 0{,}4$; $\varepsilon = 0{,}05$. Тогда используя следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа получим:

$$P_{1200}\left(\left|\frac{n_A}{n} - 0{,}6\right| \le 0{,}05\right) = 2\Phi\left(0{,}05 \cdot \sqrt{\frac{1200}{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) = 2\Phi(3{,}54) = 0{,}9996.$$

Таким образом, вероятность того, что при 1200 независимых испытаниях отклонение частоты от вероятности по модулю не превышает 0,05, равна 0,9996.

17.3. Наивероятнейшее число

Наивероятнейшее число появлений k события A в n испытаниях можно определить из двойного неравенства:

$$np - q \le k \le np + p,$$

где p – вероятность появления в одном испытании, $q = 1 - p$.

Следует знать, что:

1) если значение $np - q$ является дробным, то двойное неравенство имеет единственное целое решение;

2) если значение $np - q$ – целое, то двойное неравенство имеет два целых решения.

Пример. Игральный кубик подбросили 120 раз. Найти наиболее вероятное число выпавшей грани с числом «6».

Введем обозначения:

A – выпадение грани с числом «6» при одном бросании кубика.

Тогда по условию:

$$p = P(A) = \frac{1}{6}, \qquad q = 1 - p = \frac{5}{6}, \qquad n = 120.$$

Подставим эти значения в неравенство и получим:

$$120 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le k \le 120 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{120 - 5}{6} \le k \le \frac{120 + 1}{6}$$

$$19\frac{1}{6} \le k \le 20\frac{1}{6}.$$

Из полученного неравенства можно сделать вывод, что k однозначно определяется числом 20.

Таким образом, наиболее вероятное число выпавшей грани с числом «6» равно 20.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятие повторных независимых испытаний.

2. Определите понятие схемы Бернулли. Перечислите случаи применения теоремы Бернулли.

3. Каким образом используется формула Бернулли для определения вероятностей появления события A менее m раз, более m раз, не менее m раз, не более m раз?

4. Почему нельзя использовать теорему Бернулли для нахождения вероятностей для большого количества повторных независимых испытаний?
5. Какое выражение называется асимптотической формулой Пуассона?
6. Определите условия использования предельной формулы Пуассона для нахождения вероятности при повторных испытаниях.
7. Какие ограничения должны выполняться для параметров n и np при использовании предельной формулы Пуассона?
8. Какие типы задач решаются с помощью схемы Бернулли? Какое значение в схеме повторных испытаний имеют предельные теоремы?
9. По какой формуле вычисляется вероятность события, если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число независимых испытаний достаточно велико?
10. В каких случаях можно использовать локальную теорему Муавра-Лапласа?
11. Приведите пример применения локальной теоремы Муавра-Лапласа в определениях вероятностей при повторных испытаниях.
12. Объясните принципы использования интегральной теоремы Муавра-Лапласа.
13. Каким образом определяется вероятность отклонения относительной частоты n_A от вероятности p в n независимых испытаниях?
14. Каким образом можно найти наивероятнейшее число появления события при повторных испытаниях?

Глава 18. Случайные величины

Случайная величина – это величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определёнными вероятностями. Примером случайной величины может служить число, выпавшее на игральной кости или расстояние от точки падения снаряда до цели. Случайная величина является одним из основных понятий теории вероятностей.

Роль случайной величины, как одного из основных понятий теории вероятностей, впервые была чётко осознана Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821 – 1894), который в 1867 году обосновал общепринятую на сегодня точку зрения на это понятие. Понимание случайной величины как частного случая общего понятия функции, пришло значительно позднее, в первой трети 20 века. Впервые полное формализованное представление основ теории вероятностей на базе теории меры было ы 1933 году разработано Андреем Николаевичем Колмогоровым (1903 – 1987), после которого стало ясным, что случайная величина представляет собой измеримую функцию, определённую на вероятностном пространстве.

18.1. Понятия и определения случайных величин

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Рассмотрим основные законы распределения дискретных случайных величин, используемые для построения теоретико-вероятностных моделей реальных социально-экономических явлений. Нами будут рассматриваться распределения случайных величин, используемые в качестве вспомогательного технического средства при решении различных задач статистического анализа.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от различных случайных причин.

Введем более точное определение случайной величины.

Случайной величиной X называется функция, заданная на множестве элементарных исходов (или в пространстве элементарных событий), т.е. , где *w* – элементарный исход (или элементарное событие).

Случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами X, Y, Z, …, а их значения – соответственными строчными буквами $x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots, z_1, z_2, z_2, \ldots$.

Случайные величины делятся на *дискретные* и *непрерывные*.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Число значений дискретной случайной величины может быть конечным или счетным.

18.1.1 Законы распределения дискретной случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретных случайных величин закон распределения может быть задан в виде таблицы, аналитически (в виде формулы) или графически.

При табличном законе распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины, а вторая – соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно значение, то события $X=x_1$, $X=x_2$, …, $X=x_n$ образуют полную группу, следовательно, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Если множество значений X бесконечно, то ряд: $p_1 + p_2 + \ldots$ сходится и его сумма равна единице.

Закон распределения случайной величины, заданной в виде таблицы, где каждому возможному значению сопоставлена его вероятность, называется *рядом распределения*.

Пример. Вероятности того, что курсант сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам *А* и *Б*, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить ряд распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст курсант.

Пусть случайная величина *X* – число сданных экзаменов. В сессию курсант может не сдать ни одного экзамена, может сдать толь один экзамен, а может сдать и все два. Тогда возможные значения случайной величины *X* равны $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Введем обозначения:

A_1 – курсант сдает первый экзамен;

A_2 – курсант сдает второй экзамен.

Вероятности того, что наступят события A_1 и A_2 соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}9,$$

а, значит, вероятности не наступления событий A_1 и A_2 равны:

$$q_1 = 0{,}3; \quad q_2 = 0{,}1.$$

Учитывая это, найдем вероятности появления значений $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$:

$$P(X=0) = P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right) = P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03.$$

$$P(X=1) = P\left(A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2\right) = P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2) = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}34.$$

$$P(X=2) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$$

Составим ряд распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст курсант:

x_i	*0*	*1*	*2*
p_i	*0,03*	*0,34*	*0,63*

Осуществим контроль значений нижней строки таблицы:

$$P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}03 + 0{,}34 + 0{,}63 = 1.$$

Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно значение, то события $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ образуют полную группу, следовательно, сумма их вероятностей будет равна единице.

Пример. Испытуемый прибор состоит из трёх малонадёжных элементов. Отказы элементов независимы, а их вероятности соответственно равны 0,1; 0,2; 0,25. Составить закон распределения числа отказавших элементов.

Пусть дискретная случайная величина X – число отказавших элементов. Она может принимать следующие возможные значения:

X = 0 – ни один из элементов не отказал;

X = 1 – отказал только один элемент;

X = 2 – отказали только два элемента;

X = 3 – отказали все три элемента.

По условию задачи вероятности отказа элементов:

$$p_1 = 0{,}1; \quad p_2 = 0{,}2; \quad p_3 = 0{,}25.$$

Тогда вероятности работы этих же элементов будут равны:

$$q_1 = 0{,}9; \quad q_2 = 0{,}8; \quad q_3 = 0{,}75.$$

Поскольку отказы элементов независимы один от другого, то, используя теоремы сложения и умножения, получим:

$$P(X = 0) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}54.$$

$$P(X = 1) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 =$$

$$= 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 = 0{,}375.$$

$$P(X = 2) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 =$$

$$= 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0.08.$$

$$P(X = 3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}005.$$

Составим ряд распределения числа отказавших элементов:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	0,54	0,375	0,08	0,005

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0{,}54 + 0{,}375 + 0{,}08 + 0{,}005 = 1.$$

Пример. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Составить закон распределения числа попаданий мяча в корзину.

Пусть случайная величина X – число попаданий мяча в корзину.

Эта величина может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3. Поскольку броски независимы один от другого и вероятности попадания равны между собой, применима формула Бернулли.

По условию задачи

$$n = 3; \quad p = 0{,}7; \quad q = 0{,}3 .$$

Используя этот факт, рассчитаем вероятности значений случайной величины X:

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = \frac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}027 ;$$

$$P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}189 ;$$

$$P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1 = 0{,}441 ;$$

$$P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^0 = 0{,}343 .$$

Составим ряд распределения числа отказавших элементов:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	0,027	0,189	0,441	0,343

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1.$$

18.1.2. Математические операции над случайными величинами

Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Пусть даны две случайные величины *X* и *Y*:

x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

y_1	y_2	…	y_i	…	y_m
p_1	p_2	…	p_i	…	p_m

Введем операции над случайными величинами.

Произведением случайной величины X на постоянную k называется случайная величина kX, которая принимает значения $kx_1, kx_2, ..., kx_n$ с теми же вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$.

m-той *степенью* случайной величины *X*, называется случайная величина X^m, принимающая значения $x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m$ с теми же вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$.

Пример. Случайная величина *X* задана с помощью ряда распределения:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: $Y = 3X$ и $Z = X^2$.

Случайную величину $Y = 3X$ получим, умножая все значения случайной величины на число 3:

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(-6) + P(3) + P(6) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1.$$

Случайную величину $Z = X^2$ получим, возведя все значения случайной величины во вторую степень:

z_i	4	1	4
p_i	0,5	0,3	0,2

Однако, мы видим, что в таблице оказалось два одинаковых значения $z_1 = z_3 = 4$ случайной величины Z. Объединив столбы, окончательно получим:

z_i	*1*	*4*
p_i	0,3	0,7

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(1)+P(4)=0{,}3+0{,}7=1.$$

Суммой (*разностью* или *произведением*) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида $x_i + y_j$ ($x_i - y_j$ или $x_i \cdot y_j$), где $i = 1, 2, ..., n, i = 1, 2, ..., m$, с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а Y – значение y_j:

$$p_{ij} = P\left[(X = x_i)(Y = y_j)\right].$$

Если случайные величины X и Y независимы, то есть независимы любые события $X = x_i$ и $Y = y_i$, то по теореме умножения вероятностей для независимых событий:

$$p_{ij} = P\left[(X = x_i)P(Y = y_j)\right] = p_i p_j .$$

Пример. Независимые случайные величины X и Y заданы таблично:

x_i	*0*	*2*
p_i	0,4	0,6

y_i	*1*	*3*	*4*
p_i	0,2	0,3	0,5

Найдем закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Используя определение суммы случайных величин X и Y найдем всевозможные значения случайной величины $Z = X + Y$ и соответствующие этим значения вероятности. Для этого в верхней строке таблицы запишем всевозможные суммы значений случайных величин X и Y: $x_1 + y_1$, $x_1 + y_2$, …, $x_2 + y_3$, а в нижней – произведения соответствующих им вероятностей $p_1 \cdot p_1$, $p_1 \cdot p_2$, …, $p_2 \cdot p_3$:

$x_i + y_j$	*0+1*	*0+3*	*0+4*	*2+1*	*2+3*	*2+4*
p_i	0,4·0,2	0,4·0,3	0,4·0,5	0,6·0,2	0,6·0,3	0,6·0,5

Рассчитаем значения выражений в таблице:

z_i	*1*	*3*	*4*	*3*	*5*	*6*

p_i	0,08	0,12	0,2	0,12	0,18	0,3

Заметим, что значение 3 повторяется. Объединим столбцы, содержащие значение 3, сложив вероятности появления трех:

z_i	*1*	*3*	*4*	*5*	*6*
p_i	0,08	0,24	0,2	0,18	0,3

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(1)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=0{,}08+0{,}24+0{,}2+0{,}18+0{,}3=1.$$

18.2. Функция распределения дискретных случайных величин

Функцией распределения случайной величины X называется функция *F(x),* численно равная вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее наперед заданного произвольного действительного числа x:

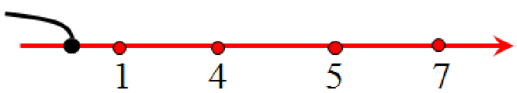
$$F(x)=P(X<x)$$

Пример. Дан ряд распределения случайной величины. Найти и изобразить графически ее функцию распределения.

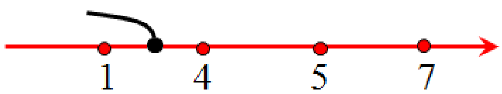
x_i	*1*	*4*	*5*	*7*
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Найдем значения функции распределения.

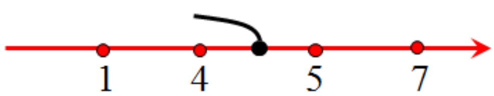
1. Если $x\le 1$, то $F(x)=P(X<1)=0$.



2. Если $1<x\le 4$, то $F(x)=P(X<4)==0{,}4$.

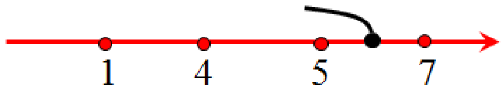


3. Если $4<x\le 5$, то $F(x)=P(X<5)==P(X=1)+P(X=4)=0{,}4+0{,}1=0{,}5$.



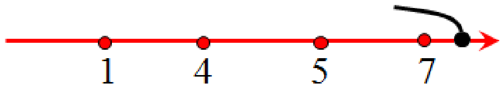
4. Если $5<x\le 7$, то $F(x)=P(X<7)==P(X=1)+P(X=4)+P(X=5)=$

$$= 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}8 \, .$$



5. Если $7 < x$, то $F(x) = P(X > 7) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7) =$

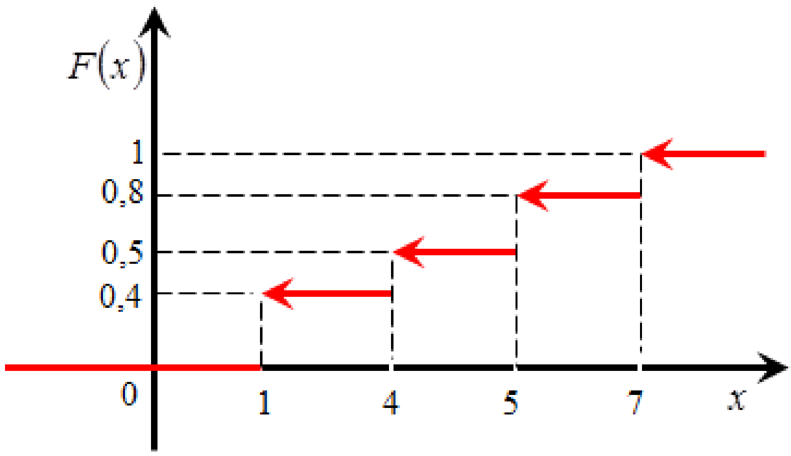
$$0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1 \, .$$



Таким образом, функцию распределения можно выразить аналитически:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 0{,}4 & 1 < x \le 4 \\ 0{,}5 & 4 < x \le 5 \\ 0{,}8 & 5 < x \le 7 \\ 1 & x > 7 \end{cases}$$

Построим график функции распределения случайной величины:



Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

Сумма всех скачков функции распределения равна 1.

Рассмотрим основные свойства функции распределения дискретной случайной величины:

Свойства функции распределения

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, значения которой заключены между нулем и единицей.

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси.

$$F(x_2) \ge F(x_1).$$

3. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности – единице.

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ равна приращению ее функции распределения на этом интервале.

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

18.3. Числовые характеристики случайных величин

18.3.1. Математическое ожидание

Математическим ожиданием (или средним значением) $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

В том случае, когда дискретная случайная величина X принимает бесконечное, но счетное множество значений, математическим ожиданием, или средним значением, такой случайной величины называется сумма ряда (если он сходится абсолютно).

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

Если ряд расходится, то дискретная случайная величина X не будет иметь математического ожидания.

Пример. Вычислить математическое ожидание дискретной случайной величины *X*, заданной таблично:

x_i	*1*	*4*	*5*	*7*
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Используя определение математического ожидания найдем значение математического ожидания дискретной случайной величины *X*:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 =$$

$$= 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}2 = 3{,}7 .$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины Z равно 3,7.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Пример. Известны законы распределений случайных величин числа очков, выбиваемых первым и вторым стрелками.

Для первого стрелка:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,1	0,1	0,04	0,05	0,12	0,2

Для второго стрелка:

y_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,1	0,1	0,04	0,02

Какой из двух стрелков стреляет лучше?

Очевидно, что из двух стрелков стреляет тот лучше, кто в среднем выбивает большее количество очков.

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}04 + 3 \cdot 0{,}05 + 4 \cdot 0{,}04 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ 7 \cdot 0{,}04 + 8 \cdot 0{,}05 + 9 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}2 = 5.36$$

$$M(Y) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}03 + 2 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}09 + 4 \cdot 0{,}11 + 5 \cdot 0{,}24 + 6 \cdot 0{,}21 +$$
$$+ 7 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}02 = 5.36 .$$

Таким образом, среднее число выбиваемых очков у двоих стрелков одинаковое.

Свойства математического ожидания

1. $M(C)=C$, где C – произвольная постоянная величина.
2. $M(CX)=CM(X)$, где C – произвольная постоянная величина.
3. $M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y)$.
4. $M(XY)=M(X)M(Y)$, если X и Y независимые случайные величины.
5. $M(X\pm C)=M(X)\pm C$, где C – произвольная постоянная величина.
6. $M[X-M(X)]=0$

Пример. Пусть $M(X)=3,\ M(Y)=2,\ Z=8X-5Y+7$. Найти: $M(Z)$.

Используя свойства математического ожидания для дискретных случайных величин получим:

$$M(Z)=M(8X-5Y+7)=M(8X)-M(5Y)+M(7)=8M(X)-5M(Y)+7=$$

$$=8\cdot 3-5\cdot 2+7=21.$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины Z равно 21.

18.3.2. Дисперсия

Рассеяние случайной величины около среднего значения характеризует дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией случайной величины *X* называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Для дискретной случайной величины с конечным числом принимаемых значений дисперсию можно рассчитать сумму квадратов разности между значениями случайной величины и математическим ожиданием случайной величины, умноженных на вероятности появления соответствующих значений:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i.$$

Пример. Вычислить дисперсию дискретной случайной величины *X*, заданной таблично:

x_i	*1*	*4*	*5*	*7*
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

В одном из предыдущих примеров мы уже рассчитали математическое ожидание случайной величины *X*. По расчетам оно было равно 3,5.

Используя формулу для дискретной случайной величины с конечным числом принимаемых значений, получим дисперсию:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{4} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i = (1-3{,}7)^2 \cdot 0{,}4 + (4-3{,}7)^2 \cdot 0{,}1 + (5-3{,}7)^2 \cdot 0{,}3 +$$

$$+ (7-3{,}7)^2 \cdot 0{,}2 = 7{,}29 \cdot 0{,}4 + 0{,}09 \cdot 0{,}1 + 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 10{,}89 \cdot 0{,}2 = 5{,}61.$$

Таким образом, дисперсия случайной величины равно 5,61.

Рассмотрим основные свойства дисперсии.

Свойства дисперсии

1. $D(C) = 0$, где C – произвольная постоянная величина.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$, где C – произвольная постоянная величина.
3. $D(X) = M\left(X^2\right) - \left[M(X)\right]^2$.
4. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, если X и Y независимые случайные величины.

18.3.3. Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением, стандартом) случайной величины *X* называется арифметическое значение корня квадратного из дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Используя свойства дисперсии, вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины *X*.

x_i	*1*	*4*	*5*	*7*
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Математическое ожидание случайной величины X ранее мы уже нашли. . По расчетам оно было равно 3,5.

Для расчета дисперсии будем использовать свойство дисперсии 3:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2$$

Найдем математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0{,}4 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}3 + 7^2 \cdot 0{,}2 =$$

$$= 0{,}4 + 1{,}6 + 7{,}5 + 9{,}8 = 19{,}3.$$

Тогда значение дисперсии будет равно:

$$D(X) = 19{,}3 - (3{,}7)^2 = 19{,}3 - 13{,}69 = 5{,}61.$$

А среднее квадратическое отклонение найдем, как квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5{,}61} \approx 2{,}368544.$$

18.4. Законы распределения дискретных случайных величин

18.4.1. Биномиальный закон распределения

Дискретная случайная величина *X* имеет *биномиальный закон распределения*, если она принимает значения *0, 1, 2, ..., m, ..., n* с вероятностями

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m=0,1,..., n$.

Биномиальный закон распределения представляет собой закон распределения числа $X=m$ наступлений события *A* в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью *p*.

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

x_i	0	*1*	*2*	...	*m*	...	*n*
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\cdots$	p^n

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + .. + C_n^m p^m q^{n-m} + .. + p^n = (q+p)^n = 1.$$

Теорема 18.1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *X*, определенной по биномиальному закону вычисляются по формулам:

$$M(X) = np\,; \quad D(X) = npq\,.$$

Пример. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого заемщика. Составить таблицу закона распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании кредитования. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Итак, случайная величина X – это количество заемщиков, не вернувших кредит по окончании кредитования.

По условию задачи $n = 5;$ $p = 0{,}2;$ $q = 0{,}8$. Найдем вероятности всех значений, принимаемых случайной величиной:

$$P(X = 0) = C_5^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{5-0} = 0{,}32768\,;$$

$$P(X = 1) = C_5^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{5-1} = 0{,}4096\,;$$

$$P(X = 2) = C_5^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{5-2} = 0{,}2048\,;$$

$$P(X = 3) = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{5-3} = 0{,}0512\,;$$

$$P(X = 4) = C_5^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{5-4} = 0{,}0064\,;$$

$$P(X = 5) = C_5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^{5-5} = 0{,}00032\,.$$

Составим таблицу закона распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании кредитования.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8\,; \quad D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}64\,.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины равно 0,8, а дисперсия 0,64.

18.4.2. Закон распределения Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет *закон распределения Пуассона*, если она принимает значения (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями:

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda = np$, $m=0, 1, 2, \ldots$.

Ряд распределения закона Пуассона имеет вид:

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	$\ldots$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

Теорема 18.2. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ:

$$M(X) = \lambda; \quad D(X) = \lambda.$$

Пример. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,002. Необходимо составить закон распределения отказавших за время t элементов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

По условию задачи случайная величина X – это число отказавших за время t элементов. Здесь $n = 1000$; $p = 0,002$; $q = 0,998$; $\lambda = 2$. Рассчитаем вероятности появления значений случайной величины:

$$P(X=0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0,13534; \qquad P(X=1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0,27067;$$

$$P(X=2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0,27067; \qquad P(X=3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0,18045.$$

Составим таблицу закона распределения.

x_i	0	*1*	*2*	*3*	...
p_i	0,13534	0,27067	0,27067	0,18045	…

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = 2; \quad D(X) = 2.$$

18.4.3 Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет *геометрическое распределение*, если она принимает значения *1,2,3,* ... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = pq^{m-1},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m=0,1, 2, 3, \dots$.

Ряд геометрического распределения случайной величины имеет вид:

x_i	*1*	*2*	*3*	...	m	...
p_i	p	pq	pq^2	…	pq^{m-1}	…

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_i = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = p\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

Теорема 18.3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей геометрическое распределение с параметром p, вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Пример. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба по цели до первого попадания. Необходимо составить закон распределения числа сделанных выстрелов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

По условию задачи случайная величина X – количество сделанных выстрелов. Параметры закона распределения $p = 0{,}05$; $q = 0{,}95$. Рассчитаем вероятности появления значений случайной величины:

$$P(X = 1) = p = 0{,}05;$$

$P(X=2)=qp=0{,}95\cdot 0{,}05=0{,}0475$;

$P(X=3)=qqp=0{,}95\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05=0{,}04513$;

$P(X=4)=qqqp=0{,}95\cdot 0{,}95\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05=0{,}04287$;

…

Составим таблицу закона распределения.

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	...
p_i	0,05	0,075	0,04513	0,04287	…

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X)=\frac{1}{0{,}05}=20;\quad D(X)=\frac{0{,}95}{(0{,}05)^2}=380.$$

Пример. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

Случайная величина X - число проверенных деталей до обнаружения бракованной - имеет геометрическое распределение с параметром $p=0{,}1$.

Ряд распределения имеет вид:

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	...
p_i	*0,1*	*0,09*	*0,081*	*0,0729*	…

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}1}=10;\quad D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{0{,}9}{0{,}1^2}=90.$$

18.4.4. Гипергеометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет *гипергеометрическое распределение*, если она принимает значения *1, 2, 3, ..., min (n, M)* с вероятностями

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где $M \le N$, $n \le N$, n, M, N – натуральные числа.

Теорема 18.4. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами n, M, N, вычисляется по формуле:

$$M(X) = n\frac{M}{N}; \quad D(X) = n\frac{M}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right).$$

Пример. В лотерее денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 чисел из отобранных случайно 6 из 45 вариантов. Найти закон распределения случайной величины X — числа угаданных чисел среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

По условию задачи случайная величина X – количество угаданных чисел. Параметры закона распределения $n = 6$, $M = 6$, $N = 45$. Рассчитаем вероятности появления значений случайной величины:

$$P(X=0) = \frac{C_6^0 C_{39}^6}{C_{45}^6} = 0{,}40056; \qquad P(X=1) = \frac{C_6^1 C_{39}^5}{C_{45}^6} = 0{,}42413;$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_{39}^4}{C_{45}^6} = 0{,}15147; \qquad P(X=3) = \frac{C_6^3 C_{39}^3}{C_{45}^6} = 0{,}02244;$$

$$P(X=4) = \frac{C_6^4 C_{39}^2}{C_{45}^6} = 0{,}00137; \qquad P(X=5) = \frac{C_6^5 C_{39}^1}{C_{45}^6} = 0{,}00003;$$

$$P(X=6) = \frac{C_6^6 C_{39}^0}{C_{45}^6} = 0{,}0000001.$$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
p_i	0,40056	0,42413	0,15147	0,02244	0,00137	0,00003	0,0000001

Тогда вероятность получения денежного приза будет равна:

$$P(3 \le X \le 6) = \sum_{i=3}^{6} P(X=i) = 0{,}02244 + 0{,}00137 + 0{,}00003 + 0{,}0000001 \approx 0{,}02384.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = 6 \cdot \frac{6}{45} = 0{,}8; \quad D(X) = 6 \cdot \frac{39}{44}\left(1 - \frac{39}{45}\right)\left(1 - \frac{6}{45}\right) = 0{,}6145.$$

Таким образом, а вероятность выигрыша равна 0,02384, математическое ожидание 0,8, а дисперсия равна 0,6145.

18.5. Непрерывные случайные величины

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

18.5.1. Функция распределения непрерывной случайной величины

Функцией распределения случайной величины X называется функция *F(x)*, выражающая для каждого *x* вероятность того, что случайной величины *X* примет значение, меньшее чем *x*.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию *F(x)* иногда называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения. На рисунке 18.1 представлен график функции распределения непрерывной случайной величины *X*.

Случайная величина *X* называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

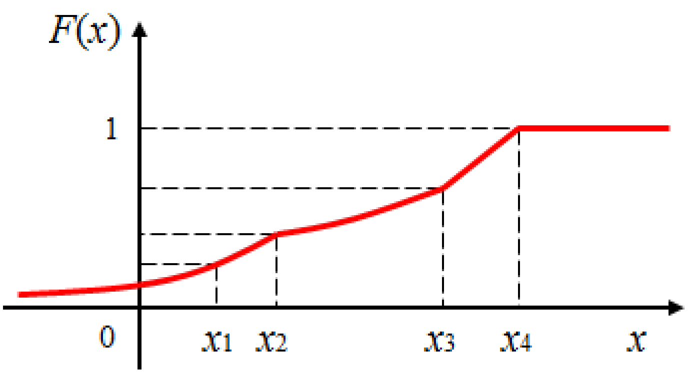


Рис.18.1. График функции распределения непрерывной случайной величины.

Свойства функции распределения непрерывной случайной величины

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Функции распределения *F(x)* – неубывающая функция:

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

3. Вероятность того, случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение конкретное значение равна нулю.

5. Если X – непрерывная случайная величина, то вероятность попадания случайной величины в интервал (a, b) не зависит от того, является этот интервал открытым или закрытым.

6. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Пример. Функция распределения случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/2, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение в интервале [1;3).

Решение найдем, используя третье свойство функции распределения непрерывной случайной величины:

$$P(1 \le X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

18.5.2. Плотность распределения непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины $f(x)$ называется первая производная от функции распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = F'(X).$$

График плотности распределения называют *кривой распределения*.

Пример. Функция распределения случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 2 \\ (x-2)^2, \; 2 < x \le 3 \\ 1, \; x > 3 \end{cases}.$$

Найти плотность распределения непрерывной случайной величины.

Дифференцируя функцию распределения непрерывной случайной величины, найдем ее плотность распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 2 \\ 2x-4, \; 2 < x \le 3 \\ 0, \; x > 3 \end{cases}.$$

Свойства плотности распределения

1. Плотность вероятности – неотрицательная функция:

$$f(x) \ge 0.$$

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал (a, b) равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от a до b:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность распределения по формуле:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

4. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения непрерывной случайной величины равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Замечание. Геометрически 4-е свойство означает, что площадь фигуры, ограниченной осью *Ox*, кривой распределения *f*(*x*) равна единице (рис. 18.2):

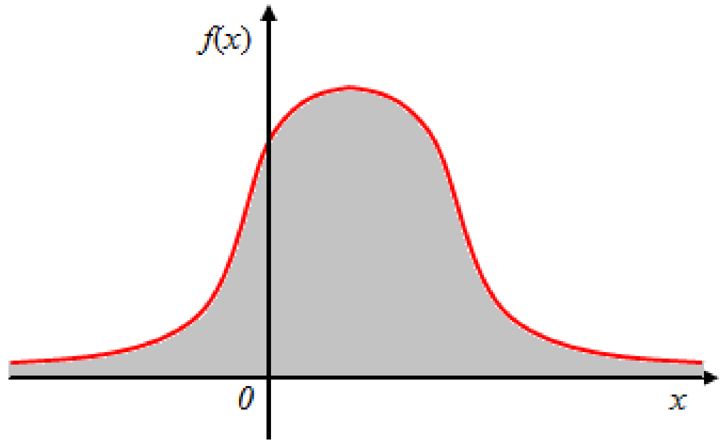


Рис. 18.2. Площадь фигуры, ограниченной осью *Ox*, кривой распределения *f*(*x*)

Пример. Плотность распределения случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, \ x\le -1\\ a(x+1)^2, \ -1<x\le 2\\ 0, \ \ x>2\end{cases}.$$

Требуется найти параметр *a* и функцию распределения *F(x)*.

Найдем несобственный интеграл от плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{2} a(x+1)^2 dx = a\int_{-1}^{2}(x+1)^2 dx = a\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_{-1}^{2} =$$

$$=a\frac{(2+1)^3}{3}-a\frac{(-1+1)^3}{3}=a\left(\frac{3^3}{3}-0\right)=9a\,.$$

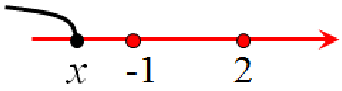
Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения непрерывной случайной величины равен 1, следовательно, $9a=1$, а значит $a=\frac{1}{9}$.

Таким образом, плотность распределения непрерывной случайной величины будет имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, \ x\le -1\\ \dfrac{1}{9}(x+1)^2, \ -1<x\le 2\\ 0, \ \ x>2\end{cases}.$$

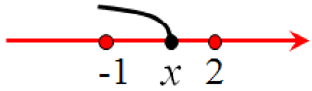
Найдем функцию распределения.

1. Если $x\le -1$, то



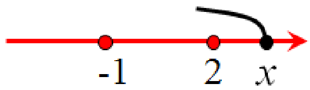
$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0.$$

2. Если $-1\le x\le -1$, то



$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt+\int_{-1}^{x}\frac{1}{9}(t+1)^2\,dt==0+\frac{1}{9}\frac{(t+1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{x}=\frac{(t+1)^3}{27}.$$

3. Если $x\ge 2$, то



$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt+\int_{-1}^{2}\frac{1}{9}(t+1)^2\,dt+\int_{2}^{x}0\,dt=0+\frac{1}{9}\frac{(t+1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}+0=0+1+0=1.$$

Таким образом, образом функция распределения непрерывной случайной величины будет иметь вид:

$$F(X)=\begin{cases}0, \ x\le -1\\ \dfrac{(x+1)^3}{27}, \ -1<x\le 2\\ 1, \ x>2\end{cases}.$$

18.5.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,\ b]$, называется определенный интеграл:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx.$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат всей оси *Ox*, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Свойства математического ожидания

1. $M(C)=C,\ C-const$.
2. $M(CX)=CM(X),\ C-const$.
3. $M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y)$.
4. $M(XY)=M(X)M(Y),\quad X$ и Y независимы .
5. $M(X\pm C)=M(X)\pm C,\ C-const$.
6. $M[X-M(X)]=0$.

Дисперсией непрерывной случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат отрезку [*a, b*], называется определенный интеграл

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат всей оси *Ox*, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Замечание. Для вычисления дисперсии удобно использовать формулу:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2 \text{, где}$$

$$M(X^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Свойства дисперсии

1. $D(C)=0$;
2. $D(CX)=C^2D(X)$;
3. $D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2$;
4. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

Среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Задана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ 2x, \ 0 < x \le 1. \\ 0, \ x \ge 1 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Найдем сначала математическое ожидание:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}.$$

Рассчитаем значение дисперсии. Найдем ее по формуле:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M\left(X\right)\right)^2.$$

Определим математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^3 dx = 2\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Подставим полученное выражение в формулу дисперсии:

$$D(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Вычислим среднеквадратическое отклонение случайной величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

18.6. Законы распределения непрерывных случайных величин

В данной главе мы изучим основные законы распределения непрерывной случайной величины: равномерный, показательный и нормальный.

18.6.1. Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерный закон распределения* на отрезке [*a, b*], если ее плотность вероятности *f(x)* постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его.

Плотность распределения случайной величины в этом случае определяется следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, \quad x<a, & x>b\end{cases}.$$

Построим график плотности распределения случайной величины.

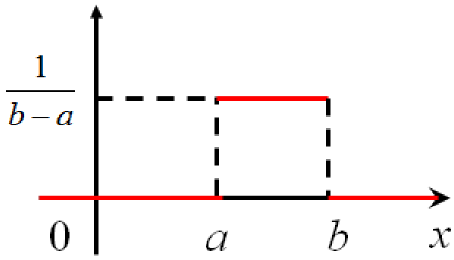


Рис. 18.3. График плотности распределения случайной величины, имеющей равномерный закон распределения.

Вычислим функцию распределения случайной величины в случае распределения по равномерному закону:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt .$$

1. Если $x\le a$, то

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0 .$$

2. Если а $\le x\le b$, то

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} 0\,dt+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=0+\left.\frac{t}{b-a}\right|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

3. Если $x\ge b$, то

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} 0\,dt+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt+\int_{b}^{x}0\,dt=\left.\frac{t}{b-a}\right|_{a}^{b}=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Выпишем функцию распределения случайной величины, соответствующей равномерному закону распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a},\ a\le x\le b\\ 1, \quad x>b\end{cases}.$$

Построим график функции распределения случайной величины (рис. 18.4).

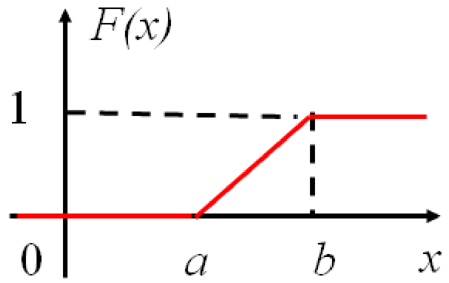


Рис. 18.4. График функции распределения случайной величины, имеющей равномерный закон распределения.

Вычислим математическое ожидание случайной величины:

$$M(x)=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{2(b-a)}\left(b^2-a^2\right)=\frac{a+b}{2}.$$

Для нахождения дисперсии рассчитаем математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M\left(x^2\right)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b=\frac{1}{3(b-a)}\left(b^3-a^3\right)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Теперь можно рассчитать выражение для дисперсии:

$$D(X)=M\left(x^2\right)-\left(M(x)\right)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Теорема 18.5. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по равномерному закону, вычисляются по формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вероятность того, что случайная величина X, распределенная по равномерному закону, примет значение из интервала $(\alpha,\ \beta)$, вычисляется по формуле:

$$P\left(X\in(\alpha,\beta)\right)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Пример. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты. Найти математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

Случайная величина X распределена равномерно, следовательно, плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2},\ x \in (0;2); \quad f(x) = 0,\ x \notin (0;2).$$

Вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = P(X \le 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{0{,}5} = \frac{1}{4}.$$

Согласно теореме, математическое ожидание равно:

$$M(X) = \frac{0+2}{2} = 1,$$

Рассчитаем дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины:

$$D(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}; \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0{,}58.$$

18.6.2. Показательный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *показательный* (экспоненциальный) закон распределения с параметром λ , если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Число $\lambda > 0$ – называют параметром распределения.

Функция распределения случайной величины, распределенной по показательному закону имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Построим графики плотности распределения и функции распределения для случайной величины, распределенной по показательному закону (рис. 18.5).

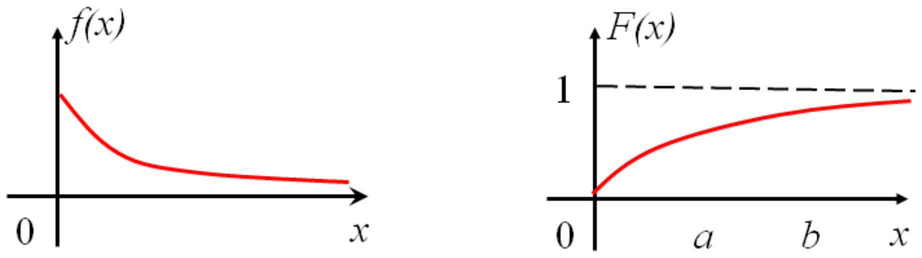


Рис. 18.5. Графики плотности распределения и функции распределения случайной величины, имеющей показательный закон распределения.

Теорема 18.6. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по показательному закону, вычисляются по формулам:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Вероятность того, что случайная величина X, распределенная по показательному закону, примет значение из интервала $(\alpha;\ \beta)$, вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}\ .$$

Пример. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизора 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение.

Из условия задачи следует, что $M(X)=15,$ тогда $\frac{1}{\lambda}=15,$ и $\lambda=\frac{1}{15}$. Тогда $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}225$, а $\sigma_x=\sqrt{D(X)}=15$.

Найдем плотность распределения случайной величины. В виду того, что случайная величина распределена по показательному закону:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases},\ \text{следовательно,}\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}, x\ge 0\\ 0, \quad x<0\end{cases}.$$

Определим функцию распределения.

Так как $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$, то $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{15}x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$.

Определим вероятность того, что на ремонт потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизора 15 дней:

$$P(X\ge 20)=1-P(X<20)=1-F(20)=1-(1-e^{-\frac{20}{15}})=e^{-\frac{20}{15}}=e^{-\frac{4}{3}}\approx 0{,}264\,.$$

18.6.3. Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *нормальный закон распределения* (закон Гаусса) с параметрами *a* и σ^2 (σ>0), если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Функция распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет следующий вид:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt\,.$$

Кривую нормального закона распределения называют нормальной кривой или гауссовой кривой:

Построим графики функции распределения и плотности распределения для случайной величины, распределенной по нормальному закону (рис. 18.6).

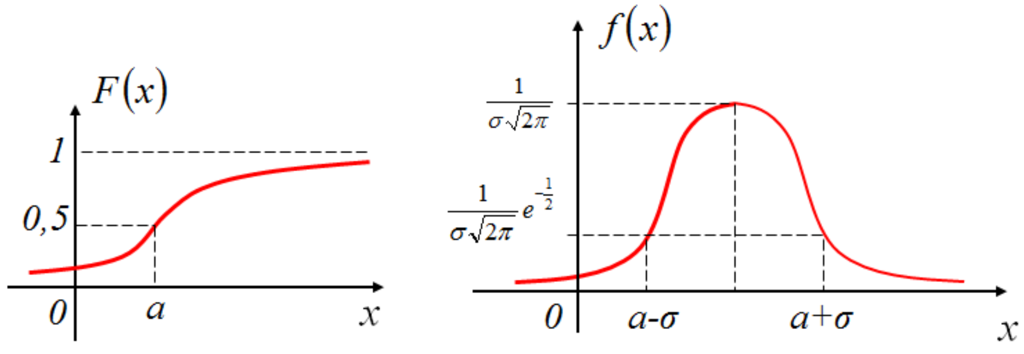


Рис. 18.6. Графики функции и плотности распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону.

Теорема 18.7. Математическое ожидание случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону, равно параметру *a*, а среднее квадратическое отклонение равно параметру *σ* этого параметру *a*, а среднее квадратическое отклонение равно параметру *σ* этого закона:

$$M(X)=a;\quad D(X)=\sigma^2.$$

Пример. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины *X* заданной плотностью:

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}.$$

Согласно вышеприведенной теореме $M(X)=a;\quad D(X)=\sigma^2$, следовательно: $M(X)=a=1$, $\sigma=5$, а $D(X)=\sigma^2=25$.

Рассмотрим влияние параметров распределения на форму нормальной кривой. Если $\sigma = const$ и менять параметр a $(a_1 < a_2 < a_3)$, т.е. центр симметрии распределения, то нормальная кривая будет смещаться вдоль оси абсцисс, не меняя формы (рис. 18.7).

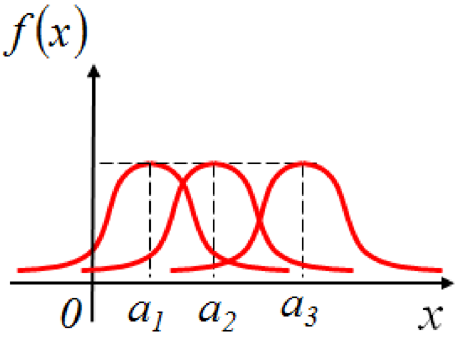


Рис. 18.7. Влияние параметра *a* на форму нормальной кривой.

Если $a = const$ и менять параметр σ $(\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3)$, то меняется ордината точки максимума нормальной кривой (рис. 18.8).

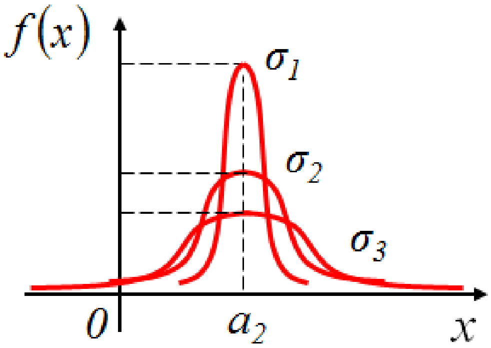


Рис. 18.8. Влияние параметра σ на форму нормальной кривой.

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, нормальное распределение с такими параметрами называют *стандартным*.

Плотность стандартной случайной величины имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Функция распределения случайной величины X~$N(0,1)$ имеет вид:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$ – функция Лапласа.

Теорема 18.8. Функция распределения случайной величины X, распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа по формуле

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Свойство 1. Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал $[x_1, x_2]$ равна

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \qquad t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma}; \;\; t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}.$$

Свойство 2. Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a на превысит величину δ>0 (по абсолютной величине), равна

$$P(|X - a| \le \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило трех сигм. Если случайная величина имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения, т.е. значения случайной величины заключены в интервале
($a - 3\sigma$, $a + 3\sigma$).

Пример. Пусть X – случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с параметрами $a = 1{,}6$ и $\sigma = 1$. Какова вероятность того, что при четырех испытаниях эта случайная величина попадет хотя бы один раз в интервал (1, 2)?

Вероятность попадания в заданный интервал при одном испытании равна

$$P(1 < X < 2) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{2-1{,}6}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-1{,}6}{1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(0{,}4) + \Phi(0{,}6)\right) \approx$$

$$\approx 0{,}1554 + 0{,}2257 = 0{,}3811.$$

Тогда, вероятность непопадания при одном испытании будет равна:

$$q = 1 - p = 1 - 0.3811 = 0.6189,$$

а при четырех испытаниях – $0.6189^4 \approx 0{,}1467$.

$$P(X = 4) = 1 - 0{,}1467 = 0{,}8533.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение случайной величины. Какие из величин являются дискретными?
2. Какие операции осуществляются над случайными величинами?
3. Сформулируйте свойства операций над дискретными случайными величинами.
4. Дайте определение и определите основные свойства функции распределения дискретной случайной величины.
5. Какие числовые характеристики дискретных случайных величин изучены в лекции?
6. Перечислите числовые характеристики дискретных случайных величин.
7. Выпишите свойства математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин.
8. Приведите пример использования биномиального закона распределения для дискретных случайных величин.
9. В каких случаях можно использовать закон распределения Пуассона дискретных случайных величин?
10. Каковы принципы использования геометрического распределения

дискретных случайных величин.

11. Приведите пример использования гипергеометрического распределения дискретных случайных величин.

12. Дайте понятие функции распределения непрерывной случайной величины.

13. Опишите основные свойства функции распределения непрерывной случайной величины.

14. Дайте формулировку плотности распределения непрерывной случайной величины.

15. Каковы основные свойства плотности распределения непрерывной случайной величины?

16. Какие числовые характеристики непрерывных случайных величин вы знаете?

17. Опишите основные свойства математического ожидания и дисперсии непрерывных случайных величин.

18. Приведите примеры равномерного закона распределения непрерывных случайных величин.

19. Как определяются числовые характеристики для случайных величин, распределенных по показательному закону.

20. Чему равна вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал $[x_1, x_2]$?

Глава 19. Основы математической статистики

Основной задачей математической статистики является разработка методов получения научно обоснованных выводов о массовых явлениях и процессах из данных наблюдений и экспериментов. Эти выводы и заключения относятся не к отдельным испытаниям, из повторения которых складывается данное массовое явление, а представляют собой утверждения об общих вероятностных характеристиках данного процесса, то есть о вероятностях, законах распределения, математических ожиданиях, дисперсиях. Такое использование фактических данных как раз и является отличительной чертой статистического метода.

Статистические проблемы возникают тогда, когда мы на основе той же информации начинаем делать выводы относительно более широкого круга явлений. Так, например, нас может интересовать качество технологического процесса, для чего мы оцениваем вероятность получения в нем дефектного изделия или среднюю долговечность изделия. В этом случае мы рассматриваем собранный материал не ради его самого, а лишь как некую пробную группу или выборку, представляющую только серии из возможных результатов, которые мы могли бы встретить при продолжении наблюдений массового процесса в данной обстановке.

В математической статистике рассматриваются две основные категории задач: оценивание и статистическая проверка гипотез. Первая задача разделяется на точечное оценивание и интервальное оценивание параметров распределения. Например, может возникнуть необходимость по наблюдениям получить точечные оценки параметров $M\xi$ и $D\xi$. Если мы хотим получить некоторый интервал, с той или иной степенью достоверности содержащий истинное значение параметра, то это задача интервального оценивания.

Вторая задача – проверка гипотез – заключается в том, что мы делаем предположение о распределении вероятностей случайной величины (например, о значении одного или нескольких параметров функции распределения) и решаем, согласуются ли в некотором смысле эти значения параметров с полученными результатами наблюдений.

В первом вопросе главы мы рассмотрим предмет и основные задачи математической статистики, а также историю развития математической статистики и внедрения статистических методов в естественно-научные и социально-экономические исследования.

Второй вопрос посвящен основным понятиям математической статистики. Здесь мы дадим определения выборочной и генеральной совокупности, объем выборки, дадим краткую классификацию выборок, введем ряд понятий и характеристик статистического распределения: варианты, частоты, относительные частоты, накопленные частоты, медиана, мода, размах выборки. В этом вопросе мы определим понятия дискретных и интервальных вариационных рядов, алгоритмы перехода из дискретных рядов в интервальные и обратно.

В третьем вопросе мы рассмотрим определение и принципы построения эмпирической функции распределения и ее графика. В четвертом вопросе лекции мы рассмотрим принципы изображения графического статистического распределения вариационных рядов. Наиболее часто в этом случае применяются полигон, гистограмма и кумулятивная кривая.

Пятый вопрос посвящен числовым характеристикам статистического распределения. Здесь мы представим основные определения и формулы нахождения значений выборочного среднего, выборочной дисперсии и исправленной выборочной дисперсии, выборочного среднего квадратического отклонения и исправленного среднего квадратического отклонения.

И, наконец, в шестом вопросе мы опишем понятия и методы расчета начального выборочного момента порядка k, центрального выборочного момента порядка k, выборочного коэффициента асимметрии и выборочного коэффициента эксцесса.

19.1. Предмет и история развития математической статистики

Математическая статистика – это раздел прикладной математики, в котором изучаются методы сбора, изучения, систематизации и обработки количественных показателей результатов наблюдений массовых случайных событий для выявления существующих закономерностей, построения математических моделей и прогнозирования.

Предметом математической статистики является исследование наблюдаемых случайных величин. Основные задачи математической статистики сводятся к упорядочиванию получаемых данных, представлению их в удобном для дальнейшего анализа виде, оценке характеристик случайных величины, установлению математических зависимостей между изучаемыми факторами, верификации параметров полученных статистических моделей, прогнозированию состояний исследуемых явлений.

История математической статистики начинается на заре человеческой цивилизации. Первые упоминания об использовании простейших статистических расчетов можно увидеть в «Истории Пелопонесской войны» греческого историка Фукидида (460 – 400 до н.э.). В научных трудах арабских математиков Аль-Кинди (801 – 873) и Ибн Адлана (1187 – 1268) описаны основыне методы выборки и частотного анализа. Использование элементов математической статистики можно увидеть в работах банкира Джованни Виллани (1276 – 1348), астронома Тихо Браге (1546 – 1601), картографа Эдварда Райта (1561 – 1615), демографа Джона Граунта (1620 – 1674), экономиста Уильяма Петти (1623 – 1687).

Предпосылкой формирования математической статистики как раздела математики послужили открытия в области теории вероятностей и теории ошибок Пьера Ферма (1607 – 1665), Блеза Паскаля (1623 – 1662), Якоба Бернулли (1655 – 1705), Абрахама Муавра (1667 – 1754), Роджера Котса (1682 – 1716), Томаса Симпсона (1710 – 1761).

Большой вклад в становление и развитие математической статистики внесли Пьер-Симон Лаплас (1749 – 1827), Томас Байес (1701 – 1761), Жозеф-Луи

Лагранж (1736 – 1813), Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855), российские ученые Пафнутий Чебышев (1821 – 1894), Андрей Марков (1856 – 1922).

В XX веке выдающиеся ученые Ежи Нейман (1894-1977), Карл Пирсон (1857 – 1936), Уильям Госсет (1876 – 1937), Артур Боули (1869 – 1957), Чарльз Спирман(1863 – 1945), и Рональд Фишер (1890 – 1962) развили общую теорию оценок и параметров, статистических решений, планирования экспериментов, проверки статистических гипотез, внедрили статистические методы в естественно-научные и социально-экономические исследования, Абрахам Вальд (1902-1950) построил теорию последовательного статистического анализа, а советские математики Андрей Колмогоров (1903-1987) и Николай Смирнов (1900-1966) заложили основы непараметрической статистики и теории предельных распределений порядковых статистик. В это время были сформированы современные фундаментальные положения современной статистики, изучены и классифицированы предельные распределения непараметрических критериев, теории вероятностей больших уклонений и предельные распределения членов вариационного ряда.

В двадцать первом веке можно выделить четыре принципиально новых направления исследований:

- разработка и внедрение математических методов планирования экспериментов;

- развитие статистики объектов нечисловой природы как самостоятельного направления в прикладной математической статистике;

- развитие статистических методов, устойчивых по отношению к малым отклонениям от используемой вероятностной модели;

- широкое развертывание работ по созданию компьютерных пакетов программ, предназначенных для проведения статистического анализа данных.

В настоящее время математическая статистика – мощный аналитический инструмент для исследований в различных областях естественнонаучных, социально-экономических наук, имеет огромное прикладное значение в промышленности, технических разработках, поиске полезных ископаемых, медицине, сельском хозяйстве и многих других направлениях человеческой деятельности.

19.2. Основные понятия математической статистики

19.2.1. Основные определения

Совокупность всех объектов, подлежащих исследованию называется генеральной совокупностью. Генеральная совокупность может быть *конечной* или *бесконечной* в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих ее объектов.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Выборка называется *репрезентативной (представительной)*, если ее объекты достаточно хорошо отражают свойства генеральной совокупности.

Повторной называется выборка, при которой отобранный объект возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называется выборка, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Применяют различные способы получения выборки.

1) *Простой отбор* – случайное извлечение объектов из генеральной совокупности с возвратом или без возврата.

2) *Типический отбор* – объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из ее «типической» части.

3) *Серийный отбор* – объекты отбираются из генеральной совокупности не по одному, а сериями.

4) *Механический отбор* – генеральная совокупность «механически» делится на столько частей, сколько объектов должно войти в выборку и из каждой части выбирается один объект.

Число N объектов генеральной совокупности и число n объектов выборочной совокупности называют *объемами* генеральной и выборочной совокупностей соответственно. При этом предполагают, что N значительно больше n.

19.2.2. Понятие вариационного ряда

Полученные различными способами отбора данные образуют выборку. Как правило, это множество чисел, расположенных в произвольном порядке. По такой выборке трудно выявить какую-либо закономерность их изменения (*варьирования*).

Для обработки данных используют операцию *ранжирования*, то есть расположение наблюдаемых значений в порядке возрастания.

После проведения операции ранжирования значения случайной величины объединяют в группы, то есть группируют так, чтобы в каждой отдельной группе значения случайной величины были бы одинаковыми. Каждое такое значение называется *вариантом.* Варианты обозначаются строчными буквами латинского алфавита с индексами, соответствующими порядковому номеру группы x_i, y_j, … .

Изменение значения варианта называется *варьированием*.

Последовательность вариантов выборки, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*.

Число, которое показывает, сколько раз встречаются соответствующие значения вариантов в ряде наблюдений, называется *частотой* или *весом варианта* и обозначается n_i ($i = 1, 2, ..., k$), где i – номер варианта, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – объем выборки.

Отношение частоты данного варианта к общему числу наблюдений n называется *относительной частотой* или *частостью* (*долей*) соответствующего варианта и обозначается $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ ($\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$, $i = 1, 2, ..., k$), где k – число вариантов, n – объем выборки. Частость ω_i является статистической вероятностью появления варианта x_i. Она является аналогом вероятности p_i появления значения x_i случайной величины X.

Накопленная частота $n_i^{нак}$ показывает, сколько наблюдалось вариантов со значением признака, меньшим x. Отношение накопленной частоты $n_i^{нак}$ к общему числу наблюдений n называется *накопленной частостью* $\omega_i^{нак}$.

Дискретным статистическим рядом называется ранжированная совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами n_i или частостями ω_i.

Дискретный статистический ряд удобно записывать в виде таблицы:

Таблица 19.1

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

x_i	x_1	x_2	…	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	…	ω_k

Определим основные характеристики дискретного статистического ряда:

1. *Размах варьирования* $R = x_{\max} - x_{\min}$.

2. *Мода* M_0 – вариант, имеющий наибольшую частоту.

3. *Медиана* M_e – вариант, приходящийся на середину ранжированной выборки.

Пусть n – объем выборки. Тогда:

1) если $n = 2k$, то есть ряд имеет четное число членов, то $M_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$;

2) если $n = 2k+1$, то есть ряд имеет нечетное число членов, то $M_e = x_{k+1}$.

Пример. Сотрудниками полиции зарегистрирована подростковая преступность в возрасте: 14, 16, 12, 13, 14, 15, 14, 16, 14, 15, 15, 16, 14, 15, 13, 14, 15, 15, 16, 13.

Составить дискретный ряд распределения числа преступлений по возрасту. Найти объем, размах, моду и медиану выборки.

Для решения задачи ранжируем исходные данные:

12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16.

Объем выборки: $n = 20$.

Наименьшее значение варианты: $x_{\min} = 12$.

Наибольшее значение варианты: $x_{\max} = 16$.

Размах: $R = x_{\max} - x_{\min} = 16 - 12 = 4$.

Мода: $M_0 = 14$, так как вариант $x_i = 14$ встречается наибольшее количество раз $n_i = 7$.

Так как $n = 20$, то медиана $M_e = \dfrac{x_{10} + x_{11}}{2} = \dfrac{14+14}{2} = \dfrac{28}{2} = 14$.

Составим вариационный ряд:

Таблица 19.2

x_i	12	13	14	15	16
n_i	1	3	7	5	4

19.2.3. Дискретные и интервальные вариационные ряды

Если изучаемая случайная величина X является непрерывной или число ее значений достаточно велико, то составляют *интервальный статистический ряд.*

Весь интервал наблюдаемых значений разбивается на k частичных интервалов $[x_1, x_2)$, $[x_2, x_3), \ldots,$ $[x_k, x_{k+1}]$ одинаковой длины h. Затем подсчитывают количество попаданий наблюдений в каждый интервал. Эти числа принимают за частоты n_i. Согласно формуле Стерджеса рекомендуемое число интервалов разбиений $k \approx 1 + \log_2 n$, а длины частичных интервалов $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n}$, n – объем выборки. Если шаг окажется дробным, то за длину интервала берут ближайшее целое число или ближайшую простую дробь.

За начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{нач} = x_{\min} - \dfrac{h}{2}$, а конец последнего должен удовлетворять условию $x_{кон} - h \le x_{\max} < x_{кон}$. Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала шаг h.

Сгруппированный ряд представляется в виде таблицы (*интервальный статистический ряд*):

Таблица 19.3

$x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$\dots$	$x_k - x_{k+1}$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Пример. Органами МВД за отчетный период зарегистрировано следующее количество преступлений: 178, 160. 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155, 157, 175, 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169, 179, 165, 156, 179, 158, 171, 175, 173, 164, 172. Построить интервальный статистический ряд.

Произведем ранжирование полученные данные:

153, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 163, 164, 165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172, 173, 173, 175, 175, 178, 179, 179, 182, 183, 186.

Объем выборки: $n = 30$.

Наименьшее значение варианты: $x_{\min} = 153$.

Наибольшее значение варианты: $x_{\max} = 186$.

По формуле Стерджеса находим число интервалов разбиений: $k \approx 1 + \log_2 30 \approx 5{,}9069 \approx 6$.

Длина частичных интервалов: $h = \dfrac{186 - 153}{1 + \log_2 30} \approx \dfrac{33}{6} \approx 5{,}5 \approx 6$.

Начальное значение: $x_{нач} = 153 - \dfrac{6}{2} = 150$.

Составляем интервальный статистический ряд.

Таблица 19.4

$x_i - x_{i+1}$	150–156	156–162	162–168	168–174	174–180	180–186
n_i	4	5	6	7	5	3

Иногда интервальный статистический ряд необходимо заменить дискретным. В этом случае серединное значение i-го интервала принимают за вариант x_i, а соответствующую интервальную частоту n_i – за частоту этого варианта.

Пример. Дан интервальный вариационный ряд:

Таблица 19.5

$x_i - x_{i+1}$	150–156	156–162	162–168	168–174	174–180	180–186
n_i	4	5	6	7	5	3

Построить дискретный вариационный ряд.

Для решения задачи найдем середины частичных интервалов, получим числа: 153, 159, 165, 171, 177, 183. Запишем дискретный вариационный ряд.

Таблица 19.6

x_i	153	159	165	171	177	183
n_i	4	5	6	7	5	3

19.2.4. Эмпирическая функция распределения

Пусть получено статистическое распределение выборки и каждому варианту x_i из этой выборки поставлена в соответствие его частость ω_i.

Эмпирической функцией (*функцией распределения выборки*) называется относительная частота (частость) того, что признак (случайная величина X) примет значение, меньшее заданного x, т.е.

$$F_n(x) = w(X < x) = w_x^{нак} = \frac{n_x^{нак}}{n}, \tag{19.1}$$

где n – объем выборки.

Из определения следует, что значения эмпирической функции распределения при каждом x являются случайными величинами. Она обладает теми же свойствами, что и обычная функция распределения вероятностей:

1. $0 \le F^*(x) \le 1$;

2. $F^*(x)$ – неубывающая функция;

3. $F^*(x)$ – непрерывна слева;

3. $F^*(x) = 0$, при $x \le x_{\min}$ и $F^*(x) = +\infty$, при $x > x_{\max}$.

Пример. Построить эмпирическую функцию распределения по данному вариационному ряду:

Таблица 19.7

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1

Объем выборки: $n = 20$.

Составим таблицу, в которой найдем относительные частоты и накопленные относительные частоты.

Таблица 19.8

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
ω_i	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05
$\omega_i^{нак}$	0,15	0,45	0,7	0,85	0,95	1

На основе полученной таблицы запишем эмпирическую функцию распределения:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0; \\ 0{,}15, & при \quad 0 < x \le 1; \\ 0{,}45, & при \quad 1 < x \le 2; \\ 0{,}7, & при \quad 2 < x \le 3; \\ 0{,}85, & при \quad 3 < x \le 4; \\ 0{,}95, & при \quad 4 < x \le 5; \\ 1, & при \quad x > 5. \end{cases}$$

Ее график будет иметь вид:

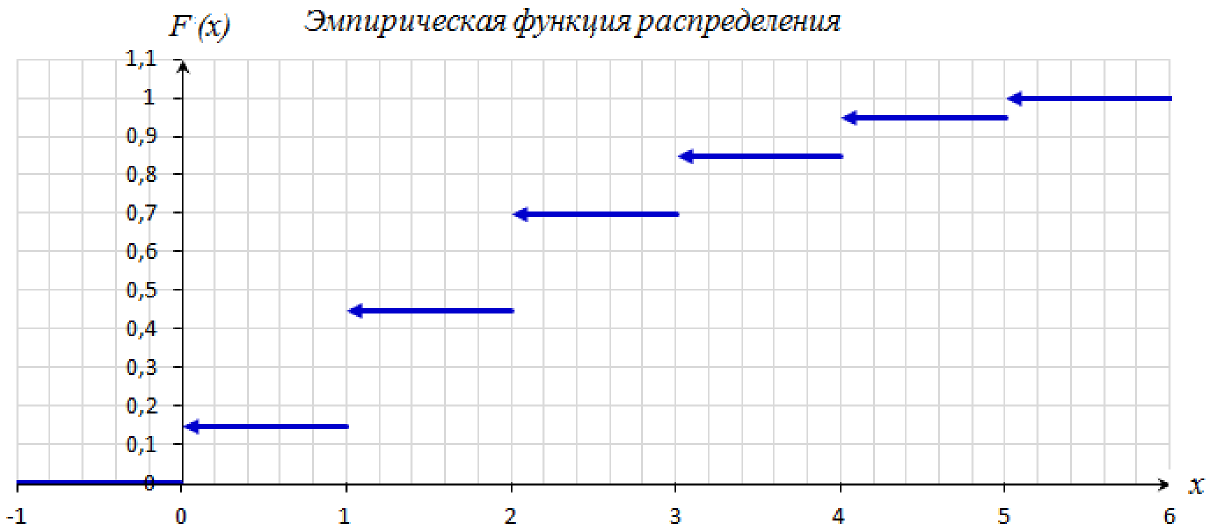


Рис. 19.1. Эмпирическая функция распределения.

19.3. Графическое изображение статистического распределения

Для графического изображения вариационных рядов наиболее часто применяются *полигон, гистограмма* и *кумулятивная кривая*.

Полигон частот или *относительных частот* служит для изображения дискретного вариационного ряда и представляет собой ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_i;\ n_i)$ или $(x_i;\ \omega_i)$, $i = 1, 2, ..., k$.

Полигон относительных частот является аналогом многоугольника распределения дискретной случайной величины в теории вероятностей.

Гистограмма частот или *относительных частот* служит только для изображения интервальных вариационных рядов и представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями, равными частичным интервалам значений признака $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, ..., k$, и высотами, равными частотам n_i или относительным частотам ω_i. Если соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой, то можно получить полигон того же распределения.

Кумулятивная кривая (*кумулята*) – кривая накопленных частот (частостей). Для дискретного вариационного ряда кумулята представляет ломаную линию, соединяющую точки $\left(x_i;\, n_i^{нак}\right)$ или $\left(x_i;\, \omega_i^{нак}\right)$, $i = 1,\ 2, ...,\ k$. Для интервального вариационного ряда ломаная начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала, а ордината – накопленной частоте (частости), равной нулю. Другие точки этой ломаной соответствуют концам интервалов.

Пример. В результате некоторого эксперимента получены следующие данные:

$$2,\ 4,\ 9,\ 5,\ 4,\ 8,\ 3,\ 6,\ 7,\ 2,$$
$$8,\ 7,\ 5,\ 3,\ 7,\ 4,\ 4,\ 3,\ 4,\ 6.$$

Найти размах варьирования R, моду M_0, медиану M_e. Построить полигон и кумуляту частот и относительных частот.

Сначала найдем требуемые характеристики R, M_0, медиану M_e.

Для получения объема выборки посчитаем количество полученных значений в выборке. Таким образом, $n = 20$.

Размах варьирования рассчитаем вычитая из наибольшего варианта 9 наименьший вариант 2, а значит $R = 7$.

Наиболее повторяемое значение полученных данных равно 4, следовательно, $M_0 = 4$.

Количество элементов в выборке 20, следовательно, возьмем полусумму десятого и одиннадцатого значений выборки. Таким образом, $M_e = \dfrac{4+5}{2} = 4{,}5$.

Для нахождения дискретного вариационного ряда ранжируем исходные данные: 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9.

Составим дискретный вариационный ряд, выписав в таблицу ранжированные варианты и соответствующие им частоты (Таблица 1).

Таблица 19.9.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	3	5	2	2	3	2	1

Найдем относительные частоты, накопленные частоты и накопленные относительные частоты и составим таблицу 2:

Таблица 19.10.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	3	5	2	2	3	2	1
ω_i	0,1	0,15	0,25	0,1	0,1	0,15	0,1	0,05
$n_i^{нак}$	2	5	10	12	14	17	19	20
$\omega_i^{нак}$	0,1	0,25	0,5	0,6	0,7	0,85	0,95	1

На основе значений полученной таблицы строим полигон частот и относительных частот, кумуляту частот и относительных частот (рис. 19.2).

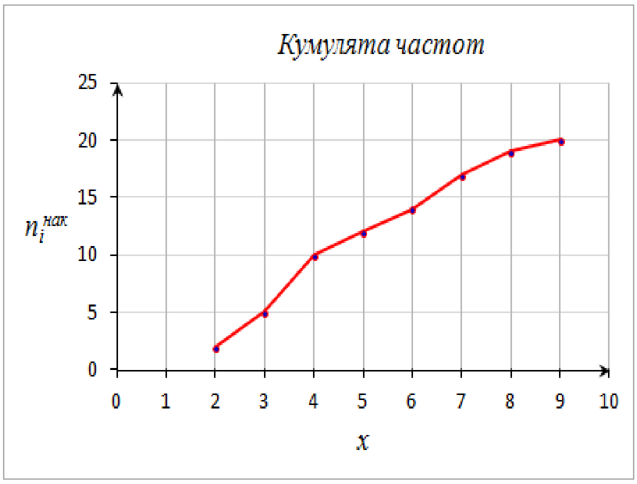


Рис. 19.2. Графическое представление дискретного вариационного ряда.

Пример. Дан интервальный вариационный ряд:

Таблица 19.11.

$x_i - x_{i+1}$	1 – 5	5 – 9	9 – 13	13 – 17	17 – 21
n_i	10	20	50	12	8

Построить гистограмму и кумуляту частот и относительных частот.

Найдем относительные частоты, накопленные частоты и накопленные относительные частоты. Составим таблицу:

Таблица 19.12.

$x_i - x_{i+1}$	1 – 5	5 – 9	9 – 13	13 – 17	17 – 21
n_i	10	20	50	12	8
ω_i	0,1	0,2	0,5	0,12	0,08
$n_i^{нак}$	10	30	80	92	100
$\omega_i^{нак}$	0,1	0,3	0,8	0,92	1

На основе полученной таблицы строим гистограмму частот и относительных частот, кумуляту частот и относительных частот (рис. 19.3).

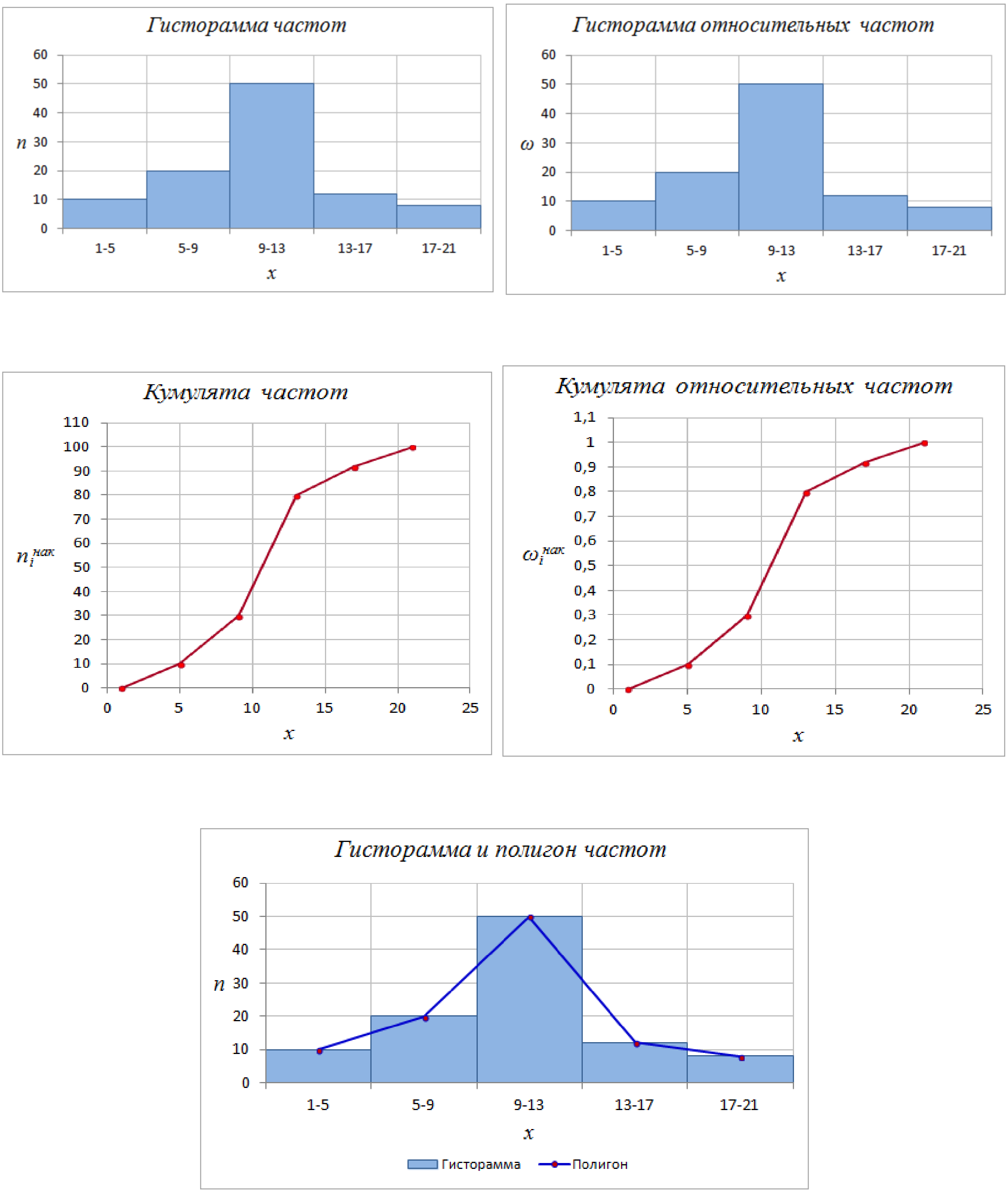


Рис. 19.3. Графическое представление интервального вариационного ряда.

19.4. Числовые характеристики статистического распределения

19.4.1. Выборочное среднее

Пусть дано статистическое распределение выборки объема n:

Таблица 19.13.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m

Выборочным средним $\overline{x_в}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i \ . \qquad (19.1)$$

Так как $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$, то для вычисления выборочной средней можно использовать формулу:

$$\overline{x_в} = \sum_{i=1}^{m} x_i \omega_i \ . \qquad (19.2)$$

В случае интервального вариационного ряда в качестве x_i берут середины интервалов, а n_i – соответствующие им частоты.

Пример. Дан статистический ряд распределения частот:

Таблица 19.1.

x_i	1	3	4	5	6
n_i	3	5	7	2	3

Вычислить среднюю выборочную ($\overline{x_в}$).

Из таблицы 6 рассчитаем объем выборки:

$$n = 3 + 5 + 7 + 2 + 4 = 20 \ .$$

Тогда выборочная средняя будет равна:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i = \frac{1\cdot 3 + 3\cdot 5 + 4\cdot 7 + 5\cdot 2 + 6\cdot 3}{20} = 3{,}7 \ .$$

19.4.2. Выборочная дисперсия

Выборочной дисперсией $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего $\overline{x_в}$:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i . \qquad (19.3)$$

Выборочная дисперсия может быть вычислена по формуле:

$$D_в = \overline{x_в^{\,2}} - \left(\overline{x_в}\right)^2, \text{ где } \overline{x_в^{\,2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i . \qquad (19.4)$$

Так как $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$, то для вычисления выборочной дисперсии можно использовать формулу:

$$D_в = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot \omega_i . \qquad (19.5)$$

При решении практических задач используется *исправленная выборочная дисперсия* S^2:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в . \qquad (19.6)$$

Замечание. Формулы для вычисления выборочной дисперсии и исправленной дисперсии отличаются только знаменателями. При достаточно большом объеме выборки n выборочная $D_в$ и исправленная S^2 дисперсии мало отличаются друг от друга, поэтому на практике исправленной дисперсией пользуются, если $n \le 30$.

Пример. Рассчитаем значение выборочной дисперсии и исправленной значение выборочной дисперсии для представленного в таблице 6 статистического ряда распределения частот.

Выборочную дисперсию будем находить по формуле 4. Найдем значение выборочной средней квадрата значений выборки:

$$\overline{x_в^{\,2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i = \frac{1^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 7 + 5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 3}{20} = 15{,}9 .$$

Тогда значение выборочной дисперсии найдем как разность $\overline{x_в^2}$ и квадрата выборочной средней $\left(\overline{x_в}\right)^2$:

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = 15{,}9 - \left(3{,}7\right)^2 = 2{,}21.$$

Исправленную выборочную дисперсию будем находить по формуле 6:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{20}{20-1} \cdot 2{,}21 \approx 2{,}3263.$$

19.4.3. Выборочное среднее квадратическое отклонение

Выборочное среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}. \qquad (19.7)$$

Особенность $\sigma_в$ состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и данные выборки.

Исправленное среднее квадратическое отклонение S определяется, как квадратный корень из исправленной выборочной дисперсии:

$$S = \sqrt{S^2}. \qquad (19.8)$$

Пример. Рассчитаем значение выборочного среднего квадратического отклонения и исправленного среднего квадратического отклонения для представленного в таблице 6 статистического ряда распределения частот.

Значение выборочного среднего квадратического отклонения будем находить по формуле 19.7:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{2{,}21} \approx 1{,}4866.$$

А исправленное среднее квадратическое отклонение по формуле 8:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{2{,}3263} \approx 1{,}5252.$$

Средняя выборочная и выборочная дисперсия являются частными случаями *моментов статистического распределения*.

19.5. Выборочные моменты и коэффициенты

19.5.1. Выборочные начальные и центральные моменты

Начальным выборочным моментом порядка k называется среднее арифметическое k-х степеней всех значений выборки:

$$\tilde{\nu}^k = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^k \cdot n_i}{n} \quad \text{или} \quad \tilde{\nu}^k = \sum_{i=1}^{m} x_i^k \cdot \omega_i . \tag{19.9}$$

Замечание. Средняя арифметическая является начальным выборочным моментом первого порядка: $\tilde{\nu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^1 \cdot n_i = \overline{x_в}$.

Центральным выборочным моментом порядка k называется среднее арифметическое k-х степеней отклонений наблюдаемых значений выборки от выборочного среднего $\overline{x_в}$:

$$\tilde{\mu}^k = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^k \cdot n_i}{n} \quad \text{или} \quad \tilde{\mu}^k = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^k \cdot \omega_i . \tag{19.10}$$

Замечание. Центральный выборочный момент первого порядка равен нулю: $\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^1 \cdot n_i = 0$, так как $\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)\cdot n_i = 0$.

Замечание. Выборочная дисперсия является центральным выборочным моментом второго порядка: $\tilde{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i = D_в$.

19.5.2. Выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса

Выборочным коэффициентом асимметрии называется число $\tilde{A}$, вычисляемое по формуле:

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{\mu}_3}{\sigma_в^3} . \tag{19.11}$$

Выборочный коэффициент асимметрии служит для характеристики асимметрии полигона вариационного ряда. Если $\tilde{A} = 0$, то распределение имеет симметричную форму, т.е. варианты равноудаленные от x, имеют одинаковую частоту (средняя арифметическая, мода и медиана совпадают). Если это равенство нарушается, то распределение ассиметрично.

Если $\widetilde{A} < 0$, то наблюдается положительная (правосторонняя) асимметрия, т.е. более пологий «спуск» полигона наблюдается справа. Если $\widetilde{A} > 0$, то наблюдается отрицательная (левосторонняя) асимметрия, т.е. более пологий «спуск» полигона наблюдается слева.

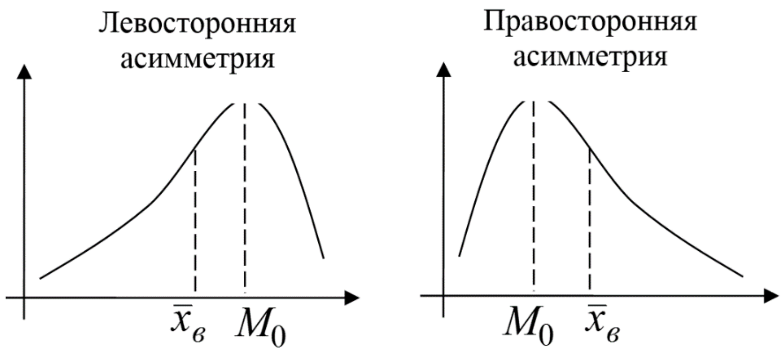


Рис. 19.4. Левосторонняя и правосторонняя асимметрии.

Выборочным коэффициентом эксцесса или *коэффициентом крутости* называется число $\widetilde{E}$, вычисляемое по формуле:

$$\widetilde{E} = \frac{\widetilde{\mu}^4}{\sigma_в^4} - 3. \qquad (19.12)$$

Выборочный коэффициент эксцесса служит для сравнения на «крутость» выборочного распределения с нормальным распределением.

Коэффициент эксцесса для случайной величины, распределенной по нормальному закону, равен нулю.

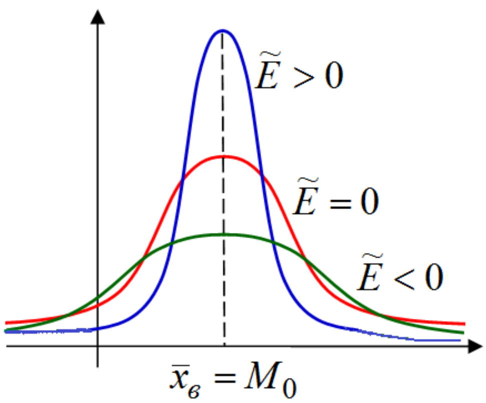


Рис. 19.5. Значения коэффициента эксцесса.

Поэтому за стандартное значение выборочного коэффициента эксцесса принимают $\tilde{E}=0$. Если $\tilde{E}>0$ ($\tilde{E}<0$), то полигон вариационного ряда имеет более крутую (пологую) вершину по сравнению с нормальной кривой.

Пример. Вычислить коэффициент асимметрии и эксцесс по данным представленным в таблице:

Таблица 19.15.

№	Значения	Частота
1	94-100	3
2	100-106	7
3	106-112	11
4	112-118	20
5	118-124	28
6	124-130	19
7	130-136	10
8	136-142	2

Объем выборки: $n=3+7+11+20+28+19+10+2=100$.

Составим дискретный вариационный ряд распределения частот:

Таблица 19.16.

№	x_i	n_i
1	97	3
2	103	7
3	109	11
4	115	20
5	121	28
6	127	19
7	133	10
8	139	2

Значение выборочной средней составит:

$$\overline{x_в}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_i n_i=\frac{1}{20}\cdot(97\cdot 3+103\cdot 7+109\cdot 7+115\cdot 20+121\cdot 28+127\cdot 19+$$

$$+133\cdot 10+139\cdot 2)=119{,}2\,.$$

Для определения выборочной дисперсии рассчитаем значение $\overline{x_в^{\,2}}$:

$$\overline{x_в^{\,2}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_i^2 n_i=\frac{1}{20}\cdot(97^2\cdot 3+103^2\cdot 7+109^2\cdot 7+115^2\cdot 20+121^2\cdot 28+$$

$$+127^2\cdot 19+133^2\cdot 10+139^2\cdot 2)=14296{,}1.$$

Тогда значение выборочной дисперсии будет равно:

$$D_в=\overline{x_в}^2-\left(\overline{x_в}\right)^2=14296{,}1-(119{,}2)^2=87{,}48.$$

Найдем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_в=\sqrt{D_в}=\sqrt{87{,}48}\approx 9{,}353.$$

А затем центральный выборочный момент 3-го порядка:

$$\tilde{\mu}^3=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x_в}\right)^3\cdot n_i=\frac{1}{100}\cdot((97-119{,}2)^3\cdot 3+(103-119{,}2)^3\cdot 7+$$

$$+(109-119{,}2)^3\cdot 7+(115-119{,}2)^3\cdot 20+(121-119{,}2)^3\cdot 28+$$

$$+(127-119{,}2)^3\cdot 19+(133-119{,}2)^3\cdot 10+(139-119{,}2)^3\cdot 2)\approx -247{,}54.$$

Центральный выборочный момент 4-го порядка будет равен:

$$\tilde{\mu}^4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x_в}\right)^4\cdot n_i=\frac{1}{100}\cdot((97-119{,}2)^4\cdot 3+(103-119{,}2)^4\cdot 7+$$

$$+(109-119{,}2)^4\cdot 7+(115-119{,}2)^4\cdot 20+(121-119{,}2)^4\cdot 28+$$

$$+(127-119{,}2)^4\cdot 19+(133-119{,}2)^4\cdot 10+(139-119{,}2)^4\cdot 2)\approx 20767{,}8$$

Найдем коэффициент асимметрии:

$$\tilde{A}=\frac{\tilde{\mu}_3}{\sigma_в^3}=\frac{-247{,}54}{9{,}353^3}=-0{,}3025.$$

Рассчитаем значение эксцесса:

$$\tilde{E}=\frac{\tilde{\mu}^4}{\sigma_в^4}-3=\frac{20767{,}8}{9{,}353^4}-3=-0{,}2862.$$

Так как коэффициент асимметрии $\tilde{A}$ отрицателен, то наблюдается левосторонняя асимметрия. Поскольку эксцесс $\tilde{E}$ отрицательный, то рассматриваемое распределение имеет пологую вершину по сравнению с нормальной кривой.

Вопросы для самоконтроля

1. Определите предмет и задачи математической статистики.
2. Как называется выборка, если ее объекты достаточно хорошо отражают

свойства генеральной совокупности?

3. Чем отличаются повторная и бесповторная выборка?

4. Какие различные способы получения выборки применяют в статистических исследованиях?

5. Дайте определение статистического распределения выборки.

6. Перечислите основные характеристики дискретного статистического ряда? Опишите эти понятия.

7. Опишите принципы построения дискретного и интервального дискретных рядов.

8. Каким образом осуществляется переход от дискретного вариационного ряда к интервальному?

9. Как осуществляется переход от интервального вариационного ряда к дискретному?

10. Продемонстрируйте на примере методы построения эмпирической функции распределения.

11. Дайте определение статистического распределения выборки.

12. Перечислите основные характеристики дискретного статистического ряда? Опишите эти понятия.

13. Опишите принципы построения дискретного и интервального дискретных рядов.

14. Каким образом осуществляется переход от дискретного вариационного ряда к интервальному?

15. Как осуществляется переход от интервального вариационного ряда к дискретному?

16. Продемонстрируйте на примере методы построения эмпирической функции распределения.

17. Какие виды графиков используются для изображения статистического распределения?

18. Каким образом гистограмма и кумулята отображают статистические распределения?

19. Какие расчеты необходимо произвести для построения кумуляты статистического распределения?

20. Назовите основные числовые характеристики статистического

распределения.

21. Укажите методы, позволяющие рассчитать выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение.

22. Каким образом можно получить исправленное среднее квадратическое отклонение?

23. Как осуществляется расчет выборочных начальных и центральных моментов k-го порядка?

24. Для чего служат выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса?

Раздел 5. Дискретная математика

Глава 20. Основы математической логики

Логика – это наука, изучающая формы и законы мышления, закономерности мыслительного процесса. Слово «логика» произошло от греческого слова «logos», что означает «слово», «понятие», «рассуждение», «разум». Законы и правила формальной логики необходимо знать для построения правильных рассуждений. Логические знания чрезвычайно важны для повышения эффективности мыслительной деятельности человека и предотвращения логических ошибок.

Согласно основному принципу логики, правильность рассуждения (вывода) определяется только его логической формой (структурой) и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений. Отличительная особенность правильного вывода состоит в том, что из истинных исходных утверждений всегда получаются истинные заключения. Это позволяет из одних истин получать другие с помощью только рассуждения, разума и без обращения к опыту.

Логика состоит из большого числа разделов, описывающих отдельные типы содержательных рассуждений. Эти системы принято делить на *классическую логику*, в которую входят классическая логика высказываний и логика предикатов, и *неклассическую логику*, включающую *нечеткую логику*, *линейную логику*, *многозначную логику*, *деонтическую логику*, *модальную логику*, *темпоральную логику*, *паранепротиворечивую логику*, *релевантную логику* и другие ветви логики).

Как самостоятельная наука, логика оформилась в трудах греческого философа Аристотеля (384 – 322 г. до н.э.). Он систематизировал известные до него сведения, и эта система стала впоследствии называться *традиционной* или *Аристотелевой логикой*. Широкое применение силлогистика нашла в судебной практике, когда материалы предварительного следствия брались за истинные посылки. Применяя к этим посылкам процедуры порождения новых утверждений по правилам теории Аристотеля, судьи делали вывод о виновности или невиновности подсудимого.

В XIX в. – начале XX в. в логике произошла научная революция и на смену традиционной логике пришла современная логика, называемая также *математической* или *символической логикой*. Развитие математики выявило недостаточность Аристотелевой логики и поставило задачу о ее дальнейшем построении на математической основе. Впервые в истории идеи о таком построении логики были высказаны немецким математиком Готфридом Лейбницем (1646 – 1716) в конце XVII века. Он считал, что основные понятия логики должны быть обозначены символами, которые соединяются по определенным правилам, и это позволяет всякие рассуждения заменить вычислением. Джордж Буль (1815 – 1864) в своей работе «Исследование законов мысли» (1854 г.) истолковывал умозаключения как результат решения логических равенств, в результате чего логическая теория приняла вид обычной алгебры и получила название алгебры высказываний. Буль рассматривал свою алгебру как инструмент изучения законов человеческого мышления.

При этом на первых порах развитие математической логики позволило представить логические теории в новой удобной форме и применить вычислительный аппарат к решению задач, малодоступных человеческому мышлению, что, конечно, расширило область логических исследований. Однако главное назначение математической логики определилось в конце XIX века, когда стала ясна необходимость обоснования понятий и идей самой математики. Эти задачи имели логическую природу и, естественно, привели к дальнейшему развитию математической логики.

В этом отношении показательны работы немецкого математика Готлоба Фрёге (1848 – 1925) и итальянского математика Джузеппе Пеано (1858 – 1932), которые применили математическую логику для обоснования арифметики и теории множеств.

В развитие логики значительный вклад внесли Бертран Рассел (1872 – 1970), Альфред Уайтхед (1861 – 1947), Давид Гильберт (1862 – 1943), Курт Гедель (1906 – 1978), Альфред Тарский (1901 – 1983) и др.

В первой половине XX в. стали выделяться следующие направления: *многозначная логика* (предполагает, что утверждение может быть не только истинным или ложным, но иметь и другие значения истинности); *деонтическая логика* (изучает логические связи нормативных высказываний); *модальная логика* (рассматривает понятия необходимости, возможности, случайности); *эпистемическая логика* (изучает понятия «опровержимо», «неразрешимо», «доказуемо», «убежден»); *паранепротиворечивая логика*; *парафальсифицирующая логика* и другие. Все эти новые разделы логики были связаны с естественными и гуманитарными науками. Перемены, происшедшие с логикой в XX веке, приблизили ее к непосредственному человеческому мышлению, к практической деятельности человека.

20.1. Логика высказываний

Высказыванием называется всякое утверждение (повествовательное предложение), про которое всегда определенно и объективно можно сказать, является ли оно истинным или ложным. Например, предложения «Дважды два – четыре», «Курсанты технических специальностей изучают информатику и математику», «3 больше 5», «Число 10 является нечетным», «На улице идет дождь», «Уголовное дело отправлено на доследование» – являются высказываниями. Побудительные предложения («Кругом», «Налево», «Подойдите, пожалуйста, ко мне»), вопросительные («Вы не подскажите, как пройти в библиотеку?»), восклицательные («Да здравствует свобода!») высказываниями не являются.

Повествовательное предложение, содержащее переменную, также не является высказыванием. Например, утверждение «x – положительное число» не будет высказыванием, так как нельзя определить ложно оно или истинно. Если же подставить вместо переменной x какое-либо число, то получим высказывание: «5 – положительное число» (истинное высказывание), «0 – положительное число» (ложное высказывание).

Рассмотренные выше примеры высказываний, а именно «Дважды два – четыре», «Курсанты технических специальностей изучают высшую математику», являются истинными во всех возможных ситуациях. Такие высказывания называются *абсолютно истинными*. Высказывания «3 больше 5» и «Число 10 является нечетным» являются *абсолютно ложными.* Абсолютно истинные и абсолютно ложные высказывания называются *логическими конст антами*. Высказывания «На улице идет дождь» и «Уголовное дело отправлено на доследование» будут истинны или ложны в зависимости от конкретной ситуации. В одних случаях они будут истинными, в других – ложными. Поэтому, точнее говорить, что данное высказывание истинно или ложно в определенной фиксированной ситуации. Ситуация может быть определена в самом высказывании, а может описываться дополнительно.

Высказывания обозначаются заглавными латинскими буквами: A, B, C,…. Подобные обозначения вводятся для упрощения анализа высказывания. В этом случае вместо сложных рассуждений получаются выражения, традиционно встречающиеся в математике. В логике высказываний значение истинного высказывания равно 1, а ложного – равно 0.

С помощью союзов «и», «или», «если, то», частицы «не» из нескольких высказываний (повествовательных предложений) можно составить различные новые высказывания. При этом исходные высказывания, которые нельзя разбить на еще более мелкие, называются *простыми*, а сконструированные при помощи логических связок – *сложными*.

В определенной ситуации истинность или ложность простых высказываний очевидна. Для определения истинности сложных высказываний необходимо не только знать, истинны или ложны простые высказывания, из которых построены сложные, но и проанализировать их структуру. Разрешение вопроса об истинности или ложности сложных высказываний, рассматриваемого на основе изучения способа их построения из элементарных, является основной задачей логики высказываний.

Логика высказываний – раздел логики, изучающий связи между высказываниями, которые определяются тем, как одни высказывания строятся из других. Эту часть логики еще называют алгеброй высказывания или исчислением высказываний.

20.1.1. Логические операции

Рассмотрим более подробно некоторые логические связки, позволяющие конструировать из простых высказываний сложные. В математической логике такие связки называются *логическими операциями.*

Самой простой логической операцией, применяемой только к одному высказыванию, является *операция отр ицания*, которая в русском языке соответствует частице «не». Отрицание высказывания A обозначается $\neg A$ или $\overline{A}$. Символ $\overline{A}$ читается «не A» или «не верно, что A». Например, если высказывание A – «подсудимый виновен», то $\overline{A}$ – «подсудимый не виновен».

По смыслу, отрицание высказывания – высказывание, противоположное данному. То есть, если высказывание A – истинное, то высказывание $\overline{A}$ – ложное, и наоборот, если A – ложное, то $\overline{A}$ – истинное. Запишем в виде таблицы значения нового, сложного высказывания $\overline{A}$ в зависимости от значений простого A, на основе которого оно построено.

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Подобная таблица называется *таблицей истинности*. Именно эту таблицу берут за определение операции отрицания. *Высказывание $\overline{A}$ называется отрицанием высказывания A, если оно истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно*.

Операция дизъюнкция применяется к двум высказываниям A и B и соответствует соединению их с помощью союза «или». Дизъюнкция обозначается с помощью знака $\vee$, который ставится между высказываниями:

$A \vee B$, что читается «*A или B*» или «*или A, или B*». Рассмотрим значение составленного сложного высказывания $A \vee B$. Если одно из высказываний истинно, а другое ложно, то дизъюнкция будет истинной. Если оба простых высказывания A и B ложны, то и дизъюнкция будет ложной. А вот если оба высказывания A и B истинны, то существует два случая. Это связано с тем, что в русском языке союз «или» имеет два значения. Одно из них не исключающее «или», а другое – исключающее.

Дизъюнкция $A \vee B$ – сложное высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B одновременно ложны. Таблица истинности операции дизъюнкция будет следующей:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Значения операции $A \vee B$ (кроме первой строчки), как видно из таблицы, получаются простым алгебраическим сложением значений A и B. Поэтому дизъюнкцию также называют *логическим сложением* и часто обозначают, как в алгебре, знаком «+».

Операция конъюнкция применяется также к двум высказываниям A и B и соответствует соединению их с помощью союза «и». Она обозначается с помощью знака $\wedge$ или &, который ставится между высказываниями: $A \wedge B$, что читается «*A и B*» или «*и A, и B*». Например, «Это преступление наказывается лишением свободы *и* конфискацией имущества»; «Оскорбление – это унижение чести *и* достоинства человека...».

Рассмотрим значение конъюнкции, исходя из смысла союза «и». Если оба высказывания A и B будут истинными, то и конъюнкция $A \wedge B$ будет истинной. Если же хотя бы одно из них, или оба, будут ложными, то и конъюнкция также будет ложной. Например, высказывание «3 – нечетное число *и* 3 делится на 2» будет ложным. Исходя из этого, можно дать следующее определение операции конъюнкция.

Конъюнкция $A \wedge B$ – сложное высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B одновременно истинны. Таблица истинности операции конъюнкция такова:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Проанализировав приведенную таблицу, можно заметить, что значения операции $A \wedge B$ получаются простым алгебраическим умножением значений A и B. Поэтому конъюнкцию также называют *логическим умножением* и обозначают, как в алгебре, знаком «·», который может опускаться.

Одной из важнейших логических операций является операция импликация высказываний. Она соответствует объединению двух высказываний с помощью союза «*если ..., то ...*». Импликация обозначается с помощью знака $\rightarrow$, ставящегося между высказываниями: $A \rightarrow B$, что читается «*A имплицирует B*» или «*если A, то B*», иногда говорят «*A влечет B*», «*из A следует B*».

Операция импликации определяется следующим образом.

Импликация высказываний A и B ($A \rightarrow B$) – это сложное высказывание, которое истинно всегда, кроме случая, когда A – истинно, а B – ложно. Таким образом, таблица истинности импликации такова:

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Проанализируем соответствие определения импликации с общепринятым значением сложноподчиненного предложения с использованием союза «если ..., то ...». Рассмотрим следующее сложное высказывание: «*Если* гражданин Иванов совершил кражу, *то* он может быть наказан лишением свободы на срок до двух лет». Если оба простые высказывания «гражданин Иванов совершил кражу» и «он может быть наказан лишением свободы на срок до двух лет» истинны, то истинность сложного высказывания не вызывает сомнения.

Операция эквивалентности обозначается символом $\leftrightarrow$, либо ~. Сложное высказывание $A\leftrightarrow B$ читается: «*A эквивалентно B*», либо «*A равносильно B*», либо «*A тогда и только тогда, когда B*», либо «*B, если и только если A*». Эквивалентность соответствует употреблению выражения «тогда и только тогда, когда», хотя, как и в случае с импликацией, такое соответствие далеко не полное.

Рассмотрим примеры использования операции эквивалентности. «Два треугольника равны *тогда и только тогда, когда* три стороны одного треугольника равны соответствующим сторонам другого треугольника». «Деяние кража *равносильно* тайному хищению чужого имущества». «Распространение заведомо ложных сведений является клеветой*, если и только если* эти сведения порочат честь и достоинство другого лица или подрывают его репутацию».

Эквивалентность высказываний A и B (A↔B) – сложное высказывание, которое истинно, когда A и B одновременно либо истинны либо ложны и ложно во всех других случаях. Эквивалентность определяется следующей таблицей истинности:

A	*B*	*A↔B*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Эквивалентность соответствует двум операциям импликации, соединенных конъюнкцией. А именно, $A\leftrightarrow B$ равносильно $(A \to B)\wedge(A \to B)$, т.е. имеет такую же таблицу истинности. Поэтому эквивалентность также называют двойной импликацией.

20.1.2. Логические формулы

Применяя введенные логические операции можно из простых высказываний составить высказывания сложного вида:

$A \to B \vee C;\ \left(A \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}\right) \to \overline{B} \wedge \overline{A};\ B \to \overline{A} \vee \left(C \wedge B\right) \leftrightarrow \left(A \vee B\right) \wedge \overline{B} \to C$.

Такие высказывания называются *логическими формулами*, а входящие в них простые высказывания – логическими переменными. Символы ¬, ∧, ∨, →, ↔ называют логическими связками.

Для правильного вычисления значения логических формул необходимо задать порядок выполнения логических операций.

1) отрицание ¬;

2) конъюнкция ∧;

3) дизъюнкция ∨;

4) импликация →;

5) эквивалентность ↔.

Наличие скобок в сложных высказываниях необходимы для изменения порядка действий.

Таким образом, для вычисления значения выражения $\left(A \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}\right) \rightarrow \overline{B} \wedge \overline{A}$ необходимо сначала определить $\overline{A}$ и $\overline{B}$, затем выполнить дизъюнкцию $\overline{A} \vee \overline{B}$, после подсчитать значение выражения в скобках: $A \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$, далее выполнить конъюнкцию $\overline{B} \wedge \overline{A}$ и, наконец, соединить вычисленные значения высказываний $A \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ и $\overline{B} \wedge \overline{A}$ с помощью импликации: $\left(A \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}\right) \rightarrow \overline{B} \wedge \overline{A}$.

Порядок выполнения операций будет таков:

$$(A \overset{4}{\leftrightarrow} \overset{1}{\overline{A}} \overset{3}{\vee} \overset{2}{\overline{B}}) \overset{6}{\rightarrow} \overline{B} \overset{5}{\wedge} \overline{A}.$$

Вычислим значение истинности рассмотренной логической формулы при всевозможных комбинациях значений логических переменных, составляющих эту формулу. Делать такие вычисления удобнее с помощью таблицы, в каждой строке которой анализируется одна комбинация значений простых высказываний, а в столбцах вычисляются все операции по порядку. Такие таблицы называются *таблицами истинности* или *таблицами Куайна*.

Построим таблицу истинности для приведенного выше сложного высказывания: $\left(A \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}\right) \rightarrow \overline{B} \wedge \overline{A}$.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\vee\overline{B}$	$A\leftrightarrow\overline{A}\vee\overline{B}$	$\overline{B}\wedge\overline{A}$	$(A\leftrightarrow\overline{A}\vee\overline{B})\to\overline{B}\wedge\overline{A}$
1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1

Если логическая формула состоит из трех переменных *A*, *B* и *C*, то строк в таблице истинности будет 8. Действительно, для каждого значения высказывания *C*, а их два: истина и ложь, существуют 4 комбинации значений *A* и *B*. Если в сложном высказывании – *n* простых, то логических возможностей – строк таблицы истинности будет $\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n\ раз}=2^n$. К примеру, при *n*=10, число различных комбинаций значений переменных – число строк таблицы $2^{10}=1024$.

Пример. Построить таблицу истинности логической формулы:

$$B\to\overline{A}\vee(C\wedge B)\leftrightarrow(A\vee B).$$

Вначале необходимо определить порядок вычисления логических операций:

$$B\overset{5}{\to}\overset{3}{\overline{A}}\overset{4}{\vee}(C\overset{1}{\wedge}B)\overset{6}{\leftrightarrow}(A\overset{2}{\vee}B).$$

Далее вычислим значения сложного высказывания по действиям для каждого из 8 возможных комбинаций.

A	B	C	$C\wedge B$	$A\vee B$	$\overline{A}$	$\overline{A}\vee(C\wedge B)$	$B\to\overline{A}\vee(C\wedge B)$	$B\to\overline{A}\vee(C\wedge B)\leftrightarrow(A\vee B)$
1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0

20.1.3. Равносильность логических формул

Рассмотрим следующую логическую формулу $(A\to B)\wedge(B\to A)$. Построим таблицу истинности данной формулы.

A	B	$A\to B$	$B\to A$	$(A\to B)\wedge(B\to A)$
1	1	1	1	**1**
1	0	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	0	1	1	**1**

A	B	$A\leftrightarrow B$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**1**

Если сравнить построенную таблицу истинности формулы $(A \to B) \wedge (B \to A)$ с таблицей истинности эквивалентности $A \leftrightarrow B$, то окажется, что при одних и тех же значениях переменных A и B значения одинаковы. Такие логические формулы называются *равносильными.* Равносильность формул обозначается с помощью знака $\equiv$:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A).$$

Таким образом, эквивалентность довольно просто выражается через комбинацию двух импликаций, соединенных операцией конъюнкция.

Две логические формулы называются *равносильными*, если при любых значениях входящих в них логических переменных эти формулы принимают одинаковые значения.

Равносильные формулы служат для выражения одних логических операций через другие, позволяют упрощать формулы или, точнее, заменять одни логические формулы другими, равносильными, но более простыми.

20.2. Основные законы логики

В логике высказываний некоторые наиболее значимые пары равносильных формул принято считать законами математической логики.

20.2.1. Свойства логических операций

Свойства операций логики высказываний можно представить в виде пары равносильных формул логики высказываний:

Коммутативные законы

$A \vee B \equiv B \vee A \qquad\qquad A \wedge B \equiv B \wedge A$

Ассоциативные законы

$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \qquad\qquad A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

Дистрибутивные законы

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \qquad\qquad A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Законы идемпотентности

$A \vee A \equiv A \qquad\qquad A \wedge A \equiv A$

Законы поглощения

$A \vee (A \wedge B) \equiv A \qquad\qquad A \wedge (A \vee B) \equiv A$

Законы де Моргана

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B} \qquad\qquad \overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$$

Операции с константами

$$A \vee 0 \equiv A \qquad\qquad A \wedge 1 \equiv A$$

$$A \vee 1 \equiv 1 \qquad\qquad A \wedge 0 \equiv 0$$

Любую логическую формулу можно привести к формулам, в которых содержатся лишь операции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. Справедливо следующее утверждение.

Закон двойственности. Если в двух равносильных формулах заменить дизъюнкцию конъюнкцией, единицу нулем и наоборот, то полученные формулы будут также равносильны.

Из законов Моргана вытекает еще одно важное свойство. Оказывается, что операцию дизъюнкция можно выразить через отрицание и конъюнкцию, и наоборот. Действительно, рассмотрим формулу $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$. На основании закона Моргана получим: $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \equiv \overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}}$. А знаки двойного отрицания можно убрать: $\overline{\overline{A}} \equiv A$ и $\overline{\overline{B}} \equiv B$. Следовательно, $A \vee B \equiv \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$.

Аналогично доказывается равносильность $A \wedge B \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$, выражающая конъюнкцию через отрицание и дизъюнкцию.

Таким образом, *для любой логической формулы можно найти равносильную, содержащую только две логические операции: дизъюнкцию и отрицание или конъюнкцию и отрицание.*

20.2.2. Тавтологии

Логические формулы, принимающие значение «истина» при любых значениях входящих в эту формулу логических переменных, называются *тождественно истинными* или *тавтологиями*.

Факт, что высказывание A является тавтологией, обозначается так $\models A$.

Сложное высказывание называется *тождественно ложным*, если оно принимает значение «ложь» при любых значениях входящих в него простых высказываний. Отрицание тождественно истинного высказывания будет тождественно ложным. То есть, если $\models A$, то $\overline{A}$ – тождественно ложно.

Тавтологии имеют большое значение в математической логике, и они также называются законами логики. Существует бесконечно много тождественно истинных формул. Рассмотрим наиболее важные из них, наиболее часто использующиеся в математических доказательствах.

Закон силлогизма

$$\models [(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$$

Закон силлогизма можно «прочесть» так. *Если из высказывания A следует B, а из высказывания B следует C, то можно заключить, что из A следует C.* Этот закон позволяет при доказательствах некоторого утверждения пользоваться цепочками заключений.

Modus ponens (*лат.*)

$$\models \quad [A \wedge (A \to B)] \to B$$

Если A – истинно и из A следует B, то B также будет истинно.

Закон контрапозиции

$$\models \quad (A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$$

Следование из высказывания A высказывания B равносильно тому, что из не B следует не A.

Закон исключения третьего

$$\models \quad A \vee \overline{A}$$

Для любого высказывания A или само высказывание A истинно, или истинно его отрицание $\overline{A}$ (не A). В терминах самого высказывания этот закон можно сформулировать следующим образом: *любое высказывание либо истинно, либо ложно*.

Закон противоречия

$$\models \quad \overline{A \wedge \overline{A}}$$

Закон противоречия отражает следующее утверждение: «*Для любого высказывания A неверно, что одновременно истинны и само высказывание A, и его отрицание $\overline{A}$ (не A)*».

Очевидно, что если $\overline{A \wedge \overline{\overline{A}}} \equiv 1$, то высказывание, стоящее под общим отрицанием, будет всегда ложно $A \wedge \overline{A} \equiv 0$. То есть, *не могут быть одновременно истинны и высказывание А, и его отрицание* $\overline{A}$ *(не А).*

Закон двойного отрицания

$$\models \ \overline{\overline{A}} \leftrightarrow A$$

Отрицание от отрицания любого высказывания эквивалентно (равносильно) самому высказыванию.

Выше приведены лишь некоторые, наиболее часто используемые законы логики. Доказать любой закон достаточно просто. Для этого необходимо построить таблицу истинности приведенного высказывания и убедиться, что при любых исходных данных оно истинно.

20.3. Основные понятия логики предикатов

Понятие предиката обобщает понятие высказывания, а теория предикатов представляет собой более тонкий инструмент, по сравнению с теорией высказываний, для изучения закономерностей процессов умозаключения и логического следования, составляющих предмет математической логики.

20.3.1. Определение предиката

Определение. N-местным предикатом, определенным на множествах M_1, M_2, …, M_n, называется предложение, содержащее n переменных x_1, x_2, …, x_n, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных элементов из множеств M_1, M_2, …, M_n соответственно.

Для n-местного предиката будем использовать обозначение $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называют *предметными*, а элементы множеств M_1, M_2, …, M_n – *конкретными предметами*.

Всякий n-местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ представляет собой функцию n аргументов, заданную на множествах M_1, M_2, …, M_n и принимающую значения двухэлементного множества {0; 1}.

Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на множествах M_1, M_2, …, M_n ,, превращается в конкретное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$, если место предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставить значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно.

Пример. Высказывание «Курсант x учится в учебной группе 6119» является одноместным предикатом, определенным над множеством всех курсантов Краснодарского университета МВД России.

Подставив вместо предметной переменной фамилию «Смирнов», получим истинное высказывание, а если подставить фамилию «Иванов», то высказывание будет ложным.

Пример. Высказывание «$z + 2t = 5$» является двухместным предикатом, определенным на множествах R и R.

Так как множества, на которых задан предикат, совпадают, то говорят, что он задан на множестве R^2.

При подстановке значений $z = 3{,}46$ и $t = 1{,}54$ получим истинное высказывание, а для $z = 12$ и $t = 2/3$ – ложное.

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданный на $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется:

тождественно истинным, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно он превращается в истинное высказывание;

тождественно ложным, если при любой подстановке он превращается в ложное высказывание;

выполнимым (опровержимым), если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов, при подстановке которых предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ превратится в истинное (ложное) высказывание.

Пример. Предикат $e^{t-s} > 0$ является тождественно истинным.

Пример. Предикат $\sin(2^x + 3y - z) + \cos(x - y^3 + \pi) + 3 = 0$ является тождественно ложным.

Пример. Предикат $2x_1 + 6x_2 - x_3 = 5$ является выполнимым, так как при подстановке набора $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -1$ предикат превратится в истинное высказывание.

20.3.2. Множество истинности предиката

Множеством истинности предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданного на множествах M_1, M_2, …, M_n, называется совокупность всех упорядоченных наборов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, …, $a_n \in M_n$, таких что данный предикат обращается в истинное высказывание при подстановке $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, …, $x_n = a_n$.

Это множество будем обозначать P^+.

Пример. Множеством истинности предиката $x^2 + 2x - 3 < 0$ является множество $P^+ = (-3; 1)$.

Пример. Множество истинности двухместного предиката $x^2 + y^2 = 9$, заданного на множестве R^2, есть множество всех таких пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, образующими окружность с центром в начале координат и радиуса 3.

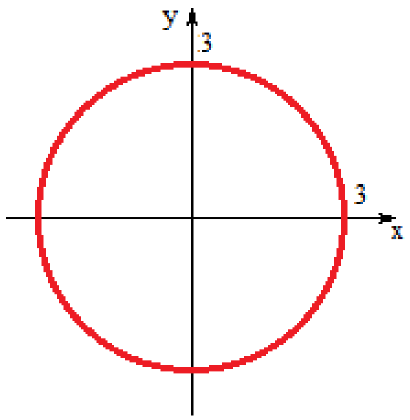


Рис.20.1. Множество истинности двухместного предиката $x^2 + y^2 = 9$.

20.3.3. Равносильность предикатов

Два n-местных предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданных на множествах M_1, M_2, …, M_n, называются равносильными, если набор предметов $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, …, $a_n \in M_n$, превращает первый предикат в истинное высказывание в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание.

$$P \Leftrightarrow Q$$

Предикаты $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают: $P^+ = Q^+$.

Переход от предиката P_1 к равносильному предикату P_2 называется равносильным преобразованием предиката P_1.

Пример. Найти множество истинности предиката: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$.

С помощью элементарных преобразований (прямой и обратный ход метода Гаусса) получим решение.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

Таким образом, запишем ответ: $P^+ = \{(2, 1)\}$.

Теорема. Каждые *два тождественно истинных* (тождественно ложных) *предиката*, заданных на одних и тех же множествах, *равносильны*.

Верно и обратное утверждение. Всякий *предикат, равносильный тождественно истинному* (тождественно ложному) предикату, сам *является тождественно истинным* (тождественно ложным) предикатом.

20.3.4. Следование предикатов

Предикат $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называется *следствием* предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданного на тех же множествах, если он превращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений предметных переменных что и P.

$$P \Rightarrow Q$$

Предикат $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является следствием предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $P^+ \subseteq Q^+$.

Пример. Одноместный предикат, определенный на множестве Z целых чисел «N делится на 3» является следствием одноместного предиката, «N делится на 12», определенного на том же множестве.

Теорема. Каждый *тождественно истинный* n-местный предикат является *следствием любого другого* n-местного предиката, определенного на тех же множествах.

Каждый n-местный *предикат* является следствием любого *тождественно ложного* n-местного предиката, определенного на тех же множествах.

Теорема. Пусть $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ - два предиката, такие что Q является следствием P. Тогда

– если P - тождественно истинный (выполнимый), то и Q - тождественно истинный (выполнимый);

– если Q - тождественно ложный (опровержимый), то и P - тождественно ложный (опровержимый).

20.3.5. Операции над предикатами

Над предикатами определены следующие логические операции: *отрицание*, *дизъюнкция*, *конъюнкция*, *импликация* и *эквивалентность*.

Отрицанием предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного на $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется новый n-местный предикат $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенный на тех же множествах, который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых исходное высказывание превращается в ложное высказывание.

Пример. Отрицанием одноместного предиката «$x > 5$», определенного на множестве R, является предикат «$x \leq 5$», заданного на том же множестве.

Теорема. Для n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного на $M_1, M_2, \ldots, M_n$, множество истинности его отрицания совпадает с дополнением множества истинности данного предиката.

Пример. Множество истинности отрицания одноместного предиката «$x > 5$», определенного на множестве R, является R / $(5; +\infty) = [- \infty; 5]$.

Конъюнкцией n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного на $M_1, M_2, \ldots, M_n$ и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, ..., y_n)$, заданного на $N_1, N_2, \ldots, N_m$ называется новый $(n+m)$-местный предикат $P \wedge Q$, который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых оба исходных предиката превращаются в истинные высказывания.

Пример. Конъюнкцией двух предикатов «$x < 5$» и «$x > -5$», определенных на $\boldsymbol{R}$, является одноместный предикат «$(x < 5) \wedge (x > -5)$», определенный на том же множестве, записываемый в виде:

$$«(-5 < x < 5)» \text{ или } «|x| < 5».$$

Пример. Конъюнкцией предикатов «$|x| < 5$» и «$|y| < 3$», определенных на $\boldsymbol{R}$, является двухместный предикат «$(|x| < 5) \wedge (|y| < 3)$», заданный на множестве $\boldsymbol{R}^2$, множество истинности которого можно записать в виде прямого произведения:

$$(-5; 5) \times (-3; 3).$$

Теорема. Для n-местных предикатов $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, множество истинности конъюнкции $P \wedge Q$ совпадает с пересечением множеств истинности исходных предикатов:

$$(P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+.$$

Пример. Множество истинности конъюнкции предикатов

$$«x^2 + 2x - 3 \geq 0» \wedge «|x| < 5»,$$

определенных на R, является пересечение множеств

$$(-\infty; -3] \cup [1; +\infty) \text{ и } (-5; 5),$$

что можно записать в виде

$$(-5; -3] \cup [1; 5).$$

Пример. Множество истинности конъюнкции двухместных предикатов

$$«(x - 1)^2 + y^2 \leq 9)» \wedge «x^2 + (y + 2)^2 \leq 9»,$$

определенных на R^2, можно изобразить как пересечение двух кругов (рис. 20.2).

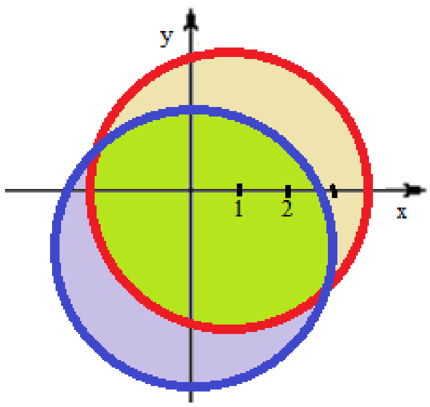


Рис. 20.2. Множество истинности конъюнкции предикатов.

Дизъюнкцией n-местного предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданного на $M_1, M_2, \dots, M_n$ и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$, заданного на $N_1, N_2, \dots, N_m$ называется новый $(n+m)$-местный предикат $P \vee Q$, который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых в истинное высказывание превращается по меньшей мере один из исходных предикатов.

Пример. Дизъюнкцией двух предикатов «x - четное число» и «x – простое число», определенных на множестве натуральных чисел N, является одноместный предикат, определенный на N, «x - четное или простое число».

Пример. Дизъюнкцией двух предикатов «$x > 5$» и «$x > -5$», определенных на R, является одноместный предикат «$(x > 5) \vee (x < -5)$», определенный на том же множестве, записываемый в виде: «$|x| > 5$».

Теорема. Для n-местных предикатов $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, множество истинности дизъюнкции $P \vee Q$ совпадает с объединением множеств истинности исходных предикатов:

$$(P \vee Q)^+ = P^+ \cup Q^+.$$

Пример. Множество истинности дизъюнкции предикатов

$$«x^2 + 2x - 3 \geq 0» \vee «|x| < 5»,$$

определенных на R, является объединение множеств

$$(-\infty; -3] \cup [1; +\infty) \text{ и } (-5; 5),$$

что можно записать в виде $(-\infty; +\infty)$.

Пример. Множество истинности дизъюнкции двухместных предикатов

$$«(x - 1)^2 + y^2 \leq 9)» \vee «x^2 + (y + 2)^2 \leq 9»,$$

определенных на R^2, можно изобразить как объединение двух кругов (рис. 20.3).

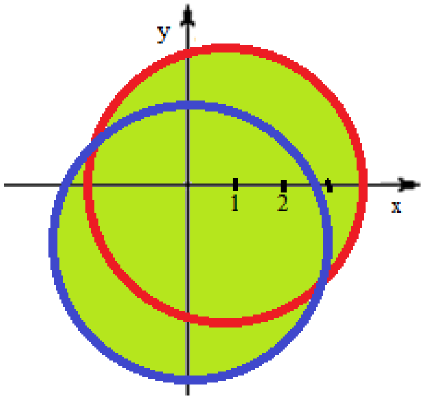


Рис. 20.3. Множество истинности дизъюнкции предикатов.

Импликация предикатов $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, определяется как такой предикат, что для любых предметов

$$a_1 \in M_1,\ a_2 \in M_2,\ \ldots,\ a_n \in M_n \text{ и } b_1 \in N_1,\ b_2 \in N_2,\ \ldots,\ b_m \in N_m$$

высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to Q(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ является импликацией высказываний $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $Q(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Аналогично определяется *эквивалентность* двух предикатов.

Пример. Для предикатов $P(x)$: «x кратно 6» и $Q(x)$: «*x – четное число*» импликацией $P(x) \to Q(x)$ является предикат:

«x кратно 6» → «*x – четное число*»,

а эквивалентностью $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ является предикат:

«x кратно 6» ↔ «*x – четное число*».

20.4. Кванторные операции над предикатами

Специфика природы предикатов позволяет ввести такие операции над ними, которые не имеют аналогов в логике высказываний.

20.4.1. Квантор общности

Операцией *связывания квантором общности* называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое $(\forall x)(P(x))$, которое истинно в том и только в том случае, когда предикат $P(x)$ тождественно истинен, и ложно в противном случае.

Высказывание $(\forall x)(P(x))$, называют *универсальным высказыванием* для предиката $P(x)$.

Символ $\forall\, x$ называют квантором общности по переменной x. Символ $\forall\, x$ был введен в 1879 Готлобом Фреге.

Пример. Предикат «$x^2 + 2 \geq 0$», определенный на R, является тождественно истинным и применение к нему операции связывания квантором общности дает истинное высказывание: $(\forall x)(x^2 + 2 \geq 0)$.

Пример. Предикат «$x^2 - 4 \geq 0$», определенный на R, является опровержимым, поэтому применение к нему операции связывания квантором общности дает ложное высказывание: $(\forall x)(x^2 - 4 \geq 0)$.

Операцией *связывания квантором общности по переменной* x_1 называется правило, по которому каждому n-местному предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенному на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, ставится в соответствие новый $(n-1)$-местный предикат $(\forall x_1)((P(x, x_2, \ldots, x_n))$, который для любых предметов $a_2 \in M_2, \ldots, a_n \in M_n$ превращается в высказывание $(\forall x_1)(P(x, a_2, \ldots, a_n))$, истинное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x, a_2, \ldots, a_n)$, определенный на множестве M_1 тождественно истинен, и ложное в противном случае.

Пример. Предикат «$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$», определенный на R^2, является тождественно истинным, и применение к нему квантора общности по любой переменной, например, по y, дает одноместный предикат по x, который будет тождественно истинным, значит высказывание

$$(\forall y)((x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2)$$

является истинным.

Пример. Если к предикату «$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$», определенному на R^2, применить квантор общности по переменной x, то получим двухместный предикат по y и z, который будет опровержимым, а значит высказывание

$$(\forall x)(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1)$$

является ложным.

20.4.2. Квантор существования

Операцией *связывания квантором существования* называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое $(\exists x)(P(x))$, которое ложно в том и только в том случае, когда $P(x)$ тождественно ложен, и истинно в противном случае.

Высказывание $(\exists x)(P(x))$, называют *экзистенциальным высказыванием* для предиката $P(x)$.

Символ $\forall x$ называют квантором существования по переменной x.

Пример. Предикат «$x = x + 1$», определенный на R, является тождественно ложным и применение к нему операции связывания квантором существования дает ложное высказывание $(\exists x)(x = x + 1)$.

Пример. Предикат «$x \mid 6$», определенный на R, является выполнимым, поэтому применение к нему операции связывания квантором существования дает истинное высказывание $(\exists x)(x \mid 6)$.

Операцией *связывания квантором существования по переменной* x_1 называется правило, по которому каждому n-местному предикату $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенному на множествах M_1, M_2, …, M_n, ставится в соответствие новый $(n - 1)$-местный предикат $(\exists x)(P(x, x_2, ..., x_n))$, который для любых предметов $a_2 \in M_2$, …, $a_n \in M_n$ превращается в высказывание $(\exists x_1)(P(x, a_2, ..., a_n))$, ложное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x, a_2, ..., a_n)$, определенный на множестве M_1 тождественно ложен, и истинное в противном случае.

Пример. Предикат «$(x + y)^2 = -1$», определенный на R^2, является тождественно ложным, и применение к нему квантора общности по любой переменной, например по y, дает одноместный предикат по x, который будет тождественно ложным, значит высказывание

$$(\exists y)((x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2)$$

является ложным.

Пример. Если к предикату «$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$», определенному на R^2, применить квантор общности по переменной x, то получим двухместный предикат по y и z, который будет выполнимым, значит высказывание:

$$(\exists x)(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1)$$

является истинным.

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает раздел математической логики «Логика высказываний»?
2. Перечислите основные операции логики высказываний.
3. Как формируются таблицы истинности сложных логических выражений?
4. Укажите порядок выполнения логических операций.
5. Как определить равносильность двух логических формул?
6. Перечислите основные законы логики высказываний.
7. Что определяет понятие «тавтология». Какие основные тавтологии логики высказываний вызнаете?
8. Дайте определение предиката. Каким образом предикаты можно классифицировать?
9. Как определить множество истинности предиката?
10. Какие предикаты считаются равносильными?
11. Дайте определение следованию предикатов. Какие логические операции над предикатами вы знаете?
12. Каким образом осуществляется использование квантора общности и квантора существования в алгебре предикатов?

Глава 21. Булева алгебра

Одним из разделов математики, описывающий операции над конечными множествами является *булева алгебра*. В своей работе «Исследование законов мышления» (1854) ирландский математик Джордж Буль (1815– 1864) ввел основные понятия этого раздела. Булевские понятия логики основаны на математической формализации логических построений посредством специальных алгебраических методов. В честь Дж. Буля данный раздел математики назвали *булевой алгеброй*. Большой вклад в булеву алгебру внес известный шотландский ученый А. де Морган (1806–1871).

Развитию булевой алгебры способствовали исследования немецкого математика Э. Шрёдера (1841–1902), разработавшего в 1877 г. полную систему аксиом булевой алгебры. Труды А. Уайтхеда (1861–1947) продолжили исследования систем булевых аксиом и теорем и полностью абстрагировали понятия булевой алгебры от представлений классической логики высказываний. Алгебра предикатов

В XX веке булева алгебра применялась не только в математической логике, но и дала основу для создания новых разделов дискретной математики. Такие выдающиеся ученые, как Дж. Би́ркхоф (1884–1944), О. Оре (1899–1968), Б. Ван дер Ва́рден (1903–1996), использовали ее методы в функциональном анализе, геометрии, для изучения различных алгебраических структур.

Широкое практическое значение булева алгебра приобрела в связи с бурным развитием электроники и вычислительной техники. В работах Р. Хартли (1888–1970), К. Шеннона (1916–2001), А Реньи (1921–1970) аппарат булевой алгебры способствовал созданию новых научных направлений: теории информации, теории автоматов, теории вероятностных схем, теории систем управления. В настоящее время вся современная цифровая техника, любые компьютерные системы основаны на использовании математического аппарата алгебры Буля.

21.1. Основные понятия булевой алгебры

21.1.1. Основные определения

Определение. Булевой алгеброй называется непустое множество элементов, принимающих значения 1 и 0, и на котором определены три операции: дизъюнкция, конъюнкция и инверсия.

Дизъюнкция или логическое сложение – это бинарная операция, она обычно обозначатся знаком сложения «+» или «∨», которые ставятся между двумя складываемыми элементами. Дизъюнкцию можно определить следующим образом.

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкция или логическое умножение также является бинарной операцией, обозначается знаком умножения «·» либо «∧» между двумя умножаемыми элементами, но чаще никакой знак вообще не ставится. Конъюнкцию можно описать таблицей.

A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Инверсия или логическое отрицание является унарной операцией. Она обозначается надчеркиванием над инвертированным выражением или знаком «¬» перед ним. При использовании инверсии единичное значение становится нулем, и наоборот ноль превращается в единицу.

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Приведенные таблицы принято называть *таблицами истинности*.

В булевой алгебре часто встречаются записи, содержащие переменные величины. Такие выражения называют *булевыми формулами*. В формулы могут входить одновременно две и более операций. В булевой алгебре определен следующий приоритет выполнения заданных операций: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция. Скобки в булевых выражениях имеют тот же смысл, что и в алгебре чисел.

Пример. Вычислить значение выражения $\overline{1(0+\overline{0}\cdot 1)}$.

Сначала рассмотрим действия в скобках $(0+\overline{0}\cdot 1)$. Конъюнкция является более приоритетной, чем дизъюнкция, поэтому выполним $\overline{0}\cdot 1$. Учитывая, что $\overline{0}=1$, получим $\overline{0}\cdot 1=1\cdot 1=1$. Затем сложим логические значение 0 и получившуюся единицу: $0+1=1$. Следующим действием является конъюнкция единицы и значения выражения в скобках: $1\cdot 1=1$. И, наконец, инвертируя единицу, получим 0. Таким образом, значение выражения $\overline{1(0+\overline{0}1)}$ равно 0.

21.1.2. Свойства булевых операций

Булевы операции обладают следующими свойствами.

1. Коммутативность

$$A+B=B+A \qquad\qquad AB=BA$$

2. Ассоциативность

$$A+(B+C)=(A+B)+C \qquad\qquad A(BC)=(AB)C$$

3. Дистрибутивность

$$A(B+C)=AC+BC \qquad\qquad A(B+C)=AC+BC$$

Кроме того, для булевых операций справедливы следующие утверждения.

1. Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}}=A$$

2. Идемпотентный закон

$$A+A=A \qquad\qquad AA=A$$

3. Граничный закон

$$A+0=A \qquad\qquad A\cdot 0=0$$

$$A+1=1 \qquad\qquad A\cdot 1=A$$

4. Закон склеивания

$$A+\overline{A}=1 \qquad\qquad A\overline{A}=0$$

5. Закон поглощения

$$A+AB=A \qquad\qquad A(A+B)=A$$

6. Закон де Моргана

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B} \qquad\qquad \overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$$

Некоторые из вышеприведенных свойств и законов булевой алгебры неочевидны. Однако любое из записанных утверждений легко доказать, используя тот факт, что любая булева переменная может принимать только одно из двух значений: 0 или 1. Следовательно, подставляя все возможные комбинации значений переменных, входящих в формулу, можно проверить любое из равенств.

Пример. Доказать истинность закона де Моргана.

Докажем сперва первую часть закона де Моргана $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$. Найдем значения выражения $\overline{AB}$, стоящего в левой части равенства, подставляя в него все комбинации значений A и B.

A	B	$\overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Теперь рассчитаем значения $\overline{A}+\overline{B}$.

A	B	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

В результате мы видим, что для соответствующих пар значений A и B результаты формул $\overline{AB}$ и $\overline{A}+\overline{B}$ равны. Таким образом, эти формулы являются эквивалентными.

Аналогично построим таблицы истинности для формул второй части закона де Моргана $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Результаты расчетов в левой и правой частях равенства при соответствующих значениях переменных также идентичны, следовательно, закон де Моргана выполняется.

21.1.3. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы записи

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется запись, в которой булева формула представлена в виде дизъюнкции выражений, каждое из которых представляет либо отдельную переменную, либо конъюнкцию нескольких различных переменных в прямой или инверсной форме.

Аналогично, *конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* будем называть такую запись, в которой булева формула представлена в виде конъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельную переменную либо дизъюнкцию нескольких различных переменных в прямой или инверсной форме.

Записи в виде одной переменной в прямой или инверсной форме принято считать записанными в ДНФ и КНФ одновременно.

Пример. Определить формы записи представленных формул:

а) $\overline{AB}+\overline{A}C+B$ в) $A+\overline{B}+\overline{C}+D$ д) $(A+\overline{A})(\overline{B}+\overline{C})$

б) $\overline{A}(C+AB)$ г) $(A+B)(A+B+C)$ е) $\overline{D}$

Решение. Выражение а) $\overline{AB}+\overline{A}C+B$ записано в виде дизъюнкции конъюнкций $\overline{AB}$, $\overline{A}C$ и отдельной переменной B, следовательно, оно представлено в ДНФ. Запись б) $\overline{A}(C+AB)$ представляет собой конъюнкцию отдельной переменной в инверсной форме $\overline{A}$ и выражения $C+AB$, которое не является чистой дизъюнкцией, так как содержит произведение AB. Данная запись не подходит ни под одно из определений. Формула в) $A+\overline{B}+\overline{C}+D$ выведена в виде дизъюнкции отдельных переменных A, $\overline{B}$, $\overline{C}$ и D, поэтому ее можно считать представленной в ДНФ. В примере г) $(A+B)(A+B+C)$ конъюнкция дизъюнкций $A+B$ и $A+B+C$ очевидно записана в КНФ. Запись д) $(A+\overline{A})(\overline{B}+\overline{C})$ не подходит под определение КНФ, так как множитель $A+\overline{A}$ содержит два раза одну и ту же переменную в прямой и инверсной форме. И, наконец, выражение е) $\overline{D}$ можно считать записанным и в ДНФ и в КНФ.

21.2. Булевы функции

Изучая разделы математического анализа, мы часто сталкивались с понятием функции. Функцию мы всегда рассматривали как некоторую зависимость между элементами различных множеств. Причем, функция всегда представляла собой математическое правило, выраженное в виде аналитической формулы, таблицы или графика, по которому некоторое численное значение рассчитывалось в соответствие со значениями одного или нескольких независимых переменных.

21.2.1. Определение булевой функции

В булевой алгебре также существует понятие функции. *Булевой функцией* можно назвать однозначное соответствие между значениями одного или нескольких булевых переменных, принимающих логические значения 0 или 1, называемых *аргументами булевой функции*, и результирующим значением булева множества. Значение булевой функции полностью определяется значениями ее аргументов и логическими связями.

Для задания булевой функции можно воспользоваться любой булевой формулой. Например, в записи

$$f=\overline{\overline{C}(B+A\overline{C}\overline{D})}$$

булева функция *f* зависит от значений *A*, *B*, *C* и *D*. Она, как и независимые аргументы в правой части выражения, является двоичной переменной.

Число независимых аргументов в булевой функции называют *арностью* или *местностью* функции. Если арность булевой функции равна нулю, то булева функция превращается в *булеву константу*. В приведенном выше примере арность функции равна четырем.

Пусть всем аргументам булевой функции присвоены определенные значения. Совокупность таких значений называют *набором значений аргументов*, или просто набором. Любой набор значений булевой функции представляет собой последовательность, состоящую из цифр 0 и 1, в которой первая цифра определяет значение первого аргумента, вторая цифра второго аргумента, третья – третьего аргумента и т.д.

Например, запись 0110 означает, что первый аргумент 4-арной булевой функции принимает значение 0, второй аргумент – значение 1, третий – 1, четвертый – 0.

Теперь осталось определить, какой из аргументов булевой функции является первым, какой – вторым, какой – третьим. а какой – четвертым? Для определенности номера всех аргументов принято располагать в алфавитном порядке их идентификаторов.

Например, для булевой функции

$$f = (P + \overline{C})(\overline{DB} - A)$$

под номером один понимают аргумент A, вторым является аргумент B, третьим будет C, четвертым D, а пятым Р.

При использовании набора 10001 значение данной функции равно:

$$f(10001) = (1 + \overline{0})(\overline{00} + 1) = 1.$$

Для булевой функции одной переменной наборы представлены значениями 1 и 0. Для функции двух аргументов получим следующие наборы значений аргументов: 00, 01, 10, 11, следовательно, количество наборов равно четырем. Для функции трех переменных число наборов увеличивается еще в два раза: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, то их станет восемь. Таким образом, каждый раз увеличивая количество объясняющих переменных на единицу, получаем, что общее число наборов значений аргументов булевой функции n аргументов равно 2^n.

21.2.2. Способы задания булевых функций

Как и обычную функцию нескольких действительных переменных булеву функцию можно задавать различными способами. Самыми популярными из них являются аналитический и табличный.

Аналитический способ представлен в виде математического выражения с использованием идентификаторов переменных и логических операций. Аналитический способ достаточно компактен, однако трудоемок. Для вычисления сложных функций часто необходимо разбивать вычисления на отдельные действия, учитывающие приоритет булевых операций и скобки.

Пример. Рассчитать значение функции четырех переменных $f=\overline{(\overline{B+\overline{AC}})(\overline{AD}+\overline{A}B\overline{C}D)}$ для набора 1010.

1. Подставим набор значений 1010 в выражение для функции *f*:

$$f(1010)=\overline{(\overline{0+\overline{11}})(\overline{10}+\overline{1}\,0\,\overline{1}\,0)}.$$

2. Выполним вычисления в первой скобке:

$$\overline{0+\overline{11}}=\overline{0+\overline{1}}=\overline{0+0}=\overline{0}=1.$$

3. Выполним действия во второй скобке:

$$\overline{10}+\overline{1}\,0\,\overline{1}\,0=\overline{0}+0000=1+0=1.$$

4. Перемножим значения, полученные в первом и во втором действиях, и инвертируем полученное значение:

$$f(1010)=\overline{11}=\overline{1}=0.$$

Таким образом, значение функции для набора 1010 равно 1.

Табличный способ задания функции представляет совокупность всех наборов значений аргументов булевой функции и соответствующих значений функции для каждого набора. Этот способ может быть представлен в виде таблицы истинности.

Пример. Составим таблицу истинности для функции $f = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B} + \overline{A}C$

.

Решение. Для построения таблицы истинности необходимо рассчитать значения функции *f* для всех 2^3 наборов значений аргументов булевой функции.

1. $f(000) = \overline{0}0\overline{0} + 0\overline{0} + \overline{0}0 = 0 + 0 + 0 = 0;$ 2. $f(001) = \overline{0}0\overline{1} + 0\overline{0} + \overline{0}1 = 0 + 0 + 1 = 1;$

3. $f(010) = \overline{0}1\overline{0} + 0\overline{1} + \overline{0}0 = 1 + 0 + 0 = 1;$ 4. $f(011) = \overline{0}1\overline{1} + 0\overline{1} + \overline{0}1 = 0 + 0 + 1 = 1;$

5. $f(100) = \overline{1}0\overline{0} + 1\overline{0} + \overline{1}0 = 0 + 1 + 0 = 1;.$ 6. $f(101) = \overline{1}0\overline{1} + 1\overline{0} + \overline{1}1 = 0 + 1 + 1 = 1;$

7. $f(110) = \overline{1}1\overline{0} + 1\overline{1} + \overline{1}0 = 1 + 0 + 0 = 1;$ 8. $f(111) = \overline{1}1\overline{1} + 1\overline{1} + \overline{1}1 = 0 + 0 + 0 = 0.$

Затем полученные значения запишем в таблицу истинности.

№ набора	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

21.3. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

21.3.1. Минтермы

Минтермом n аргументов булевой функции называется такая конъюнкция этих аргументов, в которую каждый аргумент входит один и только один раз в прямой или инверсной форме. Все аргументы располагаются в минтерме в алфавитном порядке.

Примеры минтермов.

Минтермы двух аргументов: $A\overline{B}, AB, \overline{A}\overline{B}$.

Минтермы трех аргументов: $\overline{A}B\overline{C}, A\overline{B}C, \overline{A}BC$.

Минтермы четырех аргументов: $ABCD, \overline{A}\overline{B}CD, \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$.

Каждый минтерм *n* аргументов имеет свой уникальный номер, по которому его можно точно идентифицировать. Номер минтерма можно получить, записав вместо каждого из аргументов, входящих в минтерм, единицу, если аргумент записан в прямой форме, или ноль, если наблюдается инверсия. Таким образом, получим двоичный код минтерма.

Пример. Найти номер минтерма четырех аргументов $\overline{A}\overline{B}CD$.

Решение. Выпишем булевы аргументы в виде двоичного кода. Для этого инверсии $\overline{A}$ и $\overline{B}$ представим нулями, а прямое вхождение в минтерм переменных C и D запишем как последовательность единиц. В результате номер минтерма $\overline{A}\overline{B}CD$ будет равен 0011 в двоичной системе исчисления.

Номер минтерма обладает очень важной особенностью. Он является единственным набором значений аргументов, на котором минтерм принимает единичное значение. Действительно, подставляя как набор значений двоичный код номера минтерма, мы в любом случае получаем конъюнкцию n единиц, что в результате всегда дает нам единицу. При подстановке в минтерм любого другого набора конъюнкция будет содержать хотя бы один ноль, что приведет к нулевому значению минтерма.

Минтермы обозначаются строчной буквой m с нижним индексом, который является номером минтерма, записанным в десятичной системе исчисления.

Пример. Записать в виде m_i минтерм $A\overline{B}C\overline{D}\overline{E}$.

Решение. Двоичным кодом минтерма является набор *10100*. Переведем в десятичную систему это число.

$$10100_{(2)} = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 16 + 4 = 20.$$

Тогда минтерм $A\overline{B}C\overline{D}\overline{E}$ можно записать в виде m_{20}.

Пример. Выписать все минтермы функции f от аргументов A, B, C.

Решение. Рассмотрим все возможные минтермы в порядке возрастания номеров. Количество таких наборов, очевидно, равно количеству различных наборов аргументов, то есть $2^3=8$.

$m_0= \overline{A}\overline{B}\overline{C}$, $m_1= \overline{A}\overline{B}C$, $m_2= \overline{A}B\overline{C}$, $m_3= \overline{A}BC$,

$m_4= A\overline{B}\overline{C}$, $m_5= A\overline{B}C$, $m_6= AB\overline{C}$, $m_7= ABC$.

Теорема 2.1. Конъюнкция двух и более различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, тождественно равна нулю.

Действительно, при использовании любого набора только одно из значений минтермов, двоичный номер которого совпадает с выбранным набором, будет равно единице, следовательно, все остальные минтермы будут равны нулю. Значит, конъюнкция различных минтермов также будет равна нулю.

Пример. Вычислим конъюнкцию минтермов функции четырех аргументов m_5, m_{24}, m_{14}.

Согласно теореме о конъюнкции минтермов различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, тождественно равна нулю. На самом деле, минтерм $m_5 = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}E$ принимает значение 1 только на наборе 00101, минтерм $m_{24} = AB\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$ не равен нулю на всех наборах, кроме 11000, а минтерм $m_{14} = \overline{A}BCD\overline{E}$ равен нулю всегда, кроме набора 01110. Следовательно, конъюнкция этих минтермов всегда равна нулю.

21.3.2. Определение СДНФ

Представление булевой функции в виде дизъюнкции минтермов n аргументов называется записью в *совершенной дизъюнктивной нормальной форме*, или сокращённо – СДНФ. Всякая булева функция заданного числа аргументов представима в совершенной дизъюнктивной нормальной форме, единственным образом.

Пример. Представить булеву функцию f, которая принимает единичное значение на наборах 0010, 0101, 1001, 1111 в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

Для представления функции в СДНФ выпишем сумму минтермов, соответствующих наборам 0010, 0101, 1001, 1111. Аналитическое представление функции f в СДНФ примет вид:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D + ABCD\,.$$

Для представления функции в СДНФ можно использовать и обозначения минтермов. Для этого переведем двоичные коды в десятичную систему.

$$f = m_2 + m_5 + m_9 + m_{15}.$$

Кроме того, для представления функции в СДНФ достаточно указать только номера наборов, на которых функция равна единице:

$$f = (2, 5, 9, 15).$$

Так как любую булеву функцию можно представить в виде дизъюнкции 2^n минтермов, то число различных булевых функций *n* аргументов будет равно 2^{2^n}.

Согласно данному утверждению число булевых функций двух аргументов равно $2^{2^2} = 16$, четырех переменных равно $2^{2^4} = 65536$, и, например, число функций шести переменных – $2^{2^6} = 18446744073709600000$. Видно, как велико разнообразие булевых функций.

21.3.3. Разложение булевых функций

*Всякую б*улеву функцию можно разложить по любому из аргументов. Разложение выполняется следующим образом:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots A_n) = A_i f(A_1, A_2, \ldots, 1, \ldots A_n) + \overline{A_i} f(A_1, A_2, \ldots, 0, \ldots A_n)$$

Пример. Разложим функцию трех аргументов $f = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B} + \overline{A}C$ по аргументу *B*.

Используя формулу разложения, получим:

$$\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B} + \overline{A}C = B(\overline{A}1\overline{C} + A\overline{1} + \overline{A}C) + \overline{B}(\overline{A}0\overline{C} + A\overline{0} + \overline{A}C).$$

Преобразуем выражения в скобках, а затем скобки раскроем:

$$B(\overline{A}\overline{C} + \overline{A}C) + \overline{B}(A + \overline{A}C) = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B} + \overline{A}\overline{B}C.$$

Если разлагать булеву функцию в любом порядке последовательно по всем ее аргументам, то окончательно, после *n*-ного шага, получим эту функцию в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

Пример. Представить булеву функцию трех аргументов $f = \overline{A} + B\overline{C}$ в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

Разложим функцию $f = \overline{A} + B\overline{C}$ последовательно по аргументам *A, B,* а затем по *C*.

Сначала выполняем действия с аргументом *A*.

$$\overline{A} + B\overline{C} = A(\overline{1} + B\overline{C}) + \overline{A}(\overline{0} + B\overline{C}) = AB\overline{C} + \overline{A}.$$

Аналогичные действия предпринимаем по аргументу *B*.

$$AB\overline{C} + \overline{A} = B(A1\overline{C} + \overline{A}) + \overline{B}(A0\overline{C} + \overline{A}) = AB\overline{C} + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B}.$$

На третьем шаге разложим функцию по *C*.

$$AB\overline{C} + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} = C(AB\overline{1} + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B}) + \overline{C}(AB\overline{0} + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B}) =$$
$$= \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}.$$

Перепишем полученное выражение функции *f* в порядке возрастания номеров минтермов:

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C}.$$

Запишем полученную СДНФ с помощью специальных обозначений, учитывая двоичные коды 000, 001, 010, 011, 110, соответствующие минтермам:

$$f = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_6.$$

И, наконец, выведем функцию в самом простом виде:

$$f = (0, 1, 2, 3, 6).$$

21.4. Карты Вейча

Приведенные примеры прошлой лекции показывают, как с помощью разложения можно привести булевы функции к СДНФ. Однако очевидно, что с увеличением количества аргументов резко возрастает количество логических операций и расчеты становятся все более трудоемкими.

21.4.1. Определение карт Вейча

Для упрощения вычислительного процесса используются специальные табличные методы преобразования булевых функций. К ним относятся карты

Вейча. Карты позволяют легко осуществлять различные преобразования булевых функций с небольшим числом аргументов.

Рассмотрим карту Вейча для булевой функции двух аргументов (рис.2.1.а).

а) б)

Рис. 2.1. Карта Вейча двух аргументов

Карта разделена на четыре части. В левой половине карты располагаются минтермы, содержащие A, а в правой – инверсию $\overline{A}$. В верхней половине находятся минтермы, содержащие B, а в нижней $\overline{B}$. На рисунке 2.1.б предложена карта Вейча, содержащая десятичные номера минтермов.

На карте Вейча для функции трёх аргументов (рис. 2.2 а, б) аналогично расположены минтермы или их номера. Интересно, как трехмерное изображение представлено в обычной таблице.

а) б)

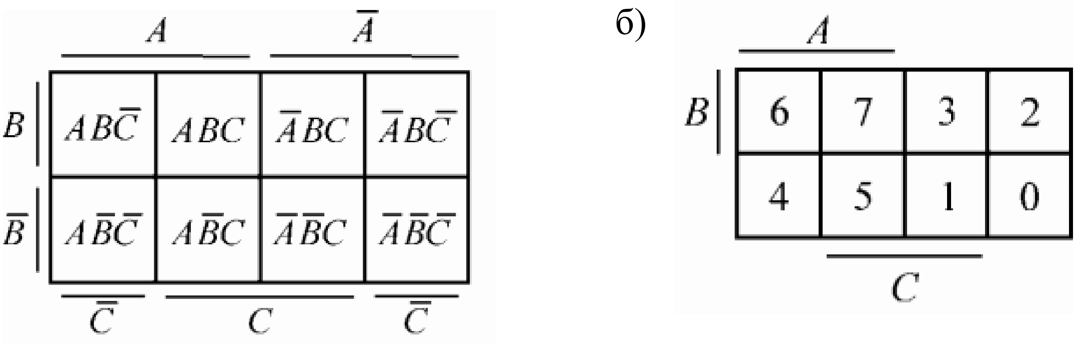
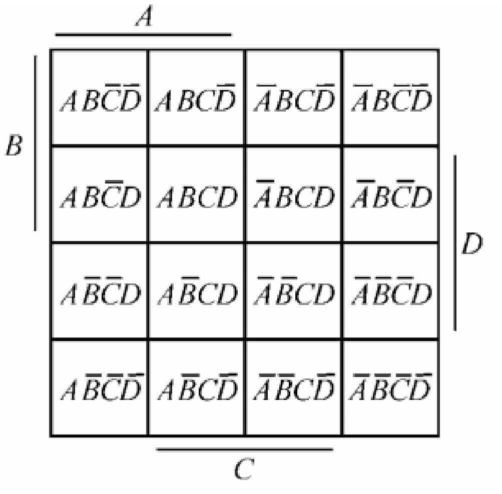


Рис. 2.2. Карта Вейча трех аргументов

Еще сложнее выглядит карта Вейча четырёх аргументов. На рис 2.3 а, б изображена карта с аналитическим представлением минтермов и их десятичных номеров.

а) 

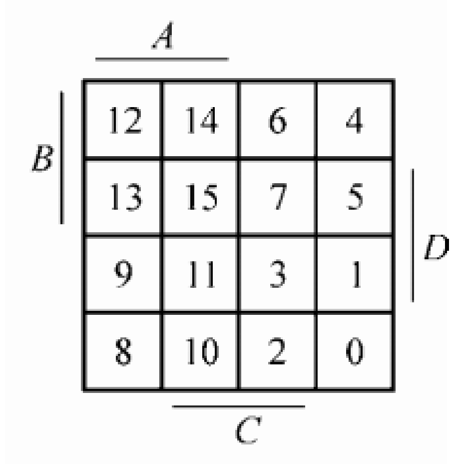
б) 

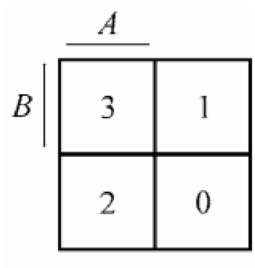
Рис. 2.3. Карта Вейча четырех аргументов

21.4.2. Нанесение минтермов на карты Вейча

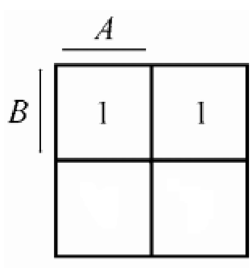
Для нанесения булевых функций, представленных в совершенной дизъюнктивной нормальной форме достаточно в клетки, соответствующие номерам минтермов, записать единицы.

Пример. Нанести на карту Вейча функцию $f = \overline{A}B + AB$

Возьмем карту Вейча двух аргументов с десятичными кодами.



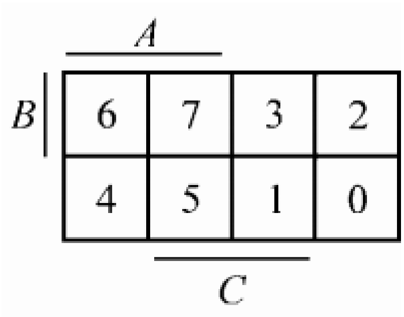
Для нанесения на карту запишем функцию через номера ее минтермов: $f = (1,3)$. Затем ячейки карты Вейча, номера которых соответствуют номерам минтермов функции, заполним единицами.



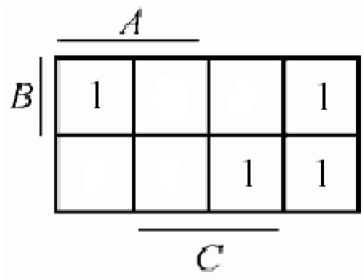
Таким образом, получим карту Вейча с нанесенной на нее функцией $f = \overline{A}B + AB$.

Пример. Нанести на карту функцию $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C}$.

Для решения данной задачи потребуется карта Вейча трех переменных:



Данную функцию можно записать в виде: $f = (0, 1, 2, 6)$. Следовательно, записав единицы, в ячейки, соответствующие номерам 0, 1, 2, 6, получим:



.

21.4.3. Нанесение на карты Вейча булевых функций

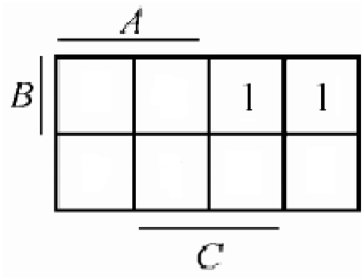
Если булева функция не записана в СДНФ, то процесс ее нанесения на карту Вейча несколько отличается.

Представим, что функция представлена в виде конъюнкции двух или нескольких аргументов, в которую аргументы функции могут входить в прямой или инверсной форме либо вообще не входить. Тогда нанесение такой функции на карту сводится к проставлению единиц в ячейках, лежащих на пересечении строк и столбцов с соответствующими условиями по каждой переменной, входящей в конъюнкцию.

Пример. Нанести на карту Вейча трех аргументов функцию $f = \overline{A}B$.

При нанесении функции следует учесть, что первый аргумент A входит в конъюнкцию в инверсной форме, следовательно, нас интересуют только третий и четвертый столбцы. Вторая переменная B записана в прямой форме и тогда нас удовлетворяет только первая строка. Ограничений же по аргументу C

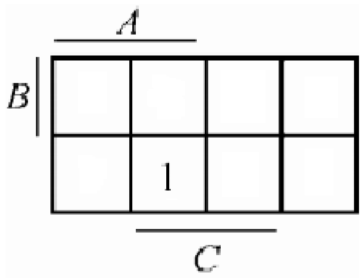
вообще нет, так как этот аргумент в конъюнкции отсутствует. Таким образом, получим:



Если функция представлена в виде дизъюнкции двух или нескольких булевых функций, то ее нанесение на карту Вейча сводится к последовательному нанесению каждой функции на карту, причем, при накладывании единицы на ячейку, в которой уже есть значение, даст нам единицу.

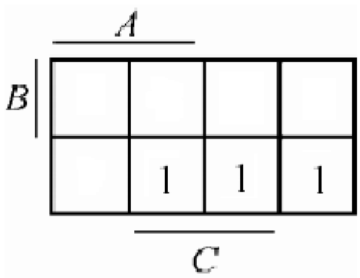
Пример. Нанести на карту функцию трех аргументов $f = A\vec{B}C + \overline{A}\vec{B} + \overline{A}C$.

Нанесем на карту первую часть дизъюнкции $A\vec{B}C$. Это будет минтерм m_5:



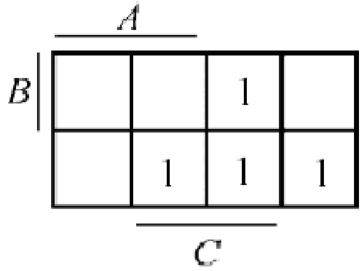
.

Для нанесения второго слагаемого $\overline{A}\vec{B}$ нужно добавить к уже отмеченной единицей ячейке пересечение третьего, четвертого столбца и второй строки:



.

И, наконец, перейдем к третьему слагаемому $\overline{A}C$. Отметим единицами третий столбец таблицы, удовлетворяющий условию инверсии $\overline{A}$ и прямого вхождения в конъюнкцию C. Заметим, что ячейка, стоящая в третьем столбце и второй строке, уже содержит единицу. Однако прибавление к ней второй единицы не меняет значения ячейки. Таким образом, нанесенная на карту Вейча функция $f = A\vec{B}C + \overline{A}\vec{B} + \overline{A}C$ будет выглядеть следующим образом:



.

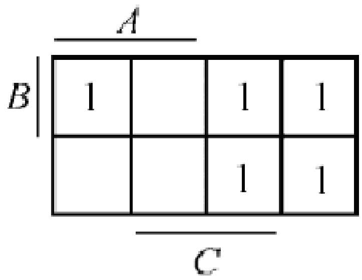
21.5. Нахождение СДНФ при помощи карт Вейча

21.5.1. Нахождение СДНФ произвольных функций

Проблема нахождения совершенной дизъюнктивной нормальной формы функции достаточно просто решается с помощью карт Вейча. Для определения номеров минтермов, входящих в СДНФ функции, достаточно нанести функцию на карту и выписать номера ячеек таблицы, содержащих единицы.

Пример. Найти СДНФ функции трех аргументов $f = \overline{A} + B\overline{C}$.

Обратим внимание на то, что ранее СДНФ этой функции мы уже находили, разлагая функцию по всем трем аргументам. Теперь найдем СДНФ при помощи карты Вейча. Нанесем на карту функцию $f = \overline{A} + B\overline{C}$:



.

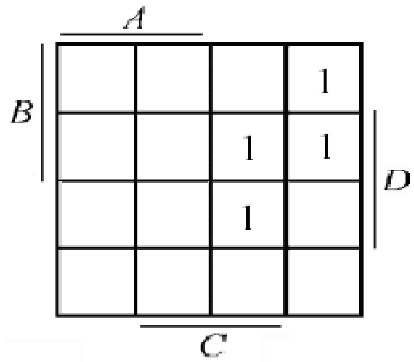
Выпишем десятичные номера минтермов, соответствующих единицам в данной таблице: 0, 1, 2, 3, 6. В результате получим запись функции в СДНФ:

$$f = (0, 1, 2, 3, 6).$$

Как видим, данный способ нахождения СДНФ функции гораздо проще и эффективнее, чем аналитический, с помощью разложений.

Пример. Найти СДНФ функции четырех аргументов $f = \overline{A}(B\overline{C} + CD)$.

Нанесем на карту Вейча функцию $f = \overline{A}(B\overline{C} + CD)$. Для простоты, используя дистрибутивное свойство конъюнкции относительно дизъюнкции раскроем скобки. Полученное выражение функции в виде дизъюнкции $f = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}CD$ легче наносить на карту:



.

Теперь перечислим десятичные номера соответствующих минтермов: 3, 4, 5, 7. Таким образом, функцию $f = \overline{A}(B\overline{C} + CD)$ можно представить В СДНФ:

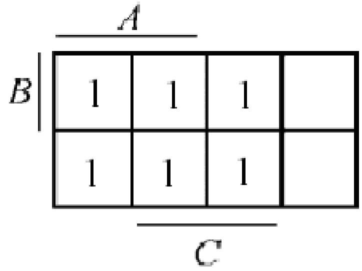
$$f = (3,4,5,7).$$

21.5.2. Нахождение СДНФ конъюнкции функций

Если функция представлена в виде конъюнкции двух булевых функций, то алгоритм нанесения функции на карту Вейча следующий. Наносим на карту первую функцию. Затем накладываем значения второй функции на уже составленную карту. После добавления значений второй функции некоторые ячейки могут быть пустыми, их мы не трогаем. В других клетках могут содержаться по одной единице, их нужно очистить. А есть ячейки, в которых появились две единицы, здесь мы оставим только одну. В результате получим карту Вейча конъюнкции двух функций. Если необходимо нанести конъюнкцию большего количества булевых выражений, то это можно сделать последовательно за несколько шагов.

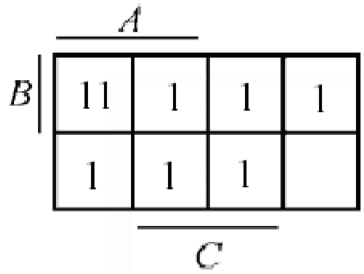
Пример. Нанести на карту функцию трех аргументов $f = (A + \overline{A}C)B\overline{C}$.

Нанесем на карту первую часть конъюнкции $A+\overline{A}C$. :



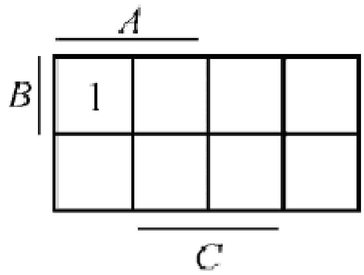
.

Затем накладываем на полученную карту значения второй части конъюнкции $B\overline{C}$. Единицы добавим в первую и последнюю ячейки первой строки:



.

Теперь, очистим ячейки, содержащие по одной единице, а в клетке с двумя значениями оставляем только одно: На результирующей карте Вейча функция $f=(A+\overline{A}C)B\overline{C}$ будет отображена так:



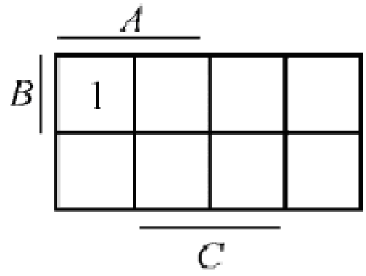
.

21.5.3. Нахождение СДНФ инверсии функции

Если функция представлена в виде инверсии булевой функции, то нанеся на карту Вейча эту функцию, достаточно инвертировать значения каждой ячейки таблицы.

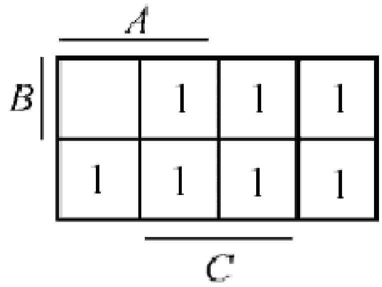
Пример. Нанести на карту Вейча функцию $f=\overline{(A+\overline{A}C)B\overline{C}}$.

В предыдущей задаче мы уже получили карту Вейча для функции $f = (A + \overline{A}C)B\overline{C}$:



.

Теперь инвертируем все значения построенной таблицы. Процесс будет заключаться в замене пустых клеток на единицы, а ячейки, содержащие единицы очистим. Так получим инверсию $f = \overline{(A + \overline{A}C)B\overline{C}}$:



.

21.6. Совершенная конъюнктивная нормальная форма

21.6.1. Макстермы

Макстермом n аргументов булевой функции называется такая дизъюнкция этих аргументов, в которую каждый аргумент входит один и только один раз в прямой или инверсной форме. Так же как и для минтерма все аргументы в макстермы располагаются в минтерме в алфавитном порядке.

Примеры макстермов.

Минтермы двух аргументов: $A + \overline{B},\ A + B,\ \overline{A} + \overline{B}$.

Минтермы трех аргументов: $\overline{A} + B + \overline{C},\ A + \overline{B} + C,\ \overline{A} + B + C$.

Минтермы четырех аргументов: $\overline{A} + \overline{B} + C + D,\ \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$.

По аналогии с минтермами макстермы обозначаются заглавной буквой *M* с десятичным индексом, указывающим форму вхождения аргументов в макстерм, прямую или инверсную. Например, для функции трех аргументов запись M_5 означает $A+\overline{B}+C$. На самом деле, двоичный код числа 5 равен 101, и, следовательно, первая переменная входит в макстерм в прямой форме, вторая переменная – в инверсной форме, а третья – снова в прямой.

Можно отметить, что макстерм M_i является инверсией минтерма m_i. Если минтермы принимали единичное значение только на одном из наборов, то каждый макстерм принимает значение 1 на всех наборах, за исключением одного. Очевидно, числа такого наборы должны принимать нулевые значений, если соответствующие им аргументы записаны в прямой форме, или равны единицам в противном случае.

Макстермы обладают важным свойством. Дизъюнкция двух любых различных макстермов, одних и тех же аргументов, равна единице. На самом деле, так как макстермы отличаются друг от друга только формой входящих в них аргументов, то на любом наборе значений переменных, только значение одного из макстермов может быть равен нулю, поэтому другой макстерм обязательно примет значение 1. Следовательно, дизъюнкция этих макстермов также будет равна единице.

21.6.2. Нахождение СКНФ булевых функций

Представление булевой функции в виде конъюнкции макстермов n аргументов называется записью в *совершенной конъюнктивной нормальной форме*, или сокращённо – СКНФ. Всякая булева функция заданного числа аргументов представима в совершенной конъюнктивной нормальной форме, единственным образом.

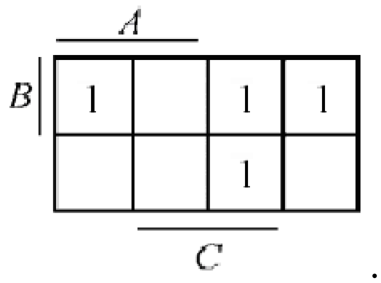
Нахождение СКНФ булевой функции сводится к следующему алгоритму.
1. Находим СДНФ заданной функции.

2. Результат первого шага инвертируем. В инверсию функции войдут все минтермы, отсутствующие в СДНФ.

3. Аналитическую форму полученного выражения снова инвертируем с использованием теоремы де Моргана. Это и будет СКНФ нашей функции.

Пример. Найти СКНФ функции трех аргументов $f=\overline{A}C+B\overline{C}$.

Найдем СДНФ функции $f = \overline{A}C + B\overline{C}$. Для этого нанесем ее на карту Вейча:



.

Следовательно, СДНФ функции $f = (1, 2, 3, 6)$.

Для нахождения инверсии СДНФ функции выпишем минтермы, отсутствующие в СДНФ $\bar{f} = (0, 4, 5, 7)$.

Инвертируем аналитическую форму полученного выражения $\bar{f}$ с использованием теоремы де Моргана:

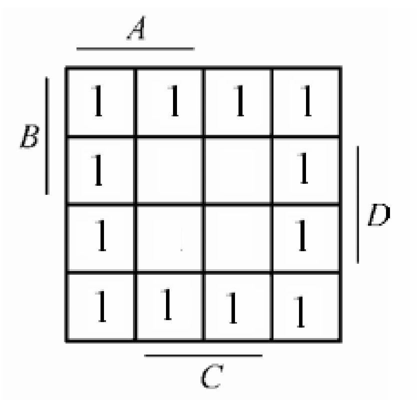
$$f = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC} = (A + B + C)(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

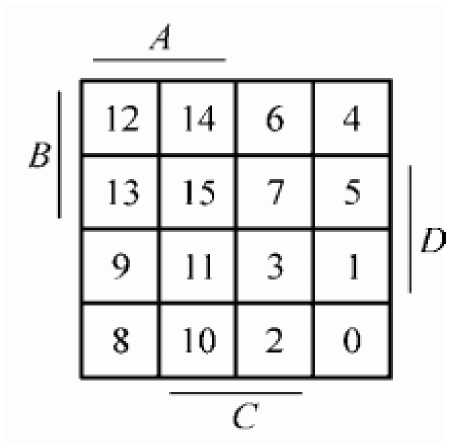
СКНФ функции $f = \overline{A}C + B\overline{C}$ можно записать и в краткой форме с использованием макстермов:

$$f = M_0 M_2 M_3 M_7 \text{ или } f = [\,0, 2, 3, 7\,].$$

Пример. Найти СКНФ функции $f = C\overline{D} + \overline{C} + A\overline{D}$.

1. Найдем СДНФ функции, для этого нанесем ее на карту Вейча:





Выпишем номера минтермов: $f = (1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ 14)$.

2. Полученный результат инвертируем: $\bar{f} = (3, 7, 11,\ 15)$ и запишем инверсию функции в аналитической форме:

$$\bar{f} = \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + ABCD.$$

3. Еще раз инвертируем по теореме де Моргана:

$$f = \overline{\overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + ABCD} =$$
$$= (A + B + \overline{C} + \overline{D})(A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})(\overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}).$$

Тогда, выписывая номера макстермов в порядке возрастания, получим совершенную конъюнктивную нормальную форму функции $f = C\overline{D} + \overline{C} + A\overline{D}$:

$$f = [0, 4, 8, 12].$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяются операции логики Буля?
2. Перечислите основные свойства булевых операций.
3. Какие вы знаете законы булевой алгебры?
4. Чем отличаются дизъюнктивные и конъюнктивные формы булевых выражений?
5. Дайте определение булевой функции. Чем это определение отличается от функции одной или нескольких вещественных переменных?
6. Какие существуют способы задания булевых функций?
7. Как рассчитать номер минтерма n-арной функции?
8. Дайте определение совершенной дизъюнктивной нормальной форме булевой функции.
9. Объясните алгоритм разложения булевых функций по аргументу.
10. Каким образом можно получить СДНФ булевой функции помощью ее разложения по аргументам?
11. Опишите основные принципы построения и использования карт Вейча для *n*-арной функции.
12. Каким образом производится нанесение булевых функций на карту Вейча?
13. Определите алгоритм нахождения СДНФ булевых функций с помощью

карт Вейча.

14. Как определить эквивалентность двух булевых функций при помощи карт Вейча?

15. Дайте определение инверсии булевой функции. Каким образом можно получить СДНФ инверсии булевой функции при помощи карт Вейча?

16. Как при помощи карт Вейча можно определить СДНФ дизъюнкции и конъюнкции двух или более булевых функций?

17. Дайте определение макстерма. Как определить номер макстерма N-арной булевой функции?

18. Сформулируйте определение совершенной конъюнктивной нормальной формы булевой функции. Приведите примеры.

19. Опишите алгоритм получения СКНФ булевой функции.

Глава 22. Элементы теории графов

Теория графов – это раздел дискетной математики, изучающий специальные множества, обладающие некоторыми свойствами. В общем смысле граф представляется, как конечное множество вершин или узлов, произвольным образом соединённых между собой.

Родоначальником теории графов считается Леонард Эйлер (1707 – 1783). В 1736 году в одном из своих писем он формулирует и предлагает решение задачи о «Кенигсбергских мостах», ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов. Термин «граф» впервые употребил известный английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр (1814 – 1897) в 1878 году в статье в естественно-научном журнале «Nature». Однако терминология теории графов до сих пор окончательно не определена. В прикладных разделах математики, в программировании, информатике и других прикладных областях физико-математических и технических наук вместо «графы» часто используют термин «сети», а термин «вершина» графа имеет много синонимов.

Настоящая глава посвящена основным положениям теории графов. В ней мы рассмотрим определение и основные компоненты графов: вершины и ребра графа. Достаточно большое место будет уделено свойствам графа, а также классификации графов. Затем мы определим матричные способы представления графов, рассмотрим принципы записи графов с помощью матрицы смежностей и матрицы инцидентности, изучим графические и матричные методы определения изоморфности графов. Кроме того, мы рассмотрим алгоритмы нахождения маршрутов и циклов в неориентированных графах, особенности построения путей и контуров в ориентированных графах, мы поднимем вопросы связности графов, введем понятия расстояния между вершинами связного графа, построим матрицу расстояний, рассчитаем эксцентриситеты вершин графа, диаметр графа, радиус графа, найдем периферийные и центральные вершины графа.

22.1. Основные определения и классификация графов

22.1.1. Понятие графа

Графом называют совокупность двух множеств $G=[A, B]$, где $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – любое непустое конечное множество, а B является множеством некоторых двухэлементных подмножеств (a_i, a_j) множества A. Элементы $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ из множества A обычно называют *вершинами* графа, а элементы из множества B – *ребрами графа*.

Пример. Пусть множество A представляет собой множество из четырех элементов $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, а множество $B=\{(a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4)\}$, тогда граф $G=[A, B]$ можно представить в виде: $[\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4)\}]$.

Пример. Пусть множество A представляет собой множество из трех элементов $\{1, 2, 3\}$, а множество B состоит из пары $B=\{(2, 3)\}$, тогда граф $G=[A, B]$ можно представить в виде: $[\{1, 2, 3\}, \{(2, 3)\}]$.

Форма записи графа, показанная в приведенных примерах, называется *алгебраической*.

Граф $G=[A, B]$ называется *неориентированным*, если пары множества B считаются неупорядоченными, то есть место элемента $a_i \in A$ в паре не имеет никакого значения. В случае упорядоченных пар $(a_i, a_j) \in B$ граф $G=[A, B]$ принято называть *ориентированным*, ребра ориентированного графа называются *дугами*. Если же у графа присутствуют упорядоченные и неупорядоченные пары, то такой граф – *смешанный*. Неориентированное ребро можно считать, как две противоположно направленные дуги, соединяющие одни и те же вершины.

Для наглядности графы часто представляют в виде графических объектов. В *графической* форме вершины графа (элементы множества A) обычно представляются точками, а ребра (элементы из B) отображаются линиями, соединяющими соответствующие точки. Для упорядоченных пар графа линии имеют соответствующее направление, а линии, отвечающие неупорядоченным парам, направления не имеют. Вид линии, обозначающей ребро или дугу, обычно не важен, здесь определяющее значение имеет то, какие вершины и в каком направлении соединяются вершины.

Пример. На рисунке 22.1 представлены три графа:

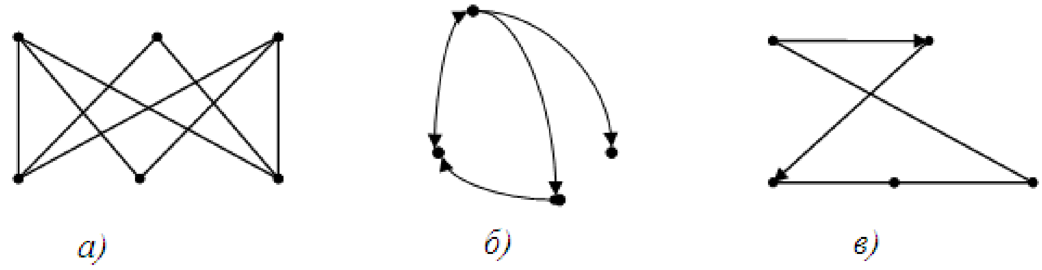


Рис. 22.1. Графическое представление графов.

Первый граф на рис. 22.1.а является неориентированным. Граф, изображенный на рис. 22.1.б, – ориентированный, а третий граф – смешанный.

Для определенности идентификации графа, заданного в геометрической форме, можно указывать алгебраические обозначения вершин и, если это необходимо, ребер.

Пример. На рисунке 22.2 показан неориентированный граф $G=[\{a,b,c,d\},\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(c,d)\}]$. Его четыре представления, хотя имеют различные виды, по сути, являются одним и тем же графом.

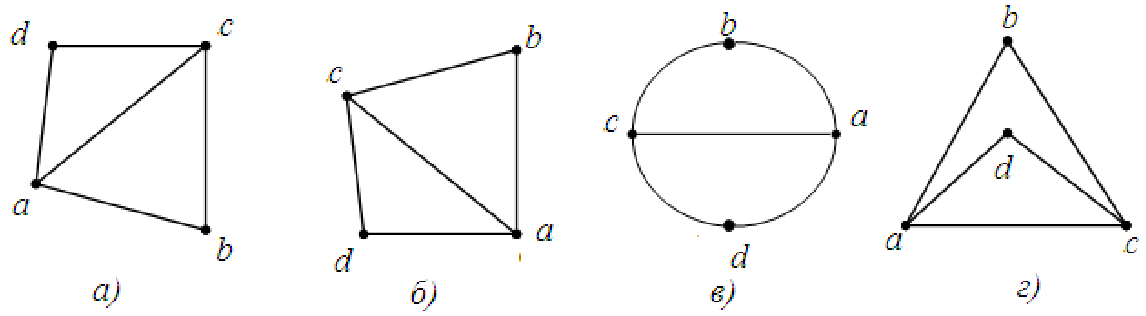


Рис. 22.2. Четыре изображения графа G.

На самом деле, что одному и тому же графу могут соответствовать несколько изображений, которые будут его геометрическими интерпретациями.

Если вершины a_1 и a_2 графа соединены ребром b, то эти вершины называют *инцидентными* ребру b, соответственно и ребро b будет инцидентно вершинам a_1 и a_2. Кроме того, вершины a_1 и a_2 будут называться *смежными*. Аналогично, два ребра графа являются *смежными*, если они содержат общую вершину.

Пример. В графе G на рис 22.2 вершина d инцидентна ребрам (a, d) и (c, d), ребро (b, c) инцидентно вершинам b и c. Смежными с вершиной c являются вершины a, b и d, а для ребра (a, d) смежными являются ребра (a, b), (a, c), (c, d).

22.1.2. Классификация графов

Пару вершин графа могут соединять одно или несколько ребер. Если две вершины соединяются двумя и более ребрами, то такие ребра называются *кратными*. Граф называется *простым*, если он не содержит кратных ребер. В противном случае, если в графе имеется хотя бы одно кратное ребро, он называется *мультиграфом*.

В некоторых графах ребро может соединять оду и ту же вершину. Такое ребро называют *петлей*. Граф, содержащий хотя бы одну петлю, называется *псевдографом*.

Пример. На рисунке 22.3. изображены четыре графа. Вершины графа отмечены малыми латинскими буквами, а ребра – числами.

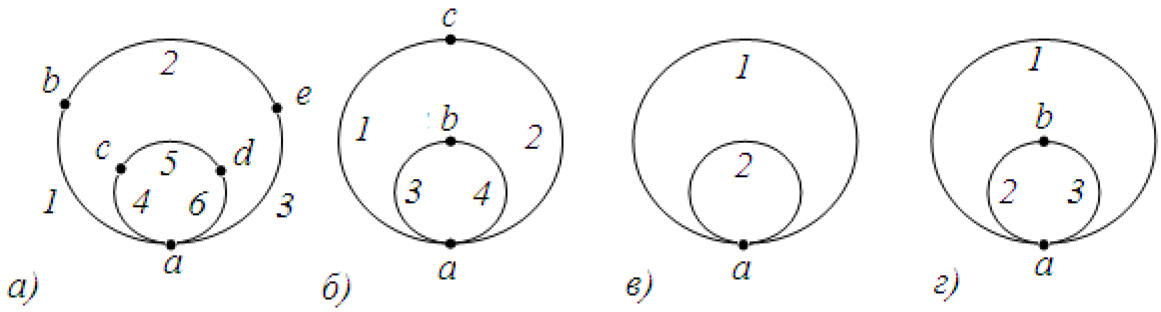


Рис. 22.3. Кратность ребер.

Первый из представленных графов (рис. 22.3.а), является простым, так как не содержит кратных ребер. Второй граф (рис. 22.3.б) имеет кратные ребра 1, 2, одновременно соединяющие вершины a и b, а также ребра 3, 4, инцидентные вершинам a и c. Следовательно, второй граф можем считать мультиграфом.

Третий из представленных графов (рис. 22.3.в) является псевдографом, так как единственная вершина соединена сама с собой петлями 1, 2. И, наконец, четвертый граф (рис. 22.3.г) одновременно можно считать мультиграфом и псевдографом, так как он имеет и кратные ребра 2, 3 и петлю 1.

Степенью (валентностью) вершины a неориентированного графа $\deg(a)$ называется число ребер, инцидентных данной вершине. Вершина со степенью 0, считается *изолированной вершиной*, а вершина со степенью 1 – *висячей*. Вершину называют *четной*, если ее степень четное число, и *нечетной* в противном случае.

Пример. В неориентированном графе, изображенном на рис 22.a, степени вершин равны $\deg(a)=2$, $\deg(b)=2$, $\deg(c)=1$, $\deg(d)=4$, $\deg(e)=1$, $\deg(f)=0$. Таким образом, вершины графа c и e являются висячими, а вершина f – изолированной. Вершины a, b и d – четные, а c, e – нечетные. Очевидно, всякий граф имеет четное число вершин нечетной степени.

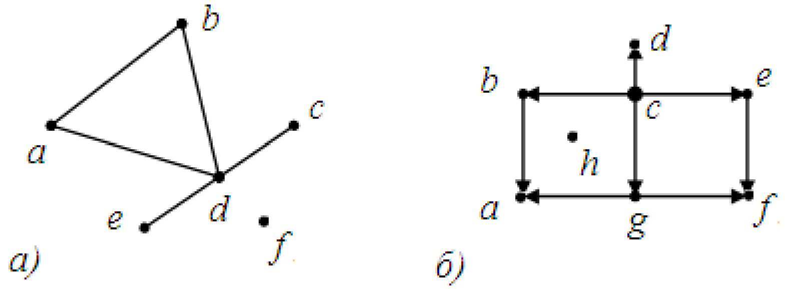


Рис. 22.4. Степени вершин графа.

Для ориентированных графов, в связи с важностью направления дуги, понятие степени вершин подразделяется на две части: *полустепенью исхода* вершины $d^{-}(a)$ называется число дуг графа, берущих начало в этой вершине, и, аналогично, *полустепенью захода* $d^{+}(a)$ вершины называется число дуг графа, заканчивающихся в данной вершине.

Пример. В ориентированном графе, изображенном на рис 22.4.б, полустепени вершин следующие: $\deg^{-}(a)=0$, $\deg^{+}(a)=2$, $\deg^{-}(b)=1$, $\deg^{+}(b)=1$, $\deg^{-}(c)=1$, $\deg^{+}(c)=0$, $\deg^{-}(d)=0$, $\deg^{+}(d)=1$, $\deg^{-}(e)=1$, $\deg^{+}(e)=1$, $\deg^{-}(f)=0$, $\deg^{+}(f)=2$, $\deg^{-}(g)=1$, $\deg^{+}(g)=2$, $\deg^{-}(h)=0$,

$\deg^{+}(h)=2$. Как и в случае неориентированных графов, вершина d является висячей, а вершина h – изолированной.

Граф, степени всех вершин которого равны k, называется *однородным* графом степени k. Граф называют *полным*, если все его вершины попарно соединены между собой и только одним ребром.

Пример. На рисунке 22.5 представлены однородные графы степени 3 (рис. 22.5.а), 5 (рис. 22.5.б), 8 (рис. 22.5.в), 3 (рис. 22.5.г). Но, вместе с тем, полным из них является только первый. Все вершины второго графа попарно соединены между собой, но двумя ребрами, а в третьем и четвертом графах попарного соединения всех точек вообще нет.

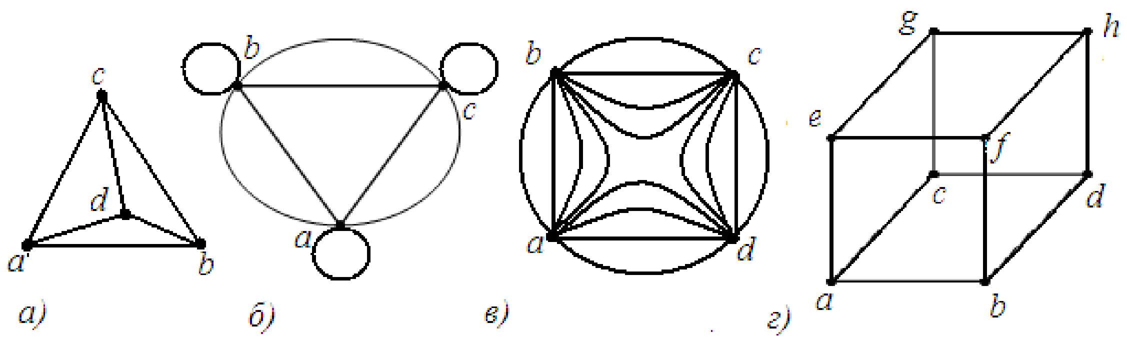


Рис. 22.5. Однородные графы.

Если каждой дуге (a_i, a_j) ориентированного графа G можно поставить в соответствие противоположно направленную дугу (a_j, a_i), то такой граф называется *симметрическим.*

Граф G называют *планарным,* если существует такое его двумерное графическое представление, которое не содержит пересекающихся линий.

Граф G называется *двудольным*, если все его вершины можно разбить на два произвольных класса таким образом, что каждое ребро (дуга) будет соединять вершины из разных классов.

Пример. На рисунке 22.6.а изображен симметрический граф. Дуге кратности 2 (a, b) можно поставить в соответствие противоположно направленную дугу (b, a) той же кратности. Графы, изображенные на рис. 22.6.а и 22.6.б являются планарными. В первом случае граф уже не содержит пересекающихся линий, а для второго графа не содержащее пересечений двумерное графическое представление показано на рис. 22.6.в. Два первых графа также являются и двудольными. Для первого графа каждую из его двух вершин можно отнести к отдельному классу, таким образом, требование двудольности выполняется. А для второго графа вершины a, b, c отнесем к одному классу, а вершины d, e, f ко второму. Граф, изображенный на рис. 22.6.г не является ни симметрическим, ни планарным, ни двудольным.

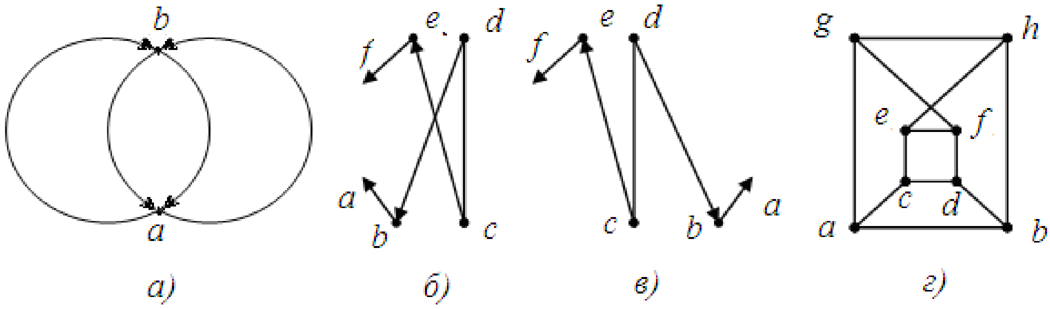


Рис. 22.6. Симметрические, планарные, двудольные графы.

22.1.3. Подграфы

Граф G_1 называется *подграфом* графа G_2, если все вершины и все ребра г*рафа* G_1 содержатся во множестве вершин и ребер графа G_2.

В случае если подграф G_1 графа G_2 не совпадает с графом G_2, то такой подграф называется *собственным.*

Пример. На рисунке 22.7 Изображены графы G_1, G_2, G_3. Графы G_2, G_3 являются собственными подграфами графа G_1. Для графа G_2 это утверждение очевидно. Однако графическое представление графа G_3 несколько отличается от двух предыдущих. Но и здесь вершины графов G_1 и G_3 полностью идентичны, а каждое ребро из графа G_3 также содержится и во множестве ребер графа G_1.

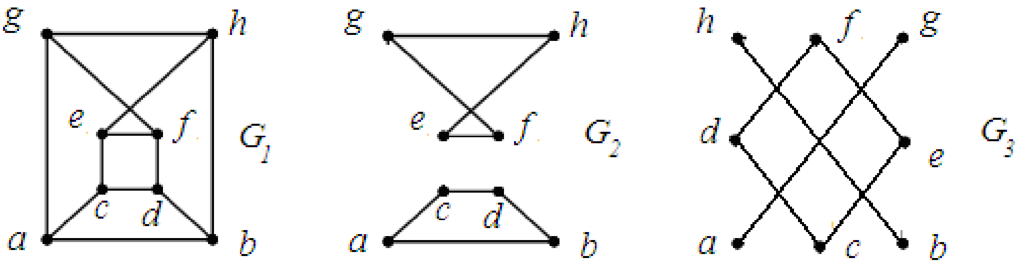


Рис. 22.7. Подграфы.

22.2. Матричное представление графов

Обычное алгебраическое представление графов в виде множеств вершин и ребер является громоздким и неэффективным для действий над графами, поэтому часто графы записывают в виде матриц.

22.2.1. Матрица смежностей

Матрицей смежностей графа G называется квадратная матрица M порядка n, который определяется числом вершин данного графа. Элементами матрицы могут быть только нули и единицы. Единица, находящаяся на пересечении i-ой строки и j-ого столбца означает наличие ребра (дуги), с началом в вершине a_i и с концом в вершине a_j. Ноль определяет, что нет ребра (дуги), соединяющего вершину a_i с вершиной a_j. Таким образом

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, a_j) \in B, \\ 0, & (a_i, a_j) \notin B. \end{cases}$$

Данное определение применимо как для ориентированных, так и для неориентированных графов.

Пример. Построим матрицу смежностей для неориентированного графа G_1 и ориентированного графа G_2 заданных графически (рис. 22.8).

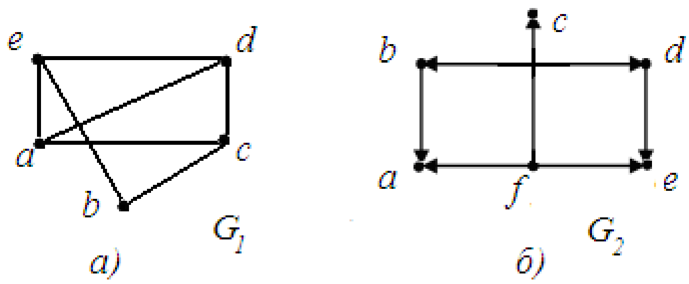


Рис. 22.8. Графы G_1 и G_2.

Исходя из определения, построим соответствующие матрицы смежностей M_1 и M_2 для графов G_1 и G_2. Для неориентированного графа G_1 отметим каждое ребро по два раза, такие ребра можно считать направленными в обе стороны. Очевидно, что для неориентированных графов матрица смежностей всегда является симметричной. А для ориентированного графа G_2 дуги могут быть направлены как в одну, так и в две стороны, следовательно, матрица смежности симметричной не будет.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

22.2.2. Матрица инцидентности

Матрицей инцидентности (инциденций) графа G называется прямоугольная матрица N порядков $m \times n$, где m – число вершин, n – число ребер. Построение матриц инцидентностей для неориентированных и ориентированных графов несколько различается. Для неориентированных графов матрица состоит только из нулей и единиц. Элемент матрицы инцидентностей n_{ij} содержит единицу, если i-ая вершина графа G инцидентна j-тому ребру. В противном случае ставится ноль. Таким образом,

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \in b_j, \\ 0, & a_i \notin b_j. \end{cases}$$

Для ориентированных графов матрица инцидентности содержит еще значение –1.

Здесь

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \text{ является началом дуги } b_j \\ -1, & a_i \text{ является концом дуги } b_j \\ 0, & a_i, \notin b_j \end{cases}$$

Очевидно, вид матрицы смежностей и вид матрицы инцидентности графа существенно зависят от того, как именно пронумерованы его вершины и ребра.

Пример. Построим матрицу смежностей для графов G_1 и G_2, для которых уже построили матрицы смежностей. Для начала пронумеруем ребра матриц.

Для графа G_1 определим номера ребер в следующем порядке: (a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,e), (c,d), (d,e). А порядок номеров дуг графа G_2

соответственно: (b, a), (b, d), (d, b), (d, e), (f, a), (f, c), (f, e). На рис. 22.9 отмечены номера ребер графа G_1 и дуг графа G_2.

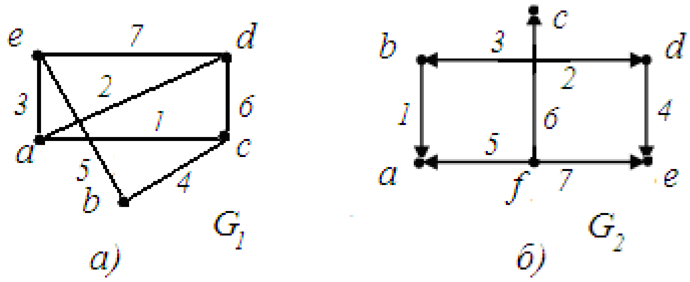


Рис. 22.9. Графы G_1 и G_2 с нумерацией ребер и дуг.

В соответствии с определением построим соответствующие матрицы инцидентностей N_1 и N_2 для графов G_1 и G_2.

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; N_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в каждом столбце матрицы инциденций всегда ровно два ненулевых значения. Это означает, что ребро графа соединяет только две вершины.

Отметим основные свойства матриц смежности и инцидентности.

1. Матрица смежности неориентированного графа является симметричной. Для ориентированного графа это утверждение может не выполняться.

2. Сумма элементов i-ой строки или i-го столбца матрицы смежности неориентированного графа равна степени вершины a_i.

3. Сумма элементов i-ой строки матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, исходящих из вершины a_i.

4. Сумма элементов i-го столбца матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, входящих в вершину a_i.

5. Сумма строк матрицы инцидентности ориентированного графа является нулевой строкой.

22.3. Операции над графами

Пусть $G_1 = [A_1, B_1]$ и $G_2 = [A_2, B_2]$ – два произвольных графа.

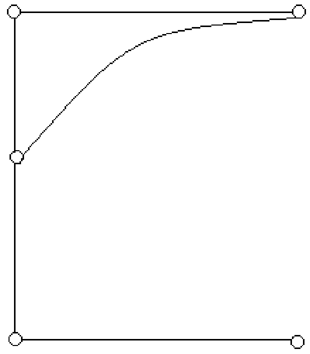
Объединением графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \cup G_2$ G, множество вершин которого есть объединение множеств вершин графов $A = A_1 \cup A_2$, а множество ребер является объединением множеств ребер этих графов $B = B_1 \cup B_2$.

Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \cup G_2$, множество вершин которого есть объединение вершин $A = A_1 \cap A_2$, а множество ребер является объединением ребер $B = B_1 \cap B_2$.

Разностью графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \setminus G_2$, множество вершин A которого является разностью вершин графов $A = A_1 \setminus A_2$, а множество ребер B – разностью ребер графов $B = B_1 \setminus B_2$.

Кольцевой суммой графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \oplus G_2$ порожденный на множестве ребер $(B_1 \cup B_2) \setminus (B_1 \cap B_2)$, и множеством вершин, им инцидентных. Нетрудно видеть, что данный граф не содержит изолированных вершин.

Пример. Пусть $G = (GV, GE)$ и $H = (HV, HE)$ — неориентированные мультиграфы, причем $GV = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $GE = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7\}$, $HV = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$, $HE = \{e_1, e_2, e_5, e_6, e_8\}$ имеют вид, изображенный на рисунке 22.10.



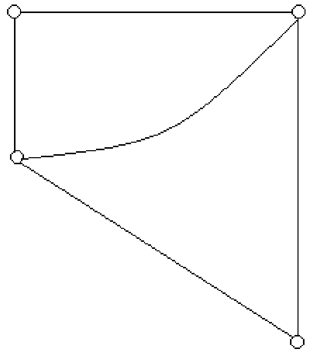


Рис. 22.10. Исходные графы G и H

Осуществим операции объединения, пересечения и кольцевой суммы указанных графов.

$G \cup H = J_1 = (JV_1, JE_1)$, где $JV_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $JE_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ (рис. 22.11)

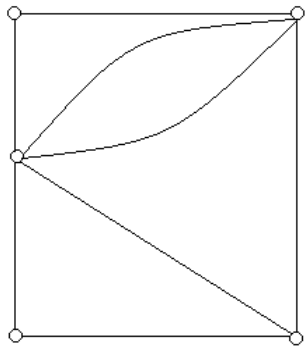


Рис. 22.11. Объединение графов G и H.

$G \cap H = J_2 = (JV_2, JE_2)$, где $JV_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$, $JE_2 = \{e_1, e_2\}$ (рис. 22.12).

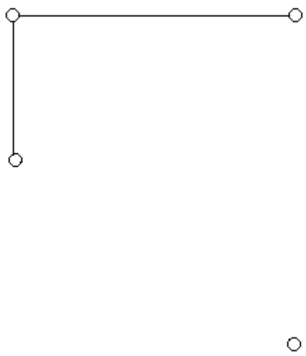


Рис. 22.12. Пересечение графов G и H.

$G \setminus H = J_3 = (JV_3, JE_3)$, где $JV_3 = \{v_4\}$, $JE_3 = \varnothing$.

$H \setminus G = J_4 = (\varnothing, \varnothing)$ — пустой граф.

$G \oplus H = J_5 = (JV_5, JE_5)$, где $JV_5 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $JE_5 = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ (рис. 22.13).

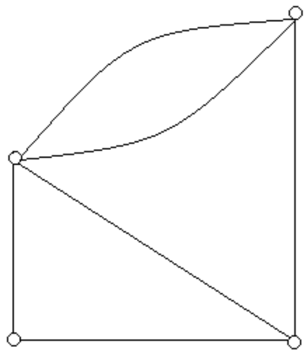


Рис. 22.13. Результат выполнения операции кольцевой суммы.

В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости иллюстраций графов в данном разделе будем считать, что необозначенные ребра (дуги) на графе, соединяющие одни и те же вершины, но изображённые по-разному, различаются.

22.4. Изоморфизм графов

Графы $G_1(A_1, B_1)$ и $G_2(A_2, B_2)$ называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное соответствие между множествами вершин A_1 и A_2, что любые две вершины одного графа соединены тогда и только тогда, когда соответствующие вершины соединены в другом графе, причем одним и тем же способом. Такое соответствие называют *изоморфизмом* графов.

Пример. На рисунке 22.14 изображены четыре графа G_1, G_2, G_3, G_4.

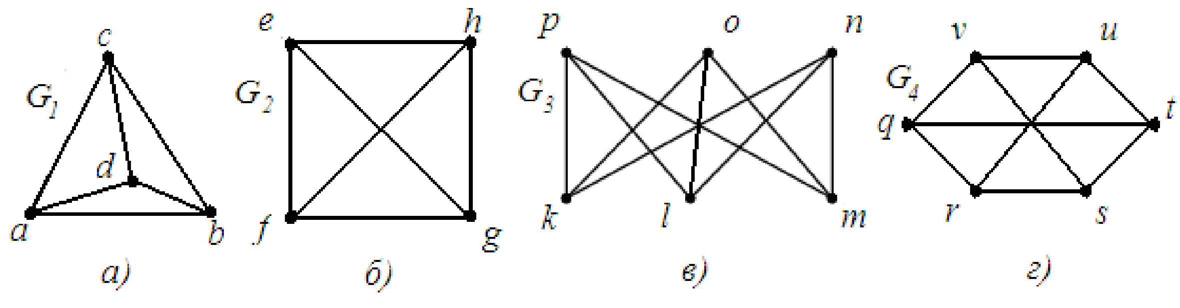


Рис. 22.14. Изоморфные графы.

Рассмотрим графы G_1 и G_2. Отображения вершин $a \to f$, $b \to g$, $c \to h$, $d \to e$ является изоморфизмом, так как способы соединения соответствующих вершин одинаковы. Аналогично можно сказать и об изоморфности графов G_3 и

G_4, если рассмотреть соответствия $k \to g$, $l \to u$, $m \to s$, $n \to t$, $o \to r$, $p \to v$.

Соответствующие соответствия можно определить и графически, передвигая соответствующие вершины графа. Например, передвигая вправо вершину c графа G_1, а вершину d влево и вверх, получим точный вид графа G_2. В этом случае изоморфизм графов G_1 и G_2 очевиден. Так же можно увидеть и изоморфность графов G_3 и G_4. Для этого достаточно передвинуть, поменяв местами, вершины l и o графа G_3. Полученная модификация графа G_3 поможет увидеть изоморфное отображение.

Изоморфные графы отличаются только обозначением вершин, следовательно, матрицы смежностей двух изоморфных графов могут отличаться только расположением нулей и единиц. Подобно передвижению на плоскости вершин графа, можно преобразовывать и матрицу смежностей, неоднократно переставляя ее строки и столбцы. Если после очередной перестановки матрицы смежностей двух графов совпадут, то графы можно считать изоморфными.

Пример. Исследуем на изоморфность графы G_3, G_4, изображенные на рисунке 22.14.

Представим оба графа с помощью матриц смежностей. Для графов G_3, G_4 матрицы смежностей будут выглядеть следующим образом.

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переставляя строки и столбцы матрицы M_3, убедимся в изоморфности графов. Преобразования матрицы будем осуществлять по действиям.

1) Поменяем местами вторую и пятую строки матрицы M_3.

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Теперь переставим второй и второй и пятый столбцы.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_4$$

После двух действий мы получили матрицу смежностей графа G_4. Следовательно графы G_3 и G_4 изоморфны.

22.5. Маршруты и пути графов

22.5.1. Маршруты и циклы в неориентированном графе

Маршрутом или *цепью* в неориентированном графе G называется произвольная последовательность ребер b_1, b_2, …, b_n, …, такая, что каждые два соседних ребра (дуги) b_i и b_{i+1} имеют общую инцидентную вершину.

Одно и то же ребро может встречаться в маршруте один или неограниченное количество раз. В конечном маршруте (b_1, b_2, …, b_n) графа G имеются начало и конец маршрута.

Началом маршрута называется вершина, инцидентная первому ребру b_1, но не инцидентная второму ребру b_2. *Концом маршрута* называется вершина, инцидентная последнему ребру b_n, но не инцидентная предпоследнему ребру b_{n-1}.

Длиной (*мощностью*) *маршрута* называется число ребер графа, входящих в данный маршрут, причем каждое ребро считается ровно столько раз, сколько оно входит в маршрут.

Циклом называется маршрут, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Граф, в котором найдется цикл, проходящий по всем ребрам графа ровно один раз, называется *эйлеровым графом*.

Пример. В изображенном на рисунке 22.15 графе G рассмотрим три маршрута: $M_1 = (a_1, a_2, a_4)$; $M_2 = (a_1, a_2, a_5, a_6)$ и $M_3 = (a_2, a_5, a_6, a_3)$.

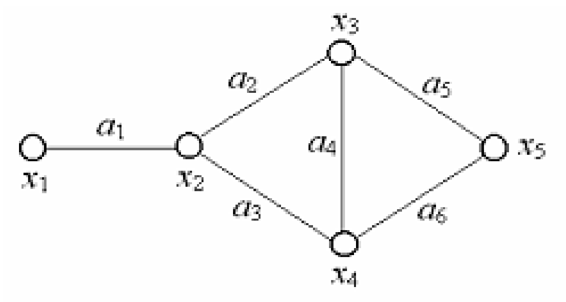


Рис. 22.15. Маршруты в графе.

Тогда длина маршрута M_1 равна трем, а длина маршрута M_2 –четырем. Маршрут M_3 является циклом. Граф не является эйлеровым.

Маршрут, в котором все ребра различны, называется *простой цепью*. В случае, если простая цепь является циклом, то речь идет о *простом цикле*.

Маршрут, в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарной цепью*. Если же элементарная цепь является циклом. то она называется *элементарным циклом*.

Пример. На рис. 22.16.а и 22.16.б изображены графы G_1 и G_2.

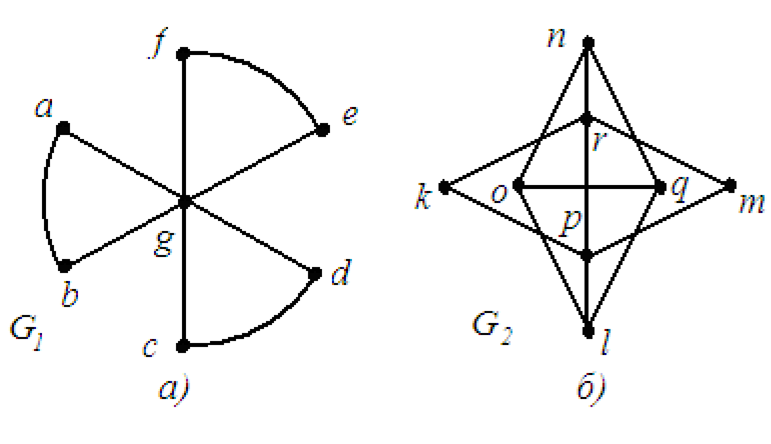


Рис. 22.16. Маршруты и пути графов.

Рассмотрим маршруты $M_1 = ((a,b),(b,g),(g,a))$, $M_2 = ((b,g),(g,b))$, $M_3 = ((g,a),(a,b),(b,g),(g,e),(e,f),(f,g),(g,c),(c,d),(d,g))$ графа G_1. Длина маршрута M_1 равна трем, мощность M_2 – двум, а маршрута M_3 – девяти. Маршруты M_1 и M_3 являются циклами. Так как цикл M_3 проходит по всем ребра графа ровно один раз, то граф G является эйлеровым. Для маршрутов $M_4 = ((k,p),(p,m),(m,r),(r,k))$ и $M_5 = ((k,p),(p,l),(l,q),(q,n),(n,r),(r,p))$ графа G_2 можно сказать, что M_4 является простым элементарным циклом, M_5 – простая, но не элементарная цепь, так как вершина p встречается дважды.

22.5.2. Пути и контуры в ориентированном графе

Для ориентированного графа G *путем (ориентированной цепью)* называется последовательность дуг b_1, b_2, …, b_n, …,, в которой каждая конечная вершина произвольной дуги, кроме последней, является начальной вершиной следующей дуги. Количество дуг заданного пути называется *длиной пути*.

Путь называется *контуром*, если его начальная вершина совпадает с конечной. Как и для неориентированных графов путь, в котором ни одна их дуг не повторяется, называется *простым*. Соответственно, ориентированная цепь в которой все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарной*. Простыми и элементарными могут быть и контуры.

Пример. На рисунке 22.17 изображен граф G_3.

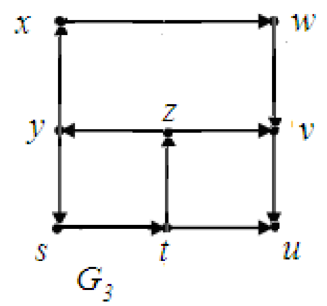


Рис. 22.17. Ориентированный граф G_3.

Рассмотрим пути $P_1 = ((t,z),(z,y),(y,x),(x,w),(w,v)(v,u))$, $P_2 = ((t,z),(z,y),(y,s),(s,t))$ и $P_3 = ((t,z),(z,y),(y,s),(s,t)(t,z),(z,y))$. Путь P_1 является простым элементарным путем. Путь P_2 – простым элементарным контуром. Путь P_3 нельзя назвать ни простым, ни элементарным, так как повторяются и дуги и вершины.

Следует помнить, что понятиям ребра, маршрута (цепи), цикла в неориентированном графе соответствуют понятия дуги, пути (ориентированной цепи), контура в ориентированном графе.

22.5.3. Пути во взвешенных ориентированных графах

Ориентированный граф называется *взвешенным* **(***нагруженным***),** если дугам этого графа поставлены в соответствие веса, так что дуге (x_i, x_j) сопоставлено некоторое значение $c(x_i, x_j) = c_{ij}$, называемое *длиной* (*весом, стоимостью*) дуги.

Длиной (*весом, стоимостью*) *пути* s, состоящего из некоторой последовательности дуг $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_j})$, называется числовое значение $l(s)$, равное сумме длин дуг, входящих в этот путь**:**

$$l(s) = \sum c_{ij} ,$$

причем суммирование ведется по всем дугам (x_i, x_j) из s.

Матрица C, содержащая дины дуг, называется *матрицей длин дуг или матрицей весов.*

Пример. Рассмотрим изображенный на рисунке 22.18 взвешенный ориентированный граф G.

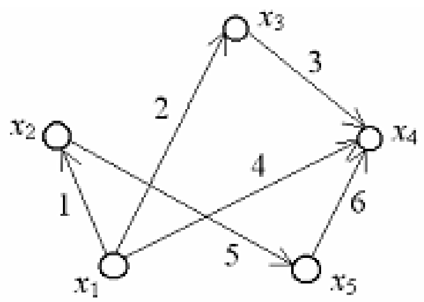


Рис. 22.18 Помеченный граф G.

Матрица весов C для представленного графа G имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Длина пути $(\boldsymbol{x_1, x_2, x_5, x_4})$ равна 1 + 5 + 6 = 12.

Четверка (M, R, f, g) называется *помеченным графом*, где пара функций f, и g являются *пометкой* или *распределением меток* графа $G = (M, R)$ *и*

f: $M \to SM$ (распределение меток вершин),

g: $R \to SR$ (распределение меток дуг).

Для вершины $a \in M$ элемент $f(a)$ называется *весом вершины a*, для дуги $u \in R$ *элемент* $g(u)$ называется *весом дуги u*.

Пример. Помеченный граф (M, R, f, g) представляет собой схему автомобильных дорог с указанием их протяженности (рис. 22.19).

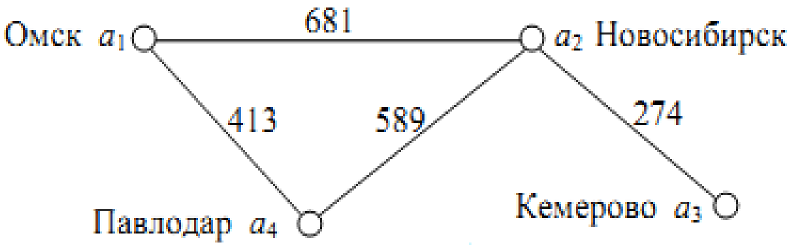


Рис. 22.19. Схема автомобильных дорог.

Пусть M = {a1, a2, a3, a4}, R = {[a1, a2]; [a2, a3]; [a1, a4]; [a2, a4]},

f: M → C, g: R → ω,

где C – множество городов: $g([a_1, a_2]) = 681$,

$f(a_1)$ = Омск, $g([a_2, a_3]) = 274$,

$f(a_2)$ = Новосибирск, $g([a_1, a_4]) = 413$,

$f(a_3)$ = Кемерово, $g([a_2, a_4]) = 589$.

$f(a_4)$ = Павлодар.

Матрица весов имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 681 & \infty & 413 \\ 681 & 0 & 274 & 589 \\ \infty & 274 & 0 & \infty \\ 413 & 589 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Для ненагруженного графа введем понятие *кратчайшего пути*. Это путь с минимальным общим числом дуг, причем каждая дуга считается столько раз, сколько она содержится в этом пути.

Пример. Найдем минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 в изображенном графе (рис. 22.20).

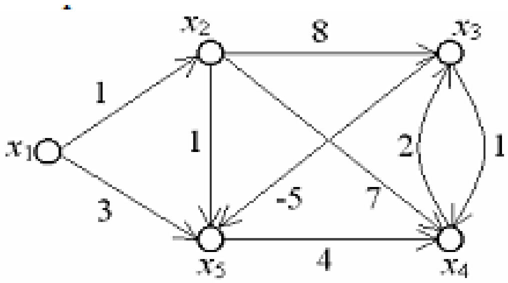


Рис. 22.20. Кратчайший путь в графе.

Введем число вершин графа n = 5. Матрица весов этого графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 8 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с матрицей весов графа, минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 будет: (x_1, x_2, x_5, x_4, x_3). Длина пути равна восьми.

22.6. Связность графа

22.6.1. Понятие связности графа

Связным называется неориентированный граф G, каждая пара вершин a_i и a_j которого может быть соединена, по крайней мере, одной цепью.

Компонентой связности неориентированного графа G будем называть любой связный подграф графа G, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа G.

Односторонне связным называется ориентированный граф G*, если для любых двух его вершин* a_i *и* a_j*, по крайней мере, одна достижима из другой.*

Компонентой односторонней связности неориентированного графа G называют односторонне связный подграф графа G, не являющийся собственным подграфом никакого другого односторонне связного подграфа графа G.

Сильно связным называется ориентированный граф G, если для каждой пары вершин a_i и a_j этого графа существует хотя бы один путь, соединяющий указанные вершины.

Компонентой сильной связности ориентированного графа G можно считать любой сильно связный подграф графа G, не являющийся собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа графа G.

Пример. Рассмотрим графы G_1, G_2, G_3 и G_4 (рис. 22.21).

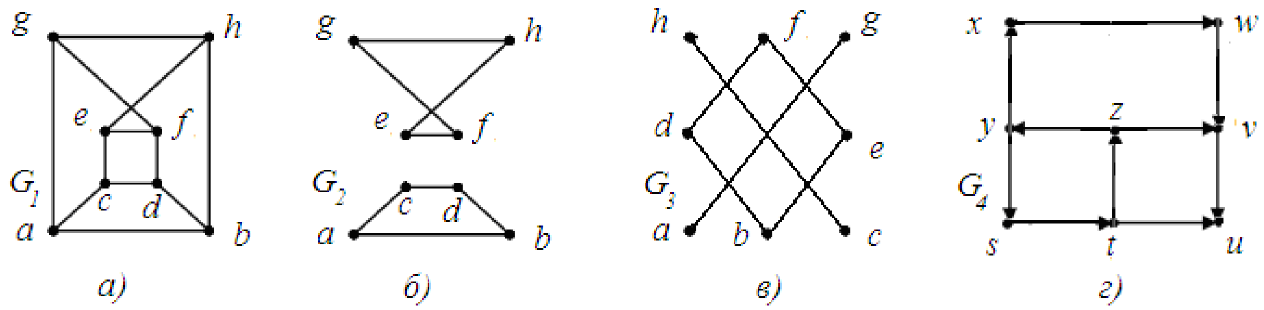


Рис. 22.21. Связность графов.

Граф G_1 является связным. Граф G_2 содержит две компоненты связности, а граф G_3 – три. Ориентированный граф G_4 можно считать односторонне связным. G_4 содержит компоненту сильной связности с вершинами s, t, y, z.

22.6.2. Матрицы связности

Матрицей связности S неориентированного графа G с множеством вершин $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называется квадратная матрица порядка n, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } a_i \text{ и } a_j \text{ принадлежат одной компоненте связности,} \\ 0, & \text{если вершины } a_i \text{ и } a_j \text{ принадлежат разным компонентам связности.} \end{cases}$$

Пример. Используя данное определение, построим матрицы связности S_1, S_2 и S_3 графов G_1, G_2 и G_3, изображенных на рисунке 22.21.

$$S_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix};\quad S_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&1\end{pmatrix};\quad S_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что строки и столбцы для вершин, принадлежащих одним и тем же компонентам, одинаковы.

Матрицей сильной связности W ориентированного графа G с множеством вершин $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называется квадратная матрица порядка n, элементы которой определяются следующим образом:

$$w_{ij}=\begin{cases}1, & \textit{если существует путь из вершины } a_i \textit{ в вершину } a_j,\\ 0, & \textit{если пути из вершины } a_i \textit{ в вершину } a_j \textit{ нет.}\end{cases}$$

Матрицей односторонней связности T ориентированного графа G с множеством вершин $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называется квадратная матрица порядка n, элементы которой равны:

$$t_{ij}=\begin{cases}1, & \textit{если существуют оба пути: из } a_i \textit{ в } a_j \textit{ и из } a_j \textit{ в } a_i,\\ 0, & \textit{если хотябы из двух указаных путей не существует.}\end{cases}$$

Пример. Построим матрицу сильной связности W_4 и матрицу односторонней связности T_4 графа G_4, представленного на рисунке 22.21.

$$W_4=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&1&1\\1&1&0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&0&1&1\\1&1&0&0&0&0&1&1\end{pmatrix};\quad T_4=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Следует заметить, что матрица сильной связности всегда симметрична.

22.7. Деревья.

Неориентированным деревом (или просто *деревом*) называется связный граф без циклов. На рисунке 22.22 представлены три графа, являющиеся деревьями.

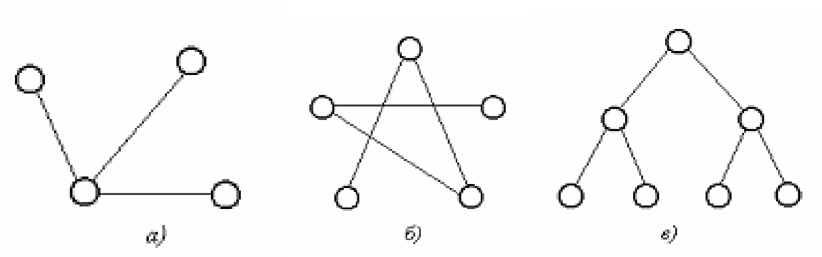


Рис.22.22. Три графа, являющиеся деревьями.

Если граф несвязный и не имеет циклов, то каждая его связная компонента будет *деревом*. Такой граф называется лесом (рис. 22.23).

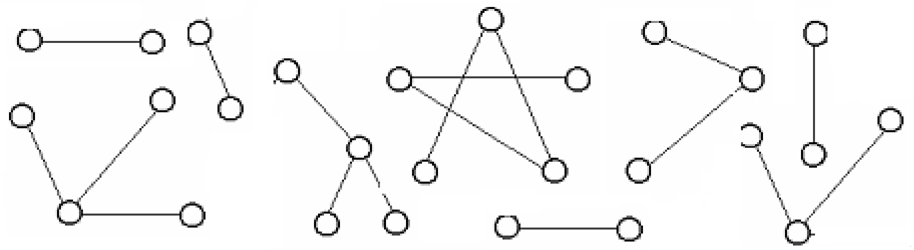


Рис. 22.23. Лес.

Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Для графа, изображенного на рис. 22.24.а, графы на рис. 22.24.б и 22.24.в являются остовными деревьями.

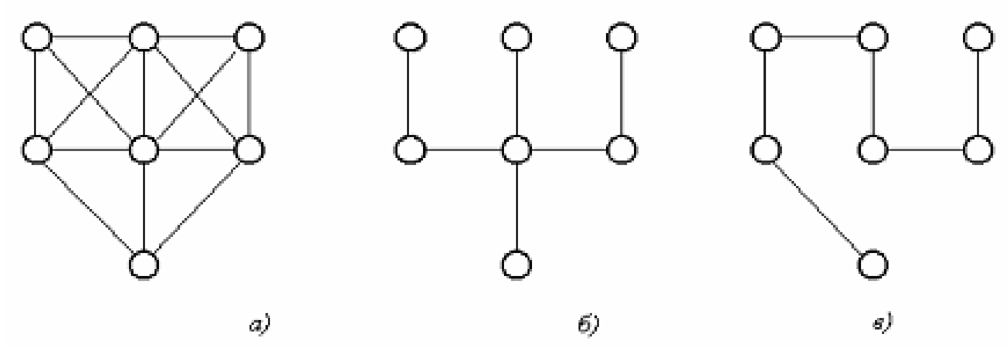


Рис. 22.24. Остовные деревья.

Пусть граф G имеет n вершин и m ребер. Так как всякое дерево с n вершинами по определению имеет $n - 1$ ребер, то любое остовное дерево графа G получается из этого графа в результате удаления $m - (n - 1) = m - n + 1$ ребер.

Число $\gamma = m - n + 1$ называется *цикломатическим числом* графа.

Пример. Найдем минимальное остовное дерево для изображенного на рисунке 22.25 графа *G*.

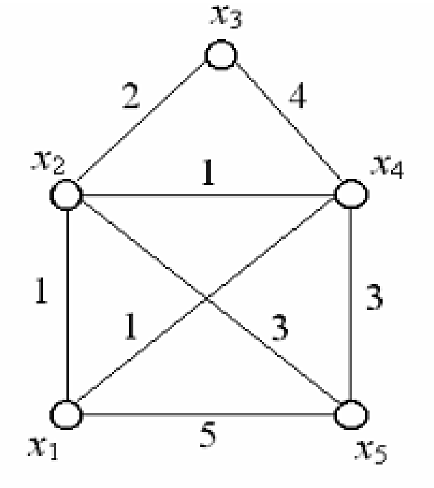


Рис. 22.25. Граф *G*.

Процесс построения минимального остовного дерева графа заключается в последовательном добавлении его компонентов (рис. 22.26):

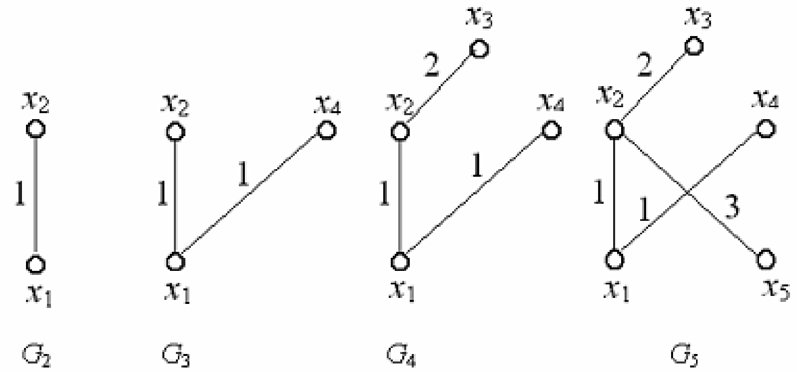


Рис. 22.26. Построение минимального остовного дерева графа.

22.8. Расстояния в графах

Расстояниeм между вершинами a и b связного графа G называется длина кратчайшего маршрута между заданными вершинами. Расстояние между вершинами a и b обозначается $p(a,b)$.

Матрицей расстояний P графа G с множеством вершин $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называется квадратная матрица порядка n, элементы которого равны

$$p_{ij} = p(a_i, a_j).$$

Эксцентриситетом вершины a графа G называется наибольшее расстояние между данной вершиной и всеми другими вершинами графа. Эксцентриситет вершины a обозначается $\varepsilon(a)$.

Диаметром графа $d(G)$ называется наибольший среди всех эксцентриситетов вершин графа G. Радиусом *графа* $r(G)$ называется наименьший среди всех эксцентриситетов вершин графа G.

Вершину a графа G называют периферийной, если ее эксцентриситет $e(a)$ равен диаметру графа $d(G)$. Вершину a графа G считают центральной, если ее эксцентриситет $e(a)$ совпадает с радиусом графа $d(G)$.

Центром графа G называется множество всех его центральных вершин. И, соответственно, периферией графа можно считать все его периферийные вершины.

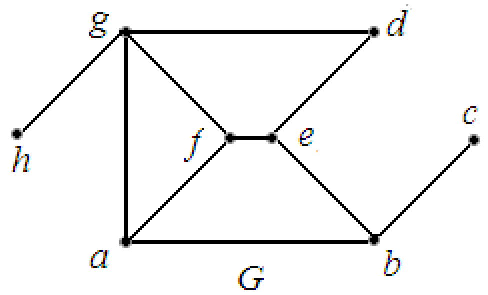


Рис. 22.27. Расстояния в графах.

Пример. Для графа G (рис. 22.27) построим матрицу расстояний, найдем эксцентриситеты всех его вершин, диаметр, радиус, центр графа и его периферию.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} &\varepsilon(a) = 2, \\ &\varepsilon(b) = 3, \\ &\varepsilon(c) = 4, \\ &\varepsilon(d) = 3, \\ &\varepsilon(e) = 3, \\ &\varepsilon(f) = 3, \\ &\varepsilon(g) = 3, \\ &\varepsilon(h) = 4. \end{aligned}$$

Из расчетов эксцентриситетов вершин видно, что диаметр графа $d(G)$ равен четырем, радиус $r(G)$ –двум. Единственная вершина a образует центр графа G, а периферийными можно считать вершины c и h.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение графа. Какие основные элементы графов вы знаете?
2. Назовите основные способы задания графов. Приведите пример графа, представленного в различных формах.
3. Каким образом осуществляется определение степени вершин неориентированных, ориентированных и смешанных графов?
4. Каким образом осуществляется классификация графов?
5. Приведите пример представления графа с помощью матрицы смежностей и матрицы инцидентности. Совпадают ли размерности полученных матриц?
6. Какие операции на над графами вы знаете? Приведите примеры операций над матрицами в алгебраической и геометрической формах.
7. Дайте понятие изоморфизма графов. Каким образом можно определить изоморфные графы?
8. Дайте определение маршрутов и циклов в неориентированном графе. Приведите примеры.
9. Каким образом определяются пути, контуры в ориентированном графе?
10. Как определить, является ли представленный граф Эйлеровым графом?
11. Объясните методы построения матрицы связности, матрицы сильной связности, матрицы достижимости.
12. Каким образом определяются пути во взвешенных ориентированных графах?
13. Что такое дерево и лес?
14. Каким образом можно построить остовное дерево для неориентированного графа?

15. Как определяются расстояния в графах? Продемонстрируйте на примере алгоритм построения матрицы расстояний графа.

16. Укажите принципы нахождения эксцентриситетов вершин графа, диаметра графа, радиуса графа, периферийных и центральных вершин графа.

Раздел 6. Методы оптимизации

Глава 23. Задачи линейного программирования

Задачи линейного программирования были первыми подробно изученными задачами поиска экстремальных значений функций при наличии ограничений на ее аргументы в виде уравнений или неравенств. В 1820 году Жан-Батист Жозеф Фурье (1767 – 1830) предложил графический метод решения задач линейного программирования, заключающийся в переборе смежных вершин многоугольника, являющегося областью определения целевой функции, в направлении возрастания значения функции.

Термин «линейное программирование» был предложен Джорджем Бернардом Данцигом (1914 – 2005) в 1949 году для изучения теоретических и алгоритмических задач, связанных с оптимизацией линейных функций при линейных ограничениях. В это время исследования в области математических оптимизационных задач проводились в основном в сфере экономики, и так как в английском языке слово «*programming*» означает «*планирование*», то в названии рассматриваемого раздела математики присутствует термин «программирование», а линейным оно является по причине линейных связей между аргументами исследуемой функции.

Существенный вклад в теорию линейного программирования внесли Джон фон Нейман (1903 – 1957), доказавший основную теорему о матричных играх, Леонид Витальевич Канторович (1912 – 1986), сформулировавший ряд задач линейного программирования и предложивший метод разрешающих множителей, и вместе с Марком Константиновичем Гавуриным, разработавший метод потенциалов решения транспортных задач. Следует отметить ряд математиков, развивших методы решения линейных и нелинейных задач математического программирования – это Фрэнк Лорен Хичкок (1875 – 1957), Гарольд Уильям Кун (1925 – 2014), Альберт Уильям Таккер (1905 – 1995), Василий Сергеевич Немчинов (1894 – 1964), Виктор Валентинович Новожилов (1892 – 1970), Александр Львович Лурье (1903 – 1970).

23.1. Математическое программирование

23.1.1. Основные понятия математического программирования

Математическое программирование представляет собой радел математики, в котором исследуются задачи нахождения экстремальных значений функций и разрабатываются методы их решения.

Цель математического программирования – изучение и анализ систем организационного управления, отыскание в них оптимизационных задач, постановка и внедрение которых могут оправдать затраты на создание автоматических систем управления в условиях, когда имеют место ограничения технического, экономического, социального или какого-либо другого характера.

Одной из существенных особенностей математического программирования является стремление найти оптимальное решение поставленной задачи, количественно обосновывающее принимаемые решения по управлению организациями. Оптимальным решением считается такой способ действия, который в наибольшей степени способствует достижению поставленной в задаче цели.

Несмотря на широкий спектр поставленных задач, решаемых средствами математического программирования, существует сложившаяся в практике последовательность основных этапов их решения. Основные этапы решения задач линейного программирования:

- идентификация проблемы (постановка задачи);
- построение модели;
- решение поставленной задачи;
- проверка адекватности модели;
- реализация результатов исследования.

Рассмотрим каждый из этапов подробнее.

Постановка задачи. В начале нужно осознать задачу, четко сформулировать ее. При этом определяются объекты, которые относятся к решаемой задаче, а также ситуация, реализуемая в результате ее решения. Первоначально задачу формулируют с точки зрения заказчика. Такая постановка задачи обычно не бывает окончательной. Во время анализа исследуемой системы задача постепенно уточняется.

Построение модели. Для того, чтобы задачу можно было описать количественно и использовать при ее решении вычислительную технику, нужно произвести качественный и количественный анализ объектов и ситуаций, имеющих к ней отношение. При этом сложные объекты, разбиваются на части (элементы), определяются связи этих элементов, их свойства, количественные и качественные значения свойств, количественные и логические соотношения между ними, выражаемые в виде уравнений, неравенств и т.п. Получив достаточно строгую и логически непротиворечивую, содержательную постановку задачи, нужно построить ее математическую модель.

Решение поставленной задачи. Для нахождения оптимального решения задачи в зависимости от вида структуры и свойств целевой функции и функций системы ограничений используют те или иные методы теории оптимальных решений – методы математического программирования.

Проверка адекватности модели. Общий метод проверки адекватности модели состоит в сопоставлении получаемых результатов с характеристиками системы, которые при тех же исходных условиях имели место в прошлом. Если при аналогичных входных параметрах модель достаточно точно воспроизводит поведение системы, то она считается адекватной. Если же построенная модель не обеспечивает необходимого соответствия с описываемым объектом, производится ее корректировка.

Реализация результатов исследования. На практике данный этап является завершающим. Полученное предварительно математическое решение облекают в соответствующую содержательную форму и представляют заказчику в виде инструкций и рекомендаций.

В зависимости от свойств функций математическое программирование можно разбить на ряд отдельных подразделов, занимающихся изучением и разработкой методов решения определенных классов задач, основными из которых являются:

- линейное программирование;
- нелинейное программирование;
- целочисленное программирование;
- параметрическое программирование;
- дробно-линейное программирование;
- стохастическое программирование;
- динамическое программирование;
- эвристическое программирование.

Если неизвестные входят в модель только в первой степени, то задача относится к разделу линейного программирования, в противном случае – к разделу нелинейного программирования. Кроме того, при решении многих задач на искомые переменные по их смыслу необходимо наложить дополнительные ограничения целочисленности. Это имеет место, например, когда искомыми величинами являются неделимые объекты (количество информации, технические устройства, комплекты оборудования и т.п.). В этом случае к обычной формулировке задачи необходимо добавить условие целочисленности переменных, и мы получим задачу целочисленного программирования, она может быть, как линейной, так и нелинейной. Во многих задачах математического программирования исходные данные зависят от некоторого параметра, такие задачи называются задачами параметрического программирования. Если в задаче фигурируют параметры, являющиеся случайными величинами, то она относится к задачам стохастической программирования.

Оптимизационные задачи, в которых приходится учитывать последовательность действий или фактор времени, рассматриваются в разделе динамического программирования. В отличие от предыдущих задач математического программирования задачи динамического программирования являются многоэтапными или многошаговыми. Иными словами, нахождение решения конкретных задач методами динамического программирования включает несколько этапов или шагов, на каждом из которых определяется решение некоторой частной задачи, обусловленной исходной.

23.1.2. Задачи линейного программирования

Содержание математического программирования составляют *методы решения задач о нахождении экстремумов функций* на множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями. В связи с этим строится *модель задачи математического программирования*, которую можно представить в виде совокупности математических соотношений, описывающих изучаемый процесс.

Для составления модели задачи математического программирования необходимо задать целевую функцию и составить систему ограничений для ее аргументов.

Переменными задачи называют величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые полностью характеризуют исследуемый процесс. Их обычно записывают в виде вектора $X = (x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$.

Системой ограничений задачи называется совокупность уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических условий, например, условия положительности переменных. В общем случае они имеют вид

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = 0,\ i = 1,\, 2, \ldots,\, l; \\ \varphi_j(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \le (\ge) 0,\ j = l+1,\, l+2, \ldots, m. \end{cases}$$

Целевой функцией называют функцию $Z(x_1, x_2, \ldots, x_n,)$, которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти.

Если целевая функция и система ограничений включают только линейные выражения, то задача математического программирования является *задачей линейного программирования* (ЗЛП).

Пример. Рассмотрим задачу математического программирования.

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -2x_2 + x_4 = 20 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \\ 7x_2 + x_3 \ge -6 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Представленная задача является задачей линейного программирования, поскольку стремящаяся к минимуму целевая функция и все уравнения и неравенства системы ограничений линейны.

Наборы чисел $(k_1; k_2; ...; k_n)$, которые удовлетворяют системе ограничений, называются *возможными* решениями.

Возможные решения $(k_1; k_2; ...; k_n)$, которые удовлетворяют условиям неотрицательности, называются *допустимыми* решениями.

Допустимое решение $(k_1; k_2; ...; k_n)$, при котором целевая функция достигает своего максимума или минимума, называется *оптимальным* решением.

23.1.3. Основные формы записи задач линейного программирования

Задачи линейного программирования принято записывать в трех основных формах. Записи различаются стремлением целевой функции к максимуму или минимуму, а также видами выражений, содержащихся в системе ограничений. Однако следует заметить, что во всех случаях переменные математической модели должны принимать неотрицательные значения.

Если требуется найти решение $(k_1; k_2; ...; k_n)$, которое удовлетворяет системе ограничений $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_{i0}$, $i = 1, 2, \dots, m$, условиям неотрицательности $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, при которых функция $Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ стремится к максимуму, то такая задача называется *стандартной* (*симметричной*) задачей линейного программирования.

Пример. Приведенная задача линейного программирования является стандартной.

$$Z(x_1,\, x_2,\, x_3) = 3x_1 - x_2 + 7x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le 23 \\ x_2 - x_3 \le 4 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\, 2,\, 3.$$

В *канонической* (*основной*) задаче линейного программирования система ограничений $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m$ представлена только уравнениями, условия неотрицательности $x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$, а целевая функция может стремиться как к максимуму, так и к минимуму $Z(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$.

Пример. Представленная задача линейного программирования является канонической.

$$Z(x_1,\, x_2,\, x_3) = -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 \to \min x$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Общая задача линейного программирования содержит систему ограничений $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=, \ge)\ a_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m$, условия неотрицательности $x_j \ge 0, \; j = 1, 2, \dots, n$, и целевую функцию $Z(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$

Пример. Данная задача линейного программирования является общей.

$$Z(x_1,\, x_2,\, x_3) = 3x_1 - x_2 + 7x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 9x_3 \le 58 \\ x_1 - x_2 = 15 \\ x_1 + x_3 \ge -4 \\ x_3 \ge -2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\, 2.$$

23.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Наиболее простым и наглядным методом решения задач линейного программирования является *графический метод*. Он применяется для решения ЗЛП с двумя переменными, заданными в неканонической форме, и многими переменными в канонической форме при условии, что уравнения содержат не более двух свободных переменных.

Данный метод основывается на возможности графического изображения области допустимых решений задачи и нахождения среди них оптимального решения. Область допустимых решений (ОДР) задачи строится как пересечение областей решений каждого из заданных ограничений.

23.2.1. Геометрический смысл решений неравенств

Теорема. Множество решений неравенства с двумя переменными $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$ является одной из двух полуплоскостей, на которые вся плоскость делится прямой $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, включая и эту прямую, а другая полуплоскость с той же прямой есть множество решений неравенства $a_1x_1 + a_2x_2 \ge b$.

Пример. Построить множество решений неравенства:

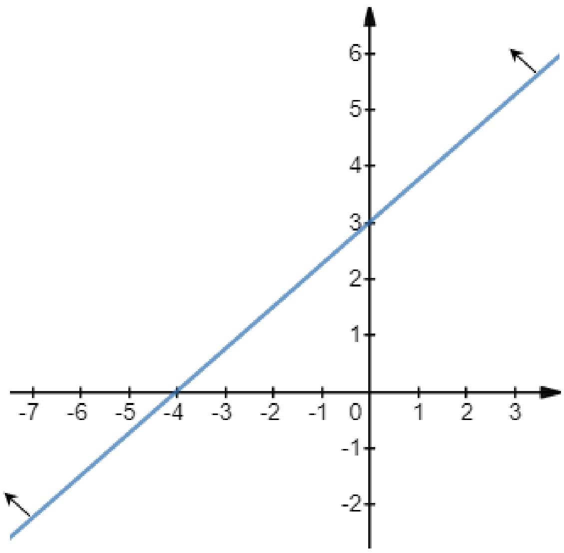
$$3x_1 - 4x_2 + 12 \le 0.$$

Найдем точки пересечения прямой $3x_1 - 4x_2 + 12 = 0$ с осями координат. Для этого, подставляя в уравнение прямой значения $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, заполним таблицу:

x_1	0	-4
x_2	3	0

.

По полученным точкам $A(0;3)$ и $B(-4;0)$ построим прямую $3x_1 - 4x_2 + 12 = 0$ на координатной плоскости.



В качестве контрольной точки возьмем начало координат $O(0;0)$:

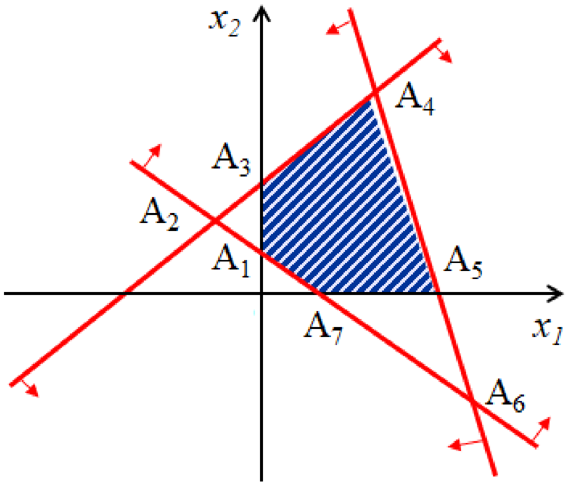
$$3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12 \leq 0.$$

Неравенство не выполняется. Следовательно, решением неравенства $3x_1 - 4x_2 + 12 \leq 0$ является верхняя левая полуплоскость, не содержащая контрольную точку $O(0;0)$.

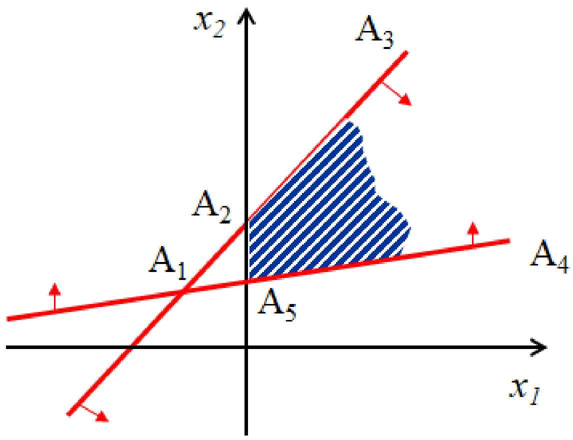
23.2.2. Геометрическое изображение системы ограничений

Как мы уже выяснили, решением линейного неравенства с двумя переменными является полуплоскость. Однако в задаче линейного программирования система ограничений может содержать два и более неравенства. В этих случаях для решения системы неравенств достаточно определить полуплоскости, соответствующие каждому их неравенств, а затем найти их пересечение.

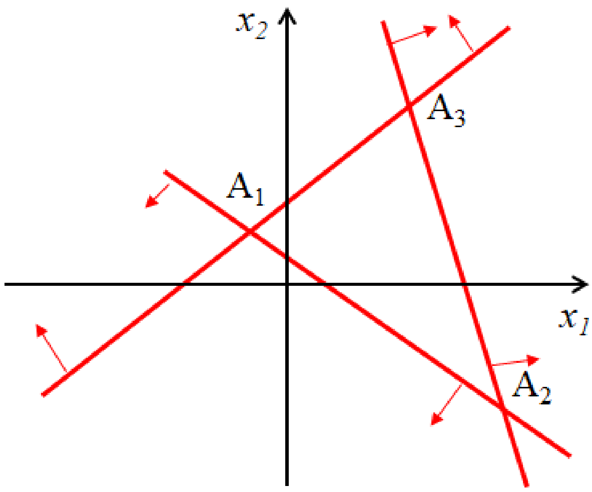
В результате графически система ограничений может представлять замкнутый многоугольник,



открытый многоугольник,



пустое множество.



Пример. Найдем графически решение системы неравенств.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Найдем точки пересечения прямых, являющихся границами полуплоскостей для каждого неравенства системы и построим эти прямые.

1) $x_1 + 3x_2 = 18$

x_1	0	18
x_2	6	0

2) $2x_1 + x_2 = 1$

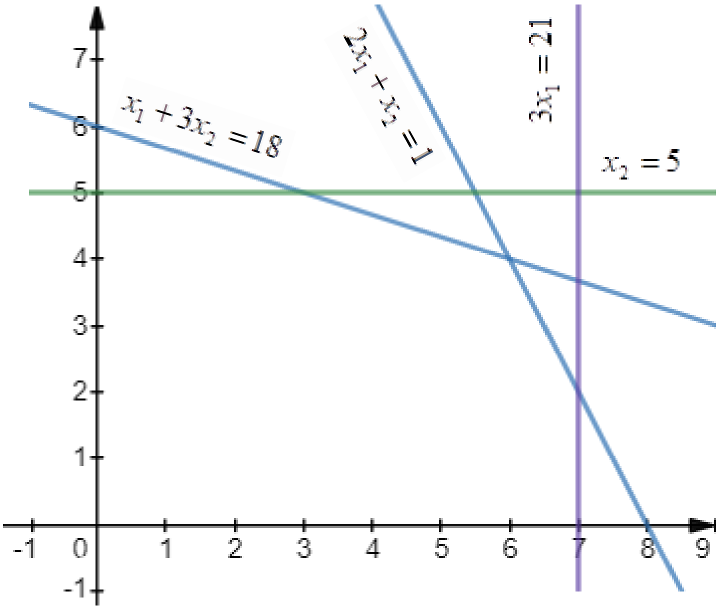
x_1	0	8
x_2	16	0

3) $x_2 = 5$

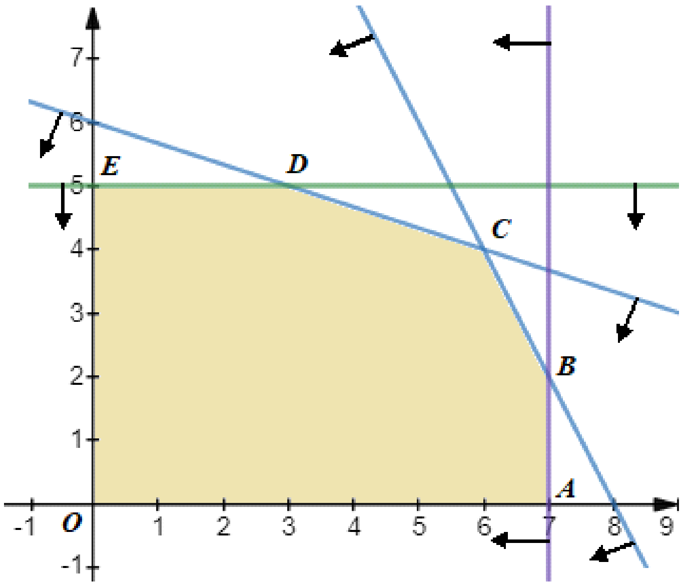
x_1	0
x_2	5

4) $3x_1 = 21$

x_1	7
x_2	0



Взяв в качестве контрольной точки начало координат $O(0;0)$, выберем и отметим на графике полуплоскости, являющие решениями неравенств, а затем окончательно определим область ограничений, как пересечение выбранных полуплоскостей. При определении множества возможных решений необходимо учитывать также условия неотрицательности.



Таким образом, областью возможных значений, соответствующих системе ограничений является многоугольник *OABCDE*.

23.2.3. Алгоритм графического метода решений задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования, заданной в стандартной форме. В этом случае все неравенства в системе ограничений могут содержать только знаки $\leq$ или $\geq$.

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 \to \max\ (\min),$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq (\geq)\, a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq (\geq)\, a_{20}, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq (\geq)\, a_{m0}, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Алгоритм решения такой задачи следующий.

1. Строим прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях задачи знаков неравенств на знаки равенств:

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_{10},$$
$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_{20},$$
$$. \quad . \quad .$$
$$(m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = a_{m0},$$

2. Находим полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи. Для этого, например, в первое неравенство подставляют координаты любой точки, не лежащей на прямой (1). Если координаты этой точки удовлетворяют первому неравенству, то отмечают ту полуплоскость, где находится точка, а если нет, то противоположную относительно прямой (1) полуплоскость.

3. Определяем область возможных решений (ОВР), являющуюся пересечением всех отмеченных полуплоскостей.

4. Из области возможных решений выделяем область допустимых решений (ОДР). Для этого необходимо взять только те решения, которые удовлетворяют условиям неотрицательности переменны: $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Если ОДР пуста, то задача линейного программирования решений не имеет.

5. Если ОДР не пуста, строим вектор-градиент целевой функции $Z = C_1 x_1 + C_2 x_2$, равный $\vec{N} = (C_1; C_2)$.

6. Строим линию уровня $k = C_1 x_1 + C_2 x_2$, перпендикулярно вектору градиенту (k - константа). Линий уровня бесконечно много, и они все параллельны между собой.

7. Передвигая линию уровня перпендикулярно направлению вектора $\vec{N}$, находим точку «входа» в ОДР – это точка минимума целевой функции, и точку «выхода» из ОДР – это точка максимума.

8. Определяем координаты точки минимума или максимума (в зависимости от условия задачи) аналитически и вычисляем значение целевой функции Z в этой точке.

Пример. Решим задачу линейного программирования графическим методом.

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min),$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Построим область допустимых решений. Каждое неравенство в системе ограничений заменяем на равенство. В прямоугольной декартовой системе координат $x_1 O x_2$ строим прямые

$$(1)\quad x_1 - x_2 = -2.$$
$$(2)\quad 3x_1 - 2x_2 = 6.$$
$$(3)\quad 2x_1 + x_2 = 2.$$
$$(4)\quad x_2 = 3.$$

Для того чтобы построить прямую достаточно знать координаты двух точек этой прямой. Прямые зададим таблично.

(1) $x_1 - x_2 = -2$ (2) $3x_1 - 2x_2 = 6$ (3) $2x_1 + x_2 = 2$ (4) $x_2 = 3$

x_1	0	-2

x_1	0	2

x_1	0	1

x_1	0

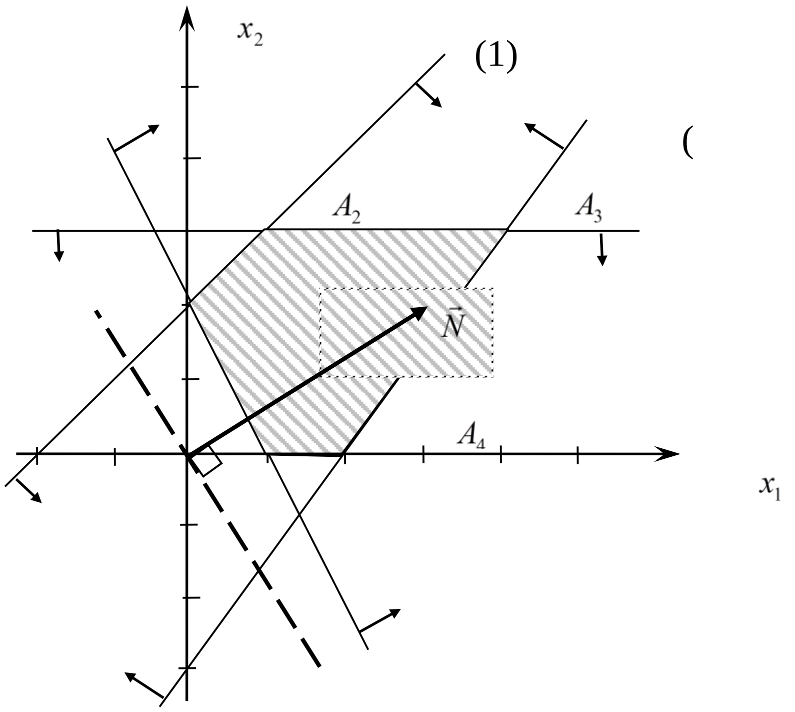
x_2	2	0	x_2	-3	0	x_2	2	0	x_2	3

Построив прямые, находим полуплоскости, определяемые данными неравенствами. Так как первая прямая не проходит через начало координат, то подставим координаты точки O(0;0) в первое неравенство, получим $0-0\geq -2$, $0\geq -2$ (верно), следовательно, первое неравенство определяет полуплоскость, лежащую ниже прямой (1).

Подставим координаты точки O(0;0) во второе неравенство, получим $3\cdot 0-2\cdot 0\leq 6$, $0\leq 6$ (верно), следовательно, второе неравенство определяет полуплоскость, лежащую выше прямой (2).

Подставим координаты точки O(0;0) в третье неравенство, получим $2\cdot 0+0\geq 2$, $0\geq 2$ (не верно), следовательно, третье неравенство определяет полуплоскость, лежащую выше прямой (3).

Четвертое неравенство определяет полуплоскость, лежащую ниже прямой $x_2=3$.



Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности. Заштрихованный многоугольник является областью допустимых решений (ОДР).

Строим вектор градиент $\overline{N}=(3;2)$.

Строим линию уровня $3x_1 + 2x_2 = 0$ перпендикулярно вектору $\overline{N}$.

По условию задачи нужно найти максимум и минимум функции Z. Передвигая линию уровня параллельно самой себе в направлении возрастания вектора градиента, находим точку «входа» в ОДР – это точка A_5. Найденная точка является точкой минимума. Найдем координаты точки A_5 аналитически. Эта точка является пересечением прямых (3) и $x_2 = 0$. Решим систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2; \\ x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $A_5(1;0)$. Вычислим значение целевой функции в этой точке:

$$Z_{\min}(1;0) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3.$$

Аналогично, находим точку «выхода» из ОДР – это точка A_3. Найденная точка является точкой максимума.

Найдем координаты точки A_3 аналитически. Эта точка является пересечением прямых (2) и (4). Решим систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 6; \\ x_2 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4; \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, $A_3(4;3)$. Вычислим значение целевой функции в точке максимума:

$$Z_{\max}(4;3) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 = 18.$$

Таким образом, $Z_{\min}(1;\, 0) = 3$, $Z_{\max}(4;\, 3) = 18$.

23.3. Метод Жордана-Гаусса

Для решения задач линейного программирования аналитически требуется преобразовывать системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из системы ограничений, а также находить их базисные решения. Рассмотрим метод Жордана-Гаусса, часто используемый для данных действий.

Метод Жордана-Гаусса или метод полного исключения неизвестных – метод, который используется для решения систем линейных алгебраических уравнений, определения ранга матрицы, нахождения обратной матрицы, нахождения координат вектора в заданном базисе. Метод является модификацией метода Гаусса и назван в честь немецких математиков Карла Фридриха Гаусса (1777 – 1855) и Вильгельма Йордана (1842 – 1899).

Метод получил широкую известность, так как он универсален и позволяет с помощью элементарных преобразований системы линейных алгебраических уравнений, записанной в табличной форме, получать единственное решение для определенных систем и различные базисные решения для неопределенных.

23.3.1. Алгоритм метода Жордана-Гаусса

Опишем алгоритм метода Жордана Гаусса.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{m0}, \end{cases}$$

где x_j – неизвестные, a_{ij} – коэффициенты при неизвестном x_j, a_{i0} – свободный член i -ого уравнения ($i = 1, 2, .., m$, $j = 1, 2, .., n$).

Все расчеты по методу Жордана-Гаусса будем проводить в таблице.

1. В таблице записываем свободные члены, матрицу коэффициентов при неизвестных. Дополняем таблицу контрольным столбцом, элементы которого получены суммированием элементов строки, т.е. $\overline{a_i} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}$.

a_{i0}	x_1	x_2	…	x_j	…	x_q	…	x_n	$\bar{a}_i$
a_{10}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1q}	…	a_{1n}	$\bar{a}_1$
a_{20}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2q}	…	a_{2n}	$\bar{a}_2$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
a_{i0}	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{iq}	…	a_{in}	$\bar{a}_i$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
a_{p0}	a_{p1}	a_{p2}	…	a_{pj}	…	a_{pq}	…	a_{pn}	$\bar{a}_p$

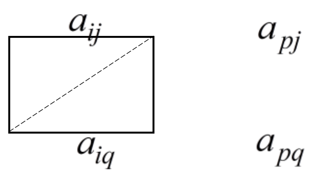
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mq}	…	a_{mn}	$\bar{a}_m$

2. Во внутренней части таблицы выбираем отличный от нуля разрешающий элемент, например $a_{pq} \neq 0$.

3. Все элементы разрешающей строки (с номером p) делим на a_{pq}.

4. Остальные элементы разрешающего столбца (с номером q) заменяем нулями.

5. Все остальные элементы, включая и элементы контрольного столбца, вычисляем по правилу прямоугольника $a_{ij}^{/} = a_{ij} - \dfrac{a_{pj} \cdot a_{iq}}{a_{pq}}$.



6. После заполнения всей таблицы осуществляем контроль: все новые элементы контрольного столбца должны быть равны сумме всех элементов строки.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока все строки не побывают разрешающими.

Замечания

1. Для удобства вычислений обычно выбирают $a_{pq} = 1$.

2. Если в процессе решения какая-нибудь строка полностью обнулится, то её вычеркиваем.

3. Если в процессе решения получим строку, у которой все элементы кроме свободного члена, отличного от нуля, равны нулю, то такая система решения не имеет.

4. Если в разрешающей строке какой-либо элемент равен нулю, то весь столбец, в котором стоит этот элемент, в новую таблицу переписывается без изменения.

5. Если в разрешающем столбце какой-либо элемент равен нулю, то

строка, в которой стоит этот элемент, в новую таблицу переписывается без изменений.

23.3.2. Теорема о количестве решений СЛАУ

Переменные системы линейных алгебраических уравнений, которым соответствуют единичные вектора, называют *базисными.*

Переменные, которые не входят в базис, называют *свободными*.

Решения, полученные при приравнивании к нулю свободных переменных, называются *базисными*.

Максимально возможное число базисных решений системы равно C_n^r.

Те базисные решения, которые не содержат отрицательных переменных ($x_j \geq 0$) называются *опорными*.

Рассмотрим теорему, которая определяет количество решений системы уравнений в зависимости от числа базисных переменных. Данная теорема является следствием из теоремы Кронекера-Капели.

Теорема.

1. Если число базисных переменных равно общему числу переменных системы, то система имеет единственное решение и является определенный.
2. Если число базисных переменных меньше общего числа переменных системы, то система имеет бесконечное множество решений и является неопределенный.

23.3.3. Решение СЛАУ методом Жордана-Гаусса

Рассмотрим примеры решения систем линейных алгебраических уравнений методом Жордана-Гаусса.

Пример. Решим систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Находить решения будем пошагово.

1-й шаг. По данным системы составим таблицу. Выбираем разрешающий элемент $a_{pq} \neq 0$, для удобства вычислений берем $a_{13} = 1$.

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\overline{a}_i$
	2	2	-1	1	4
	-2	3	2	2	5
	1	1	-2	1	1
x_3	2	2	-1	1	4
	-6	-1	4	0	-3
	-1	-1	-1	0	-3

Все элементы первой строки a_{1j} $(j = 1,2,3)$ делим на этот разрешающий элемент. Все элементы разрешающего столбца a_{i3} $(i = 2,3)$, кроме элемента a_{13}, обнуляем. Все остальные элементы таблицы вычисляем по правилу прямоугольника.

$$a'_{20} = a_{20} - \frac{a_{10} \cdot a_{23}}{a_{13}} = -2 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -2 - 4 = -6; \qquad a'_{30} = a_{30} - \frac{a_{10} \cdot a_{33}}{a_{13}} = 1 - \frac{2 \cdot 1}{1} = 1 - 2 = -1;$$

$$a'_{21} = a_{21} - \frac{a_{11} \cdot a_{23}}{a_{13}} = 3 - \frac{2 \cdot 2}{1} = 3 - 4 = -1; \qquad a'_{31} = a_{31} - \frac{a_{11} \cdot a_{33}}{a_{13}} = 1 - \frac{2 \cdot 1}{1} = 1 - 2 = -1;$$

$$\overline{a}'_2 = \overline{a}_2 - \frac{\overline{a}_1 \cdot a_{23}}{a_{13}} = 5 - \frac{2 \cdot 4}{1} = 5 - 8 = -3; \qquad \overline{a}'_3 = \overline{a}_3 - \frac{\overline{a}_1 \cdot a_{33}}{a_{13}} = 1 - \frac{4 \cdot 1}{1} = 1 - 4 = -3.$$

Записываем полученные данные в таблицу. Осуществляем контроль:

$$\overline{a}'_1 = 2 + 2 + (-1) + 1 = 4;$$

$$\overline{a}'_2 = -6 + (-1) + 4 + 0 = -3;$$

$$\overline{a}'_3 = -1 + (-1) + (-1) + 0 = -3.$$

Если элементы контрольного столбца, вычисленные по правилу прямоугольника, равны элементам контрольного столбца, вычисленным суммированием элементов по строке, то полученная таблица составлена верно. Выбранному разрешающему элементу соответствовала переменная x_3, следовательно, переменную x_3 записываем в базис.

Переходим к следующему шагу.

2-й шаг. Выбираем разрешающий элемент $a_{pq} \neq 0$ из второй и третьей строчки, для удобства вычислений берем $a_{21} = -1$.

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\overline{a}_i$
	2	2	-1	1	4
	-2	3	2	2	5
	1	1	-2	1	1
x_3	2	2	-1	1	4
	-6	-1	4	0	-3
	-1	-1	-1	0	-3
x_3	-10	0	7	1	-2
x_1	6	1	-4	0	3
	5	0	-5	0	0

Все элементы второй строки a_{2j} $(j = 1,2,3)$ делим на этот разрешающий элемент. Все элементы разрешающего столбца a_{i1} $(i = 1,3)$, кроме элемента a_{21}, обнуляем. Все остальные элементы таблицы вычисляем по правилу прямоугольника.

$$a'_{10} = a_{10} - \frac{a_{20} \cdot a_{11}}{a_{21}} = 2 - \frac{(-6)\cdot 2}{(-1)} = 2 - 12 = -10 ;$$

$$a'_{30} = a_{30} - \frac{a_{20} \cdot a_{31}}{a_{21}} = -1 - \frac{(-6)\cdot(-1)}{(-1)} = -1 + 6 = 5 ;$$

$$a'_{12} = a_{12} - \frac{a_{11} \cdot a_{22}}{a_{21}} = (-1) - \frac{2 \cdot 4}{(-1)} = -1 + 8 = 7 ;$$

$$a'_{32} = a_{32} - \frac{a_{22} \cdot a_{31}}{a_{21}} = (-1) - \frac{4 \cdot (-1)}{(-1)} = -1 - 4 = -5 .$$

Третий столбец в новую таблицу можно переписать без изменений, т.к. в разрешающей строке в третьем столбце стоит ноль. Записываем полученные данные в таблицу. Осуществляем контроль:

$$\overline{a}'_1 = -10 + 0 + 7 + 1 = -2 ;$$

$$\overline{a}'_2 = 6 + 1 + (-4) + 0 = 3 ;$$

$$\overline{a}'_3 = 5 + 0 + (-5) + 0 = 0 .$$

Так как элементы контрольного столбца, вычисленные по правилу прямоугольника, равны элементам контрольного столбца, вычисленным суммированием элементов по строке, то полученная таблица составлена верно. Выбранному разрешающему элементу соответствовала переменная x_1, следовательно, переменную x_1 записываем в базис. Переходим к следующему шагу.

3-й шаг. Выбираем разрешающий элемент из третьей строчки, т.к. в этой третьей строке только один элемент отличный от нуля, то в качестве разрешающего элемента выбираем этот элемент $a_{32} = -5$.

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\overline{a}_i$
	2	2	-1	1	4
	-2	3	2	2	5
	1	1	-2	1	1
x_3	2	2	-1	1	4
	-6	-1	4	0	-3
	-1	-1	-1	0	-3
x_3	-10	0	7	1	-2
x_1	6	1	-4	0	3
	5	0	-5	0	0
x_3	-3	0	0	1	-2
x_1	2	1	0	0	3
x_2	-1	0	1	0	0

Все элементы третьей строки a_{3j} $(j = 1,2,3)$ делим на этот разрешающий элемент. Все элементы разрешающего столбца a_{i2} $(i = 1,2)$, кроме элемента a_{32}, обнуляем. Все остальные элементы таблицы вычисляем по правилу прямоугольника.

$$a'_{10} = a_{10} - \frac{a_{30} \cdot a_{12}}{a_{32}} = -10 - \frac{5 \cdot 7}{(-5)} = -10 + 7 = -3\ ;$$

$$a'_{20} = a_{20} - \frac{a_{30} \cdot a_{22}}{a_{32}} = 6 - \frac{5 \cdot (-4)}{(-5)} = 6 - 4 = 2\ ;$$

Первый, третий и контрольный столбцы в новую таблицу можно переписать без изменений, т.к. в разрешающей строке в первом, третьем и контрольном столбцах стоят нули. Записываем полученные данные в таблицу. Осуществляем контроль:

$$\overline{a}'_1 = -3 + 0 + 0 + 1 = -2\ ;$$

$$\overline{a}'_2 = 2 + 1 + 0 + 0 = 3\ ;$$

$$\bar{a}'_3 = -1 + 0 + 1 + 0 = 0\ .$$

Если элементы контрольного столбца, вычисленные по правилу прямоугольника, равны элементам контрольного столбца, вычисленным суммированием элементов по строке, то полученная таблица составлена верно. Выбранному разрешающему элементу соответствовала переменная x_2, следовательно, переменную x_2 записываем в базис.

Если все строки побывали разрешающими и система приведена к единичному базису, то выписываем ответ:

$$\begin{cases} x_1 = \quad 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Таким образом, представленная систем линейных алгебраических уравнений является определенной, а ее решение –набор чисел $(2;-1;-3)$.

Пример. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3; \\ x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases}$$

Для решения данной системы составим таблицу.

Шаг 1. На первом шаге выбираем разрешающий элемент a_{31}. В результате выполнения алгоритма Жордана-Гаусса получим систему:

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\bar{a}_i$
	5	3	1	4	13
	-3	1	-1	2	-1
	1	1	3	0	5
	2	0	-8	4	-2
	-4	0	-4	2	-6
x_1	1	1	3	0	5

Шаг 2. На втором шаге возьмем в качестве разрешающего элемента a_{23}.

Выполняя преобразования таблицы получим:

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\bar{a}_i$
	5	3	1	4	13
	-3	1	-1	2	-1
	1	1	3	0	5
	2	0	-8	4	-2
	-4	0	-4	2	-6
x_1	1	1	3	0	5
	10	0	0	0	10
x_3	-2	0	-2	1	-3
x_1	1	1	3	0	5

Как видим из таблицы, первое уравнение системы является противоречивым, поскольку все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член уравнения равен десяти.

Таким образом решаемая система не имеет решений и является несовместной.

Пример. Решим систему линейных алгебраических уравнений методом Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

Для решения системы составим таблицу.

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\bar{a}_i$
	5	3	1	4	13
	-3	1	-1	2	-1
	-1	5	-1	8	11

Шаг 1. В качестве разрешающего элемента выберем a_{12}. После преобразований получим:

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\overline{a}_i$
	5	3	1	4	13
	-3	1	-1	2	-1
	-1	5	-1	8	11
x_2	5	3	1	4	13
	2	4	0	6	12
	4	8	0	12	24

Шаг 2. На втором шаге возьмем в качестве разрешающего элемента a_{21}. Выполняя преобразования таблицы получим:

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\overline{a}_i$
	5	3	1	4	13
	-3	1	-1	2	-1
	-1	5	-1	8	11
x_2	5	3	1	4	13
	2	4	0	6	12
	4	8	0	12	24
x_2	$\frac{7}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	4
x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$	3
	0	0	0	0	0

Система имеет бесконечное множество решений поскольку количество базисных переменных равно двум. Из последней части таблицы восстановим систему:

$$\begin{cases} x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{7}{2}; \\ x_1 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные x_1 и x_2 через свободную переменную x_3:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}x_3; \\ x_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}x_3. \end{cases}$$

В результате получим общее решение системы:

$$X = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_3; \frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_3;\ x_3\right),\ x_3 \in R.$$

23.4. Тождественные преобразования систем

23.4.1. Преобразования однократного замещения

С помощью метода Жордана Гаусса можно переходить от одного базисного решения системы линейных алгебраических уравнений к другому.

Если в системе m линейных уравнений с n неизвестными, которая приведена к единичному базису (т.е. найдено какое-либо базисное решение), перейти к любому другому базисному решению, то одна свободная переменная вводится в базис, а одна базисная превращается с свободную. Такое преобразование называется *однократным замещением*.

Используя однократные замещения, можно получить все базисные решения системы. Количество всех базисных решений определяется, как C_n^m.

Пример. Найдем все базисные решения системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

Решим систему методом Жордана-Гаусса. Составим таблицу:

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\bar{a}_i$
	5	3	1	4	13
	-3	1	-1	2	-1
	-1	5	-1	8	11

Шаг 1. В качестве разрешающего элемента выберем a_{12}. После преобразований получим:

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\bar{a}_i$
	5	3	1	4	13
	-3	1	-1	2	-1
	-1	5	-1	8	11
x_2	5	3	1	4	13
	2	4	0	6	12
	4	8	0	12	24

Шаг 2. На втором шаге возьмем в качестве разрешающего элемента a_{21}. Выполняя преобразования таблицы удалим из системы тривиальную строку:

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\bar{a}_i$
	5	3	1	4	13
	-3	1	-1	2	-1
	-1	5	-1	8	11
x_2	5	3	1	4	13
	2	4	0	6	12
	4	8	0	12	24
x_2	$\frac{7}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	4
x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$	3
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

Из таблицы выпишем первое базисное решение системы:

$$X_{баз1} = \left(\frac{1}{2};\ \frac{7}{2};\ 0\right).$$

Рассчитаем количество всех базисных решений:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3.$$

Таким образом, нам осталось найти еще два базисных решения. Найдем второе базисное решение. Для этого необходимо заменить одну из базисных переменных x_1 или x_2 на свободную переменную x_3.

Заменим базисную переменную x_1 на свободную переменную x_3. В качестве разрешающего элемента возьмем ячейку таблицы, находящуюся на пересечении второй строки и третьего столбца и произведем преобразования:

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\overline{a}_i$
x_2	$\frac{7}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	4
x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$	3
x_2	$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	5
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	2

Из таблицы выпишем второе базисное решение системы:

$$X_{баз.2}=\left(0;\ \frac{11}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Третье базисное решение можно найти, заменив базисную переменную x_2 на свободную переменную x_1:

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	$\overline{a}_i$
x_2	$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	5
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	2
x_1	11	1	3	0	15
x_3	-7	0	-2	1	-8

Произведя преобразования таблицы, получим третье решение:

$$X_{баз.3}=(11;\ 0;-7)$$

Таким образом, мы получили все базисные решения системы:

$$X_{баз.1}=\left(\frac{1}{2};\ \frac{7}{2};0\right),\ X_{баз.2}=\left(0;\ \frac{11}{3};\frac{1}{3}\right),\ X_{баз.3}=(11;\ 0;-7).$$

23.4.2. Симплексные преобразования

Симплексными преобразованиями называются такие преобразования однократного замещения, при которых на выбор разрешающего элемента накладываются следующие ограничения:

а) разрешающий элемент выбирают только в том столбце, где есть положительные элементы;

б) если положительный элемент один, то он берется в качестве разрешающего элемента;

в) если положительных элементов несколько, то в качестве разрешающего элемента берем тот, для которого отношение свободного члена к нему будет наименьшим.

С помощью симплексных преобразований находятся опорные решения.

Замечание. При нахождении опорных решений в правой части системы все свободные члены должны быть неотрицательными.

Пример. Найти все опорные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 1; \\ -x_3 + 2x_5 = -3. \end{cases}$$

Согласно замечанию, указанному выше, выполним преобразования системы таким образом, чтобы в правой части уравнений все свободные члены стали неотрицательными. В предложенной системе третье уравнение не соответствует критерию, следовательно, необходимо все его коэффициенты умножить на –1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 1; \\ -x_3 + 2x_5 = -3. \quad |\cdot(-1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 1; \\ x_3 - 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Рассматриваемая система может иметь $C_5^3 = 10$ базисных решений, однако не все из них могут быть опорными.

В нашем случае переменные x_2, x_3, x_4 уже являются базисными, а оставшиеся переменные x_1 и x_5 будут свободными. Составим таблицу.

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	2	1	1	0	0	-3	
x_4	1	3	0	0	1	1	
x_3	3	0	0	1	0	-2	

Из таблицы уже можно выписать первое опорное решение

$$X_{опор1} = (0; 2; 3; 1; 0).$$

Для перехода к другому базису разрешающий элемент необходимо выбрать в столбце, соответствующему свободной переменной, таких у нас два: первый и пятый. В качестве разрешающего столбца возьмем, например, пятый столбец, а так как в нем только один положительный элемент, единица во второй строке, то берем его качестве разрешающего. Таким образом, мы поменяем базисную переменную x_4 на x_5. Методом Жордана-Гаусса проведем преобразование системы.

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	5	10	1	0	3	0	5:10=0,5
x_5	1	3	0	0	1	1	1:3$\approx$0,3 - min
x_3	5	6	0	1	2	0	5:6$\approx$0,8

Теперь базисными переменными стали переменные x_2, x_3, x_5, а свободными – x_1 и x_4. Выпишем новое опорное решение:

$$X_{опор2} = (0; 5; 5; 0; 1).$$

Теперь для перехода к новому базису разрешающим можно взять столбец, соответствующий свободной переменной x_1. Так как все элементы первого столбца положительны, то в качестве разрешающего элемента берем тот, для которого отношение свободного члена к нему будет наименьшим. Проверим эти отношения.

Для первого элемента столбца отношение равно 5:10=0,5; для второго – 1:3 $\approx$0,33; для третьего – 5:6$\approx$0,83. Минимальным является отношение свободного члена к коэффициенту во второй строке, поэтому в качестве разрешающего элемента возьмем a_{21}.

Еще раз проведем преобразование системы уравнений:

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	
x_1	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
x_3	3	0	0	1	0	-2	

Теперь базисными переменными стали переменные x_1, x_2, x_3, а свободными – x_4 и x_5. Выпишем третье опорное решение:

$$X_{опор.3} = \left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};3;0;0\right).$$

Теперь обратим внимание а то, что в четвертом и пятом столбцах положительные элементы находятся только во второй строке, соответствующей базисной переменной x_1. Следовательно, переход к новому базису может быть осуществлен заменой переменной x_1 на x_4 или x_1 на x_5. Однако в этих случаях мы получим уже найденные опорные решения $X_{опор1} = (0;2;3;1;0)$ и $X_{опор2} = (0;5;5;0;1)$, а значит других опорных решений больше нет. Все остальные $10-3=7$ базисных решений нашей системы, которые модно получить с помощью однократных замещений без учета симплексных условий, опорными являться не будут.

Таким образом, решений всего три:

$$X_{опор.1} = (0;2;3;1;0),\ X_{опор.2} = (0;5;5;0;1),\ X_{опор.3} = \left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};3;0;0\right).$$

23.5. Симплексный метод решения задач линейного программирования

Симплексный метод был предложен американским математиком Джорджем Бернардом Данцигом (1914 – 2005) в 1947 году.

Симплексный метод –- это метод последовательного перехода от одного базисного решения (вершины n-мерного многогранника решений) системы ограничений задачи линейного программирования к другому базисному решению до тех пор, пока функция цели не примет оптимального значения (максимума или минимума).

Симплексный метод является универсальным методом, которым можно решить задачи линейного программирования, содержащие любое количество переменных, в то время, как графический метод пригоден только для систем с двумя переменными. Метод повсеместно используется для решения задач линейного программирования с большим количеством переменных и ограничений.

23.5.1. Описание симплексного метода

Рассмотрим задачу линейного программирования.

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \quad ... \quad + C_nx_n \to \max(\min)$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = a_{m0}, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0$$

Рассмотрим алгоритм решения этой задачи симплексным методом.

1. Прежде чем решать задачу симплексным методом, нужно удостовериться, что правые части системы ограничений неотрицательны, т.е. $a_{i0} \geq 0$. Если это не так, то в соответствующих ограничениях меняем знак.

2. Исходную задачу необходимо записать в канонической форме. Для этого каждое ограничение-неравенство вида"$\leq$" нужно превратить в уравнение добавлением дополнительной неотрицательной (балансовой) переменной, а каждое ограничение-неравенство вида "$\geq$" превратить в равенство вычитанием балансовой переменной. Таким образом, все ограничения в задаче станут уравнениями с неотрицательными правыми частями.

3. Систему уравнений при помощи симплексных преобразований нужно привести к единичному базису, то есть найти исходное опорное решение X_1.

4. Для того, чтобы проверить будет ли это решение оптимальным,

необходимо составить оценочную строку (Z-строку) по следующему правилу:

$$Z_j = C_{баз} \cdot A_j - C_j, \quad j = 0,1,...,n,$$

где Z_j – искомый элемент Z – строки;

$C_{баз}$ – столбец коэффициентов целевой функции;

A_j – столбец коэффициентов при неизвестном x_j;

A_0 – столбец свободных членов;

$C_{баз} \cdot A_j$ – скалярное произведение указанных столбцов – векторов;

c_j – коэффициент целевой функции при неизвестном x_j.

5. *Для задачи на максимум*

Если в Z– строке все элементы положительные $Z_j \geq 0$, то найдено оптимальное решение $X_{\max} = X_1, \quad Z_{\max} = Z_0$. Если же в Z– строке есть хоть один отрицательный элемент, то найденное решение не оптимально. Есть возможность его улучшения. Для этого среди отрицательных элементов Z – строки находим минимальный (например, Z_p). Столбец с номером p становится разрешающим. Разрешающую строку выбираем по симплексным преобразованиям (для этого в симплексной таблице заводится последний столбец). В столбце с номером p в качестве разрешающего элемента берется положительный элемент, если он один. Если в этом столбце положительных элементов несколько, то берется тот из них, для которого отношение свободных членов к этим положительным элементам будет наименьшее. Если в столбце с номером p вообще нет положительных элементов, то задача не имеет оптимального решения и $Z_{\max} \to \infty$. После того, как разрешающий элемент найден, производим расчеты по методу Гаусса, включая и элементы Z – строки. Получаем новое опорное решение. После этого возвращаемся к началу пункта 5.

6. *Для задачи на минимум*

Если в Z – строке все элементы $Z_j \leq 0$, то найдено оптимальное решение $X_{\min} = X_1, \quad Z_{\min} = Z_0$. Если же в Z – строке есть хоть один положительный элемент, то найденное решение не оптимально. Для улучшения решения среди положительных элементов Z – строки находим максимальный (например, Z_q). Столбец с номером q становится разрешающим. Разрешающую строку ищем по симплексным преобразованиям (смотреть задачу на максимум.) Если в столбце с номером q нет положительных элементов, то задача не имеет оптимального решения и $Z_{\min} \to -\infty$. После того, как разрешающий элемент выбран, выполняем расчеты по методу Гаусса, включая и элементы Z – строки, и получаем новое опорное решение. Переходим к началу пункта 6. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение или мы не убедимся, что его нет.

23.5.2. Решение задач симплексным методом

Рассмотрим примеры применения симплексного метода для решения задач на оптимизацию.

Пример. Решим задачу линейного программирования на минимум:

$$z(x) = 7x_1 - 5x_2 + 10x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 12, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 24, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

Приведем задачу линейного программирования к каноническому виду. Для этого в левую часть каждого неравенства типа "≤" добавляем новые дополнительные переменные x_4, x_5, x_6 (новые балансовые переменные). Таким образом, задача примет вид:

$$z(x) = 7x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 12, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5,6.$$

Наша задача уже имеет исходное опорное решение, базисными в ней являются переменные x_4, x_5, x_6. Составим симплексную таблицу.

Левый столбец таблицы заполним коэффициентами целевой функции соответствующими базисным переменным x_4, x_5, x_6. Над каждой переменной заголовка таблицы также выпишем коэффициенты из целевой функции, а основную часть таблицы заполним коэффициентами системы ограничений.

$C_{базис}$	*Базис*	a_{i0}	7	-5	10	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	12	2	-2	3	1	0	0	
0	x_5	2	-1	1	-1	0	1	0	
0	x_6	24	2	1	2	0	0	1	
	Z								

Для того, чтобы проверить, будет ли это решение оптимальным, составим оценочную строку (Z -строку) по правилу: $Z_j = C_{баз} \cdot A_j - C_j, \quad j = 0, 1, ..., n$.

Найдем коэффициенты оценочной строки:

$$z_0 = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 24 = 0,$$

$$z_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 - 7 = -7,$$

$$z_2 = 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - (-5) = 5,$$

$$z_3 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 - 10 = -10,$$

$$z_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$z_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$z_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

Внесем найденные коэффициенты в нижнюю строку таблицы:

$C_{базис}$	*Базис*	a_{i0}	7	-5	10	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	12	2	-2	3	1	0	0	–
0	x_5	2	-1	1	-1	0	1	0	2:1=2 – min
0	x_6	24	2	1	2	0	0	1	24:1=24
	Z	0	-7	5	-10	0	0	0	

Так как в оценочной строке среди z_j есть положительное число, то найденное решение не оптимально. Второй столбец, в котором содержится этот элемент, выберем в качестве разрешающего. Разрешающий элемент в этом столбце выбираем по методу минимального элемента (a_{i0} / a_{ij}). Отношение свободного члена к элементу столбца во второй строке минимально, следовательно, разрешающим будет элемент a_{21}.

Преобразование таблицы осуществим согласно методу Жордана-Гаусса.

$C_{базис}$	Базис		7	-5	10	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	16	0	0	1	1	2	0	
-5	x_2	2	-1	1	-1	0	1	0	
0	x_6	22	3	0	3	0	-1	1	
	Z								

Снова рассчитаем коэффициенты оценочной строки:

$$z_0 = 0 \cdot 16 - 5 \cdot 2 + 0 \cdot 22 = -10;$$

$$z_1 = 0 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 - 7 = -2;$$

$$z_2 = 0 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - (-5) = 0;$$

$$z_3 = 0 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 - 10 = -5;$$

$$z_4 = 0 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$z_5 = 0 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) - 0 = -5;$$

$$z_6 = 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

Заполним нижнюю строку таблицы найденными коэффициентами:

$C_{базис}$	Базис		7	-5	10	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	16	0	0	1	1	2	0	
-5	x_2	2	-1	1	-1	0	1	0	
0	x_6	22	3	0	3	0	-1	1	
	Z	-10	-2	0	-5	0	-5	0	

Так как все элементы оценочной строки $z_j \le 0$, то полученное на втором шаге решение оптимально. Оптимальное решение можно записать в виде:

$$X_{opt} = (0;\ 2;\ 0;\ 16;\ 0;\ 22).$$

Исходная задача имела три переменных, поэтому в оптимальном решении последние три дополнительные переменные записывать не нужно:

$$X_{opt} = (0;\ 2;\ 0).$$

Рассчитаем минимальное значение целевой функции:

$$Z_{\min} = 7 \cdot 0 - 5 \cdot 2 + 10 \cdot 0 = -10.$$

Таким образом, оптимальное решение задачи будет следующим:

$$X_{opt} = (0;\ 2;\ 0),\ Z_{\min} = -10.$$

Пример. Решим еще одну задачу линейного программирования

$$z(x) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 \le 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

Для представления задачи в каноническом виде введем новые балансовые переменные x_4 и x_5:

$$z(x) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \min,$$
$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5.$$

Для получения опорного решения необходимо провести симплексное преобразование. Первый и пятый столбцы системы положительных элементов не содержит, а четвертый столбец уже является базисным, таким образом, в качестве разрешающего столбца можно выбрать только второй или третий столбцы, имеющие положительные элементы.

Возьмем в качестве разрешающего второй столбец. Разрешающую строку выберем из отношения свободных членов к коэффициентам второго столбца.

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
x_4	1	0	-1	1	1	0	–
	2	-5	1	1	0	0	2:1=2 – min
	3	-8	1	2	0	-1	3:1=3

После симплексного преобразования мы получили уже две базисные переменные: x_2 и x_4. Однако опорного решения еще не получено, следовательно, необходимо провести еще одно преобразование. В качестве разрешающего элемента возьмем a_{33}.

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
x_4	3	-5	0	2	1	0	3:2=1,5
x_2	2	-5	1	1	0	0	2:1=2
	1	-3	0	1	0	-1	1:1=1– min

Преобразованная система уже имеет исходное опорное решение, базисными в ней являются переменные x_2, x_3, x_4.

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
x_4	1	1	0	0	1	2	
x_2	1	-2	1	0	0	1	
x_3	1	-3	0	1	0	-1	

Составим симплексную таблицу. Левый столбец таблицы заполним коэффициентами целевой функции соответствующими базисным переменным

x_2, x_3, x_4. Над переменными заголовка также выпишем коэффициенты из целевой функции, а основную часть таблицы заполним коэффициентами системы ограничений.

$C_{базис}$	*Базис*	a_{i0}	3	-1	-4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	1	1	0	0	1	2	
-1	x_2	1	-2	1	0	0	1	
-4	x_3	1	-3	0	1	0	-1	
	z							

Найдем коэффициенты оценочной строки:

$$z_0 = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -5;$$

$$z_1 = 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) - 4 \cdot (-3) - 3 = 11;$$

$$z_2 = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 4 \cdot 0 - (-1) = 0;$$

$$z_3 = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 - (-4) = 0;$$

$$z_4 = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$z_5 = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) - 0 = 3.$$

Внесем найденные коэффициенты в нижнюю строку таблицы:

$C_{базис}$	*Базис*	a_{i0}	3	-1	-4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	1	1	0	0	1	2	1:1=1
-1	x_2	1	-2	1	0	0	1	–
-4	x_3	1	-3	0	1	0	-1	–
	z	-5	11	0	0	0	3	

В Z-строке два положительных элемента, значит найденное решение не является оптимальным. Для его улучшения среди положительных элементов Z-строки находим максимальный, это Z_1=11. Столбец с номером 1 становится разрешающим. В нем в качестве разрешающего выберем единственный положительный элемент $a_{11} = 1$.

Снова методом Жордана-Гаусса осуществим преобразование таблицы:

$C_{базис}$	*Базис*		3	-1	-4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_1	1	1	0	0	1	2	
-1	x_2	3	0	1	0	2	5	
-4	x_3	4	0	0	1	4	5	
	z							

Найдем коэффициенты оценочной строки и впишем их в таблицу:

$$z_0 = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = -16;$$

$$z_1 = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 3 = 0;$$

$$z_2 = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 4 \cdot 0 - (-1) = 0;$$

$$z_3 = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 - (-4) = 0;$$

$$z_4 = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 0 = -15;$$

$$z_5 = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 - 4 \cdot 5 - 0 = -19.$$

$C_{базис}$	*Базис*		3	-1	-4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_1	1	1	0	0	1	2	
-1	x_2	3	0	1	0	2	5	
-4	x_3	4	0	0	1	4	5	
	z	-16	0	0	0	-15	-19	

Так как все элементы оценочной строки отрицательны или равны нулю, то полученное на втором шаге решение оптимально. Это решение можно записать в виде:

$$X_{opt} = (1;\ 3;\ 4;\ 0;\ 0).$$

Исходная задача имела три переменных, поэтому в оптимальном решении последние две балансовые переменные записывать не нужно. Окончательно получим:

$$X_{opt} = (1;\ 3;\ 4).$$

Рассчитаем минимальное значение целевой функции:

$$Z_{\min} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = -16.$$

Таким образом, оптимальное решение задачи будет следующим:

$$X_{opt} = (1;\ 3;\ 4),\ Z_{\min} = -16.$$

23.6. Двойственные задачи

Любой задаче линейного программирования, называемой *исходной* или *прямой,* можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется *двойственной* или *сопряженной.* Обе эти задачи образуют пару двойственных (или сопряженных) задач. Каждая из задач является двойственной к другой задаче рассматриваемой пары.

Предположим, что используется m различных видов ресурсов, объем которых ограничен величинами $b_1, b_2, ..., b_m$ и производится n различных видов продукции, величина выпуска которых определяется переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Известны нормы затрат каждого ресурса на единицу каждого вида продукции, образующие матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Известна также стоимостная оценка (цена) единицы продукции каждого вида $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Задача сводится к следующему: найти такие значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых расход ресурсов не превышает заданного их количества, а стоимость всей продукции достигает максимума.

В математической форме задача записывается следующим образом: максимизировать

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{2}$$

На базе тех же исходных данных может быть поставлена еще одна задача, в которой переменными величинами являются оценки y_1, y_2, …, y_m, приписываемые каждому виду ресурсов. Они должны быть такими, чтобы общая оценка всего имеющегося количества ресурсов была минимальной, но при условии, что суммарная оценка ресурсов, расходуемых на единицу любого вида продукции, будет не меньше, чем цена за эту единицу.

Математическая задача записывается следующим образом:

Минимизировать функцию

$$L = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_mx_m \tag{3}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \le c_2 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \le c_n \end{cases} \tag{4}$$

$$y_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Задачи (1) – (2) и (3) – (4) образуют пару взаимодвойственных задач, и любая из них может рассматриваться как исходная.

Эти задачи обладают следующими свойствами:

1. В одной задаче ищется максимум целевой функции, в другой – минимум.

2. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи, и наоборот.

3. В каждой задаче система ограничений задается в виде неравенств, причем в задаче, в которой ищется максимум целевой функции, все неравенства вида

«≤», а в задаче, в которой находится минимум целевой функции, все неравенства вида «≥».

4. Коэффициенты при переменных системах ограничений записываются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

транспонированными относительно друг друга.

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6. Условия неотрицательности переменных сохраняются в обоих задачах.

Пример. исходная задача

$$L = 10x_1 + 6x_2 - 4x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + x_3 \le -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}.$$

Приведем все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному знаку, после преобразования получим:

$$L = 10x_1 + 6x_2 - 4x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 9x_2 - x_3 \ge 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}.$$

Тогда двойственная задача будет записана следующим образом:

$$L = 2y_1 + 3y \to \max$$

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 \le 10 \\ 9y_1 + 2y_2 \le 6 \\ -y_1 + -5y_2 \le -4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

В теории двойственности используются четыре пары двойственных задач (приведем их в матричной форме записи):

	Исходная задача	Двойственная задача
	Симметричные пары	
1	$Z(X)=CX\to\max,$ $AX\le A_0,$ $X\ge 0;$	$T(Y)=YA_0\to\min,$ $YA\ge C,$ $Y\ge 0.$
2	$Z(X)=CX\to\min,$ $AX\ge A_0,$ $X\ge 0;$	$T(Y)=YA_0\to\max,$ $YA\le C,$ $Y\ge 0.$

	Исходная задача	Двойственная задача
	Несимметричные пары	
3	$Z(X)=CX\to\max,$ $AX=A_0,$ $X\ge 0;$	$T(Y)=YA_0\to\min,$ $YA\ge C.$
4	$Z(X)=CX\to\min,$ $AX=A_0,$ $X\ge 0;$	$T(Y)=YA_0\to\max,$ $YA\le C.$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad A_0=\begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{m0} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

23.6.1. Правила составления двойственных задач

Правило 1. Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными – в левой.

Правило 2. Ограничения – неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

Правило 3. Если знаки неравенств в ограничениях исходной задачи « $\le$ », то целевая функция $Z(X)=c_0+c_1x_1+c_2x_3+...+c_nx_n$ должна максимизироваться, а если « $\geq$ », то минимизироваться.

Правило 4. Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестное, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.

Правило 5. Целевая функция двойственной задачи имеет вид

$$T(Y)=c_0+b_1y_1+b_2y_2+...+b_ny_n,$$

где c_0 – свободный член целевой функции $Z(X)$ исходной задачи, $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m$ – свободные члены в ограничениях исходной задачи, при этом b_i – свободный член именно того ограничения исходной задачи, которому соответствует неизвестная y_i, а $y_1,\ y_2,\ ...,y_n$ – неизвестные в двойственной задаче.

Правило 6. Целевая функция $T(Y)$ двойственной задачи должна оптимизироваться противоположным по сравнению с $Z(X)$ образом, т.е. если $Z(X)\to\max$, то $T(Y)\to\min$, и если $Z(X)\to\min$, то $T(Y)\to\max$.

Правило 7. Каждому неизвестному x_j, $j=1,2,...,n$ исходной задачи соответствует ограничение в двойственной задаче. Совокупность этих n ограничений (вместе с условиями неотрицательности неизвестных y_i, соответствующих ограничениям-неравенствам исходной задачи) образует систему ограничений двойственной задачи. Все ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств, свободные члены которых находятся в правых частях, а члены с неизвестными $y_1,\ y_2,\ ...,y_m$ – в левых. Все знаки неравенств имеют вид «$\geq$», если $T(Y)\to\min$, и «$\leq$», если $T(Y)\to\max$.

Коэффициенты, с которыми неизвестные $y_1,\ y_2,\ ...,\ y_m$ входят в ограничение, соответствующее неизвестному x_j, совпадают с коэффициентами при этом неизвестном x_j в ограничениях исходной задачи, а именно:

коэффициент при y_i совпадает с тем коэффициентом при x_j, с которым x_j входит в ограничение исходной задачи, соответствующее неизвестному y_i.

Пример. Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 5, \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 \ge 0, \\ x_1 - 4x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Используем общие правила составления двойственных задач. Поскольку исходная задача на «минимум», то все ограничения в системе ограничений должны содержать знак «$\ge$». Умножим первое ограничение-неравенство на -1.

Задача примет вид одной из задач симметричной пары двойственных задач.

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 \ge -5, & \Big| y_1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 \ge 0, & \Big| y_2 \\ x_1 - 4x_2 \ge 1, & \Big| y_3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Так как система ограничений исходной задачи содержит три ограничения, то двойственная задача будет содержать три переменные: y_1, y_2 и y_3.

Умножим правые части ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим целевую функцию

$$T(Y) = -5y_1 + y_3 \to \max.$$

Функция $T(Y)$ максимизируется, так как целевая функция исходной задачи стремится к минимуму.

Умножим коэффициенты при x_1 в системе ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим $-y_1 + 5y_2 + y_3$. Данная сумма меньше или равна коэффициенту при x_1 в целевой функции $-y_1 + 5y_2 + y_3 \le 2$. Неравенство имеет вид « $\le$ », потому что целевая функция двойственной задачи максимизируется. Аналогично составляют ограничение двойственной задачи для переменных x_2 и x_3:

$$-2y_1+3y_2-4y_3\le 1,$$

$$4y_1-7y_2\le -3.$$

Все переменные двойственной задачи удовлетворяют условию неотрицательности, так как все ограничения исходной задачи–неравенства.

Таким образом, искомая двойственная задача имеет вид.

$$T(Y)=-5y_1+y_3\to \max,$$

$$\begin{cases}-y_1+5y_2+y_3\le 2,\\ -2y_1+3y_2-4y_3\le 1,\\ 4y_1-7y_2\le -3,\end{cases}$$

$$y_i\ge 0, i=1,2,3.$$

Пример. Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X)=3x_1-x_3+5x_4\to \max,$$

$$\begin{cases}x_1-x_2-4x_3-5x_4\ge -5,\\ 3x_1+2x_2-5x_3+x_4=3,\end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,4.$$

Используем общие правила составления двойственных задач. Умножим первое ограничение – неравенство на -1. Задача примет вид одной из задач несимметричной пары двойственных задач.

$$\begin{cases}-x_1+x_2+4x_3+5x_4\le 5,\\ 3x_1+2x_2-5x_3+x_4=3,\end{cases}\qquad \begin{array}{|l}y_1\\ y_2\end{array}$$

Если система ограничений исходной задачи имеет два ограничения, то двойственная задача будет содержать две переменные: y_1 и y_2.

Умножим правые части ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим целевую функцию

$$T(Y)=5y_1+3y_2\to \min.$$

Функция $T(Y)$ минимизируется, так как целевая функция исходной задачи максимизируется.

Умножим коэффициенты при x_1 в системе ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим $-y_1+3y_2$. Данная сумма больше или равна коэффициенту при x_1 в целевой функции $-y_1+3y_2 \geq 3$. Неравенство имеет вид « $\geq$ », потому что целевая функция двойственной задачи минимизируется. Аналогично составляют ограничение двойственной задачи для переменной x_2:

$$\begin{cases} -y_1+3y_2 \geq 3, \\ y_1+2y_2 \geq 0, \\ 4y_1-5y_2=-1, \\ 5y_1+y_2 \geq 5. \end{cases}$$

Третье ограничение в системе ограничений двойственной задачи является равенством, так как третья переменная исходной задачи не удовлетворяет условию неотрицательности, т.е. может быть любого знака.

Первая переменная двойственной задачи удовлетворяет условию неотрицательности, так как первое ограничение исходной задачи – неравенство, а вторая переменная может быть любого знака, т.к. второе ограничение – равенство.

$$y_1 \geq 0.$$

Таким образом, двойственная задача имеет вид

$$T(Y)=5y_1+3y_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -y_1+3y_2 \geq 3, \\ y_1+2y_2 \geq 0, \\ 4y_1-5y_2=-1, \\ 5y_1+y_2 \geq 5, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0.$$

Выводы. Второй вопрос лекции посвящен правилам составления двойственных задач. В этом вопросе мы не только изучили алгоритмы составления двойственных задач, но и подробно рассмотрели примеры.

23.6.2. Первая и вторая теоремы двойственности

Установить взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач позволяют теоремы двойственности. Решив одну из пары двойственных задач, можно или найти оптимальное решение другой задачи, не решая ее, или установить его отсутствие.

Возможны следующие случаи:

- обе задачи из пары двойственных имеют оптимальные решения;
- одна из задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, а другая - ввиду несовместности системы ограничений;
- обе задачи из пары двойственных не имеют решений из-за неограниченности целевых функций.

Первая теорема двойственности.

1. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и двойственная к ней имеет оптимальное решение; причем значения целевых функций задач на своих оптимальных решениях совпадают.

2. Если одна из пары двойственных задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Вторая теорема двойственности.

Пусть имеется симметричная пара двойственных задач:

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad T(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i x_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,2,\dots,m, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j=1,2,\dots,n,$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,2,\dots,n. \qquad y_i \ge 0, \quad i=1,2,\dots,m.$$

Для того чтобы допустимые решения $X=(x_1,\, x_2,\, \dots, x_n)$, $Y=(y_1,\, y_2,\, \dots, y_m)$ являлись оптимальными решениями пары, двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j\right)=0, \quad j=1,\, 2,\, \dots, n;$$

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right)=0, \quad i=1,\, 2,\, \dots, m.$$

Иначе, если при подстановке оптимального решения в систему ограничений i-е ограничение исходной задачи выполняется как строгое неравенство, то i-я координата оптимального решения двойственной задачи равна нулю, и, наоборот, если i-я координата оптимального решения двойственной задачи отлична от нуля, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется оптимальным решением как равенство.

Пример. Составим задачу, двойственную к данной, решим ее и найдем решение исходной задачи.

$$Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 3, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Преобразуем систему ограничений, получим

$$Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 3, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Используя вторую симметричную пару двойственных задач, составляем задачу двойственную к исходной:

$$T(Y) = y_1 - y_2 + 3y_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 6, \\ y_1 + y_2 - y_3 \leq 2, \end{cases}$$
$$y_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3.$$

Найдем решение полученной задачи симплексным методом. Для составления симплекс–таблицы запишем двойственную задачу в каноническом виде.

$$T(Y) = y_1 - y_2 + 3y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 \to \max,$$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 2, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 + y_5 = 6, \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_6 = 2, \end{cases}$$
$$y_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Построим таблицу.

$C_{базис}$	*Базис*		1	-1	3	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$
		a_{i0}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	2	-1	2	1	1	0	0	2:1=2– min
0	y_5	6	1	3	1	0	1	0	6:1=6
0	y_6	2	1	1	-1	0	0	1	–
	T	0	-1	1	<u>-3</u>	0	0	0	
	y_3	2	-1	2	1	0	0	0	–
	y_5	4	2	1	0	-1	1	0	4:2=2
	y_6	4	0	3	0	1	0	1	–
	T	6	<u>-4</u>	7	0	3	0	0	
	y_3	4	0	5/2	1	-1/2	1/2	0	
	y_1	2	1	1/2	0	-1/2	1/2	0	
	y_6	4	0	3	0	1	0	1	
	T	14	0	9	0	1	2	0	

Оптимальное решение двойственной задачи, записанной в канонической форме, имеет вид $Y = (2; 0; 4; 0; 0; 4)$. Значение целевой функции $T_{\max}(Y) = 14$. Базисными являются переменные y_1, y_3 и y_6. Согласно первой теореме двойственности, если двойственная задача имеет решение, то и исходная задача также имеет решение. Значение целевой функции исходной задачи $Z_{\min}(X) = T_{\max}(Y) = 14$.

Оптимальное решение исходной задачи можно найти по формуле
$$x_j = z_j + c_j,\ j = 1, 2, 3.$$

Для этого к оценкам, расположенным в T– строке последней таблицы, соответствующим базисным переменным y_4, y_5, y_6 начального опорного решения, необходимо прибавить соответствующие коэффициенты целевой функции:

$$x_1 = 1 + 0 = 1,\ x_2 = 2 + 0 = 2,\ x_3 = 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, оптимальное решение исходной задачи $X = (1; 2; 0)$.

Ответ: $Y = (2; 0; 4)$, $T_{\max}(Y) = 14$, $X = (1; 2; 0)$, $Z_{\min}(X) = 14$.

Пример. Составить задачу, двойственную к данной, решить ее и найти решение исходной задачи.

$$Z(X) = 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 10x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Составим двойственную задачу по отношению к данной, получим

$$T(Y) = 3y_1 + 10y_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \leq 6, \\ y_1 - y_2 \leq 4, \\ -y_1 - y_2 \leq -2, \\ y_1 + 2y_2 \leq 10, \end{cases}$$
$$\forall y_i,\ i = 1, 2.$$

Переменные y_i, $i = 1, 2$ могут принимать любые значения, так как все ограничения в системе ограничений исходной задачи являются равенствами. Получили несимметричную пару двойственных задач.

Решим двойственную задачу графическим методом.

(1) $-y_1 + 2y_2 = 6$

y_1	0	-6
y_2	3	0

(2) $y_1 - y_2 = 4$

y_1	0	4
y_2	-4	0

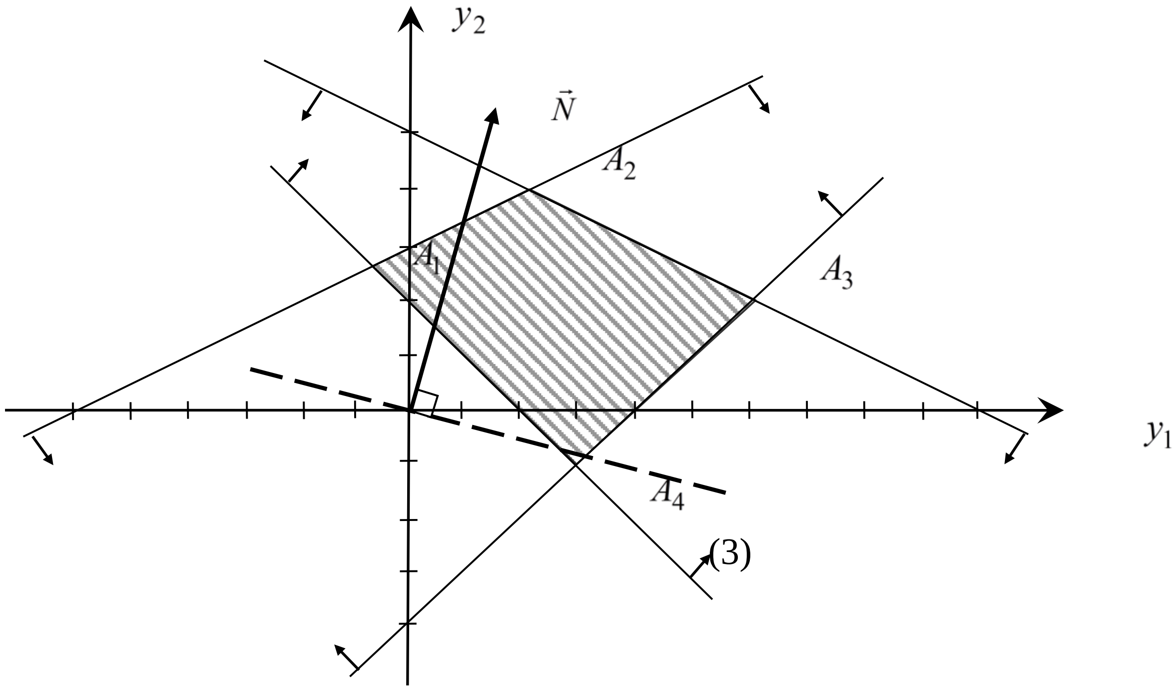
(3) $-y_1 - y_2 = -2$

y_1	0	2
y_2	2	0

(4) $y_1 + 2y_2 = 10$

y_1	0	10
y_2	5	0

В плоскости y_1Oy_2 строим область допустимых решений, вектор–градиент целевой функции $\vec{N}(3;10)$, линию уровня $3y_1+10y_2=0$. Так как двойственная задача на «максимум», то, передвигая линию уровня в направлении возрастания вектора – градиента, определяем точку «выхода» из ОДР. В этой точке целевая функция будет достигать своего максимума.



Областью допустимых решений является многоугольник $A_1A_2A_3A_4$. Точка «выхода» – A_2. Найдем координаты точки $A_2=(1)\cap(4)$. Составим и решим систему:

$$\begin{cases} -y_1+2y_2=6, \\ y_1+2y_2=10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=2, \\ y_2=4. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальное решение двойственной задачи $Y=(2;4)$, $T_{\max}(Y)=T(2;4)=3\cdot 2+10\cdot 4=46$.

Найдем решение исходной задачи. Подставим оптимальное решение $Y=(2;4)$ в систему ограничений двойственной задачи, получим

$$\begin{cases} -2+2\cdot 4=6, & \\ 2-4<4, & \Rightarrow x_2=0, \\ -2-4<-2, & \Rightarrow x_3=0, \\ 2+2\cdot 4=10. & \end{cases}$$

Второе и третье ограничения выполняются как строгие неравенства. Согласно второй теореме двойственности соответствующие переменные оптимального решения исходной задачи равны нулю, т.е. $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Учитывая это, найдем оптимальное решение из системы ограничений исходной задачи

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_4 = 10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_4 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, получаем $X = (1;0;0;4)$, $Z_{\min}(X) = T_{\max}(Y) = 46$.

Ответ: $Y = (2;4)$, $T_{\max}(Y) = 46$, $X = (1;0;0;4)$, $Z_{\min}(X) = 46$.

Вторая теорема двойственности

Пусть имеется симметричная пара двойственных задач:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad T(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i x_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \qquad y_i \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Для того чтобы допустимые решения $X = (x_1,\ x_2,\ ...,x_n)$, $Y = (y_1,\ y_2,\ ...,y_m)$ *являлись оптимальными решениями пары, двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:*

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = 1,\ 2,\ ...,n;$$

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = 1,\ 2,\ ...,m.$$

Вопросы для самоконтроля

3. Сформулируйте цель математического программирования.

4. Перечислите основные этапы решения задач математического программирования.

5. Какие элементы включается в задачу линейного программирования?

6. Определите формы постановки задач линейного программирования.

7. Каким способом можно решить задачу линейного программирования,

включающую только две независимых переменных, если ЗЛП задана в общей или стандартной формах?

8. Каким образом геометрически изображается система ограничений задачи линейного программирования?

9. Чем отличаются область возможных решений и область допустимых решений задачи линейного программирования?

10. Какие координаты будет иметь вектор-градиент при графическом способе решения задачи линейного программирования?

11. В каких случаях задача линейного программирования будет иметь бесконечное множество решений?

12. Опишите алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Жордана Гаусса.

13. Для чего в расчетной таблице определен контрольный столбец? Какие действия следует производить в этом столбце?

14. Каким образом при заполнении расчетной таблицы используется правило прямоугольника?

15. Какие из полученных методом Жордана-Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений называются базисными?

16. Каково максимально возможное число базисных решений системы линейных алгебраических уравнений?

17. Определите понятие опорных решений системы линейных алгебраических уравнений.

18. В каком случае система линейных алгебраических уравнений является определенной, в а каком неопределенной?

19. Для чего используется метод однократного замещения?

20. Опишите алгоритм перехода с помощью метода Жордана-Гаусса от одного базисного решения системы линейных алгебраических уравнений к другому.

21. Раскройте понятие симплексного преобразования системы линейных алгебраических уравнений.

22. Какие ограничения накладываются на выбор разрешающего элемента при преобразовании систем линейных алгебраических уравнений симплексным методом?

23. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Нахождение опорного решение задачи.

24. В чем заключается основной смысл симплексного метода решения задач линейного программирования?

25. Чем отличаются алгоритмы решения симплексным методом задач линейного программирования на минимум и на максимум?

26. Для чего в симплексном методе решения задач линейного программирования используется оценочная строка?

27. Продемонстрируйте на примере алгоритм симплексного метода решения задач линейного программирования.

28. В каком случае задача линейного программирования является двойственной к другой задаче линейного программирования?

29. Какими свойствами обладают двойственные задачи линейного программирования?

30. Какие пары двойственных задач используются в теории двойственности?

31. Перечислите правила составления двойственных задач линейного программирования.

32. Теория двойственности. Основные понятия и определения.

33. Составление математических моделей двойственных задач.

34. Сформулируйте первую теорему двойственности.

35. Сформулируйте вторую теорему двойственности.

36. Каким образом применяются графический и симплексный методы решения двойственных задач линейного программирования.

Глава 24. Линейная транспортная задача

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных специальных задач линейного программирования и поэтому обладает всеми качествами линейных оптимизационных задач, но одновременно она имеет и ряд дополнительных полезных свойств, которые позволили разработать специальные методы ее решения.

Проблема была впервые формализована в 1781 году французским математиком Гаспаром Монжем (1746 – 1818). Первая строгая постановка транспортной задачи принадлежит Фрэнку Лорену Хичкоку (1875 –1957), поэтому в зарубежной научной литературе ее называют проблемой Хичкока.

Первый точный метод решения T-задачи разработан Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным. Под названием «транспортная задача» объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены симплексным методом. Однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

Под термином «транспортные задачи» понимается широкий круг задач не только транспортного характера. Общим для них является, как правило, распределение ресурсов, находящихся у m производителей (поставщиков), по n потребителям этих ресурсов. Различают два типа транспортных задач: но *критерию стоимости* (план перевозок оптимален, если достигнут минимум затрат на его реализацию) и *по критерию времени* (план оптимален, если на его реализацию затрачивается минимум времени).

24.1. Математическая модель транспортной задачи

Наиболее часто встречаются следующие задачи линейного программирования, относящиеся к транспортным:

– прикрепление потребителей ресурса к производителям;

– привязка пунктов отправления к пунктам назначения;

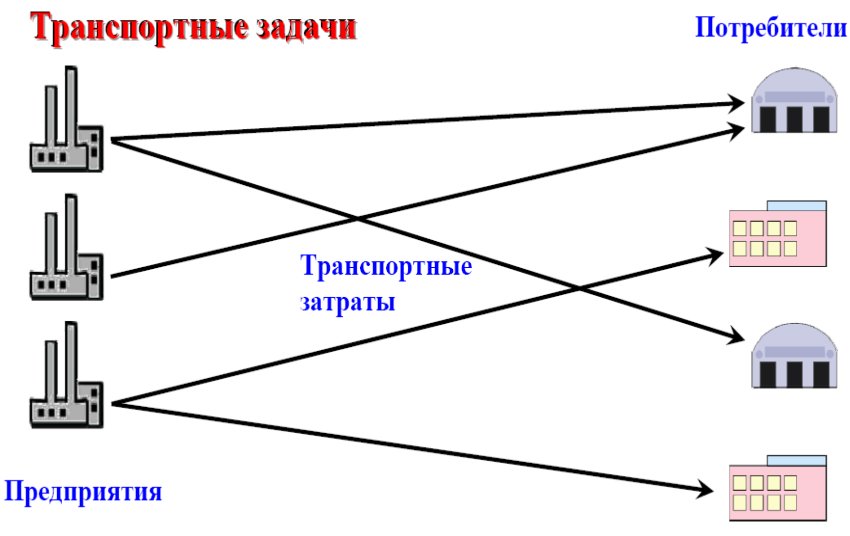
– взаимная привязка грузопотоков прямого и обратного направлений;

– отдельные задачи оптимальной загрузки промышленного оборудования;

– оптимальное распределение объемов выпуска промышленной продукции между заводами-изготовителями.

Рассмотрим математическую модель прикрепления пунктов отправления к пунктам назначения.

Имеются m пунктов отправления груза и объемы отправления по каждому пункту a_1, a_2, ..., a_m. Известна потребность в грузах b_1, b_2 ,...,b_n по каждому из n пунктов назначения. Задана матрица стоимостей доставки по каждому варианту c_{ij}. Необходимо рассчитать оптимальный план перевозок, то есть определить, сколько груза должно быть отправлено из каждого i-го пункта отправления (от поставщика) в каждый j-й пункт назначения (до потребителя) x_{ij} с минимальными транспортными издержками.



Минимизировать затраты на перевозку продукции

В общем виде исходные данные представлены в таблице 24.1. Строки транспортной таблицы соответствуют пунктам отправления (в последней клетке каждой строки указан объем запаса продукта a_i), а столбцы – пунктам назначения (последняя клетка каждого столбца содержит значение потребности b_j). Все клетки таблицы (кроме тех, которые расположены в нижней строке и правом столбце) содержат информацию о перевозке из i-го пункта в j-й: в правом верхнем углу находится цена перевозки единицы продукта, а в левом нижнем – значение объема перевозимого груза для данных пунктов.

Таблица 24.1

Исходные данные

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	…	B_n	Запасы (объемы отправления)
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	…	b_n	

Транспортная задача называется закрытой, если суммарный объем отправляемых грузов $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ равен суммарному объему потребности в этих грузах по пунктам назначения $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{24.1}$$

Если такого равенства нет (потребности выше запасов или наоборот), запасу называют открытой, т. е.:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{24.2}$$

Для написания модели необходимо все условия (ограничения) и целевую функцию представить в виде математических уравнений.

Все грузы из i-х пунктов должны быть отправлены, т. е.:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\ ,\ i = \overline{1,m} \tag{24.3}$$

Все j-е пункты (потребители) должны быть обеспечены грузами в плановом объеме:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \ j = \overline{1,n} \tag{24.4}$$

Суммарные объемы отправления должны равняться суммарным объемам назначения (3.1). Должно выполняться условие неотрицательности переменных: $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Перевозки необходимо осуществить с минимальными транспортными издержками (функция цели):

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{24.5}$$

Вместо матрицы стоимостей перевозок (c_{ij}) могут задаваться матрицы расстояний. В таком случае в качестве целевой функции рассматривается минимум суммарной транспортной работы. Как видно из выражения (3.1), уравнение баланса является обязательным условием решения транспортной задачи. Поэтому, когда в исходных условиях дана открытая задача, то ее необходимо привести к закрытой форме. В случае, если:

- потребности по пунктам назначения превышают запасы пунктов отправления, то вводится фиктивный поставщик с недостающим объемом отправления;

- запасы поставщиков превышают потребности потребителей, то вводится фиктивный потребитель с необходимым объемом потребления.

Варианты, связывающие фиктивные пункты с реальными, имеют нулевые оценки. После введения фиктивных пунктов задача решается как закрытая.

Транспортным задачам присущи следующие особенности:

- распределению подлежат однородные ресурсы;

- условия задачи описываются только уравнениями;

- все переменные выражаются в одинаковых единицах измерения;

- во всех уравнениях коэффициенты при неизвестных равны единице;

- каждая неизвестная встречается только в двух уравнениях системы ограничений.

Транспортные задачи могут решаться симплекс-методом. Однако перечисленные особенности позволяют для транспортных задач применять более простые методы решения.

Рассмотрим пример транспортной задачи.

Пример. Для обеспечения 4 подразделений ОВД необходимо доставить с 3 складов в первое подразделение 8 тысяч единиц оружия, во второе – 11 тысяч, в третье – 13 тысяч, а в четвертое – 12 тысяч. При этом на первом складе находится 15 тысяч. единиц оружия, на втором – 20 тысяч, а на третьем – 9 тысяч. Известны транспортные расходы на доставку тысячи единиц оружия в каждое подразделение. Таблица издержек приводится ниже:

		Потребители			
		1-е подр.	2-е подр.	3-е подр.	4-е подр.
Поставщики	1-й склад	3	4	5	1
	2-й склад	7	4	4	2
	3-й склад	3	5	6	5

24.2. Начальный опорный план

Опорный план является допустимым решением транспортной задачи и используется в качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов. Существует три метода нахождения опорных планов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод Фогеля. "Качество" опорных планов, полученных этими методами, различается: В общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (зачастую оптимальное), а метод северо-западного угла – наихудшее.

Все существующие методы нахождения опорных планов отличаются только способом выбора клетки для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода.

Базисный план составляется последовательно, в несколько шагов (точнее, $m + n - 1$ шагов). На каждом из этих шагов заполняется одна клетка, притом так, что, либо полностью удовлетворяется один из заказчиков (тот, в столбце которого находится заполняемая клетка), либо полностью вывозится весь запас груза с одной из баз (с той, в строке которой находится заполняемая клетка).

В первом случае мы можем исключить столбец, содержащий заполненную на этом шаге клетку, и считать, что задача свелась к заполнению таблицы с числом столбцов, на единицу меньшим, чем было перед этим шагом, но с тем же количеством строк и с соответственно измененным запасом груза на одной из баз (на той базе, которой был удовлетворен заказчик на данном шаге).

Во втором случае исключается строка, содержащая заполняемую клетку, и считается, что таблица сузилась на одну строку при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потребности заказчика, в столбце которого находится заполняемая клетка.

Начиная с первоначально данной таблицы и повторив $(m + n - 2)$ раз описанный шаг, мы придем к таблице, состоящей из одной строки и одного столбца (иначе говоря, из одной пустой клетки). Другими словами, мы пришли к задаче с одной базой и с одним потребителем, причем потребности этого единственного заказчика равны запасу груза на этой единственной базе. Заполнив последнюю клетку, мы освобождаем последнюю базу и удовлетворяем потребность последнего заказчика. В результате, совершив $(m + n - 1)$ шагов, мы и получим искомый опорный план.

Может случиться, что уже на некотором шаге потребность очередного заказчика окажется равной запасу груза на очередной базе. Тогда после заполнения очередной клетки объем таблицы как бы одновременно уменьшается на одни столбец и на одну строку. Но и при этом мы должны считать, что уменьшение объема таблицы происходит либо на один столбец, а на базе сохраняется "остаток" равный нулю, либо на одну строку, а у заказчика еще осталась неудовлетворенная "потребность" в количестве нуля единиц груза, которая и удовлетворяется на одном из следующих шагов. Этот нуль, «запас» или «потребность» – безразлично, надо записать в очередную заполняемую клетку на одном из последующих шагов. Так как при этом оказывается равной нулю одна из базисных неизвестных, то мы имеем дело с вырожденным случаем.

24.2.1. Метод северо-западного угла (диагональный метод)

При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется левая верхняя клетка (северо-западный угол) оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки неизвестного x_{11} и заканчивается в клетке неизвестного x_{mn}, т. е. идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Пример. Рассмотрим транспортную задачу:

Пункты Отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	70 170	50 110	15 20	80	70	300
A_2	80	90	40 80	60 70	85	150
A_3	50	10	90	11 50	25 200	250
Потребности	170	110	100	120	200	700

Заполнение таблицы начинается с ее северо-западного угла, то есть клетки с неизвестным x_{11}. Первая база A_1 может полностью удовлетворить потребность первого заказчика B_1 (a_1=300, b_1=170, $a_1 > b_1$). Полагая x_{11}= 170, вписываем это значение в клетку x_{11} и исключаем из рассмотрения первый столбец. На базе A_1 остается измененный запас $a_1' = 130$. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1,A_2,A_3 и четырьмя столбцами B_1,B_2,B_3,B_4; северо-западным углом будет клетка для неизвестного x_{12}. Первая база с запасом $a_1' = 130$ может полностью удовлетворить потребность второго заказчика B_2 $(a'_1 = 130, b_2 = 110, a'_1 > b_2)$. Полагаем x_{12} = 110, вписываем это значение в клетку x_{12} и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе A_1 остается новый остаток (запас) $a_1'' = 20$. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1,A_2,A_3 и тремя столбцами B_3,B_4,B_5 северо-западным углом будет клетка для неизвестного x_{13}. Теперь третий заказчик B_3 может принять весь запас с базы A_1 $(a''_1 = 20, b_3 = 100, a''_1 < b_3)$. Полагаем x_{13}= 20, вписываем это значение в клетку

x_{13} и исключаем из рассмотрения первую строку. У заказчика из B_3 осталась еще не удовлетворенной потребность $b_3' = 80$.

Теперь переходим к заполнению клетки для неизвестного x_{23} и т. д.

Через шесть шагов у нас останется одна база A_3 с запасом груза (остатком от предыдущего шага) $a_3' = 200$ и один пункт B_5 с потребностью b_5=200. Соответственно этому имеется одна свободная клетка, которую и заполняем, положив x_{35}=200. План составлен. Базис образован неизвестными $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}$. Правильность составленного плана легко проверить, подсчитав суммы чисел, стоящих в заполненных клетках по строкам и столбцам.

Общий объем перевозок в тонно-километрах для этого плана составит

$$S_1 = 70 \cdot 170 + 50 \cdot 110 + 15 \cdot 20 + 40 \cdot 80 + 60 \cdot 70 + 11 \cdot 50 + 25 \cdot 200 = 30650$$

24.2.2. Метод минимального элемента

При этом методе на каждом шаге построения опорного плана первою заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф. Если такая клетка не единственная, то заполняется любая из них.

Пример. Рассмотрим транспортную задачу:

Пункты Отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	70 20	50	15 100	80	70 180	300
A_2	80 150	90	40	60	85	150
A_3	50	10 110	90	11 120	25 20	250
Потребности	170	110	100	120	200	700

В данном случае заполнение таблицы начинается с клетки для неизвестного x_{32}, для которого мы имеем значение $c_{32} = 10$, наименьше из всех значений c_{ij}. Эта клетка находится на пересечении третьей строки и второго столбца, соответствующим третьей базе A_3 и второму заказчику B_2. Третья база A_3 может полностью удовлетворить потребность второго заказчика B_2 (a_3=250, b_2=110, $a_3 > b_2$). Полагая $x_{32} = 110$, вписываем это значение в клетку x_{32} и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе A_3 остается изменённый запас $a'_3 = 140$. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1, A_2, A_3 и четырьмя столбцами B_1, B_3, B_4, B_5 клеткой с наименьшим значением c_{ij} клетка, где $c_{34}=11$. Заполняем описанным выше способом эту клетку и аналогично заполняем следующие клетки. В результате оказываются заполненными (в приведенной последовательности) следующие клетки:

$$x_{32} = 110, x_{34} = 120, x_{13} = 100, x_{35} = 20, x_{15} = 180, x_{11} = 20, x_{21} = 150$$

На пятом шаге клеток с наименьшими значениями c_{ij} оказалось две ($c_{11}=c_{15}=70$). Мы заполнили клетку для x_{15}, положив $x_{15} = 180$. Можно было выбрать для заполнения другую клетку, положив $x_{11} = 170$, что приведет в результате к другому опорному плану. Общий объем перевозок для этого плана составит

$$S_1 = 70 \cdot 20 + 15 \cdot 100 + 70 \cdot 180 + 80 \cdot 150 + 10 \cdot 110 + 11 \cdot 120 + 25 \cdot 20 = 30420$$

В диагональном методе не учитываются величины тарифов, в методе же наименьшей стоимости эти величины учитываются, и часто последний метод приводит к плану с меньшими общими затратами (что и имеет место в нашем примере), хотя это и не обязательно.

Кроме рассмотренных выше способов иногда используется, так называемый, метод Фогеля. Суть его состоит в следующем. В распределительной таблице по строкам и столбцам определяется разность между двумя наименьшими тарифами. Отмечается наибольшая разность. Далее в строке (столбце) с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Строки (столбцы) с нулевым остатком груза в дальнейшем в расчет не принимаются. На каждом этапе загружается только одна клетка. Распределение груза производится, как и ранее.

24.3. Циклы и потенциалы

Для оптимизации опорного плана транспортной задачи введем понятия циклов и потенциалов.

24.3.1. Понятие цикла

Для перехода от одного базиса к другому при решении транспортной задачи используются так называемые циклы.

Циклом пересчета или циклом в таблице перевозок называется последовательность неизвестных, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Одно из неизвестных последовательности свободное, а все остальные – базисные.

2. Каждые два соседних в последовательности неизвестных лежат либо в одном столбце, либо в одной строке.

3. Три последовательных неизвестных не могут находиться в одном столбце или в одной строке.

4. Если, начиная с какого-либо неизвестного, мы будем последовательно переходить от одного к следующему за ним неизвестному то, через несколько шагов мы вернемся к исходному неизвестному.

Второе условие означает, что у двух соседних неизвестных в цикле либо первые, либо вторые индексы одинаковы.

Если каждые два соседних неизвестных цикла соединить отрезком прямой, то будет получено геометрическое изображение цикла – замкнутая ломаная из чередующихся горизонтальных и вертикальных звеньев, одна из вершин которой находится в свободной клетке, а остальные – в базисных клетках.

Можно доказать, что для любой свободной клетки таблицы перевозок существует один и только один цикл, содержащий свободное неизвестное из этой клетки, и что число вершин в цикле всегда четно.

Так, например, в таблице перевозок, составленной по диагональному методу при решения задачи из предыдущего пункта, неизвестному x_{21} соответствует цикл x_{21}, x_{23}, x_{13}, x_{11}, x_{21} и т.д.

Пусть теперь мы имеем некоторую свободную клетку с соответствующим ей циклом. Если изменить значение свободного неизвестного, увеличив его на некоторое число x, то, переходя последовательно от одной вершины цикла к другой, мы должны будем в силу неизменности сумм по строкам и по столбцам поочередно уменьшать и увеличивать значения неизвестных в цикле на то же число x. Например, в указанном выше цикле для свободного неизвестного x_{21} получим:

старые значения: $x_{21}= 0$, $x_{23}= 80$, $x_{13}= 20$,$x_{11}= 170$, $x_{21}= 0$;

новые значения: $x'_{21} = x, x'_{23} = 80 - x, x'_{13} = 20 + x, x'_{11} = 170 - x, x'_{21} = x$

Очевидно, если снабдить вершины цикла поочередно знаками «+» и «–», приписав вершине в свободной клетке знак «+», то можно сказать, что в вершинах со знаком «+» число x прибавляется к прежнему значению неизвестного, находящегося в этой вершине, а в вершинах со знаком «–» это число x вычитается из прежнего значения неизвестного, находящегося в этой вершине.

Так как число вершин в цикле всегда четно, то, возвращаясь в свободную клетку, мы должны будем приписать ей знак «+», то есть тот знак, который ей уже приписан при выходе из нее. Это очень существенное обстоятельство, так как иначе мы пришли бы к противоречию. Безразлично также, в каком направлении обходится цикл при «означивании» вершин.

Если в качестве x выбрать наименьшее из чисел, стоящих в вершинах, снабженных знаком «–», то, по крайней мере, одно из прежних базисных неизвестных примет значение нуль, и мы можем перевести его в число свободных неизвестных, сделав вместо него базисным то неизвестное, которое было свободным.

Так, например, в рассмотренном выше цикле имеем отрицательные вершины x_{21} и x_{11}; следовательно, выбрав $x = \min\{80; 170\} = 80$, мы получаем:

старые значения: $x_{21}= 0$, $x_{23}= 80$, $x_{13}= 20$,$x_{11}= 170$, $x_{21}= 0$;

новые значения: $x'_{21} = 80, x'_{23} = 0, x'_{13} = 100, x'_{11} = 90, x'_{21} = 80$,

т. е. вместо прежнего базисного решения получаем новое базисное решение:

Пункты Отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	70 90	50 110	15 100	80	70	300
A_2	80 80	90	40	60 70	85	150
A_3	50	10	90	11 50	25 200	250
Потребности	170	110	100	120	200	700

Выбор в качестве x минимального среди чисел, стоящих в отрицательных вершинах цикла, обеспечивает допустимость нового базиса.

Если минимальное значение среди базисных неизвестных, стоящих в отрицательных вершинах цикла, принимается не в одной отрицательной вершине, то свободной оставляют только одну из них, а в других клетках с тем же минимальным значением пишут нули. В этом случае новое базисное решение будет вырожденным.

Может случиться, что и само минимальное значение среди чисел в отрицательных клетках равно нулю. Тогда преобразование таблицы перевозок сведется к перестановке этого нуля в свободную клетку. Значения всех неизвестных при этом остаются неизменными, но решения считаются различными, так как различны базисы. Оба решения вырождены.

Описанное выше преобразование таблицы перевозок, в результате которого преобразуется базис, называется *пересчетом по циклу.*

Заметим, что неизвестные, не входящие в цикл, этим преобразованием не затрагиваются, их значения остаются неизменными и каждое из них остается либо в группе базисных, либо в группе свободных неизвестных, как и до пересчета.

Выясним теперь, как пересчет по циклу влияет на общий объем затрат на перевозки и при каком условии эти затраты становятся меньше.

Пусть x_{pq} – некоторое свободное неизвестное, для которого мы построили цикл и осуществили пересчет по циклу с некоторым числом x. Если вершине цикла, находящейся в i-й строке и j-м столбце таблицы перевозок, приписан знак «+», то значение неизвестного x_{ij}, находящегося в этой вершине, увеличивается на x, что в свою очередь вызывает увеличение затрат на $c_{ij}\ x$, где c_{ij} – тариф, соответствующий этой клетке; если же указанной вершине приписан знак «–», то значение неизвестного x_{ij} уменьшается на x, что вызывает уменьшение затрат на $c_{ij}\ x$.

Сложим тарифы, соответствующие положительным вершинам цикла, и вычтем из этой суммы сумму тарифов, соответствующих отрицательным вершинам цикла; полученную разность S_{pq} назовем *алгебраической суммой тарифов* для данного свободного неизвестного x_{pq}. Подсчет алгебраической суммы тарифов можно истолковать и так: припишем тарифам те же знаки, которые приписаны соответствующим вершинам цикла, тогда алгебраическая сумма тарифов равна сумме таких тарифов со знаком (“относительных тарифов”).

Теперь, очевидно, мы можем, заключить, что в целом при пересчете по циклу общий объем затрат на перевозки изменится на произведение алгебраической суммы тарифов на x, т. е. на величину $S_{pq}x$. Следовательно, если алгебраическая сумма тарифов для некоторого свободного неизвестного x_{pq} отрицательна ($S_{pq} < 0$), то пересчет по циклу, соответствующему этому неизвестному, приводит к уменьшению общей суммы затрат на реализацию плана перевозок. Если же алгебраическая сумма тарифов положительна ($S_{pq} > 0$), то пересчет по соответствующему циклу приведет к увеличению общей суммы затрат. И, наконец, если алгебраическая сумма тарифов равна нулю ($S_{pq} = 0$), то пересчет по соответствующему циклу не изменит общую сумму затрат (два различных базисных плана требуют одинаковых затрат на их реализацию).

Так, например, для цикла $x_{21},x_{23},x_{13},x_{11},x_{21}$ в рассмотренной задаче алгебраическая сумма тарифов

$S_{21}=c_{21}-c_{23}+c_{13}-c_{11}=80-40+15-70=-15<0.$

Значит, пересчет по этому циклу снижает расходы. И действительно, осуществив такой пересчет, мы получаем план, по которому объем перевозок составляет

S_2=70*90+50*110+15*100+80*80+60*70+11*50+25*200=29450,

тогда как по исходному плану он составил S_1= 30650. Имеем снижение объема перевозок на 1200 тонно-километров, что и следовало ожидать, так как алгебраическая сумма тарифов в данном случае равна –15, а пересчет по циклу осуществляется с помощью числа $x = 80$ (изменение затрат равно -15·80 = –1200).

24.3.2. Вычисление потенциалов

Вычисление алгебраической суммы тарифов для каждого из свободных неизвестных можно производить без построения соответствующего цикла, пользуясь, так называемыми, потенциалами. Припишем каждой базе A_i, некоторое число u_i, и каждому потребителю B_j некоторое число v_j :

$$A_i \to u_i (i = 1,2,\dots,m),\ B_j \to v_j (j = 1,2,\dots,n),$$

так что

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad (1),$$

где c_{ij} – тарифы, соответствующие клеткам, заполненным базисными неизвестными. Эти числа u_i, и v_j называются *потенциалами* соответствующих баз и потребителей.

Зная потенциалы, легко вычислить алгебраическую сумму тарифов. Действительно, если в алгебраической сумме тарифов по циклу, соответствующему свободному неизвестному x_{pq}, заменить тарифы базисных клеток их выражениями через потенциалы по формулам (1), то, в силу чередования знаков при вершинах цикла, все потенциалы, кроме u_p и v_q сократятся, и мы получим:

$$S_{pq} = c_{pq} - (u_p + v_q).$$

Так, например, для цикла $x_{21},x_{23},x_{13},x_{11},x_{21}$ в рассмотренной выше задаче имеем

$$S_{21} = c_{21} - c_{23} + c_{13} - c_{11} = c_{21} - (u_2 + v_3) + (u_1 + v_3) - (u_1 + v_1) = c_{21} - (u_2 + v_1).$$

Для базисных клеток сумма потенциалов строки и столбца, в которых находится эта клетка, равна тарифу, соответствующему этой клетке; если же клетка для неизвестного x_{pq} свободная, то сумму потенциалов

$$u_p + v_q = c'_{pq} \qquad (2)$$

называют *косвенным тарифом* этой клетки. Следовательно, алгебраическая сумма тарифов для свободной клетки x_{pq} равна разности ее настоящего (“истинного”) и косвенного тарифов:

$$S_{pq} = c_{pq} - c'_{pq} \qquad (3)$$

Из (3) следует, что если косвенный тариф для данной свободной клетки больше её истинного тарифа, то алгебраическая сумма тарифов по циклу, соответствующему этой клетке, будет отрицательна; если же косвенный тариф меньше истинного, то алгебраическая сумма тарифов положительна, и, наконец, если косвенный тариф равен истинному, то алгебраическая сумма тарифов равна нулю.

Потенциалы можно найти из системы равенств (1), рассматривая их как систему ($m + n$ - 1) уравнений с $m+n$ неизвестными. Так как неизвестных здесь на единицу больше, чем уравнений, то, по крайней мере, один из потенциалов мы можем выбрать произвольно, положив**,** например, $u_1 = 0$; тогда остальные потенциалы легко определяются из уравнений (1).

Например, для плана, полученного по диагональному методу в рассмотренной выше задаче, имеем

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 70 \\ u_1 + v_2 &= 50 \\ u_1 + v_3 &= 15 \\ u_2 + v_3 &= 40 \\ u_2 + v_4 &= 60 \\ u_3 + v_4 &= 11 \\ u_3 + v_5 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

Система содержит семь уравнений с восемью неизвестными. Выбирая произвольно значение α_1, находим последовательно из первых трех уравнений значения $v_1 = 70 - u_1, v_2 = 50 - u_1, v_3 = 15 - u_1$, затем из четвертого уравнения – $u_2 = 40 - v_3$, из пятого уравнения – $v_4 = 60 - u_2$, из шестого уравнения $u_3 = 11 - v_4$ и, наконец, из седьмого уравнения – $v_5 = 25 - u_3$..

Положив, например, $u_1 = 0$, получаем значения потенциалов:

$$\begin{array}{ll} & v_1 = 70 \\ & v_2 = 50 \\ u_1 = 0 & v_3 = 15 \\ u_2 = 25 & v_4 = 35 \\ u_3 = -24 & v_5 = 49 \end{array}$$

Найдем теперь косвенные тарифы для свободных клеток и сравним их с истинными тарифами:

$$\begin{array}{ll} c'_{14} = u_1 + v_4 = 35 < c_{14} & c'_{25} = u_2 + v_5 = 74 < c_{25} \\ c'_{15} = u_1 + v_5 = 49 < c_{15} & c'_{31} = u_3 + v_1 = 46 < c_{31} \\ c'_{21} = u_2 + v_1 = 95 > c_{21} & c'_{32} = u_3 + v_2 = 26 > c_{32} \\ c'_{22} = u_2 + v_2 = 75 < c_{22} & c'_{33} = u_3 + v_3 = -9 < c_{33} \end{array}$$

Для клеток с неизвестными x_{21} и x_{32} косвенные тарифы больше истинных. Следовательно, для них мы будем иметь отрицательные алгебраические суммы тарифов:

$$S_{21} = c_{21} - c'_{21} = 80 - 65 = -15$$
$$S_{32} = c_{32} - c'_{32} = 10 - 26 = -16$$

Значение S_{21} = -15 мы уже имели раньше, вычисляя алгебраическую сумму тарифов для этой клетки непосредственно по циклу.

Замечание 1. Подсчитывая косвенные тарифы как суммы соответствующих потенциалов, полезно не пропускать и клетки с базисными неизвестными (заполненные клетки). Для этих клеток сумма потенциалов равна истинному тарифу; последнее может служить проверкой правильности найденных значении потенциалов.

Замечание 2. Можно показать, что если сумму всех затрат по данному плану перевозок выразить через свободные неизвестные, то коэффициент при каждом из таких неизвестных будет равен алгебраической сумме тарифов по циклу, соответствующему ей в таблице перевозок. Это еще раз подтверждает, что пересчет по циклам является специфической формой применения симплекс-метода к решению транспортной задачи.

24.3.3. Методы отыскания оптимального решения

Из сказанного в предыдущем пункте вытекает следующий *критерий оптимальности базисного решения транспортной задачи:* если для некоторого базисного плана перевозок алгебраические суммы тарифов по циклам для всех свободных клеток неотрицательны, то этот план оптимальный.

Отсюда вытекает способ отыскания оптимального решения транспортной задачи, состоящий в том, что, имея некоторое базисное решение, вычисляют алгебраические суммы тарифов для всех свободных клеток. Если критерий оптимальности выполнен, то данное решение является оптимальным; если же имеются клетки с отрицательными алгебраическими суммами тарифов, то переходят к новому базису, производя пересчет по циклу, соответствующему одной из таких клеток. Полученное таким образом новое базисное решение будет лучше исходного – затраты на его реализацию будут меньшими. Для нового решения также проверяют выполнимость критерия оптимальности и в случае необходимости снова совершают пересчет по циклу для одной из клеток с отрицательной алгебраической суммой тарифов и т. д.

Через конечное число шагов приходят к искомому оптимальному базисному решению.

В случае если алгебраические суммы тарифов для всех свободных клеток положительны, мы имеем единственное оптимальное решение; если же алгебраические суммы тарифов для всех свободных клеток неотрицательны, но среди них имеются алгебраические суммы тарифов, равные нулю, то оптимальное решение не единственное: при пересчете по циклу для клетки с нулевой алгебраической суммой тарифов мы получим оптимальное же решение, но отличное от исходного (затраты по обоим планам будут одинаковыми).

В зависимости от методов подсчета алгебраических сумм тарифов для свободных клеток различают два метода отыскания оптимального решения транспортной задачи:

1) Распределительный метод. При этом методе для каждой пустой клетки строят цикл и для каждого цикла непосредственно вычисляют алгебраическую сумму тарифов.

2) Метод потенциалов. При этом методе предварительно находят потенциалы баз и потребителей, а затем вычисляют для каждой пустой клетки алгебраическую сумму тарифов с помощью потенциалов.

Преимущества метода потенциалов по сравнению с распределительным методом состоят в том, что отпадает необходимость построения циклов для каждой из пустых клеток и упрощается вычисление алгебраических сумм тарифов. Цикл строится только один – тот, по которому производится пересчет.

Применяя метод потенциалов, можно говорить не о знаке алгебраических сумм тарифов, а о сравнении косвенных тарифов с истинными. Требование неотрицательности алгебраических сумм тарифов заменяется условием, что косвенные тарифы не превосходят истинных.

Следует иметь в виду, что потенциалы (так же как и циклы) для каждого нового базисного плана определяются заново.

24.4. Метод потенциалов

Метод потенциалов является методом последовательного приближения опорного допустимого плана перевозок по определенному алгоритму к оптимальному плану.

Рассмотрим задачу, в которой опорный план перевозок реализован методом минимального элемента, а стоимость перевозок Z = 2150 у.е.

	40	80	110	50	90
100	0	0	50	50	0
150	40	50	60	0	0
90	0	0	0	0	90
30	0	30	0	0	0

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8	5	3
A_2	4	7	13	6	2
A_3	8	6	9	7	1
A_4	5	4	7	9	3

Для решения задачи в представленном опорном плане выделим на плане ненулевые клетки, а нули из плана уберем:

	40	80	110	50	90
100			50	50	
150	40	50	60		
90					90
30		30			

Для невырожденности плана количество базисных ячеек должно быть равно: $N_{баз} = m + n - 1$.

В нашем плане количество базисных ячеек $\boldsymbol{N_{баз}}$ = 4 + 5 – 1 = 7. Следовательно, план вырожден и требует оптимизации.

24.4.1. Исправление вырожденного плана

Для исправления плана необходимо ввести в матрицу недостающее количество базисных клеток. Так как в нашем плане количество базисных ячеек $\boldsymbol{N_{баз}}$ = 7 , то нам необходимо добавить одну базисную ячейку.

	40	80	110	50	90
100			50	50	
150	40	50	60		
90					90
30		30			

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8	5	3
A_2	4	7	13	6	2
A_3	8	6	9	7	1
A_4	5	4	7	9	3

Нулевую поставку необходимо добавить в соседнюю с изолированной по стоке и столбцу базисной клеткой с минимальными транспортными издержками.

Такой базисной ячейкой является X_{35}. Значения элементов матрицы издержек, соответствующих соседним ячейкам для $X35$, равны: p_{25} = 2; p_{34} = 7; p_{45} = 3. Следовательно, в качестве базового элемента можно выбрать X_{25}. Отметим эту клетку в транспортной таблице.

	40	80	110	50	90
100			50	50	
150	40	50	60		0
90					90
30		30			

24.4.2. Расчет потенциалов

Потенциалы – это специальные коэффициенты, определяемые по определенным правилам для строк и столбцов транспортной таблицы.

Обычно выбирается строка, соответствующая максимальному значению таблицы издержек. В нашем случае это вторая строка, содержащая значение 13.

	40	80	110	50	90
100			50	50	
150	40	50	60		0
90					90
30		30			

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8	5	3
A_2	4	7	**13**	6	2
A_3	8	6	9	7	1
A_4	5	4	7	9	3

Для выбранной строки определяется потенциал $u_i = 0$.

Все остальные потенциалы рассчитываются по формулам:

$$v_j = u_i + c_{ij} \qquad u_i = v_j - c_{ij}\,.$$

В нашей задаче определим потенциал, соответствующий выбранной второй строке, $u_2 = 0$. Тогда, используя вышеприведенные формулы, последовательно получим значения всех остальных потенциалов:

$$v_5 = u_2 + c_{25} = 0 + 2 = 2;$$

$$v_3 = u_2 + c_{23} = 0 + 13 = 13;$$

$$v_2 = u_2 + c_{22} = 0 + 7 = 7;$$

$$v_1 = u_2 + c_{22} = 0 + 4 = 4;$$

$$u_1 = v_3 - c_{13} = 13 - 8 = 5;$$

$$v_4 = u_1 + c_{14} = 5 + 5 = 10;$$

$$u_3 = v_5 - c_{35} = 2 - 1 = 1;$$

$$u_4 = v_2 - c_{42} = 7 - 4 = 3.$$

Припишем полученные потенциалы к транспортной таблице:

	40	80	110	50	90	
100			50	50		$u_1=5$
150	40	50	60		0	$u_2=0$
90					90	$u_3=1$
30		30				$u_4=3$
	$v_1=4$	$v_2=7$	$v_3=13$	$v_4=10$	$v_5=2$	

24.4.3. Проверка плана на оптимальность

Для того, чтобы полученный план был оптимальным, небазисные ячейки этого плана транспортной задачи должны отвечать критерию оптимальности:

$$c_{ij} - v_j + u_i \geq 0.$$

Проверим наш план на оптимальность

	40	80	110	50	90	
100			50	50		$u_1=5$
150	40	50	60		0	$u_2=0$
90					90	$u_3=1$
30		30				$u_4=3$
	$v_1=4$	$v_2=7$	$v_3=13$	$v_4=10$	$v_5=2$	

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8	5	3
A_2	4	7	13	6	2
A_3	8	6	9	7	1
A_4	5	4	7	9	3

Используя рассчитанные значения потенциалов найдем значения $X_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i$ для каждой небазисной ячейки:

$X_{11} = 10 - 4 + 5 = 11$ $\quad$ $X_{12} = 9 - 7 + 5 = 7$ $\quad$ $X_{15} = 3 - 2 + 5 = 6$

$X_{24} = 6 - 10 + 0 = -4$ $\quad$ $X_{31} = 8 - 4 + 1 = 5$ $\quad$ $X_{32} = 6 - 7 + 1 = 0$

$X_{33} = 9 - 13 + 1 = -3$ $\quad$ $X_{34} = 7 - 10 + 1 = -2$ $\quad$ $X_{41} = 5 - 4 + 3 = 4$

$X_{43} = 7 - 13 + 3 = -3$ $\quad$ $X_{44} = 9 - 10 + 3 = 2$ $\quad$ $X_{45} = 3 - 2 + 3 = 4$

Так как некоторые из полученных значений отрицательны, то план не является оптимальным и его необходимо улучшить.

Пометим знаком «+» ячейку, соответствующую минимальному из полученных значений:

	40	80	110	50	90	
100			50	50		$u_1=5$
150	40	50	60	+	0	$u_2=0$
90					90	$u_3=1$
30		30				$u_4=3$
	$v_1=4$	$v_2=7$	$v_3=13$	$v_4=10$	$v_5=2$	

24.4.4. Построение цепи (контура, цикла) перераспределения поставок

Для помеченной ячейки построим цепь перераспределения поставок.

Цепь (контур, цикл) перераспределения поставок – это замкнутая ломаная линия, проходящая по ячейкам транспортной таблицы горизонтально или вертикально. Первой вершиной контура является помеченная ячейка, остальные вершины соответствуют базисным ячейкам. Линии контура могут пересекаться.

Построим цепь для нашего транспортного плана. Его можно построить единственным образом:

	40	80	110	50	90
100			50	50	
150	40	50	60	+	0
90					90
30		30			

В нашем случае форма контура – прямоугольник. Однако цепь может иметь другие формы. Например, если бы была помечена ячейка X_{34}, то форма цепи была бы следующей:

	40	80	110	50	90	
100			50	50		$u_1=5$
150	40	50	60		0	$u_2=0$
90				+	90	$u_3=1$
30		30				$u_4=3$
	$v_1=4$	$v_2=7$	$v_3=13$	$v_4=10$	$v_5=2$	

А если бы мы плюс поставили в ячейку. Находящуюся на пересечении четвертой строки и четвертого столбца, то получился бы шестиугольник:

	40	80	110	50	90	
100			50	50		$u_1=5$
150	40	50	60		0	$u_2=0$
90					90	$u_3=1$
30		30		+		$u_4=3$
	$v_1=4$	$v_2=7$	$v_3=13$	$v_4=10$	$v_5=2$	

24.4.5. Перераспределение поставок

Перераспределение поставок в транспортной таблице производится по цепи.

	40	80	110	50	90	
100			50	50		$u_1=5$
150	40	50	60		0	$u_2=0$
90				+	90	$u_3=1$
30		30				$u_4=3$
	$v_1=4$	$v_2=7$	$v_3=13$	$v_4=10$	$v_5=2$	

Пометим оставшиеся непомеченными вершины контура знаками «+» или «–». Знаки будут чередоваться.

	40	80	110	50	90
100			+ 50	- 50	
150	40	50	- 60	+	0
90					90
30		30			

Величина объема перераспределения берется равной минимальной поставке в отрицательной клетке (50 единиц). К поставкам в положительных ячейках объем перераспределения прибавляется, а из отрицательных ячеек отнимается.

	40	80	110	50	90
100			100		
150	40	50	10	50	0
90					90
30		30			

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8	5	3
A_2	4	7	13	6	2
A_3	8	6	9	7	1
A_4	5	4	7	9	3

В результате перераспределения ячейка X_{14} перестает быть базовой, а становится базовой ячейка X_{24}.

Найдем стоимость перевозок по полученному плану:

$$Z = 100 \cdot 8 + 40 \cdot 4 + 50 \cdot 7 + 10 \cdot 13 + 50 \cdot 6 + 90 \cdot 1 + 30 \cdot 4 = 1950.$$

Результат оказался на 2150 – 1950 = 200 условных единиц меньше, чем первоначальная стоимость.

24.4.6. Шаг 2

Полученная транспортная таблица перевозок оказалась лучше начального опорного плана, однако это не означает, что наш план является оптимальным.

Для проверки плана перевозок рассчитаем потенциалы. Вторая строка и четвертый столбец содержат максимальное значение таблицы издержек 13.

Для выбранной строки определяется потенциал $u_i = 0$.

Все остальные потенциалы рассчитываются по формулам:

$$v_j = u_i + c_{ij} \qquad u_i = v_j - c_{ij}:$$

$$v_5 = u_2 + c_{25} = 0 + 2 = 2;$$

$$v_4 = u_2 + c_{24} = 0 + 6 = 6;$$

$$v_3 = u_2 + c_{23} = 0 + 13 = 13;$$

$$v_2 = u_2 + c_{22} = 0 + 7 = 7;$$

$$v_1 = u_2 + c_{22} = 0 + 4 = 4;$$

$$u_1 = v_3 - c_{13} = 13 - 8 = 5;$$

$$u_3 = v_5 - c_{35} = 2 - 1 = 1;$$

$$u_4 = v_2 - c_{42} = 7 - 4 = 3.$$

Припишем полученные потенциалы к транспортной таблице:

	40	80	110	50	90	
100			100			$u_1=5$
150	40	50	10	50	0	$u_2=0$
90					90	$u_3=1$
30		30				$u_4=3$
	$v_1=4$	$v_2=7$	$v_3=13$	$v_4=6$	$v_5=2$	

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8	5	3
A_2	4	7	13	6	2
A_3	8	6	9	7	1
A_4	5	4	7	9	3

Используя рассчитанные значения потенциалов найдем значения $X_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i$ для каждой небазисной ячейки:

$X_{11} = 10 - 4 + 5 = 11$ $\quad X_{12} = 9 - 7 + 5 = 7$ $\quad X_{14} = 5 - 6 + 5 = 4$

$X_{15} = 3 - 2 + 5 = 6$ $\quad X_{31} = 8 - 4 + 1 = 5$ $\quad X_{32} = 6 - 7 + 1 = 0$

$X_{33} = 9 - 13 + 1 = -3$ $\quad X_{34} = 7 - 6 + 1 = 2$ $\quad X_{41} = 5 - 4 + 3 = 4$

$X_{43} = 7 - 13 + 3 = -3$ $\quad X_{44} = 9 - 10 + 3 = 2$ $\quad X_{45} = 3 - 2 + 3 = 4$

Помечаем ячейку X_{43} транспортной таблицы знаком «+».

	40	80	110	50	90
100			100		
150	40	50	10	50	0
90					90
30		30	+		

Строим контур перераспределения поставок.

	40	80	110	50	90
100			100		
150	40	50	10	50	0
90					90
30		30	+		

Помечаем оставшиеся вершины цепи знаками «+» и «–».

	40	80	110	50	90
100			100		
150	40	50 +	10 -	50	0
90					90
30		30 -	+		

Производим перераспределение поставок:

	40	80	110	50	90
100			100		
150	40	60		50	0
90					90
30		20	10		

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8	5	3
A_2	4	7	13	6	2
A_3	8	6	9	7	1
A_4	5	4	7	9	3

Рассчитаем стоимость перевозок по полученному плану:

$$Z = 100 \cdot 8 + 40 \cdot 4 + 60 \cdot 7 + 50 \cdot 6 + 90 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 7 = 1920.$$

24.4.7. Шаг 3

Проверим новый транспортный план. Рассчитаем потенциалы.

$$v_5 = u_2 + c_{25} = 0 + 2 = 2;$$

$$v_4 = u_2 + c_{24} = 0 + 6 = 6;$$

$$v_2 = u_2 + c_{22} = 0 + 7 = 7;$$

$$v_1 = u_2 + c_{22} = 0 + 4 = 4;$$

$$u_4 = v_2 - c_{42} = 7 - 4 = 3;$$

$$v_3 = u_4 + c_{43} = 3 + 7 = 10;$$

$$u_1 = v_3 - c_{13} = 10 - 8 = 2;$$

$$u_3 = v_5 - c_{35} = 2 - 1 = 1.$$

Припишем полученные потенциалы к транспортной таблице:

	40	80	110	50	90	
100			100			$u_1=2$
150	40	60		50	0	$u_2=0$
90					90	$u_3=1$
30		20	10			$u_4=3$
	$v_1=4$	$v_2=7$	$v_3=10$	$v_4=6$	$v_5=2$	

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8	5	3
A_2	4	7	13	6	2
A_3	8	6	9	7	1
A_4	5	4	7	9	3

Используя рассчитанные значения потенциалов найдем значения $X_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i$ для каждой небазисной ячейки:

$X_{11} = 10 – 4 + 2 = 8$ $X_{12} = 9 – 7 + 2 = 4$ $X_{14} = 5 – 6 + 5 = 4$

$X_{15} = 3 – 2 + 2 = 3$ $X_{23} = 13 – 10 + 0 = 3$ $X_{31} = 8 – 4 + 1 = 5$

$X_{32} = 6 – 7 + 1 = 0$ $X_{33} = 9 – 10 + 1 = 0$ $X_{44} = 7 – 6 + 1 = 2$

$X_{41} = 5 – 4 + 3 = 4$ $X_{44} = 9 – 6 + 3 = 6$ $X_{45} = 3 – 2 + 3 = 4$

Так как все полученные значения неотрицательны, то план является оптимальным, а минимальная стоимость перевозок $Z = 1920$.

24.5. Усложненные задачи транспортного типа

Выше рассмотрена классическая транспортная задача, на которой показано, как используется метод потенциалов для нахождения оптимального плана. В экономике предприятия такие задачи встречаются крайне редко. Обычно при составлении экономико-математической модели задачи транспортного типа приходится вводить целый ряд дополнительных ограничений, а затем пользоваться методом потенциалов.

Ряд экономических задач легко сводимы к транспортной задаче. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации.

1. Отдельные поставки от определенных поставщиков некоторым потребителям должны быть исключены (из-за отсутствия необходимых условий хранения, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т.д.). Это ограничение требует, чтобы в матрице перевозок, содержащей оптимальный план, определенные клетки оставались свободными. Последнее достигается искусственным завышением затрат на перевозки c_{ij} в клетках, перевозки через

которые следует запретить. При этом производят завышение величины c_{ij} до таких значений, которые заведомо больше всех и с которыми их придется сравнивать в процессе решения задачи.

2. На предприятии необходимо определить минимальные суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подобной задачей сталкиваются при решении вопросов, связанных с оптимальным размещением производственных объектов. Здесь может оказаться экономически более выгодным доставлять сырье из более отдаленных пунктов, но зато при меньшей его себестоимости. В таких задачах за критерий оптимальности принимают сумму затрат на производство и транспортировку продукции.

3. Ряд транспортных маршрутов, по которым необходимо доставить грузы, имеют ограничения по пропускной способности. Если, например, по маршруту A_iB_j можно провести не более q единиц груза, то B_j -й столбец матрицы разбивается на два столбца – $B_j^{\bullet}$ и $B_j^{\bullet\bullet}$. В первом столбце спрос принимается равным разности между действительным спросом и ограничением $q: b_j^{\bullet} = b_j - q$, во втором – равным ограничению q, т.е. $b_j^{\bullet\bullet} = q$. Затраты c_{ij} в обоих столбцах одинаковы и равны данным, но в первом столбце $B_j^{\bullet}$, в клетке, соответствующей ограничению i, вместо истинного тарифа c_{ij} ставится искусственно завышенный тариф M (клетка блокируется). Затем задача решается обычным способом.

4. Поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет. В этом случае уменьшают запас груза у поставщиков и спрос потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые необязательны. Полученное решение корректируют с учетом обязательных поставок.

5. Экономическая задача не является транспортной, но в математическом отношении подобна транспортной, т.к. описывается аналогичной моделью, например, распределение производства изделий между предприятиями, оптимальное закрепление механизмов по определенным видам работы.

6. Необходимо максимизировать целевую функцию задачи транспортного типа. В этой ситуации при составлении опорного плана в первую очередь стараются заполнить клетки с наиболее высокими значениями показателя c_{ij}. Выбор клетки, подлежащей заполнению при переходе от одного допустимого плана к другому, должен производиться не по минимальной отрицательной разнице $\left|c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)\right|$, а по максимальной положительной разнице $\left|c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)\right|$. Оптимальным будет план, которому в последней таблице сопутствуют свободные клетки с неположительными элементами: все разности $\left|c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)\right| \le 0$.

7. Необходимо в одно время распределить груз различного рода по потребителям. Задачи данного типа называются многопродуктовыми транспортными задачами. В этих задачах поставщики m родов грузов разбиваются на m условных поставщиков, а потребители n родов грузов разбиваются на n условных потребителей. С учетом этой разбивки составляют полную транспортную таблицу. При этом заметим, что некоторые маршруты A_iB_j должны быть блокированы (закрыты), поскольку в данной постановке задачи грузы разного рода не могут заменять друг друга. Этим маршрутам A_iB_j должна соответствовать очень высокая стоимость перевозки. Многопродуктовую задачу не всегда обязательно описывать одной моделью. Например, если поставки грузов различного рода независимы, тот задачу можно представить в виде комплекса транспортных задач по каждому роду груза. Однако, если между грузами Различного рода существует связь (например, одни из грузов можно заменить другими), то в общем случае исходную модель (задачу) не удается разбить на комплекс простых транспортных задач.

Вопросы для самоконтроля

1. Охарактеризуйте математическую модель линейной транспортной задачи математического программирования.

2. Чем отличаются алгоритмы решения открытых и закрытых транспортных задач?

3. Опишите особенности транспортной задачи линейного

программирования.

4. С какой целью строится опорный план решения транспортной задачи? Что он собой представляет?

5. Сформулируйте алгоритм нахождения опорного решения транспортной задачи методом северо-западного угла.

6. Опишите метод минимального элемента нахождения опорного решения транспортной задачи.

7. Каким условиям должна удовлетворять последовательность неизвестных величин, для того, чтобы являться циклом пересчета в плане перевозок?

8. Для чего при оптимизации транспортного плана производится циклический пересчет?

9. Объясните роль потенциалов в вычислительном процессе при оптимизации транспортного плана задачи линейного программирования?

10. Какие методы отыскания оптимального решения транспортной задачи используют в зависимости от методов подсчета алгебраических сумм тарифов для свободных клеток транспортной таблицы?

11. Охарактеризуйте принципы работы метода потенциалов для оптимизации решения линейной транспортной задачи.

12. Каким образом осуществляется исправление вырожденного плана перевозок?

13. Опишите методику расчета потенциалов для невырожденного плана перевозок.

14. Как осуществляется проверка плана перевозок на оптимальность?

15. Опишите принципы построения цепи (контура, цикла) перераспределения поставок.

16. Как происходит перераспределение поставок по построенной цепи?

17. Какое количество шагов необходимо выполнить для получения оптимального решения?

18. Опишите алгоритм оптимизации решения открытой модели линейной транспортной задачи методом потенциалов.

19. Какие методы отыскания оптимального решения транспортной задачи используют в зависимости от методов подсчета алгебраических сумм тарифов для свободных клеток транспортной таблицы?

20. Охарактеризуйте принципы работы метода потенциалов для оптимизации решения линейной транспортной задачи.

21. Каким образом осуществляется исправление вырожденного плана перевозок?

22. Опишите методику расчета потенциалов для невырожденного плана перевозок.

23. Как осуществляется проверка плана перевозок на оптимальность?

24. Опишите принципы построения цепи (контура, цикла) перераспределения поставок.

25. Как происходит перераспределение поставок по построенной цепи?

26. Какое количество шагов необходимо выполнить для получения оптимального решения?

27. Опишите алгоритм оптимизации решения открытой модели линейной транспортной задачи методом потенциалов.

Глава 25. Теория игр

Теория игр – это раздел прикладной математики, изучает специфические задачи исследования операций. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущие борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу – в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

Математическая теория игр берёт своё начало в начале XX века, когда в своих работах Эммануил Ласкер (1868–1941), Эрнст Цермело (1871–1853) и Эмиль Борель (1871–1956) выдвинули идею математической теории конфликта интересов. Впервые обоснованные математические аспекты и приложения теории игр были изложены в 1944году в книге Джона фон Неймана (1903–1957) и Оскара Моргенштерна (1902–1977) «*Theory of Games and Economic Behavior».* Развитие практических приложений теории игр прослеживается в трудах Джона Форбса Нэша (1928–2015), где он разработал принципы «управленческой динамики».

Математическая теория игр в настоящее время – стремительно развивающаяся наука. И если в XX веке большая часть исследований осуществлялось в области экономики, управления и военных наук, то XXI веке – это теоретические и практические разработки в области информационных технологий и искусственного интеллекта.

В лекции мы рассмотрим основные положения теории игр. Основная часть темы будет посвящена матричным играм, их определению, классификации, определению оптимальных статегий, алгоритмам уменьшения размерностей платежных матриц, нахождению цены игры.

Для лучшего восприятия учебного материала все вводимые понятия, определения, теоремы и вычислительные методы поясняются рисунками, таблицами и примерами решения задач с подробным описанием хода решений.

25.1. Основные понятия теории игр

В математике решая прикладные задачи, иногда приходится рассматривать события, на которые осознанно или случайным образом, одновременно или последовательно влияют два или более участников, цели которых могут быть не только различными, но и конфликтными.

Это могут быть взаимные действия следователя, прокурора, свидетеля и подозреваемого, взаимоотношения между конкурирующими на рынке компаниями, подготовка политических партий к выборным компаниям, ведение противниками боевых действий, спортивные соревнования. Похожие ситуации также складываются и в классических играх, таких как «орел-решка», кости, лото, рулетка, шахматы, шашки, нарды, карточные игры.

Игра – это математическая модель конфликтной ситуации с участием не менее двух лиц, использующих несколько различных способов для достижения своих целей.

Если на ход игры влияют действия только двух участников, то такая игра называется *парной*. Если в парной игре выигрыш одного участника равен проигрышу другого, то игра называется *антагонистической*. В антагонистических играх достаточно задать величины выигрышей только одного игрока в различных ситуациях.

Любой способ действия игрока в зависимости от сложившейся ситуации называется *стратегией.* Каждый игрок располагает определенным набором стратегий. Если число стратегий конечно, то игра называется *конечной,* в противном случае – *бесконечной.* Стратегии называются *чистыми,* если каждый из игроков выбирает только одну стратегию определенным, а не случайным образом.

Решение игры заключается в выборе такой стратегии, которая удовлетворяет *условию оптимальности.* Это условие состоит в том, что первый игрок получит *максимальный выигрыш*, при условии, что второй придерживается стратегии, которая ему выгодна. И, соответственно, второй игрок получит *минимальный проигрыш* при использовании первым игроком своей. В этом случае стратегии игроков называются *оптимальными.*

Таким образом, *цель игры* сводится к определению оптимальных стратегий для каждого игрока.

Рассмотрим общепринятую классификацию игр.

<table>
<tr><td rowspan="2">По виду ходов игры</td><td>стратегические</td></tr>
<tr><td>азартные</td></tr>
<tr><td rowspan="2">В зависимости от числа участников</td><td>парные</td></tr>
<tr><td>множественные</td></tr>
<tr><td rowspan="3">По характеру взаимоотношений игроков</td><td>бескоалиционные</td></tr>
<tr><td>коалиционные</td></tr>
<tr><td>кооперативные</td></tr>
<tr><td rowspan="2">По количеству стратегий игроков</td><td>конечные</td></tr>
<tr><td>бесконечные</td></tr>
<tr><td rowspan="2">По количеству информации</td><td>полной информацией</td></tr>
<tr><td>неполной информацией</td></tr>
<tr><td rowspan="2">По виду описания</td><td>позиционные игры</td></tr>
<tr><td>игры в нормальной форме</td></tr>
<tr><td rowspan="2">По сумме выигрышей всех игроков</td><td>игры с нулевой суммой</td></tr>
<tr><td>игры с ненулевой суммой</td></tr>
</table>

25.2. Основные понятия матричной игры

25.2.1. Платежная матрица

Рассмотрим игру двух участников. Назовем участников данной игры *игроками*. В нашей игре каждый игрок имеет возможность выбора одного из нескольких возможных для него действий. Осознанные выборы игроком таких действий называется *стратегиями* данного игрока.

Пусть у первого игрока имеются m возможных для него стратегий, а второму игроку доступны n стратегий. Упорядочим наборы стратегий каждого игрока. Тогда если первый игрок выбрал i-тую стратегию, а второй игрок – j-тую стратегию, то выигрыш первого игрока составит a_{ij}, в то же время выигрыш второго игрока будет равен $–a_{ij}$.

Если $a_{ij} > 0$, то результат игры выгоден первому игроку, а если $a_{ij} < 0$, то результат выгоден второму. Можно, например, представить, что при $a_{ij} > 0$ первый игрок получает от второго денежную сумму или иные материальные ценности в размере a_{ij}, а в противном случае первый игрок отдает эти ценности второму игроку.

Данную игру можно однозначно определить матрицей:

$$\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (25.1)$$

В матричных играх эта матрицы называется *платежной*. Строки платежной матрицы определяют стратегии первого игрока, а столбцы – стратегии второго.

Описанная игра состоит из партий. Каждая партия состоит в том, что каждый игрок делает по одному ходу одновременно, после чего происходит расплата. Количество партий конечно и заранее обговаривается. Цель игроков – получить наибольшую прибыль в ходе игры.

Заметим, что каждый игрок делает свои выборы осознанно. Кроме того, принято считать игроков разумными и способными выбирать наивыгоднейшие ходы.

В данной игре выигрыш (прибыль) первого игрока равен проигрышу (убыткам) второго игрока. Такая игра называется игрой с *нулевой суммой*.

Согласно нашей классификации, описанную игру можно определить, как стратегическую бескоалиционную парную конечную позиционную игру с полной информацией и нулевой суммой.

25.2.2. Максиминные и минимаксные стратегии

Рассмотрим матричную игру с позиции первого игрока. Назовем первого игрока именем *A*, а второго – *B*. Тогда значения элементов платежной матрицы мы будем интерпретировать как выигрыш игрока *A* и, соответственно, проигрыш игрока *B*.

Если первый игрок останавливает свой выбор на i-той стратегии, которой соответствует i-тая строка платежной матрицы (a_{ij}), то второй игрок для получения наибольшего выигрыша возьмет стратегию, соответствующую столбцу *j*, в которой платеж его игроку *A* минимален.

Перебирая стратегии игрока *A*, выберем такую из них, при которой игрок *B*, действуя с выгодой для себя, отдаст нам наибольшую сумму.

Эту величину

$$\alpha = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right) \tag{25.2}$$

будем называть *нижней ценой игры*, а соответствующую ей стратегию игрока *A* определим, как *максиминную*.

В свою очередь, Игрок *B* также выберет такую стратегию, в которой игрок *A*, действуя с максимальной выгодой для себя, получит наименьшую сумму.

Данную величину

$$\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right) \tag{25.3}$$

назовем *верхней ценой игры*, а соответствующую ей стратегию игрока *B* определим, как *минимаксную*.

Согласно данным определениям нижнюю цену игры можно представить, как минимальный гарантированный выигрыш игрока *A*. На самом деле, используя свою максиминную стратегию, игрок *A* при самом худшем для него ходе игрока *B* выиграет, по крайней мере, сумму α. В свою очередь верхняя цена игры – это максимальный гарантированный проигрыш игрока *B*. То есть, используя свою минимаксную стратегию, игрок *B* при самом худшем для него ходе игрока *A* проиграет, по крайней мере, сумму β.

Очевидно, что в матричных играх всегда выполняется неравенство $\alpha \le \beta$.

В частном случае, когда $\alpha = \beta$, говорят, что игра имеет *седловую точку*. Значение $\alpha = \beta$ называют *ценой игры* и обозначают символом $\nu = \alpha = \beta$. Стратегии игроков *A* и *B*, соответствующие седловой точке, обеспечивают игроку *A* наибольший гарантированный выигрыш, не меньший цены игры ν, а игроку *B* наименьший гарантированный проигрыш, не больший цены игры ν. Такие стратегии являются наиболее выгодными для обоих игроков и называются *оптимальными чистыми стратегиями*.

25.2.3. Основная теорема теории игр

Теорема. В матричной игре с нулевой суммой каждый из игроков имеет оптимальные стратегии.

Можно отметить, что любую матричную игру можно интерпретировать, как пару взаимно двойственных задач линейного программирования.

Интересно отметить, что игры с полной информацией (когда игроки при каждом своем ходе знают результаты всех предыдущих ходов) имеют седловую точку, а значит, и решение в чистых стратегиях. В частности, играми с полной информацией являются шахматы, шашки, «крестики-нолики» и др. Оптимальные стратегии при игре в шахматы пока не найдены ввиду слишком большого числа стратегий, однако прогресс в области компьютерной техники позволяет прогнозировать решение этой задачи в обозримом будущем.

Пример. Найти нижнюю и верхнюю цену игры, если ее платежная матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1). Находим α *– нижнюю цену игры.* В каждой строке платежной матрицы определяем минимальный элемент

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right.,$$

а затем выбираем наибольший из них $\alpha = \max\{2; 3; 1\} = 3$.

2). Находим β – *верхнюю цену игры.* Из столбцов платежной матрицы выбираем максимальные элементы

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ \hline 4 \quad 4 \quad 6 \quad 5 \end{array}$$

а затем выбираем наименьший из них тогда $\beta = \min\{4; 4; 6; 5\} = 4$.

Таким образом, нижняя цена матричной игры $\alpha = 3$, верхняя цена $\beta = 4$.

Пример. Найти нижнюю и верхнюю цену игры, если известна ее платежная матрица

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 6 & 5 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выпишем значения платежной матрицы в таблицу.

Для определения оптимальной стратегии игрока A добавим к платежной матрице столбец, содержащий минимальные значения α_i элементов матрицы по каждой строке. Выделим наибольшее из значений α_i. Наибольшему значению $\alpha_4 = 5$ соответствует стратегия A_4. Выбирая данную стратегию, игрок A может быть уверен, что при самом худшем для него ходе игрока B он выиграет сумму $\alpha = 5$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	6	7	4	5	4
A_2	3	10	6	5	6	3
A_3	12	5	3	9	8	3
A_4	6	7	5	6	10	5

Для определения оптимальной стратегии игрока B добавим к платежной матрице строку, содержащую максимальные значения β_j элементов матрицы по каждому столбцу. Выделим наименьшее из значений β_j. Наименьшему значению $\beta_3 = 7$ соответствует стратегия B_3. Выбирая данную стратегию, игрок B может быть уверен, что при самом худшем для него ходе игрока A он проиграет, по крайней мере, сумму $\beta = 7$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	6	7	4	5	4
A_2	3	10	6	5	6	3
A_3	12	5	3	9	8	3
A_4	6	7	5	6	10	5
β_i	12	10	7	9	10	

Подводя итог, получим: нижняя цена игры $\alpha = 5$, а верхняя цена игры $\beta = 7$.

Пример. Найти цену игры с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем платежную матрицу в виде таблицы и рассчитаем значения α_i и β_j.

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0	-1	-2	-2
A_2	3	2	-1	-1
A_3	6	3	0	0
β_i	6	3	0	

Согласно нашим расчетам нижняя цена игры будет равна $\alpha = 0$, а верхняя – $\beta = 0$. Данная матричная игра также имеет седловую точку $\alpha = \beta = 0$. В данной игре для игрока A оптимальной стратегией является стратегия A_3, а для игрока B – стратегия B_3.

Таким образом, цена игры $v = 0$.

В матричных играх бывают случаи, когда платежная матрица имеет две и более седловых точек. В таких случаях можно говорить об эквивалентности выбора стратегий, которые соответствуют разным седловым точкам. Выбор соответствующей стратегии не повлияет на решение задачи.

Пример. Найти решение матричной игры с платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 6 \\ 8 & 4 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Элементы платежной матрицы поместим в таблицу и рассчитаем значения α_i и β_j.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	6	9	6	6
A_2	8	4	3	4	3
A_3	7	6	8	6	6
β_i	8	6	9	6	

В результате расчетов мы получили значения нижней и верхней цен $\alpha = 6$, $\beta = 6$. Описываемая игра имеет четыре седловые точки, которым соответствуют стратегии: A_1B_2, A_1B_4, A_3B_2 и A_3B_4. Независимо от выбора пары стратегий игроков *A* и *B* цена игры будет равна $v = 6$.

Таким образом, цена игры $v = 6$.

Выводы. В матричной игре с нулевой суммой каждый из игроков имеет оптимальные стратегии. Можно отметить, что любую матричную игру можно интерпретировать, как пару взаимно двойственных задач линейного программирования. Можно отметить, что игры с полной информацией (когда игроки при каждом своем ходе знают результаты всех предыдущих ходов) имеют седловую точку, а значит, и решение в чистых стратегиях.

25.3. Использование чистых и смешанных стратегий

25.3.1. Равновесные стратегии

Игра, в которой каждый из противников применяет одну и только одну стратегию, называется *игрой в чистых стратегиях*. В этом случае используемые игроками стратегии называются *чистыми стратегиями*, а цену игры

$$v = \alpha = \beta \tag{25.4}$$

называют *чистой ценой игры*.

Пара стратегий (A_i, B_j) называется равновесной или устойчивой, если в матричной игре ни одному из игроков не выгодно отходить от своей стратегии.

Пример. Найти решение матричной игры с платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 & 8 \\ 10 & 9 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Элементы платежной матрицы поместим в таблицу и таблицы и рассчитаем.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	5	7	10	8	5
A_2	10	9	11	10	9
A_3	8	6	7	4	4
β_i	10	9	11	10	

Нижняя цена игры $\alpha = 9$, верхняя цена игры $\beta = 9$, то есть игра имеет седловую точку $v = 9$.

Предположим, что игрок A узнал, о том, что противник применяет стратегию B_2, тогда он будет по-прежнему придерживаться своей стратегии A_2 , так как любое отступление игрока от выбранной стратегии только уменьшит его выигрыш.

Пусть игрок B знает, что игрок A применяет стратегию A_2. Это не заставит его отступить от своей стратегии B_2. В этой задаче игрокам в любом случае выгодно придерживаться выбранных стратегий A_2 и B_2 вне зависимости от поведения противника. Следовательно, пара стратегий (A_2, B_2) будет равновесной.

Ответ: Таким образом, решение матричной игры $v = 9$.

25.3.2. Оптимальные чистые стратегии

Стратегии A_i и B_j, при которых выполняется равенство нижней и верхней цены игры, называются *оптимальными чистыми стратегиями*, а их совокупность – *решением игры*.

Признаком устойчивости (равновесности) пары стратегии является равенство нижней и верхней цены игры.

Если $v>0$, то игра выгодна для игрока A, если $v<0$ – для игрока B; при $v=0$ игра является одинаково выгодной для обоих участников.

Игра, решаемая в чистых стратегиях, является игрой с *полной информацией*.

Теорема. Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, а следовательно, решается в чистых стратегиях, т.е. имеется пара оптимальных чистых стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный v.

Если платежная матрица игры содержит седловую точку, то ее решение сразу же находится по принципу максимина.

25.3.3. Смешанные стратегии

Смешанной стратегией называется случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии с соответствующими им вероятностями. Смешанную стратегию игрока A удобно записывать в виде следующей подстановки

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix} \text{ или } S_A=\left\| p_1, p_2, \dots, p_m \right\|, \qquad (25.5)$$

где $p_1 \ge 0$, $p_2 \ge 0$, …, $p_m \ge 0$,

$$\sum_{k=1}^{m} p_k = 1. \qquad (25.6)$$

Аналогично, смешанную стратегию игрока B также удобно записывать в виде следующей подстановки

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \text{ или } S_B=\left\| q_1, q_2, \dots, q_m \right\|, \qquad (25.7)$$

где $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, …, $q_n \geq 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = 1. \qquad (25.8)$$

Очевидно, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии, так как чистой стратегии A_1 соответствует подстановка

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ или } S_A = \|1, 0, \dots, 0\|,$$

а чистой стратегии B_2 – подстановка

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ или } S_B = \|0, 1, \dots, 0\|.$$

В общем случае чистой стратегии A_i соответствует следующий набор вероятностей:

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ \dots,\ p_i = 1,\ \dots,\ p_m = 0,$$

а чистой стратегии B_j – набор вероятностей

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ \dots,\ q_j = 1,\ \dots,\ q_n = 0.$$

Будем считать, что для соблюдения секретности каждый из игроков применяет свои стратегии независимо друг от друга.

Если игрок A применяет смешанную стратегию $S_A = \|p_1, p_2, \dots, p_m\|$, а игрок B смешанную стратегию $S_B = \|q_1, q_2, \dots, q_m\|$, то средний выигрыш игрока A определяется соотношением

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j. \qquad (25.9)$$

Очевидно что, ожидаемый проигрыш игрока B также можно вычислить по формуле (9).

Решением матричной игры в смешанных стратегиях называется набор (S_A, S_B, v), состоящий из оптимальных смешанных стратегий S_A и S_B игроков A и B соответственно и цены игры v.

Если игрок A формирует свою стратегию S_A в соответствии с принципом максимина, то он должен выбрать такую стратегию, при которой минимально возможный выигрыш был бы максимален, т.е.

$$\max_i \min_j \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j = v_A. \tag{25.10}$$

Аналогично, если игрок B формирует свою стратегию S_B в соответствии с принципом минимакса, то он должен выбрать такую стратегию, при которой максимально возможный выигрыш был бы минимален, т.е.

$$\min_j \max_i \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j = v_B \tag{25.11}$$

Теорема о максимине. В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой матричной игры при $\alpha \neq \beta$ имеет место равенство

$$v_A = v_B. \tag{25.12}$$

Данная теорема показывает существование равновесия в случае $v_A = v_B$, при $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.

Теорема Неймана. Любая матричная игра в общем случае имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение в смешанных стратегиях и соответствующую цену v.

Чистая стратегия, которая входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, называется *активной стратегией.*

Таким образом, если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, при условии, что второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

25.4. Решение игры с платежной матрицей 2x2

Рассмотрим матричную игру 2x2 с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{25.13}$$

Предположим, что данная игра не имеет седловой точки, т.е. $\alpha \neq \beta$.

Найдем оптимальное решение $S_A = \|p_1, p_2\|$ в смешанных стратегиях для игрока A.

В игре 2х2, если отсутствует седловая точка, любая чистая стратегия противника является активной. Выигрыш игрока A – это случайная величина, математическое ожидание которой равно цене игры ν. Следовательно, средний выигрыш игрока A будет равен ν для любой стратегии игрока *B*.

Таким образом, средний выигрыш игрока A, если он использует оптимальную смешанную стратегию, а игрок B – чистую стратегию B_1, равен цене игры ν:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu.$$

Если игрок B использует свою чистую активную стратегию B_2, то выигрыш игрока A будет равен:

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu.$$

Также необходимо учесть, что $p_1 + p_2 = 1.$

Таким образом, для определения оптимальной стратегии S_A игрока A получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \tag{25.14}$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \\ p_2 = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \\ \nu = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \end{cases} \tag{25.15}$$

Рассуждая аналогичным образом, для нахождения оптимальной смешанной стратегии игрока B получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1, \end{cases} \qquad (25.16)$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \\ q_2 = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \\ v = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \end{cases} \qquad (25.17)$$

Замечание. Для того чтобы выражения (15) и (17) имели смысл ($0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < 1$, $0 < q_1 < 1$, $0 < q_2 < 1$) необходимо, чтобы

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0; \\ a_{11} - a_{12} > 0; \\ a_{22} - a_{12} > 0; \\ a_{11} - a_{21} > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0; \\ a_{11} - a_{12} < 0; \\ a_{22} - a_{12} < 0; \\ a_{11} - a_{21} < 0. \end{cases}$$

Пример. Найдем оптимальные стратегии игры с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

	B_1	B_2	α_i
A_1	5	8	5
A_2	7	6	6
β_i	7	8	

Нижняя цена игры $\alpha = 6$, верхняя цена игры $\beta = 7$. Данная игра не имеет седловую точку, следовательно, имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях.

Для игрока A оптимальные вероятности применения стратегий A_1 и A_2 вычисляем по формулам (14), (15):

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{6-7}{5+6-7-8} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{5-8}{5+6-7-8} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = 0{,}75,$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{5\cdot 6 - 8\cdot 7}{5+6-7-8} = \frac{-26}{-4} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Для игрока B оптимальные вероятности применения стратегий B_1 и B_2 вычисляем по формулам (16), (17):

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{6-8}{5+6-7-8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{5-7}{5+6-7-8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{5\cdot 6 - 8\cdot 7}{5+6-7-8} = \frac{-26}{-4} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A = \|0{,}25; 0{,}75\|$, $S_B = \|0{,}5;\ 0{,}5\|$, цена игры $v = 3{,}5$. Так как $v > 0$, то игра выгодна для игрока A.

25.5. Уменьшение размерностей платежных матриц

Мы уже решали матричные игры размерностью 2х2. Решения игр с платежной матрицей большей размерности также можно найти, используя, например, методы линейного программирования. Однако при увеличении количества строк и столбцов решение матричных задач становится значительно сложнее.

Основной подход для решения матричных игр с платежной матрицей *m*x*n* сводится к уменьшению их размерности за счет дублирующих и доминируемых стратегий.

Формально матричная игра может содержать одинаковые стратегии как игрока *A*, так и игрока *B*.

Если платежная матрица игры содержит две или более строки с равными коэффициентами, то стратегии игрока *A* соответствующие этим строкам называются *дублирующими*. Таким же образом, если в платежной матрице имеются одинаковые столбцы, то можно говорить о *дублирующих* стратегиях игрока *B*.

Использование дублирующих стратегий в матричных играх не имеет смысла. Поэтому из одинаковых строк платежной матрицы можно оставить только одну строку, а из равных столбцов – только один столбец. При этом решение матричной игры не изменится.

В платежной матрице игры часто можно найти строку, все элементы которой меньше или равны соответствующим элементам другой строки матрицы. Такая стратегия игрока А называется доминируемой. Доминируемую стратегию игрок А не будет использовать, так как эта стратегия является заведомо невыгодной по сравнению со стратегией, у которой соответствующие элементы строки больше или равны.

Аналогичное название можно дать стратегиям игрока *B*, все элементы столбца которой больше или равны элементам некоторой другой строки. Доминируемая стратегия игрока *B* также будет невыгодной, так как проигрыш в случае ее применения проигрыш будет больше, чем при использовании стратегии с меньшими значениями элементов соответствующего столбца.

В силу вышеуказанных обстоятельств невыгодности использования доминируемых стратегий из платежной матрицы игры можно исключить строки и столбцы соответствующие доминируемым стратегиям игроков *A* и *B*. При каждом исключении доминирующей строки или столбца размерность платежной матрицы будет уменьшаться, а решение матричной игры не изменится.

Пример. Рассмотрим матричную игру, платежная матрица которой имеет вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	8	9	5	4	3
A_2	8	10	6	4	7
A_3	8	9	5	4	3
A_4	5	7	7	6	4
A_5	4	2	6	4	5
A_6	7	7	5	6	6

Исследуя стратегии игрока A можно увидеть, что стратегии A_1 и A_3 дублируют друг друга, следовательно, либо первую либо третью строки матрицы можно исключить. После удаления третьей строки получим:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	8	9	5	4	3
A_2	8	10	6	4	7
A_4	5	7	7	6	4
A_5	4	2	6	4	5
A_6	7	7	5	6	6

Рассмотрим стратегии A_1 и A_2. Видно, что все элементы первой строки платежной матрицы меньше либо равны элементам второй строки, поэтому можно исключить первую стратегию игрока A. Пятая стратегия игрока A также является доминируемой второй. Вычеркивая первую и пятую строки матрицы имеем:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_2	8	10	6	4	7
A_4	5	7	7	6	4
A_6	7	7	5	6	6

Теперь проанализируем стратегии игрока B. Дублирующих стратегий у него, очевидно, нет. Однако, сравнивая первый и второй столбец платежной матрицы, заметим, что стратегия B_2 доминирует над стратегиями B_1, B_3 и B_4. Следовательно, доминируемые стратегии B_1, B_3 и B_4 можно также исключить. В результате получим:

	B_2	B_5
A_2	10	7
A_4	7	9
A_6	7	6

Теперь снова вернемся к стратегиям игрока A. Из платежной матрицы видно, что стратегия A_6 является доминируемой в сравнении с любой другой стратегией первого игрока. Вычеркнем и стратегия A_6. Таким образом, окончательный вид платежной матрицы будет следующим:

	B_2	B_5
A_2	10	7
A_4	7	9

Таким образом, из матричной игры с платежной матрицей 6х5 мы получили игру с матрицей 2х2. Решение такой игры значительно проще.

Вопросы для самоконтроля

1. Определите понятия «игра», «стратегия», «решение игры», «выигрыш», «цель игры».

2. Сформулируйте общепринятую классификацию математических игр.

3. Какая игра называется матричной? Раскройте понятие «платежная матрица».

4. Приведите примеры описания матричной игры.

5. В чем состоят максимальные и минимальные стратегии игроков матричной игры?

6. Каким образом можно определить верхнюю и нижнюю цены игры?

7. Описание матричной игры. Примеры матричных игр.

8. Оптимальные стратегии. Принцип «максимина».

9. Что такое «седловая точка»? Определите методы нахождения седловой точки.

10. Опишите методы использование чистых и смешанных стратегий в матричных играх.

11. Опишите алгоритм решения матричной игры с платежной матрицей (2х2) при отсутствии седловой течки.

12. Какие особенности аналитического метода решения матричной игры (2х2) можно отметить?

13. Каким образом можно произвести сведение матричной игры к задаче линейного программирования?

14. Приведите алгоритмы уменьшение размерностей платежных матриц.

15. Дайте понятия доминирующих и дублирующих стратегий.

16. Опишите свойства матричных игр, используемые для упрощения игр

17. Приведите пример сведения матричной игры к игре меньшей размерности.

Заключение

Математика – это наука, основанная на постановке и решении задач о количественных и качественных пространственных соотношениях окружающего мира. Она идеализирует свойства реальных изучаемых объектов и формализует полученные знания. Математика играет важнейшую роль в фундаментальных и прикладных исследованиях любого направления как универсальный инструмент для расчета и математической обработки большого объема количественных результатов опытов и наблюдений, теоретических расчетов значений предполагаемых результатов и параметров, автоматизации вычислений сложных многофакторных процессов.

В учебнике рассмотрены только элементарные понятия, определения, формулы, методы и алгоритмы линейной алгебры, аналитической геометрии, общей алгебры, теории чисел, математического анализа, комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики.

Методы и алгоритмы, представленные в учебнике, в дальнейшем будут использованы как универсальный инструмент в математических, естественнонаучных, информационно-технических, социально-экономических и других дисциплинах и научных исследованиях. Это малая, но необходимая часть математических знаний для дальнейшего освоения профессиональных знаний, формирования компетенций, использования математических методов в будущей профессиональной деятельности.

Литература

1. Бубнова О.Ю. Математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб.-метод. пособие / О.Ю. Бубнова, Т.Е. Чикина, С.В. Крыгин // Труды сотрудников Нижегородской академии МВД России. – Н. Новгород: Нижегородская академия МВД России, 2017. – 86 с.

2. Горошко И.В. Математические методы исследования социальных систем: курс лекций / И.В. Горошко, Б.А. Торопов, Ш.Х. Гонов. – М.: Академия управления МВД России, 2019. – 80 с.

3. Думачев В.Н. Математика. Дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление: учеб. / В.Н. Думачев, С.А. Телкова. – Электрон. текстовые дан. – Текст: электронный // Труды сотрудников Воронежского института МВД России. – Воронеж: Воронежский институт МВД России, 2015.

4. Михайленко Е.В. Автоматизация обработки табличных данных для сбора и анализа социально-экономических показателей сотрудниками подразделений ОВД: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2021. – 148 с.

5. Михайленко Е.В. Введение в высшую математику: лекция / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2008. – 30 с.

6. Михайленко Е.В. Введение в общую алгебру: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 400 с.

7. Михайленко Е.В. Дискретная математика: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2016. – 104 с.

8. Михайленко Е.В. Дискретная математика: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2016. – 104 с.

9. Михайленко Е.В. Комбинаторный анализ: лекция / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 26 с.

10. Михайленко Е.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, М.А. Жукова. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2010. – 163 с.

11. Михайленко Е.В. Математика: учеб. / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2023. – 478 с.

12. Михайленко Е.В. Математика и информатика: курс лекций / Е.В. Михайленко, И.Н. Старостенко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2009. – 420 с.

13. Михайленко Е.В. Математика: курс лекций. Ч. 1. Элементы общей алгебры / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2019. – 120 с.

14. Михайленко Е.В. Математика: курс лекций. Ч. 2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2021. – 98 с.

15. Михайленко Е.В. Математика: курс лекций. Ч. 3. Математический анализ / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2020. – 90 с.

16. Михайленко Е.В. Методы оптимизации: сб. задач / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 140 с.

17. Михайленко Е.В. Прикладная математика: курс лекций / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2014. – 192 с.

18. Михайленко Е.В. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, М.А. Жукова, Ф.Ф. Бараненко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2011. – 142 с.

19. Михайленко Е.В. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, М.А. Жукова, Ф.Ф. Бараненко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2011.

20. Путилов А.О. Дискретная математика: логика, теория множеств и комбинаторика: учеб. пособие / А.О. Путилов, Э.Р Зарипова. – Электрон. текстовые дан. – Текст: электронный // Труды сотрудников Московского университета МВД России им. В.Я. Кикотя: сб. трудов. – М.: Московский университет МВД России им. В.Я. Кикотя, 2022.

21. Путилов А.О. Интегральное исчисление: учеб. пособие / А.О. Путилов. – Электрон. текстовые дан. – Текст: электронный // Труды сотрудников Московского университета МВД России им. В.Я. Кикотя. – М.: Московский университет МВД России им. В.Я. Кикотя, 2015. – URL: http://ebs.libkrumvd.ru/elib/1168

22. Сандрюкова Е.А. Математика. Элементы аналитической геометрии: учеб. пособие / Е.А. Сандрюкова. – Электрон. текстовые дан. – Текст: электронный // Труды сотрудников Московского университета МВД России им. В.Я. Кикотя. – М.: Московский университет МВД России им. В.Я. Кикотя, 2016.

23. Старостенко И.Н. Прикладная математика: учеб. / И.Н. Старостенко, Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2023. – 346 с.

24. Старостенко И.Н. Элементы статистической обработки данных: учеб. пособие / И.Н. Старостенко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2020. – 74 с.

25. Старостенко И.Н. Высшая математика для экономистов. Элементы линейной алгебры: учеб.-практ. пособие / И.Н. Старостенко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2021. – 76 с.

Учебное издание

Михайленко Евгений Владимирович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник

В двух частях

Часть 2

В авторской редакции

ISBN 978-5-9266-2126-3

Подписано в печать 29.02.2024. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 20,0. Тираж 100 экз. Заказ 220.

Краснодарский университет МВД России.
350005, г. Краснодар, ул. Ярославская, 128.