Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство внутренних дел Российской Федерации

Московский университет Министерства внутренних дел
Российской Федерации имени В.Я. Кикотя

**Ю. А. Куриленко**
**И. Ю. Харламова**

# Математика для курсантов и слушателей, обучающихся по специальности «Судебная экспертиза»

Учебное пособие

Москва

Московский университет
МВД России имени В.Я. Кикотя

2025

**УДК 51**
**ББК 22.1**
**К93**

Рецензенты:
доцент кафедры информационных технологий Академии управления МВД России кандидат юридических наук **В. В. Баранов**;
доцент кафедры информационно-компьютерных технологий в деятельности органов внутренних дел Белгородского юридического института МВД России имени И.Д. Путилина кандидат технических наук **Е. Г. Ковалева**

**Куриленко, Ю. А.**
**К93** **Математика для курсантов и слушателей, обучающихся по специальности «Судебная экспертиза»** : учебное пособие / Ю. А. Куриленко, И. Ю. Харламова. – М. : Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя, 2025. – 98 с.
ISBN 978-5-9694-1620-8

В учебном пособии изложены отдельные главы математических знаний по начертательной геометрии и элементам теории вероятностей, предлагаются примеры с решениями и задания для проверки усвоения материала.

Предназначено для курсантов, студентов и слушателей высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Судебная экспертиза», а также преподавателей при подготовке материалов проведения занятий по дисциплине «Математика».

УДК 51
ББК 22.1

**ISBN 978-5-9694-1620-8**

# Оглавление

# Введение

Использование математических методов и вычислительной техники в судебной экспертизе имеет сравнительно недавнюю историю. Если не считать работ А. Бертильона, Э. Локара и Е. Ф. Буринского, которые носили главным образом постановочный характер, лишь с середины 50-х гг. XX в. группой российских криминалистов (А. П. Краснов, П. Г. Орлов и др.) были начаты фундаментальные исследования возможностей и условий использования вероятностно-статистических методов для решения судебно-почерковедческих задач.

Несколько позже аппарат теории вероятностей и математической статистики был применен при разработке новых методик судебно-портретной экспертизы (З. И. Кирсанов), дактилоскопической экспертизы (А. Я. Папиашвили).

Судебная экспертиза – самостоятельный вид деятельности, осуществляемый сведущими лицами (экспертами) и направленный на познание истины по уголовному или гражданскому делу. Этим положением обозначается также чрезвычайно широкий круг самых разных исследований, проводимых в тех случаях, когда при производстве дознания, предварительного следствия и судебного разбирательства необходимы специальные знания в науке, технике, искусстве или ремесле, чтобы выявить скрытую суть явлений или вещей, познать их и дать им научное толкование.

По своей сущности экспертное познание есть разновидность познания конкретного факта. Оно основано на тех же принципах, что и любое другое познание в ходе расследования и судебного рассмотрения дела. Вместе с тем оно отличается от названных выше не только своей процессуальной формой, но и, что не менее важно, своими средствами и методами.

Особое место среди них ныне заняли средства и методы познания объектов судебно-экспертного исследования, основанные на творческом использовании данных математики, информатики и кибернетики в комплексе со средствами вычислительной техники. Естественно, что знания эксперта должны быть углублены и дополнены новыми сведениями, необходимыми для того, чтобы он имел реальное представление о сущности проводимых исследований, возможностях и ограничениях количественного подхода. Это вовсе не означает, что эксперт должен превратиться в математика. Дело в том, что, используя математические знания при решении прикладных задач, довольно четко можно выделить принципиальную и расчетную сторону количественного подхода. К первой относятся принципы такого подхода, определение возможностей и границ применения методов, некоторые общие характеристики процессов решения задачи и принятия решений. В этой принципиальной части количественного подхода эксперту разбираться необходимо.

Методики исследования объектов экспертизы, разработанные криминалистами в содружестве с математиками, способствуют объективизации процесса экспертного исследования. Авторы большинства разработок стремились максимально упростить процедуру их применения. Однако относительная простота овладения методиками зачастую порождает иллюзорное мнение о возможности пользования ими без знания основ математики, что противоречит самой природе экспертной деятельности. Эксперт вправе применять лишь те методы, сущность которых он не только четко представляет, но и может разъяснить любому участнику процесса, будь то следователь, судья, обвиняемый, адвокат. Поэтому ему крайне необходимо знание основных положений математики (начертательной геометрии, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики и т. д.).

Авторы данной работы ставят целью помочь экспертам-криминалистам приобрести и развить навыки решения конкретных прикладных задач и уверены в том, что изучение математических методов позволит эффективнее применять на практике специальные познания.

# Глава 1. Элементы начертательной геометрии

## 1.1. Общие сведения о проекциях

Под *проекцией* $M_p$ точки $M$ на плоскости $P$ понимается изображение точки $M$ на этой плоскости, полученное следующим образом. Проведем через точку $M$ произвольную прямую (не параллельную плоскости $P$) до пересечения с плоскостью $P$ в некоторой точке $M_p$. Эта точка $M_p$ называется *проекцией* точки $M$ на плоскость $K$ (рис. 1.1).

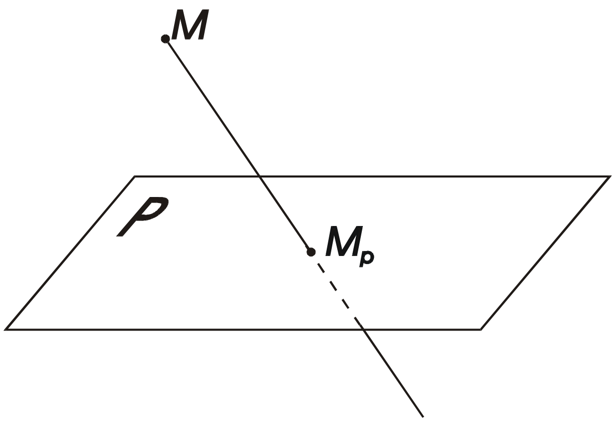



*Рис. 1.1. Проекция точки на плоскость*

Прямая $MM_p$ называется *проектирующей прямой*, или *проектирующим лучом*. Плоскость $P$ называется *плоскостью изображений*, или *плоскостью проекций*.

Имея какой-либо предмет в пространстве, можно построить его изображение или, иными словами, его проекцию на плоскость $P$, проведя через каждую точку предмета проектирующий луч до пересечения с плоскостью проекций *P*. В зависимости от способа проведения проектирующих лучей, проекции делятся на параллельные и центральные.

Проекция называется *параллельной*, если все проектирующие лучи параллельны между собой.

Примером параллельной проекции может служить тень, отброшенная от какого-либо предмета, при его освещении солнечным светом (рис. 1.2).

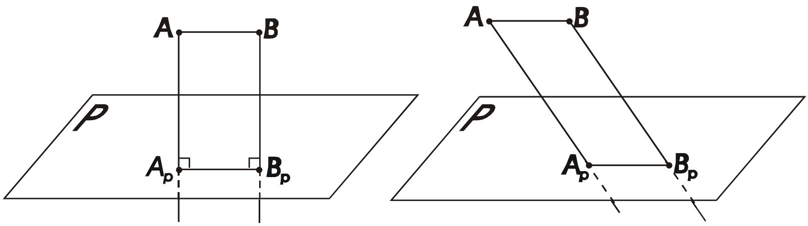



*Рис. 1.2. Параллельные (ортогональная и косоугольная) проекции*

В зависимости от угла наклона проектирующего луча к плоскости проекций параллельные проекции делятся на ортогональные (или прямоугольные) и косоугольные. Если проектирующий луч перпендикулярен плоскости проекций, то проекция называется *ортогональной* (или *прямоугольной*); если же угол наклона отличен от прямого, то *косоугольной* (см. рис. 1.2).

Проекция называется *центральной*, если все проектирующие лучи проходят через одну и ту же точку, называемую центром проекций (рис. 1.3).

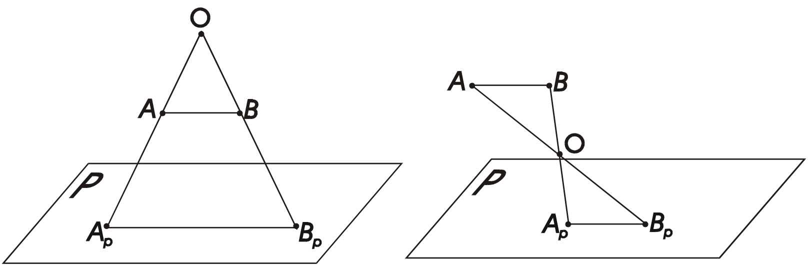



*Рис. 1.3. Центральная проекция*

При сравнении центральной и параллельной проекций можно сделать вывод, что параллельная проекция значительно меньше искажает форму изображаемого предмета, чем центральная. Поэтому способом параллельного проектирования пользуются как основным методом изображения в техническом черчении.

Центральная проекция какой-либо фигуры дает нам представление, наиболее близкое к тому, которое мы получаем, рассматривая предмет. Построение перспективного изображения условно можно представить так: между наблюдателем и рассматриваемым объектом находится прозрачная плоскость *К*, называемая *картинной*; световые лучи, проходя от объекта к глазу наблюдателя, создают на этой плоскости перспективное изображение объекта.

Следует отметить, что фотография также представляет собой центральную проекцию.

Рассмотрим двухэтапный процесс построения позитивного фотоизображения (рис. 1.4).

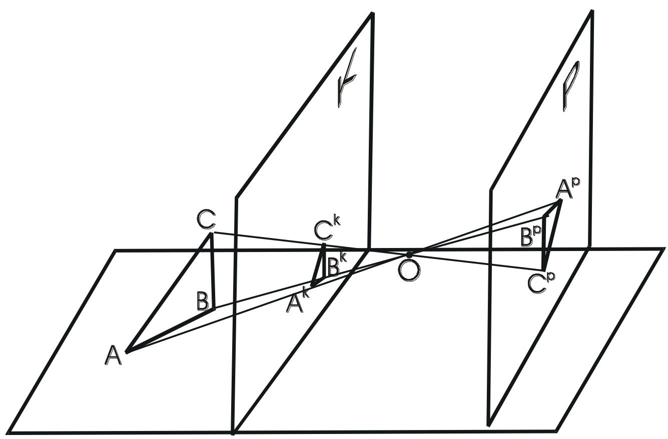



*Рис. 1.4. Построение центральной проекции*

Первый этап – построение негативного изображения: на горизонтальной плоскости *Т* расположен объект *ABC*, в точке *О* –

оптический центр объектива фотоаппарата, в плоскости $P$ – фотопленка. Треугольник $A^P B^P C^P$ – негативное перспективное изображение объекта $ABC$.

Второй этап – построение позитивного изображения (фотоснимка): в плоскости $P$ находится негатив, в точке $O$ – оптический центр объектива фотоувеличителя, в плоскости $K$ – фотобумага. Треугольник $A^K B^K C^K$ – позитивное изображение объекта $ABC$. Если плоскости $P$ и $K$ параллельны, изображения $A^K B^K C^K$ и $A^P B^P C^P$ отличаются между собой только масштабом.

Таким образом, фотоснимок является центральной проекцией объекта на плоскости, расположенной между объектом съемки и фотоаппаратом перпендикулярно оптической оси объектива фотоаппарата.

Центральную проекцию предмета называют также *его перспективой*.

## 1.2. Основные положения теории перспективы

Одним из разделов начертательной геометрии является теория перспективы, в которой излагаются методы построения изображений объектов на плоскости в таком виде, в каком они воспринимаются органами зрения или фиксируются на фотопленке.

Поскольку целью исследования эксперта-криминалиста часто является восстановление пространственных характеристик объектов по фотоснимку, который, как было замечено ранее, является центральной проекцией, необходимо подробнее познакомиться с основными положениями теории перспективы.

Перспективно-горизонтальная измерительная фотосъемка подчиняется следующему условию: плоскость фотопленки должна быть перпендикулярна предметной плоскости, или оптическая ось объектива фотоаппарата параллельна предметной плоскости.

### 1.2.1. Система перспективных координат

Рассмотрим систему координат, принятую в теории перспективы (рис. 1.5).

*Предметная плоскость Т* – горизонтальная плоскость, на которой располагаются наблюдаемые (фотографируемые) объекты и наблюдатель (фотоаппарат).

*Картинная плоскость К* (картина) – вертикальная плоскость, на которой строится перспективное изображение рассматриваемых (фотографируемых) объектов. При перспективно-горизонтальной фотосъемке картина располагается перпендикулярно оптической оси фотоаппарата.

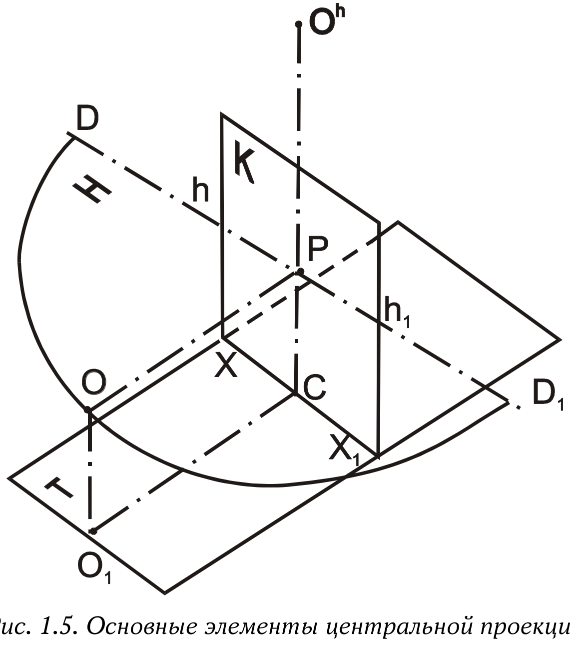



*Рис. 1.5. Основные элементы центральной проекции*

Следует отметить, что картинная плоскость $K$, определенная в системе перспективных координат, отличается от фотоснимка места происшествия: фотоснимок является уменьшенной копией картинной плоскости – *малой картиной*. Изображение на фотоснимке отличается от изображения на картинной плоскости только кратностью. Для картинной плоскости характерно то, что объекты, расположенные на ее основании, изображаются в натуральную величину.

*Основание $XX_1$* картины – линия пересечения плоскости $K$ с предметной плоскостью $T$. Эта линия определяет положение картинной плоскости на предметной. При фотографировании основание $XX_1$ картины является границей попадания предметной плоскости в поле зрения объектива. В теории перспективы принято, что на картинную плоскость проецируются объекты, расположенные за основанием картины.

*Точка зрения $O$* (центр проекции) – точка, указывающая место расположения глаза наблюдателя или оптического центра объектива фотоаппарата относительно картинной плоскости $K$.

*Точка стояния $O_1$* – перпендикулярная проекция точки зрения $O$ на предметную плоскость $T$ (основание перпендикуляра $OO_1$, опущенного из точки $O$ на предметную плоскость). Точка стояния определяет место нахождения наблюдателя или фотоаппарата на предметной плоскости.

*Высота $OO_1$* точки зрения – расстояние от точки зрения до предметной плоскости (длина отрезка $OO_1$).

*Главный луч зрения $OP$* – перпендикуляр, опущенный из точки зрения $O$ на картинную плоскость $K$. Он определяет расстояние от наблюдателя до картинной плоскости. При фотографировании главный луч зрения совпадает с оптической осью объектива фотоаппарата.

*Главная точка $P$* картины – точка пересечения главного луча зрения с картинной плоскостью. На фотоснимке, полученном с полного негатива, главная точка картины совпадает с геометрическим центром фотоснимка.

*Плоскость горизонта* $H$ – плоскость, параллельная предметной плоскости и проходящая через точку зрения $O$.

*Линия горизонта* $hh_1$ – линия пересечения картинной плоскости с плоскостью горизонта.

*Плоскость главного перпендикуляра* – вспомогательная плоскость, проходящая через главный луч зрения перпендикулярно картинной и предметной плоскостям.

*Главный перпендикуляр* $PC$ картинной плоскости – линия пересечения плоскости главного перпендикуляра с картинной плоскостью.

*Точки отдаления* $D$ и $D_1$ (дистанционные точки) – точки, расположенные на линии горизонта по обе стороны от главной точки $P$ картины на расстоянии, равном расстоянию от наблюдателя до картинной плоскости (длине главного луча зрения $OP$).

*Совмещенная точка зрения* $O^h$ – точка, расположенная на линии главного перпендикуляра, выше главной точки $P$ картины на расстоянии, равном расстоянию от наблюдателя до картинной плоскости (длина отрезка $OP$).

Рассмотренная система перспективных координат позволяет ориентироваться в пространстве и получать количественные характеристики места происшествия по взаимному расположению объектов на фотоснимке.

### 1.2.2. Центральная теорема теории перспективы

Построение перспективного изображения прямой основывается на центральной теореме теории перспективы.

**Теорема**

Центральная проекция бесконечной прямой, не параллельной плоскости проекций (картинной плоскости) и не проходящей через центр проекции (точку зрения), есть конечный отрезок.

Не доказывая теорему, поясним ее содержание на примере (рис. 1.6). Действительно, если рельс принять за модель бесконечной прямой, то, как видно на фотографии, ее центральной проекцией является конечный отрезок *AB*. Точка, в которой прямая зрительно исчезает, называется *точкой схода* прямой (точка *B* на рис. 1.6). Точка, в которой прямая пересекает картинную плоскость, называется *следом* прямой (точка *A* на рис. 1.6).

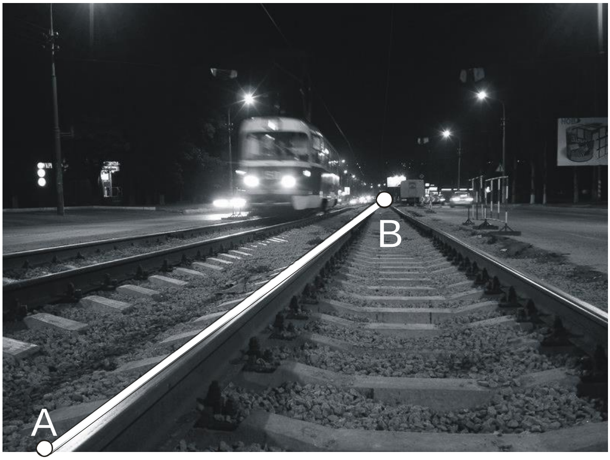



*Рис. 1.6. Центральная проекция бесконечной прямой*

Из центральной теоремы теории перспективы вытекают следствия, важные для определения масштабов фотоизображений.

**Следствие 1.** Чтобы найти на плоскости картины точку схода для заданной в пространстве прямой, необходимо и достаточно провести через точку зрения (оптический центр объектива фотоаппарата) луч, параллельный этой прямой. Точка пересечения луча с плоскостью картины и будет искомой точкой схода для заданной прямой.

**Следствие 2.** Для построения перспективного изображения какой угодно прямой, не параллельной плоскости картины и не проходящей через точку зрения, необходимо и достаточно в плоскости картины иметь две точки, принадлежащие рассматриваемой прямой, – точку схода и след этой прямой на картинной плоскости (см. рис. 1.6).

**Следствие 3.** Перспективные изображения параллельных прямых, пересекающих картинную плоскость и не проходящих через точку зрения, сходятся в одной точке (точка *C* на рис. 1.7).

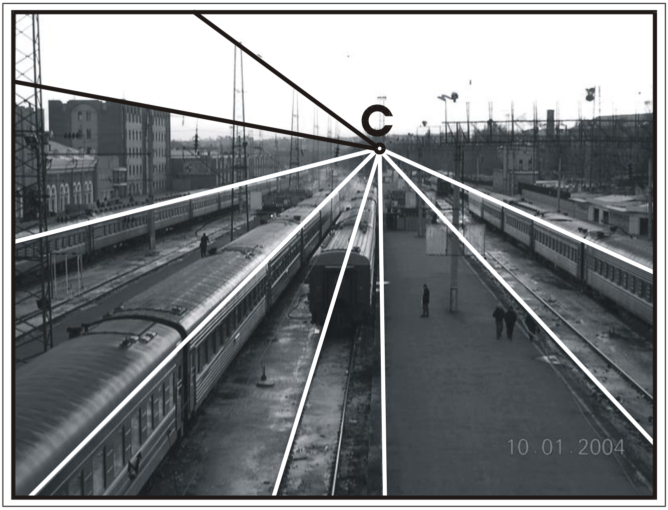



*Рис. 1.7. Точка схода параллельных прямых*

**Следствие 4.** Если картинная плоскость перпендикулярна предметной, то точка схода любой прямой, лежащей в предметной плоскости, находится на линии горизонта (рис. 1.6–1.8).

**Следствие 5.** Точкой схода прямых, находящихся на горизонтальной предметной плоскости и перпендикулярных основанию $XX_1$ картины, является главная точка *P* картины (рис. 1.8).

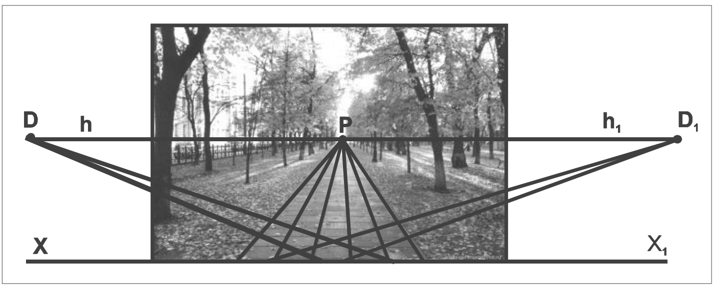



*Рис. 1.8. Главная и дистанционные точки*

**Следствие 6**. Точки отдаления $D$ и $D_1$ (дистанционные точки) – точки схода прямых, составляющих с основанием $XX_1$ картины угол 45° (см. рис. 1.8).

**Следствие 7.** Перспективным изображением прямой, параллельной картинной плоскости, является прямая, параллельная заданной прямой (линия горизонта на рис. 1.9).

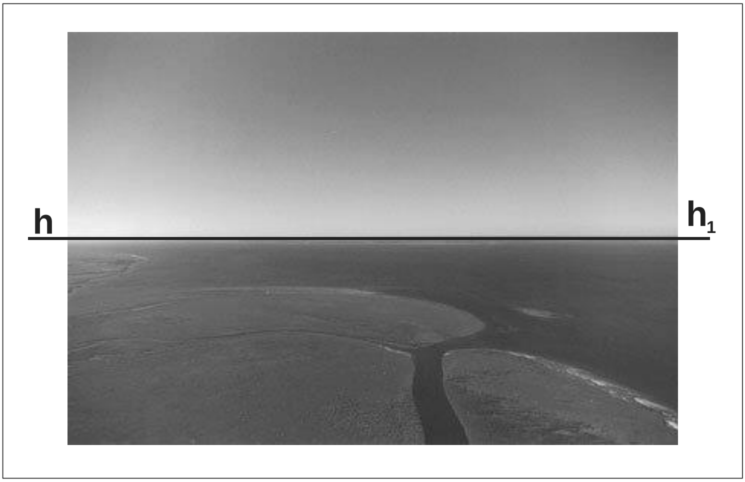



*Рис. 1.9. Перспективное изображение прямой, параллельной картинной плоскости*

**Следствие 8.** Перспективным изображением прямой, проходящей через точку зрения $O$, служит точка (след этой прямой) на картинной плоскости.

Для иллюстрации данного следствия возьмите карандаш (модель прямой) и, зажмурив один глаз, расположите его вдоль луча зрения. Вместо карандаша вы увидите только его верхнюю грань (модель точки).

**Следствие 9.** Истинная величина изображенного на фотоснимке угла $ABC$, лежащего в предметной плоскости, определяется путем измерения угла между прямыми, проведенными из совмещенной точки зрения $O^h$ к точкам схода сторон угла (рис. 1.10).

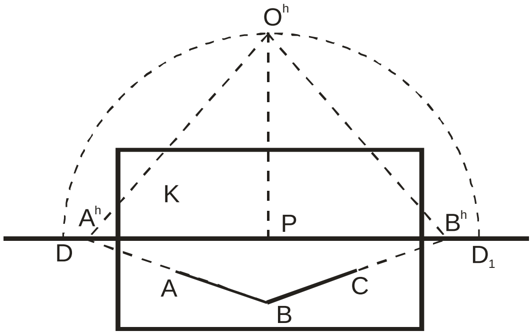



*Рис. 1.10. Измерение угловой величины*

**Замечание.** Перспективным изображением плоской фигуры, расположенной в плоскости параллельной картинной, является фигура, ей подобная.

В дальнейшем при решении задач будем использовать следующие обозначения:

$[AB]$, $(AB)$ – соответственно отрезок и прямая $AB$;

$|AB|$ – длина отрезка $AB$;

$\angle ABC$ – угол с вершиной в точке $B$;

т. $K$ – точка $K$;

$(AB)\cap(CD)$ = К – точкой пересечения прямых $AB$ и $CD$является точка $K$;

$(AB)||(CD)$ – прямые $AB$ и $CD$ параллельны;

$(AB)\perp(CD)$ – прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны.

**Пример 1.1**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат ($P$ – главная точка, $hh_1$ – линия горизонта, $XX_1$ – основание картины, $D$ и $D_1$ – точки отдаления)[1]. Прямая $AB$ принадлежит предметной плоскости, точка $C$ находится на основании картины (рис. 1.11, а).

[1] В дальнейшем, если в условии задачи говорится о том, что задана перспективная система координат, то это означает, что заданы следующие точки и линии: $P$ – главная точка картины; $hh_1$ – линия горизонта; $XX_1$ – основание картины; $D$ и $D_1$ – точки отдаления.

Построить прямую, проходящую через точку $C$ параллельно прямой $AB$.

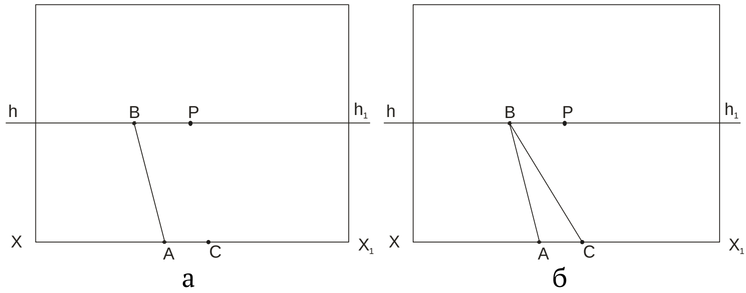



*Рис. 1.11. Иллюстрации к примеру 1.1*

**Решение**

1. Построение.

Соединим т. $C$ и т. $B$. Отрезок $[CB]$ – изображение искомой прямой (рис. 1.11, б).

2. Доказательство.

Точка $B$ является точкой схода прямых $(AB)$ и $(BC)$, так как находится на линии горизонта (следствие 4). Прямые $(AB)$ и $(BC)$ параллельны, так как имеют общую точку схода (следствие 3).

**Пример 1.2**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат. Точка $A$ принадлежит основанию картины $XX_1$ (рис. 1.12).

Определить величины углов $\angle PAX_1$ и $\angle DAD_1$.

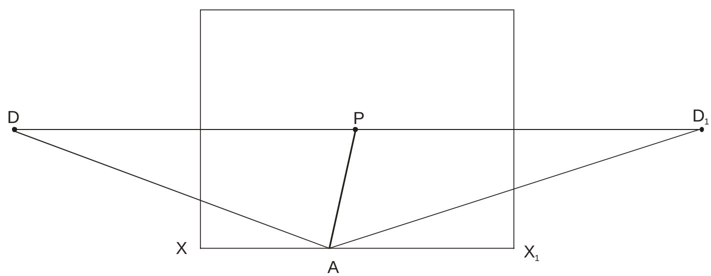



*Рис. 1.12. Иллюстрация к примеру 1.2*

**Решение**

$\angle PAX_1 = 90°$, так как одна из сторон данного угла находится на основании картины, а точкой схода второй стороны является главная точка картины $P$ (следствие 5).

$\angle DAX = \angle D_1AX = 45°$, так как одна из сторон данных углов находится на основании картины, а точкой схода второй стороны является дистанционная точка (следствие 6).

$\angle DAD_1 = 180° - (\angle DAX + \angle D_1AX) = 90°$.

**Пример 1.3**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат. Треугольник $ABC$ расположен в предметной плоскости, причем сторона $CB$ находится на прямой, точкой схода которой является главная точка картины $P$, а сторона $AC$ параллельна основанию картины $XX_1$ (рис. 1.13).

Доказать, что $|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}$ .

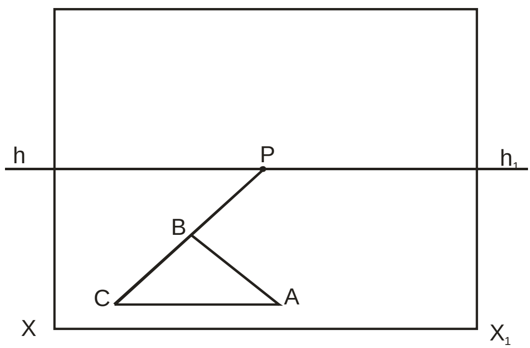



*Рис. 1.13. Иллюстрация к примеру 1.3*

**Решение**

Действительно, $\angle BCA = 90°$, так как точкой схода прямой $BC$ является главная точка картины $P$ (следствие 5). Кроме того, $(CA) \parallel (XX_1)$, следовательно, $\angle BCA = 90°$.

Отсюда по теореме Пифагора $|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}$ .

**Пример 1.4**

Рассмотрим изображение картины *K* с заданной системой перспективных координат. Как и в примере 1.3, треугольник *ABC* расположен в предметной плоскости, причем сторона *CB* находится на прямой, точкой схода которой является главная точка картины *P*, а сторона *AC* параллельна основанию картины $XX_1$. Треугольник *KBC* также расположен в предметной плоскости, причем сторона *KC* параллельна основанию картины $XX_1$ (рис. 1.14).

Доказать, что $|\mathrm{AB}| = \sqrt{|\mathrm{AC}|^2 + |\mathrm{KC}|^2}$ .

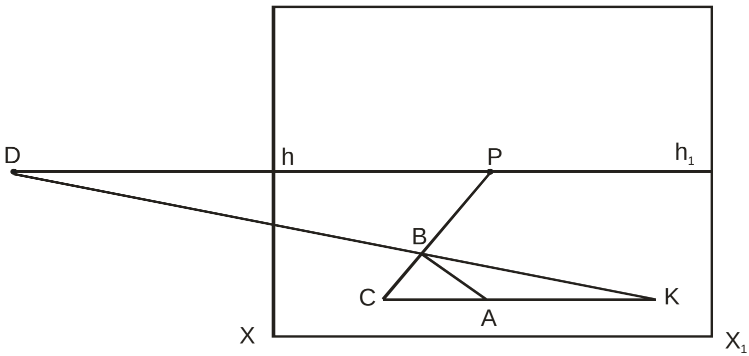



*Рис. 1.14. Иллюстрация к примеру 1.4*

**Решение**

Рассмотрим треугольник *CBK*.

В этом треугольнике $\angle BCK$ = 90°, так как точкой схода прямой *CB* является главная точка картины *P*, а сторона *CK* параллельна основанию картины $XX_1$ (следствие 5). Кроме того, $\angle BKC$ = 45°, так как точкой схода прямой *BK* является дистанционная точка *D*, а сторона *CK* параллельна основанию картины $XX_1$ (следствие 6). Поскольку сумма углов в треугольнике равна 180°, то $\angle CBK$ = 180° – ($\angle BCK$ + $\angle BKC$) = 180° – (90° + 45°) = 45°. Следовательно, треугольник *BCK* – равнобедренный, а потому справедливо тождество |*CB*| = |*KC*|.

В примере 1.3 было доказано, что $|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}$ .

Подставляя сюда последнее равенство, получим $|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |KC|^2}$ .

**Пример 1.5**

Пусть на перспективно-горизонтальном фотоснимке имеется изображение квадратного масштаба *MM'N'N*, расположенного в предметной плоскости. Сторона квадрата *MN* находится на основании фотоснимка. Построить систему перспективных координат (рис. 1.15).

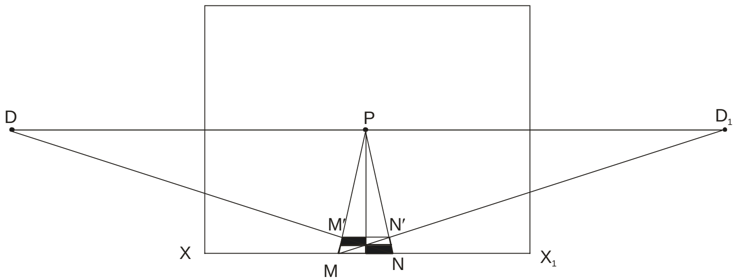



*Рис. 1.15. Построение перспективной системы координат по масштабному квадрату*

**Решение**

1. Построение.

Проведем прямую ($XX_1$) через т. $M$ и т. $N$. Прямая ($XX_1$) – основание картины.

Продолжим стороны квадрата $MM'$ и $NN'$ до пересечения в т. $P$. Точка $P$ – главная точка картины.

Через т. $P$ проведем прямую ($hh_1$) параллельно основанию картины. Прямая ($hh_1$) – линия горизонта.

Продолжим диагонали $MN'$ и $NM'$ до пересечения с линией горизонта $hh_1$ в т. $D$ и т. $D_1$. Точки $D$ и $D_1$ – точки отдаления (дистанционные точки).

Перспективная система координат восстановлена.

2. Доказательство.

Прямая $XX_1$ является основанием картины по построению: она проходит через точки $M$ и $N$, которые по условию задачи находятся на основании фотоснимка. Точка $P$ – главная точка картины, так как данная точка является точкой схода прямых, расположенных под углом 90° к основанию картины (следствие 5). Прямая ($hh_1$) – линия горизонта по построению: данная прямая проходит через главную точку картины параллельно основанию. Точки $D$ и $D_1$ – дистанционные точки, так как являются точками схода прямых, расположенных под углом 45° к основанию картины.

Итак, определены все основные точки и линии системы перспективных координат.

Методы перспективно-горизонтальной фотосъемки применяются при фиксации обстановки места происшествия и отдельных ее узловых моментов. Размеры объектов определяются по снимку при наличии в кадре квадратного масштаба[1]. Его при съемке располагают так, чтобы его ближняя грань совпадала с нижним краем кадра. При наличии на снимке изображения метрического квадрата, проведя несложные построения, можно определить размеры предметов и их взаимное расположение. Первоначально требуется восстановить систему перспективных координат. Как это сделать было рассмотрено в примере 1.5. В следующих параграфах мы познакомимся с тем, как, восстановив перспективную систему координат, определить размеры предметов и их взаимное расположение.

**Вопросы для самопроверки**

1. Что называется проекцией точки на плоскость?
2. Какая проекция называется параллельной?

[1] Квадратный масштаб (метрический квадрат) изготавливают обычно из картона, с размером сторон 1×1 м. Он имеет дециметровые деления в виде черных квадратов, расположенных в шахматном порядке.

3. Какая проекция называется центральной?

4. Как строится перспективная система координат?

5. Перечислите и охарактеризуйте основные точки и линии перспективной системы координат.

6. Сформулируйте центральную теорему теории перспективы и следствия из нее.

7. Как можно восстановить перспективную систему координат по квадрату, расположенному в предметной плоскости, одна из сторон которого находится на основании картины?

## Задания для самостоятельного решения

### Задача 1.1

На перспективно-горизонтальном фотоснимке (рис. 1.16)[1] задано изображение квадратного масштаба $MM'N'N$ (плоскость квадрата расположена в предметной плоскости, сторона $MN$ – на основании картины $XX_1$). Точки $A$ и $B$ находятся на предметной плоскости. Требуется:

а) провести в предметной плоскости через точку $A$ прямую $l$ под углом 135° к основанию картины $XX_1$, через точку $B$ – прямую $l_1$ под углом 90° к основанию картины;

б) построить изображение расположенного в предметной плоскости прямоугольного треугольника $ABC$, один из катетов которого параллелен основанию картины, а гипотенузой служит отрезок $AB$;

в) построить изображение расположенного в предметной плоскости прямоугольника $ACBE$, одна из сторон которого параллельна основанию картины, диагональю которого служит отрезок $AB$;

г) построить изображения точек $A'$ и $B'$, принадлежащих основанию картины, являющихся ближайшими к точкам $A$ и $B$ соответственно.

---

[1] На рисунке показана левая нижняя часть фотоснимка.

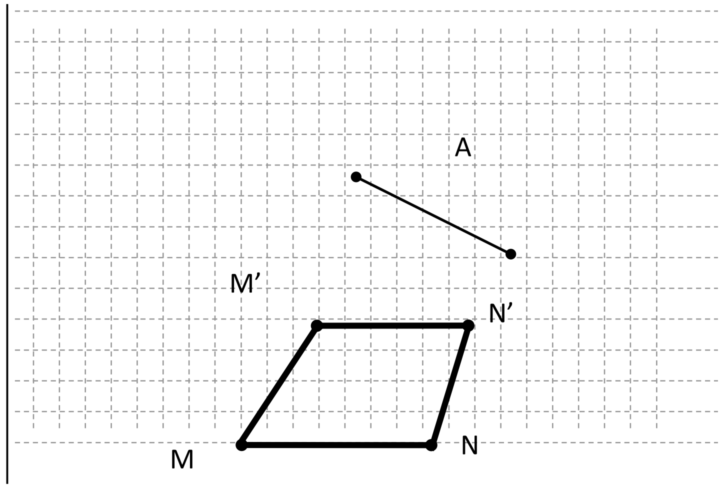
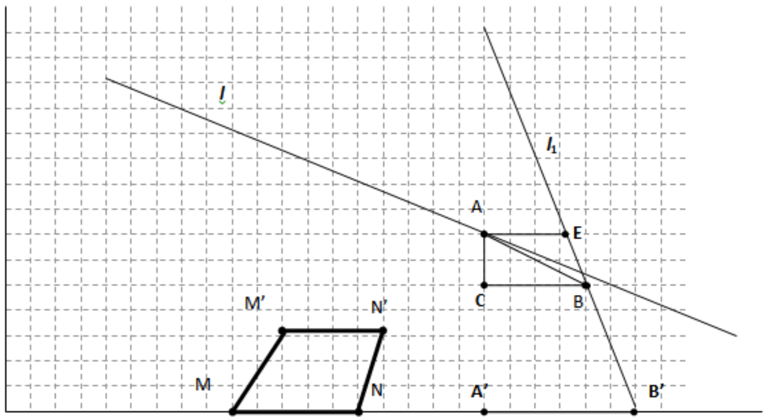



*Рис. 1.16. Местоположение масштабного квадрата и точек к задаче 1.1*

Ответ:



## 1.3. Определение масштабов при перспективно-горизонтальной фотосъемке

Рассмотрим фотоснимок (рис. 1.17). Условно принято, что на нем нет объектов, отмечены только точки и прямые, соответствующие точкам и прямым на картинной плоскости: *P* – главная точка, $hh_1$ – линия горизонта, $XX_1$ – основание картины, *D* и $D_1$ – точки отдаления.

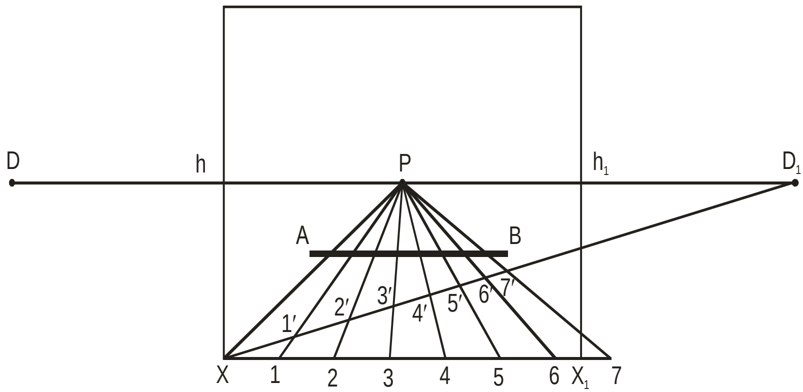



*Рис. 1.17. Определение линейных масштабов на фотоснимке*

На линии $XX_1$ основания фотоснимка от точки *X* откладывают отрезки линейного масштаба, который определяют путем деления длины в 1 м на кратность уменьшения изображения по отношению к картине. Таким образом, основание $XX_1$ разделено рядом точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, расстояние между которыми равно линейному масштабу, что эквивалентно 1 м на основании картинной плоскости. Соединив точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 с главной точкой *P*, получим перспективные изображения прямых на предметной плоскости. Эти прямые, с одной стороны, взаимно параллельны и параллельны оптической оси объектива, так как сходятся в главной точке фотоснимка, с другой стороны, они перпендикулярны основанию $XX_1$ фотоснимка, и расстояние между ними равно 1 м.

Прямые *1P*, *2P*, *3P*, *4P*, *5P*, *6P*, *7P* делят любую прямую, например *AB*, параллельную основанию $XX_1$ фотоснимка и находящуюся на предметной плоскости, на равные отрезки, являющиеся линейными масштабами вдоль прямой *AB*. Кроме того, эти отрезки служат линейными масштабами для плоскости, параллельной картинной плоскости и проходящей через прямую *AB*, так как для этой плоскости выполняется условие масштабной фотосъемки: она перпендикулярна оптической оси фотоаппарата. Так определяются горизонтальный и вертикальный масштабы для любой плоскости, параллельной картине.

Характерным отличием глубинного масштаба от горизонтального или вертикального является то, что он все время уменьшается по мере удаления вдоль прямой, параллельной главному лучу зрения. Чтобы определить глубинный масштаб, из точки *X* основания проводят прямую через точку отдаления $D_1$. Эта прямая есть перспективное изображение прямой, расположенной на предметной плоскости и составляющей с линией $XX_1$ основания фотоснимка угол 45° (так как точкой схода перспективного изображения этой прямой является точка отдаления $D_1$).

Точки пересечения прямой $XD_1$ с прямыми *1P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P, 7P* обозначим соответственно 1', 2', 3', 4', 5', 6' 7'. Легко доказать, что расстояния 1-1', 2-2', 3-3', 4-4', 5-5', 6-6', 7-7' соответственно равны расстояниям *X*-1 (1 м), *X*-2 (2 м), *X*-3 (3 м); *X*-4 (4 м), *X*-5 (5 м), *X*-6 (6 м), *X*-7 (7 м), поскольку треугольники *X11'*, *X22'*, *X33'*, ... *X77'* – равнобедренные, так как они – прямоугольные (прямые *1P*, *2P*, *3P*, ... *7P* перпендикулярны основанию $XX_1$), а угол $D_1XX_1$ равен 45° (прямая $XD_1$ составляет угол 45° с основанием $XX_1$). Таким способом определяют расстояние от любой точки на предметной плоскости до линии основания картины.

Для проведения измерений по перспективно-горизонтальному фотоснимку с метрическим квадратом часто пользуются координатной сеткой. Построить ее можно следующим образом (рис. 1.18).

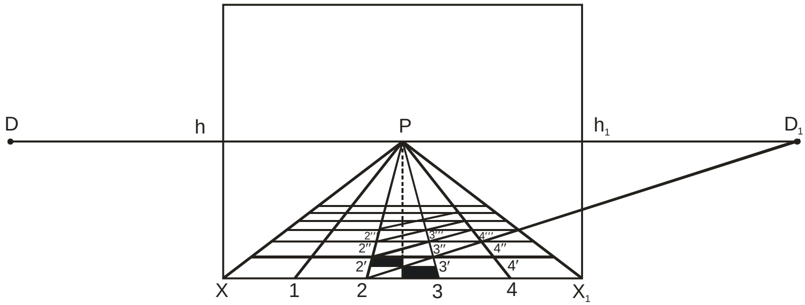



*Рис. 1.18. Построение координатной сетки*

Первоначально восстановим систему перспективных координат по масштабному квадрату (см. пример 1.5).

На линии основания фотоснимка $XX_1$ отложим отрезки линейного масштаба, равные длине основания метрического квадрата. Таким образом, разделим основание $XX_1$ фотоснимка рядом точек *1, 2, 3, …*, расстояние между которыми равно линейному масштабу, что эквивалентно 1 м на основании картинной плоскости. Соединив точки *1, 2, 3, …* с главной точкой фотоснимка, получим глубинные прямые координатной сетки.

Для построения горизонталей координатной сетки проведем прямую $2D_1$. На пересечении прямых $2D_1$ и $4P$ получим точку $4''$: $(2D_1) \cap (4P)$ = т. $4''$. Проведем из этой точки прямую, параллельную основанию картины, которая пересечет прямые $2P$ и $3P$ в точках $2''$ и $3''$ соответственно. Далее в полученном квадрате $2'2''3'3''$ проведем диагональ, а затем прямую, параллельную основанию. Таким образом, проводя диагонали и строя горизонтали, получим перспективную координатную сетку на всем фотоснимке.

**Пример 1.6**

Рассмотрим изображение картины *K* с заданной системой перспективных координат.

Отрезок *MN* соответствует отрезку длиной 1 м и лежит на основании картины, точка *A* принадлежит предметной плоскости (рис. 1.19).

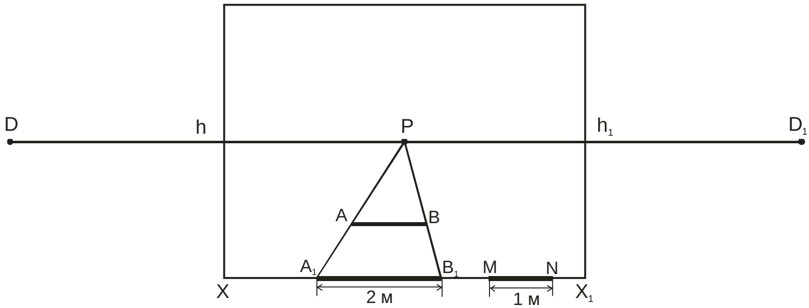



*Рис. 1.19. Построение горизонтального отрезка*

Построить изображение отрезка $AB$ длиной 2 м, параллельного основанию картины $XX_1$ и расположенного в предметной плоскости.

**Решение**

1. Построение.

Проведем прямую $PA$ до пересечения с основанием картины $XX_1$: $(PA) \cap (XX_1) = A_1$. Отложим на основании картины отрезок $A_1B_1$, где $|A_1B_1| = 2 \text{ x } |MN|$.

Поведем через т. $A$ прямую $l$, параллельную основанию картины $XX_1$. $(PB_1) \cap l = B$.

Отрезок $AB$ – искомый.

2. Доказательство.

Действительно, прямые $A_1P$ и $B_1P$ параллельны, так как имеют общую точку схода – т. $P$ (следствие 3). Прямая $l$ параллельна прямой $XX_1$, по построению и на основании следствия 7. Следовательно, длины отрезков $AB$ и $A_1B_1$ равны: $|AB| = |A_1B_1|$ как длины параллельных отрезков между параллельными прямыми.

В свою очередь, $|A_1B_1| = 2 \text{ x } |MN| = 2$ м. Следовательно, длина отрезка $AB$ также равна 2 м.

**Пример 1.7**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат.

Отрезок *MN* соответствует отрезку длиной 1 м и лежит на основании картины, точка *A* принадлежит предметной плоскости (рис. 1.20).

Построить изображение отрезка *AC* длины 2 м, перпендикулярного предметной плоскости.

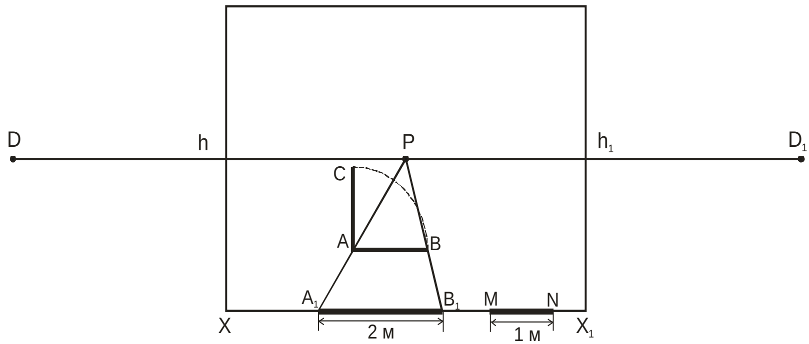



*Рис. 1.20. Построение вертикального отрезка*

**Решение**

1. Построение.

Отрезок *AB* построим аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче.

В свою очередь, отрезок *AC* построим как отрезок, перпендикулярный отрезку *AB* и равный ему по длине.

Отрезок *AC* – искомый.

2. Доказательство.

Поскольку в плоскости, параллельной картинной, масштабы сохраняются, то $|AC| = |AB| = 2$ м.

**Пример 1.8**

Рассмотрим изображение картины *K* с заданной системой перспективных координат. Отрезок *MN* и точка *A* находятся на основании картины, $|MN| = 1$ м (рис. 1.21).

Построить изображение отрезка *AB* длиной 2 м, перпендикулярного основанию картины $XX_1$ и расположенного в предметной плоскости.

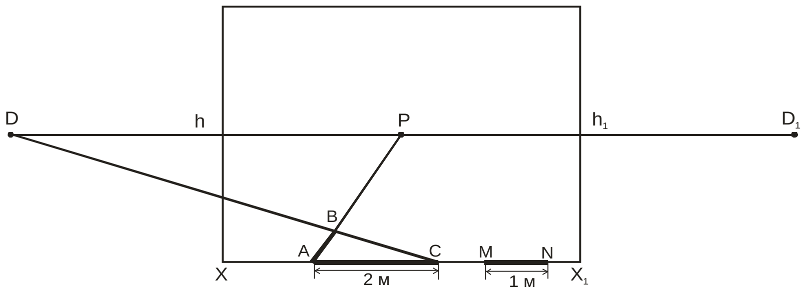



*Рис. 1.21. Построение глубинного отрезка*

**Решение**

1. Построение.

Отложим на основании картины отрезок $AC$, где $|AC| = 2 \times |MN|$. Проведем прямые $PA$ и $CD$: $(PA) \cap (CD) = B$.

Отрезок $AB$ – искомый.

2. Доказательство.

Действительно, $\angle BAC = 90°$, так как отрезок $AB$ лежит на прямой, точкой схода которой является главная точка картины $P$ (следствие 5). В свою очередь, $\angle BCA = 45°$, так как отрезок $BC$ лежит на прямой, точкой схода которой является главная точка отдаления $D$ (следствие 6).

Следовательно, $\angle ABC = 180° - (90° + 45°) = 45°$, а треугольник $ABC$ является равнобедренным, т. е. $|AB| = |AC|$.

В свою очередь, $|AC| = 2 \times |MN| = 2$ м. Следовательно, длина отрезка $AB$ также равна 2 м.

**Пример 1.9**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат.

Отрезок $MN$ соответствует отрезку длиной 1 м и лежит на основании картины (рис. 1.22).

Построить изображение прямоугольника $AA_1BB_1$, плоскость которого параллельна картинной плоскости, сторона $AB$ расположена на предметной плоскости на расстоянии 1 м от основания картины. Кроме того, $|AB| = 3$ м, $|AA_1| = 2$ м.

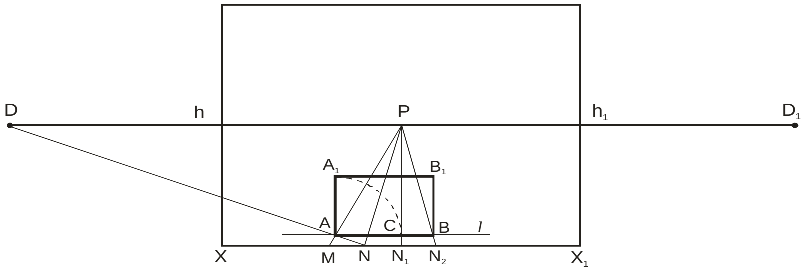



*Рис. 1.22. Построение прямоугольника,*
*плоскость которого параллельна картинной плоскости*

**Решение**

1. Построение.

Отложим на основании картины точки $N$ и $N_1$: $|NN_1| = |NN_2| = 1$ м.

Проведем прямые $PM$ и $ND$: $(PM) \cap (ND) = A$. Отметим также прямые $PN$, $PN_1$, $PN_2$.

Через точку $A$ проведем прямую $l$ параллельно основанию $(XX_1)$: $l \cap (PN_1) = C$; $l \cap (PN_2) = B$.

Построим отрезок $AA_1$, перпендикулярный отрезку $AB$, причем $|AA_1| = |AC|$.

Проведем прямые $(A_1B_1)$ и $(BB_1)$: $(A_1B_1) \parallel (AB)$; $(B_1B) \parallel (AA_1)$.

Соединим точки $AA_1BB_1$. Прямоугольник $AA_1BB_1$ – искомый.

2. Доказательство.

Поскольку по условию задачи плоскость прямоугольника параллельна картинной, то изображением прямоугольника является прямоугольник.

Докажем, что сторона прямоугольника $AB$ находится на расстоянии 1 м от основания. Действительно, $\angle AMN = 90°$, так как отрезок $AM$ лежит на прямой, точкой схода которой является главная точка картины $P$ (следствие 5). В свою очередь, $\angle ANM = 45°$, так как отрезок $AN$ лежит на прямой, точкой схода которой является главная точка отдаления $D$ (следствие 6).

Следовательно, $\angle MAN = 180° - (90° + 45°) = 45°$, а треугольник $AMN$ является равнобедренным, т. е. $|AM| = |MN| = 1$ м.

Поскольку, согласно следствию 7, перспективным изображением прямой, параллельной картинной плоскости, является прямая, параллельная заданной, то сторона прямоугольника $AB$ параллельна основанию картины по построению. Докажем, что сторона $AB$ равна 3 м. Действительно, так как на основании картины масштабы сохраняются, то $|MN_2|$ = 3 м. Кроме того, $(MP) \parallel (N_2P)$, так как эти прямые имеют общую точку схода (следствие 3), $l \parallel (XX_1)$ по построению. Следовательно, $|MN_2| = |AB|$ = 3 м как параллельные отрезки между параллельными прямыми.

Аналогично можно доказать, что $|MN_1| = |AC|$ = 2 м. Кроме того, поскольку в плоскости, параллельной картинной, масштабы сохраняются, то и $|AA_1| = |AC|$ = 2 м, а $\angle AA_1C = 90°$.

$|A_1B_1| = |AB|$ = 3 м, $|BB_1| = |AA_1|$ = 2 м по построению (как параллельные отрезки между параллельными прямыми). Таким образом, прямоугольник $AA_1BB_1$ является искомым.

**Пример 1.10**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат.

Отрезок $MN$ соответствует отрезку длиной 1 м и лежит на основании картины (рис. 1.23).

Построить изображение прямоугольника $AA_1BB_1$, плоскость которого находится в предметной плоскости, сторона $AB$ расположена на предметной плоскости на расстоянии 1 м от основания картины. Кроме того, $|AB|$ = 3 м, $|AA_1|$ = 2 м.

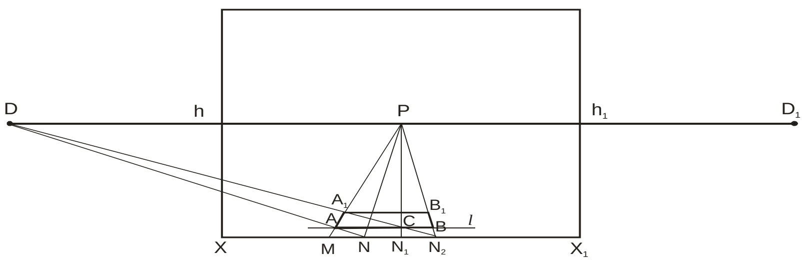



*Рис. 1.23. Построение прямоугольника, плоскость которого расположена в предметной плоскости*

**Решение**

1. Построение.

Отложим на основании картины точки $N$ и $N_1$: $\left|NN_1\right| = \left|NN_2\right| = 1$ м.

Проведем прямые $PM$ и $ND$: $(PM) \cap (ND) = A$. Отметим также прямые $PN, PN_1, PN_2$.

Через точку $A$ проведем прямую $l$ параллельно основанию $(XX_1)$: $l \cap (PN_1) = C$; $l \cap (PN_2) = B$.

Проведем прямую $CD$: $(CD) \cap (AP) = A_1$.

Проведем прямую $(A_1B_1)$ параллельно основанию картины: $(A_1B_1) \cap (PB) = B_1$.

Соединим точки $AA_1BB_1$. Прямоугольник $AA_1BB_1$ – искомый.

2. Доказательство.

Поскольку по условию задачи плоскость прямоугольника расположена в предметной плоскости, то изображением прямоугольника является трапеция.

Доказательство того, что сторона прямоугольника $AB$ находится на расстоянии 1 м от основания, а также того, что $\left|AB\right| = 3$ м, $\left|AC\right| = 2$ м аналогично предыдущему примеру.

Кроме того, $\left|AB\right| = \left|A_1B_1\right| = 3$ м как параллельные отрезки между параллельными прямыми.

Докажем, что $\left|AA_1\right| = \left|AC\right| = 2$ м. Действительно, $l \parallel (XX_1)$ (по построению и согласно следствию 7), тогда $\angle A_1CA = \angle A_1N_2X$, $\angle A_1AC = \angle A_1MX_1$ как углы, образованные при пересечении параллельных прямых третьей прямой. Но отрезок $A_1N_2$ находится на прямой, точкой схода которой является дистанционная точка $D$, а значит $\angle A_1N_2X = 45°$ (следствие 6). В свою очередь, отрезок $A_1M$ находится на прямой, точкой схода которой является главная точка картины $P$, а значит $\angle A_1MX_1 = 90°$ (следствие 5). Следовательно, $\angle A_1CA = 45°$, $\angle A_1AC = 90°$, а значит, поскольку сумма углов в треугольнике равна 180°, $\angle AA_1C = 45°$. Значит треугольник $A_1AC$ прямоугольный и равнобедренный, $|AA_1| = |AC| = 2$ м.

Таким образом, прямоугольник $AA_1BB_1$ является искомым.

### Вопросы для самопроверки

1. Как на перспективно-горизонтальном фотоснимке определить горизонтальный и вертикальный масштабы для любой плоскости: параллельной, картинной?

2. Как на перспективно-горизонтальном фотоснимке определить глубинный масштаб?

3. Как на перспективно-горизонтальном фотоснимке построить координатную сетку?

4. Какой фигурой будет являться изображение квадрата на перспективно-горизонтальном фотоснимке, если квадрат расположен в предметной плоскости?

5. Какой фигурой будет являться изображение квадрата на перспективно-горизонтальном фотоснимке, если квадрат расположен в плоскости, параллельной картинной?

### Задания для самостоятельного решения

**Задача 1.2**

Рассмотрим декартову систему координат на плоскости. Задана система перспективных координат: $P$ (12, 12) – главная точка картины; $D$ (0, 12) и $D_1$ (24, 12) – дистанционные точки; ось $Ox$ – основание картины. Отрезок с концами в точках $A$ (4, 0) и $B$ (8, 0) находится на основании картины и равен 1 м.

Построить перспективные изображения и определить их декартовы координаты для следующих элементов:

а) вершин $A_1$ и $B_1$ масштабного квадрата $AA_1B_1B$;

б) вершины $C$ прямоугольного треугольника $ABC$ с катетами $AB$ и $AC$ = 3 м;

в) вершин $Q$ и $E$ равнобедренного прямоугольного треугольника $AQE$ с гипотенузой $AE$ = 6 м, если точка $B$ принадлежит гипотенузе;

г) вершин $F$, $G$ и $H$ квадрата $B_1FHG$ со стороной 2 м, если известно, что точка $A_1$ лежит на продолжении стороны $B_1G$, а точка $B$ лежит на продолжении стороны $B_1F$;

д) вершин $K$ и $L$ прямоугольного треугольника $AKL$ с катетами $AK = 2$ м и $KL = 6$ м, если известно, что вершина $B$ принадлежит катету $AK$.

Ответ: $A_1$ (6, 3); $B_1$ (9, 3); $C$ (8, 6); $Q$ (14, 6); $E$ (28, 0); $F$ (10, 6); $G$ (15, 3); $H$ (14, 6); $K$ (12, 0); $L$ (12, 8).

## 1.4. Измерение линейных и угловых величин при перспективно-горизонтальной фотосъемке

В этом параграфе введем следующие обозначения:

$|AB|^{ист.}$ – истинная длина отрезка $|AB|$;

$|AB|^{рис.}$ – длина изображения отрезка $|AB|$ на рисунке (фотоснимке).

Если отрезок параллелен основанию картины (рис. 1.24), то ширину такого объекта определяют путем сравнения с отрезком горизонтального масштаба, имеющим стандартный размер.

**Пример 1.11 (масштаб ширины)**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат. Отрезок $MN$ соответствует отрезку длиной 1 м и лежит на основании картины. Отрезок $AB$ расположен в предметной плоскости и параллелен основанию. Определить длину отрезка $AB$.

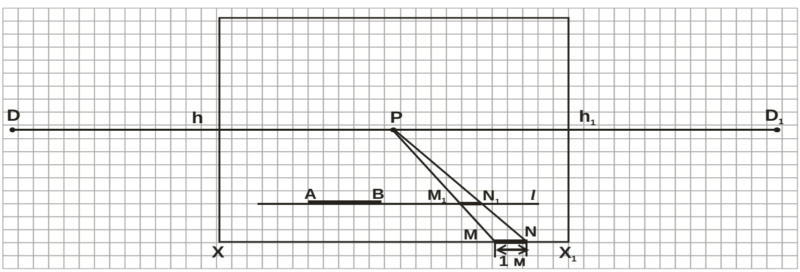



*Рис. 1.24. Измерение горизонтального отрезка*

**Решение**

1. Построение.

Проведем прямые ($MP$) и ($NP$), а также (через точки $A$ и $B$) прямую $l$: $(MP) \cap l = M_1$, $(NP) \cap l = N_1$.

$|MN| = |M_1N_1| = 1$ м.

Докажем это тождество.

2. Доказательство.

Прямые ($MP$) и ($NP$) имеют общую точку схода, а следовательно, они параллельны (следствие 3). Прямые $l$ и ($XX_1$) также параллельны (по построению и следствию 7). Следовательно, $|MN| = |M_1N_1|$ как параллельные отрезки между параллельными прямыми.

3. Расчет.

Поскольку отрезки $[M_1N_1]$ и $[AB]$ расположены в одной плоскости, параллельной картинной, то длину отрезка $|AB|$ определим, сравнивая его с длиной отрезка $|M_1N_1|$.

Для этих целей составим пропорцию:

$$\frac{|AB|^{рис.}}{|M_1N_1|^{рис.}} = \frac{|AB|^{ист.}}{|M_1N_1|^{ист.}}.$$

Измерим длины отрезков $[M_1N_1]$ и $[AB]$ на чертеже $|M_1N_1|^{рис.} = 0{,}7$ см, $|AB|^{рис.} = 2{,}3$ см. Подставляя эти значения, а также значение $|M_1N_1|^{ист.} = 1$ м $= 100$ см в пропорцию, получим:

$$\frac{2{,}3\ см}{0{,}7\ см} = \frac{|AB|^{ист.}}{100\ см};\ \text{откуда}\ |AB|^{ист.} = \frac{2{,}3\ см \cdot 100\ см}{0{,}7\ см} \approx 329\ см = 3{,}29\ м.$$

Определение высоты объектов (рис. 1.25) по перспективно-горизонтальному фотоснимку также не представляет труда. Поскольку в плоскости, параллельной картинной, масштабы сохраняются, то высоту объекта определяют путем сравнения с отрезком горизонтального масштаба, имеющим стандартный размер.

**Пример 1.12 (масштаб высоты)**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат. Отрезок $MN$ соответствует отрезку длиной 1 м и лежит на основании картины. Точка $A$ принадлежит предметной плоскости, а отрезок $AB$ расположен перпендикулярно к ней. Определить высоту отрезка $AB$.

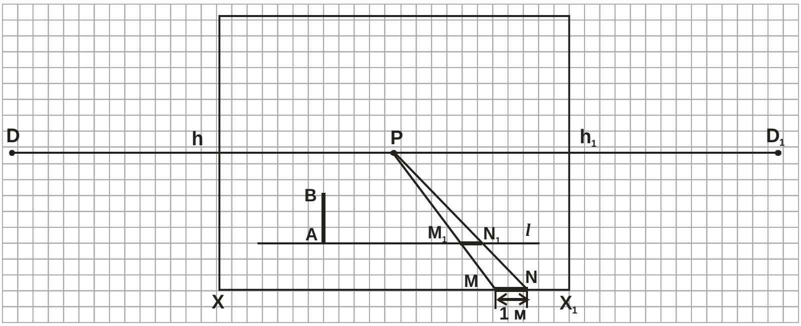



*Рис. 1.25. Измерение вертикального отрезка*

**Решение**

1. Построение.

Проведем прямые ($MP$) и ($NP$), а также прямую $l$ через точку $A$ параллельно основанию картины $XX_1$: $(MP) \cap l = M_1$, $(NP) \cap l = N_1$. $|MN| = |M_1N_1| = 1$ м.

Докажем это тождество.

2. Доказательство.

Прямые ($MP$) и ($NP$) имеют общую точку схода, а следовательно, они параллельны (следствие 3). Прямые $l$ и ($XX_1$) также параллельны (по построению и следствию 7). Следовательно, $|MN| = |M_1N_1|$ как параллельные отрезки между параллельными прямыми.

3. Расчет.

Так как отрезки $[M_1N_1]$ и $[AB]$ расположены в одной плоскости, параллельной картинной, то высоту отрезка $|AB|$ определим, сравнивая его с длиной отрезка $|M_1N_1|$.

Для этих целей составим пропорцию:

$$\frac{|AB|^{рис.}}{|M_1N_1|^{рис.}} = \frac{|AB|^{ист.}}{|M_1N_1|^{ист.}}.$$

Измерим длины отрезков $[M_1N_1]$ и $[AB]$ на чертеже $|M_1N_1|^{рис.}$ = 0,7 см, $|AB|^{рис.}$ = 2,3 см. Подставляя эти значения, а также значение $|M_1N_1|^{ист.}$ = 1 м = 100 см в пропорцию, получим:

$$\frac{1{,}6\ см}{0{,}7\ см} = \frac{|AB|^{ист.}}{100\ см}, \text{ откуда } |AB|^{ист.} = \frac{1{,}6\ см \cdot 100\ см}{0{,}7\ см} \approx 229\ см = 2{,}29\ м.$$

Для определения длины отрезка, расположенного в предметной плоскости перпендикулярно картинной, необходимо выполнить дополнительное построение: привести глубинный отрезок к горизонтальному (рис. 1.26).

**Пример 1.13 (масштаб глубины)**

Рассмотрим изображение картины *K* с заданной системой перспективных координат. Отрезок *MN* соответствует отрезку длиной 1 м и лежит на основании картины. Отрезок *AB* расположен в предметной плоскости перпендикулярно картинной. Определить длину отрезка *AB*.

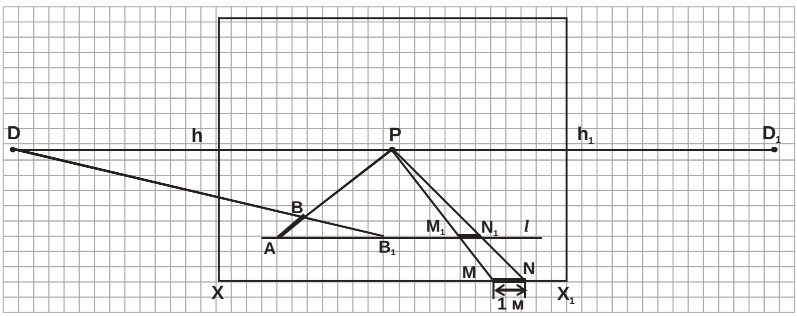



*Рис. 1.26. Измерение отрезка в глубину*

**Решение**

1. Построение.

Проведем прямые $(MP)$ и $(NP)$, а также прямую $l$ через точку $A$ параллельно основанию картины $XX_1$: $(MP) \cap l = M_1$, $(NP) \cap l = N_1$.

$|MN| = |M_1N_1| = 1$ м.

Проведем прямую ($DB$) до пересечения с прямой $l$: $(DB) \cap l = B_1$.

$|AB| = |AB_1|$.

2. Доказательство.

Тождество $|MN| = |M_1N_1| = 1$ м было доказано в предыдущем примере.

Докажем, что $|AB| = |AB_1|$. Действительно, $l \parallel (XX_1)$ (по построению и согласно следствию 7). Отрезок $BB_1$ находится на прямой, точкой схода которой является дистанционная точка $D$, а значит $\angle BB_1A = 45°$ (следствие 6). В свою очередь, отрезок $AB$ находится на прямой, точкой схода которой является главная точка картины $P$, а значит $\angle BAB_1 = 90°$ (следствие 5). А значит, так как сумма углов в треугольнике равна 180°, $\angle ABB_1 = 45°$. Следовательно, треугольник $BAB_1$ прямоугольный и равнобедренный: $|AB_1| = |AB|$.

3. Расчет.

Поскольку отрезки $[M_1N_1]$ и $[AB_1]$ расположены в одной плоскости, параллельной картинной, то длину отрезка $|AB_1|$ определим, сравнивая его с длиной отрезка $|M_1N_1|$.

Для этих целей составим пропорцию:

$$\frac{|AB_1|^{рис.}}{|M_1N_1|^{рис.}} = \frac{|AB_1|^{ист.}}{|M_1N_1|^{ист.}}.$$

Измерим длины отрезков $|M_1N_1|$ и $|AB_1|$ на чертеже $|M_1N_1|^{рис.} = 0{,}7$ см, $|AB_1|^{рис.} = 3{,}5$ см. Подставляя эти значения, а также значение $|M_1N_1|^{ист.} = 1$ м $= 100$ см в пропорцию, получим:

$$\frac{3{,}5\ см}{0{,}7\ см} = \frac{|AB_1|^{ист.}}{100\ см}, \text{ откуда } |AB_1|^{ист.} = \frac{3{,}5\ см \cdot 100\ см}{0{,}7\ см} \approx 500\ см = 5\ м.$$

Следовательно, из $|AB_1| = |AB|$ получаем $|AB| = 5$ м.

Для определения расстояния между двумя произвольными точками на предметной плоскости используется теорема Пифагора. Строится прямоугольный треугольник (рис. 1.27), гипотенузой которого является измеряемое расстояние, а катеты параллельны и перпендикулярны основанию картины. Катеты измеряются, как в примерах 1.11 и 1.13, и по теореме Пифагора находится длина гипотенузы – искомое расстояние.

**Пример 1.14**

Рассмотрим изображение картины *K* с заданной системой перспективных координат. Отрезок *MN* соответствует отрезку длиной 1 м и лежит на основании картины. Отрезок *AB* расположен в предметной плоскости. Определить длину отрезка *AB*.

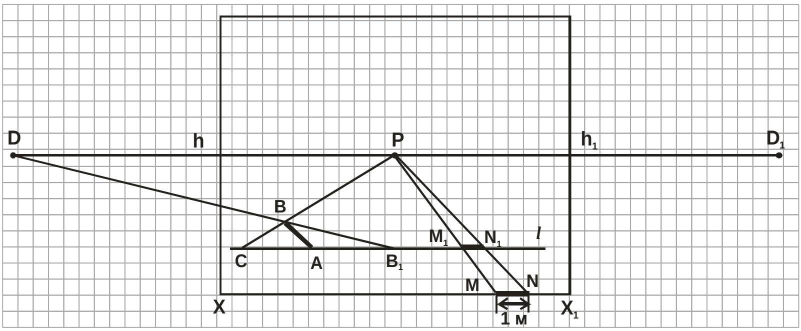



*Рис. 1.27. Измерение расстояния между двумя произвольными точками на предметной плоскости*

**Решение**

1. Построение.

Проведем прямые ($MP$) и ($NP$), а также прямую $l$ через точку $A$ параллельно основанию картины $XX_1$: $(MP) \cap l = M_1$, $(NP) \cap l = N_1$.

$|MN| = |M_1N_1| = 1$ м.

Проведем прямые ($BP$) и ($DB$) до пересечения с прямой $l$: $(BP) \cap l = C$, $(BD) \cap l = B_1$. $|AB| = \sqrt{|CB_1|^2 + |AC|^2}$ .

2. Доказательство.

Тождество $|MN| = |M_1N_1| = 1$ м было доказано в примере 1.12. $\angle BCA = 90°$, так как прямая $l$ параллельна основанию картины, а отрезок $|CB|$ расположен на прямой, точкой схода которой является главная точка картины (следствие 5). Следовательно, по теореме Пифагора $|AB| = \sqrt{|CB|^2 + |AC|^2}$ .

Докажем, что $|CB| = |CB_1|$. Действительно, $l \parallel (XX_1)$ (по построению и согласно следствию 7). Отрезок $BB_1$ находится на прямой, точкой схода которой является дистанционная точка $D$, а значит $\angle BB_1A = 45°$ (следствие 6). Ранее было доказано, что $\angle BCA = 90°$. А значит, так как сумма углов в треугольнике равна 180°, $\angle ABB_1 = 45°$. Следовательно, треугольник $BCB_1$ прямоугольный и равнобедренный, откуда $|CB_1| = |CB|$.

3. Расчет.

Поскольку отрезки $[CB_1]$ и $[CA]$ расположены в одной плоскости с отрезком $|M_1N_1|$, причем эта плоскость параллельна картинной, их размеры можно определить из пропорций:

$$\frac{|CA|^{рис.}}{|M_1N_1|^{рис.}} = \frac{|CA|^{ист.}}{|M_1N_1|^{ист.}}; \quad \frac{|CB_1|^{рис.}}{|M_1N_1|^{рис.}} = \frac{|CB_1|^{ист.}}{|M_1N_1|^{ист.}}.$$

Измерим длины отрезков $[M_1N_1]$, $[CB_1]$ и $[CA]$ на чертеже: $|M_1N_1|^{рис.} = 0{,}7$ см, $|CB_1|^{рис.} = 4{,}8$ см, $|CA|^{рис.} = 2{,}1$ см. Подставляя эти значения, а также значение $|M_1N_1|^{ист.} = 100$ см в пропорции, получим: $\dfrac{2{,}1\,см}{0{,}7\,см} = \dfrac{|CA|^{ист.}}{100\,см}$; $\dfrac{4{,}8\,см}{0{,}7\,см} = \dfrac{|CB_1|^{ист.}}{100\,см}$, откуда $|CA|^{ист.} = 3{,}00\,м; |CB_1|^{ист.} \approx 6{,}86\,м$. Подставляя полученные значения в тождество $|AB| = \sqrt{|CB|^2 + |AC|^2}$ , определим длину отрезка $[AB]$: $|AB| = \sqrt{3{,}00^2 + 6{,}86^2} \approx 7{,}49 м$.

Измерение угловых величин основано на следствии 9 (см. рис. 1.10).

**Пример 1.15**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат. Угол $ABC$ расположен в предметной плоскости, сторона $BC$ параллельна основанию картины ($XX_1$). Определить величину $\angle ABC$ (рис. 1.28).

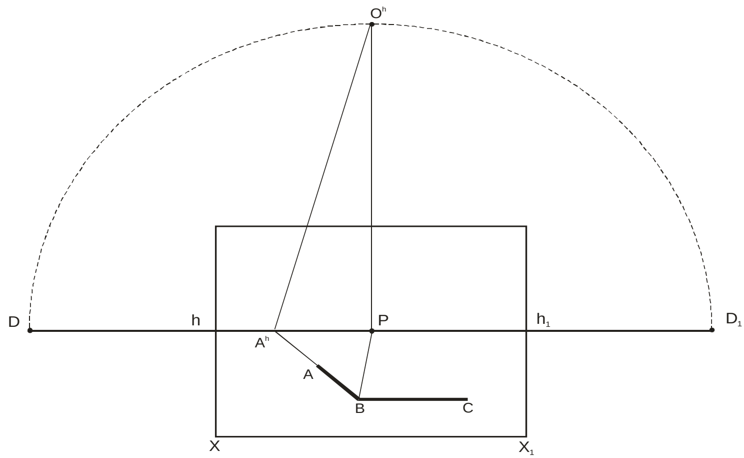



*Рис. 1.28. Измерение угловой величины*

**Решение**

1. Построение.

Найдем местоположение совмещенной точки зрения $O^h$. С этой целью опустим на линию горизонта перпендикуляр и отметим на нем точку $O^h$: $|O^hP| = |DP|$.

Соединим точку $B$ с главной точкой картины. Чтобы определить точку схода стороны $AB$, продолжим прямую $AB$ до пересечения с линией горизонта и получим точку $A^h$.

$\angle ABC = 90° + \angle A^hO^hP$.

2. Доказательство.

$\angle PBC = 90°$ (следствие 5); $\angle A^hO^hP = \angle ABP$ (следствие 9). $\angle ABC = \angle PBC + \angle ABP$. Следовательно, справедливо тождество $\angle ABC = 90° + \angle A^hO^hP$.

3. Расчет.

Измерим с помощью транспортира величину $\angle A^hO^hP$: $\angle A^hO^hP = 17°$. Тогда $\angle ABC = 90° + 17° = 107°$.

## Вопросы для самопроверки

1. Как на перспективно-горизонтальном фотоснимке с заданным метрическим квадратом измерить длину отрезка, расположенного в предметной плоскости, параллельно основанию?
2. Как на перспективно-горизонтальном фотоснимке с заданным метрическим квадратом измерить высоту отрезка, расположенного в плоскости, параллельной картинной, перпендикулярно предметной плоскости?
3. Как на перспективно-горизонтальном фотоснимке с заданным метрическим квадратом измерить длину отрезка, расположенного в предметной плоскости, перпендикулярно основанию?
4. Как на перспективно-горизонтальном фотоснимке с заданным метрическим квадратом измерить длину произвольного отрезка, расположенного в предметной плоскости?
5. Как на перспективно-горизонтальном фотоснимке с заданным метрическим квадратом измерить величину угла, образованного прямыми, расположенными в предметной плоскости?
6. Как на перспективно-горизонтальном фотоснимке с заданным метрическим квадратом измерить величину угла, образованного прямой, расположенной в предметной плоскости, и основанием картины?

## Задания для самостоятельного решения

**Задача 1.3**

На перспективно-горизонтальном фотоснимке (рис. 1.29) задано изображение масштабного квадрата *MM'N'N* (плоскость квадрата расположена в предметной плоскости, сторона *MN* – на основании картины $XX_1$). Точки *A, B* и *C* лежат на предметной плоскости, отрезки *AA'* и *BB'* перпендикулярны предметной плоскости.

Требуется:

а) определить длины отрезков *AB, AC* и *BC*;

б) определить величины углов треугольника *ACB*;

в) определить расстояние между точками *C* и *N'*;
г) определить длины вертикальных отрезков *AA'* и *BB'*;
д) вычислить длины отрезков *A'C* и *A'B*;
е) вычислить объем пирамиды *A'ABC*.

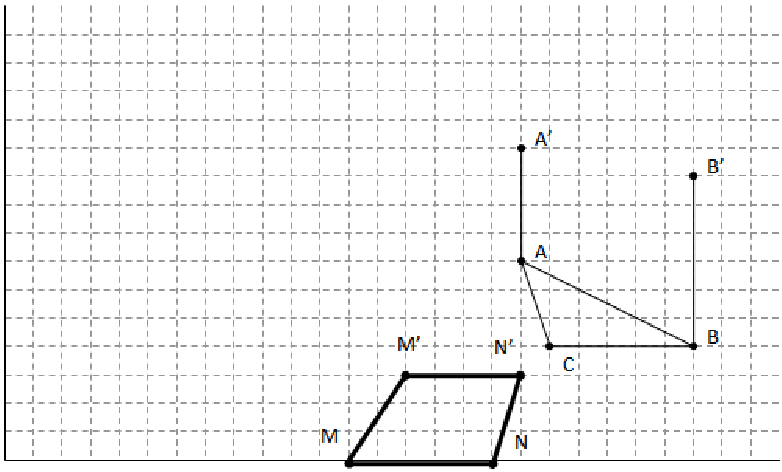



*Рис. 1.29. Местоположение масштабного квадрата и точек к задаче 1.3*

Ответ: $AB$ = 2,95 м; $BC$ = 1,35 м; $AC$ = 2,2 м; $\angle ACB$ = 110°; $\angle BAC$ = 25°; $\angle ABC$ = 45°; $CN'$ = 0,45 м; $AA'$ = 1,5 м; $BB'$ = 1,6 м; $A'C$ = 2,66 м; $A'B$ = 3,31 м; $V$ = 0,35 м$^3$.

## 1.5. Построение плана обстановки, изображенной на перспективно-горизонтальном фотоснимке

Правильно выполненный перспективно-горизонтальный измерительный фотоснимок позволяет восстанавливать план обстановки, изображенной на фотоснимке.

Рассмотрим перспективно-горизонтальный измерительный фотоснимок, на котором изображен измерительный квадрат (сторона квадрата *MN* лежит на линии основания картины) и произвольный объект в точке *A* на предметной плоскости (рис. 1.30). Требуется построить план обстановки, изображенной на фотоснимке.

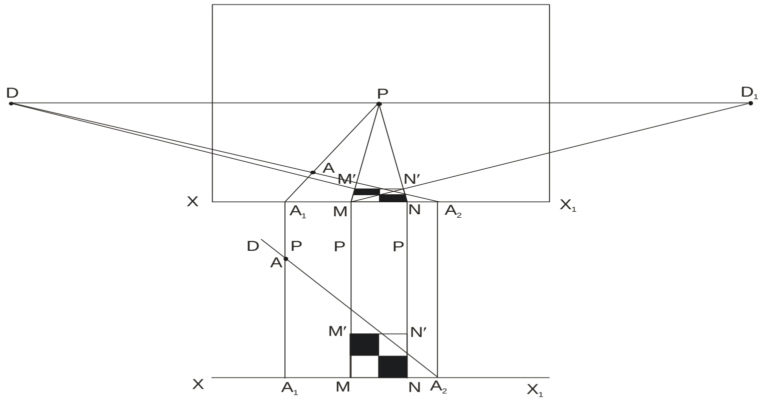



*Рис. 1.30. Построение плана обстановки*

Вначале определим основные элементы фотоснимка: главная точка картины располагается на пересечении продолжения боковых сторон квадрата (для перспективно-горизонтального фотоснимка, выполненного с полного негатива, она совпадает с центром фотоснимка); линия горизонта $hh_1$ проводится через главную точку картины параллельно линии $XX_1$ основания картины; точки отдаления $D$ и $D_1$ лежат на пересечении линии горизонта с продолжением диагоналей метрического квадрата (см. пример 1.5).

Построим план обстановки, изображенной на фотоснимке, выбрав за начало отсчета измерительный квадрат. На плане чертим линию $XX_1$ основания картины и измерительный квадрат. Для простоты следует выбирать масштаб плана, совпадающий с горизонтальным масштабом на линии основания картины (*MN*) или кратный ему (см. рис. 1.30).

Чтобы определить место расположения объекта $A$ на плане, произведем на фотоснимке дополнительные построения. Через точку $A$ проведем две прямые, проходящие через главную точку $P$ картины и точку отдаления $D$. На линии $XX_1$ получим точки $A_1$ и $A_2$. Отметим их на плане (соответствующие отрезки $NA_1$ и $NA_2$ на фотоснимке и плане должны быть равны).

Затем на плане проводим прямые $A_1P$ и $A_2D$. Их точка пересечения и будет искомой точкой $A$. Прямая $A_1P$ строится как перпендикуляр, восставленный из точки $A_1$ к линии основания картины. Прямая $A_2D$ проводится через точку $A_2$ под углом 45° к линии основания картины.

Поскольку отрезки $A_1A$ и $A_2A$ равны (треугольник $A_2A_1A$ – прямоугольный и равнобедренный), то прямую $A_2D$ на плане можно не проводить. Достаточно на прямой $A_1P$ отложить отрезок, равный отрезку $A_1A_2$.

**Пример 1.16**

Рассмотрим перспективно-горизонтальный измерительный фотоснимок, на котором изображен метрический квадрат (сторона квадрата $MN$ лежит на линии основания картины). Отрезок $AB$ расположен в предметной плоскости (рис. 1.31).

Построить план местоположения отрезка $AB$ относительно метрического квадрата, а также определить его размер.

**Решение**

Получим на плане изображение масштабного квадрата и точек А и В аналогично тому, как это было проделано выше.

Для того, чтобы определить размер отрезка $AB$, воспользуемся планом.

Составим пропорцию:

$$\frac{|AB|^{план}}{|MN|^{план}} = \frac{|AB|^{ист}}{|MN|^{ист}},$$

где $|AB|^{план}$, $|MN|^{план}$ – соответственно длины отрезков $AB$ и $MN$.

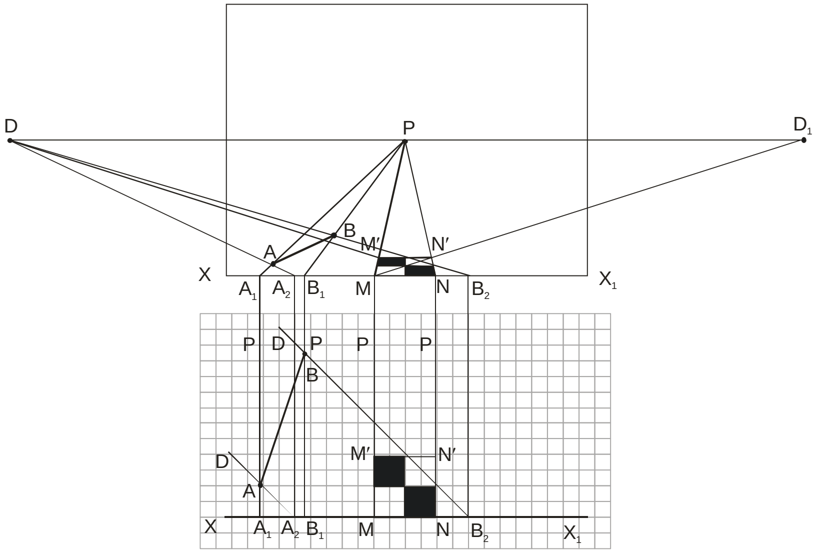



*Рис. 1.31. Иллюстрация к примеру 1.16*

Измерим длины этих отрезков на плане и подставим их в пропорцию: $\dfrac{4{,}5\ см}{1{,}9\ см} = \dfrac{|AB|^{ист.}}{100\ см}$.

В итоге получаем:

$$|AB|^{ист.} = \frac{4{,}5\ см \cdot 100\ см}{1{,}9\ см} \approx 436{,}8\ см = 4{,}368\ м.$$

## Вопросы для самопроверки

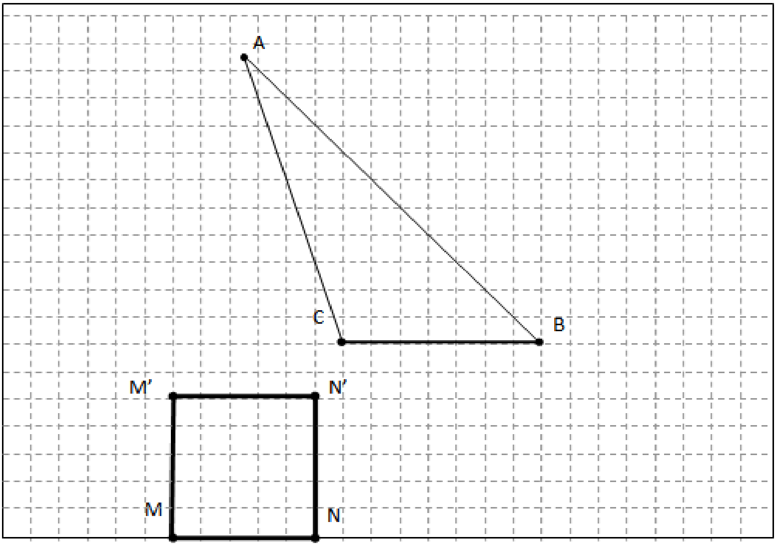
1. Как строится масштабный квадрат на плане?
2. Можно ли на плане получить изображение главной точки картины? Почему?
3. Как получить на плане местоположение точки относительно масштабного квадрата, изображенных на перспективно-горизонтальном фотоснимке?
4. Чем план принципиально отличается от перспективного изображения?

**Задания для самостоятельного решения**

**Задача 1.4**

По перспективно-горизонтальному фотоснимку (см. рис. 1.29) восстановить местоположение точек *A, B, C* и измерить на плане значения отрезков *AB, AC* и *BC*, а также углов треугольника *ABC*. Сравнить полученные результаты с результатами решения задачи 1.3.

Ответ:




## 1.6. Система перспективных координат при перспективно-наклонной фотосъемке

Перспективно-горизонтальная фотосъемка обладает одним существенным недостатком: предметная плоскость фиксируется только на половине кадра. На месте происшествия, как правило, большинство объектов, которые необходимо зафиксировать на фотопленке, располагаются на предметной плоскости. Поэтому необходимо применять приемы фотосъемки с более рациональным использованием поля кадра, например перспективно-наклонную фотосъемку.

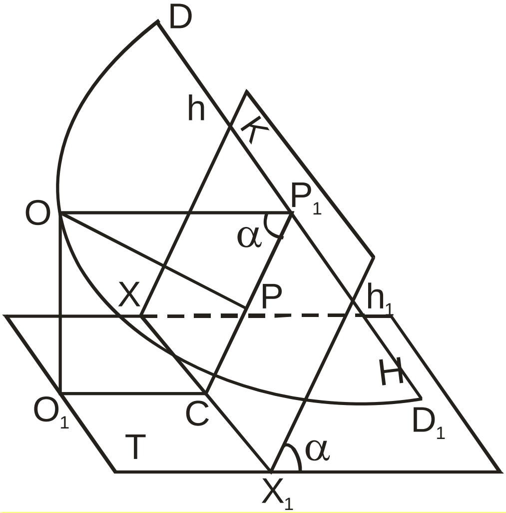



*Рис. 1.32. Система перспективных координат для перспективно-наклонной фотосъемки*

На рис. 1.32 показана система перспективных координат перспективно-наклонной фотосъемки. Она аналогична системе координат перспективно-горизонтальной съемки. Особенностью является то, что картинная плоскость *K* наклонена к предметной плоскости *T* под углом меньше 90°. Кроме того, в системе перспективных координат при перспективно-наклонной фотосъемке используют *основную точку* $P_1$ картины, которая определяется как точка пересечения главного перпендикуляра *PC* с линией горизонта $hh_1$.

При перспективно-наклонной фотосъемке расстояние от основной точки картины $P_1$ до точек отдаления *D* и $D_1$ равно расстоянию от точки зрения *O* до основной точки $P_1$ картины.

На перспективно-наклонном фотоснимке точкой схода прямых, перпендикулярных основанию картины, является основная точка картины $P_1$.

**Пример 1.17**

Пусть на перспективно-наклонном фотоснимке имеется изображение квадратного масштаба *MM'N'N*, расположенного в предметной плоскости. Сторона квадрата *MN* находится на основании фотоснимка. Построить систему перспективных координат (рис. 1.33).

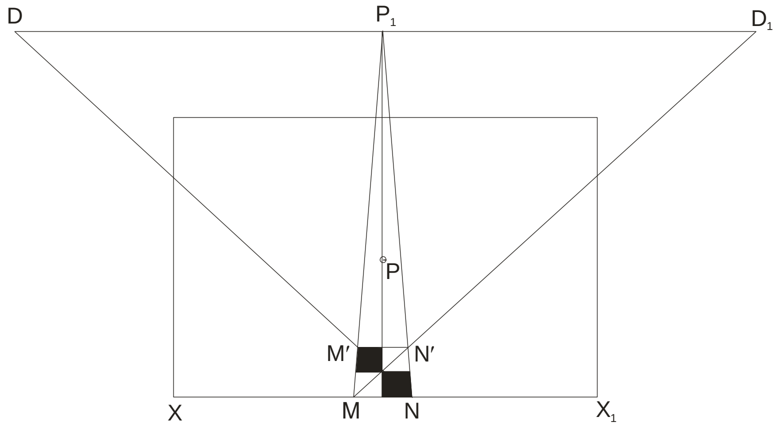



*Рис. 1.33. Построение перспективной системы координат по масштабному квадрату при перспективно-наклонной фотосъемке*

**Решение**

1. Построение.

Проведем прямую ($XX_1$) через точки *M* и *N*. Прямая ($XX_1$) – основание картины.

На пересечении диагоналей фотоснимка, полученного с полного негатива, отмечаем главную точку *P* картины.

Продолжим стороны квадрата *MM'* и *NN'* до пересечения в т. $P_1$ – основной точки картины.

Через т. $P_1$ проведем прямую ($hh_1$) параллельно основанию картины. Прямая ($hh_1$) – линия горизонта.

Продолжим диагонали $MN'$ и $NM'$ до пересечения с линией горизонта $hh_1$ в точках $D$ и $D_1$, являющиеся точками отдаления (дистанционные точки).

Перспективная система координат восстановлена. Правильность построения линии горизонта определяется $\angle PP_1D$, равным 90°.

2. Доказательство.

Прямая $XX_1$ – основание картины по построению: она проходит через точки $M$ и $N$, которые по условию задачи находятся на основании фотоснимка.

Точка $P_1$ – основная точка картины, так как она является точкой схода прямых, расположенных под углом 90° к основанию картины.

Прямая ($hh_1$) – линия горизонта по определению и построению: данная прямая проходит через основную точку картины параллельно основанию.

Точки $D$ и $D_1$ – дистанционные точки, так как являются точками схода прямых, расположенных под углом 45° к основанию картины.

Итак, определены все основные точки и линии системы перспективных координат перспективно-наклонной фотосъемки.

**Пример 1.18**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат для перспективно-наклонной фотосъемки. Отрезок $MN$ соответствует отрезку длиной 1 м и лежит на основании картины.

Отрезок $AB$ расположен в предметной плоскости. Определить длину отрезка $AB$ (рис. 1.34).

**Решение**

1. Построение.

Проведем прямые ($MP_1$) и ($NP_1$), а также прямую $l$ через точку $A$ параллельно основанию картины $XX_1$: $(MP_1) \cap l = M_1$, $(NP_1) \cap l = N_1$.

$|MN| = |M_1N_1| = 1$ м.

Проведем прямые ($BP_1$) и ($DB$) до пересечения с прямой $l$: ($BP_1$) $\cap$ $l = C$, ($BD$) $\cap$ $l = B_1$. Тогда

$$|AB| = \sqrt{|CB_1|^2 + |AC|^2}\,.$$

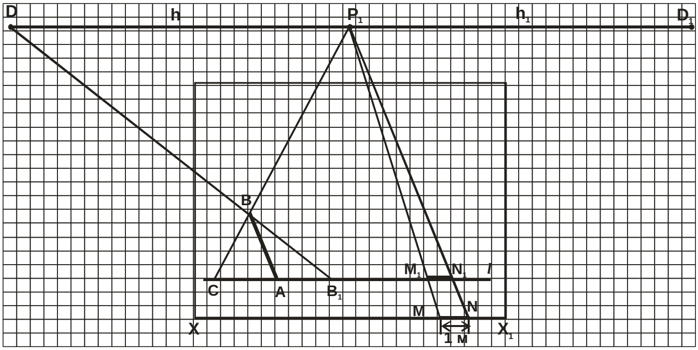



*Рис. 1.34. Измерение расстояния между двумя произвольными точками на предметной плоскости по перспективно-наклонному фотоснимку*

2. Доказательство.

Действительно, $\angle BCA = 90°$, так как прямая $l$ параллельна основанию картины, а отрезок $|CB|$ расположен на прямой, точкой схода которой является основная точка картины $P_1$. Следовательно, по теореме Пифагора $|AB| = \sqrt{|CB|^2 + |AC|^2}$ .

Докажем, что $|CB| = |CB_1|$. Действительно, $l \parallel (XX_1)$. Отрезок $BB_1$ находится на прямой, точкой схода которой является дистанционная точка $D$, а значит $\angle BB_1A = 45°$. Ранее было доказано, что $\angle BCA = 90°$. А значит, сумма углов в треугольнике равна 180°, $\angle ABB_1 = 45°$. Следовательно, треугольник $BCB_1$ прямоугольный и равнобедренный, $|CB_1| = |CB|$.

3. Расчет.

Поскольку отрезки [$CB_1$] и [$CA$] расположены в одной плоскости с отрезком $|M_1N_1|$, причем эта плоскость параллельна картинной, то их размеры можно определить из пропорций:

$$\frac{|CA|^{рис.}}{|M_1N_1|^{рис.}} = \frac{|CA|^{ист.}}{|M_1N_1|^{ист.}}; \quad \frac{|CB_1|^{рис.}}{|M_1N_1|^{рис.}} = \frac{|CB_1|^{ист.}}{|M_1N_1|^{ист.}}.$$

Измерим длины отрезков $[M_1N_1]$, $[CB_1]$ и $[CA]$ на чертеже: $|M_1N_1|^{рис.} = 0{,}8$ см, $|CB_1|^{рис.} = 4{,}3$ см, $|CA|^{рис.} = 2{,}3$ см. Подставляя эти значения, а также значение $|M_1N_1|^{ист.} = 1$ м $= 100$ см в пропорции, получим:

$$\frac{2{,}3\,см}{0{,}8\,см} = \frac{|CA|^{ист.}}{100\,см}; \quad \frac{4{,}3\,см}{0{,}8\,см} = \frac{|CB_1|^{ист.}}{100\,см},$$

откуда $|CA|^{ист.} \approx 2{,}86\,м$; $|CB_1|^{ист.} \approx 5{,}36\,м$.

Подставляя полученные значения, определим длину отрезка $[AB]$: $|AB| = \sqrt{2{,}86^2 + 5{,}36^2} \approx 6{,}08\,м$.

Как видно из рассмотренного примера, определение масштабов *по ширине и глубине* предметной плоскости на перспективно-наклонном и перспективно-горизонтальном фотоснимках аналогичны, только вместо главной точки $P$ картины необходимо использовать основную точку $P_1$ картины.

В то же время определение масштаба *по высоте* на перспективно-наклонном фотоснимке гораздо сложнее, чем на перспективно-горизонтальном.

**Пример 1.19**

Рассмотрим изображение картины $K$ с заданной системой перспективных координат для перспективно-наклонной фотосъемки. Отрезок $MN$ соответствует отрезку длиной 1 м и лежит на основании картины.

Отрезок $A_1B_1$ является изображением отрезка $AB$, расположенного перпендикулярно предметной плоскости (рис. 1.35). Определить высоту отрезка $AB$.

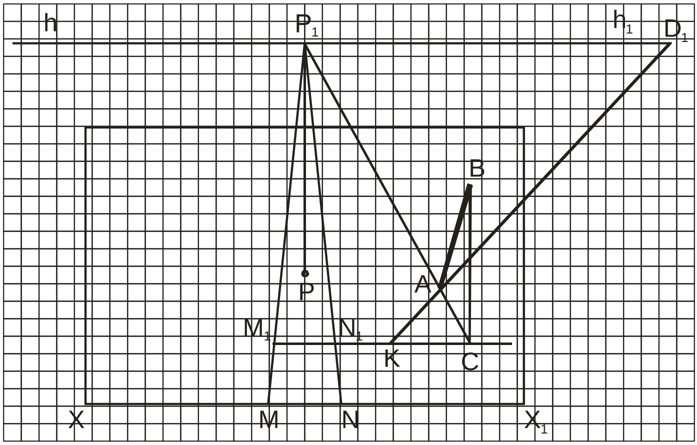



*Рис. 1.35. Определение высоты отрезка по перспективно-наклонному фотоснимку*

**Решение**

1. Построение.

Через точку $A$ и основную точку $P_1$ картины проведем прямую $(P_1C)$; через точку $B$ – прямую, параллельную линии $(P_1P)$ главного перпендикуляра картины. Точка $C$ – точка пересечения этих прямых.

Далее через точку $A$ и точку отдаления $D_1$ проведем прямую до пересечения с горизонтальной прямой, проходящей через точку $C$. Получим точку $K$.

$$AB = \sqrt{\left(BC^2 - KC^2\right)}.$$

2. Доказательство.

Действительно, $\angle BAC = 90°$ (так как отрезок $|AB|$ перпендикулярен предметной плоскости $T$ по условию, а отрезок $|AC|$ принадлежит этой плоскости).

Следовательно, $AB = \sqrt{\left(BC^2 - AC^2\right)}$.

Треугольник $ACK$ – прямоугольный и равнобедренный, поскольку прямая $(AC)$ перпендикулярна основанию картины (ее точка схода – основная точка картины $P_1$) и $\angle AKC$ составляет 45°

(точка схода прямой *AK* является точка отдаления $D_1$). Следовательно, $|AC| = |KC|$.

Подставляя последнее тождество в $AB = \sqrt{\left(BC^2 - AC^2\right)}$, получим $AB = \sqrt{\left(BC^2 - KC^2\right)}$.

3. Расчет.

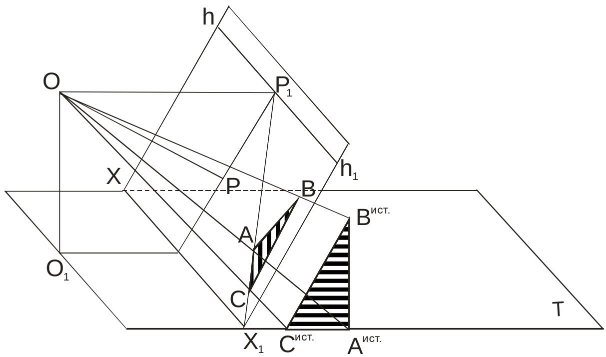



*Рис. 1.36. Схема перспективно-наклонной фотосъемки вертикально расположенного объекта*

На рис. 1.36 показан принцип получения перспективно-наклонного изображения объекта *AB* при фотосъемке. Видно, что прямая *BC* параллельна картинной плоскости *K*. Поэтому линейный масштаб для измерения вдоль прямой *BC* равняется линейному масштабу по ширине $M_1N_1$ у основания прямой в точке *C*. Длину отрезка [*BC*] можно определить из пропорции:

$$\frac{|BC|^{рис.}}{|M_1N_1|^{рис.}} = \frac{|BC|^{ист.}}{|M_1N_1|^{ист.}}.$$

Поскольку отрезок [*KC*] расположен в одной плоскости с отрезком [$M_1N_1$], причем эта плоскость параллельна картинной, то его размеры можно определить из пропорции:

$$\frac{|KC|^{рис.}}{|M_1N_1|^{рис.}} = \frac{|KC|^{ист.}}{|M_1N_1|^{ист.}}.$$

Измерим длины отрезков [$BC$], [$KC$], [$M_1N_1$] на чертеже: $|M_1N_1|^{рис.}$ = 1,8 см, $|CB|^{рис.}$ = 4,5 см, $|KC|^{рис.}$ = 2,3 см. Подставляя эти значения, а также значение $|M_1N_1|^{ист.}$ = 1 м = 100 см в пропорции, получим:

$$\frac{4{,}5\,см}{1{,}8\,см} = \frac{|CB|^{ист.}}{100\,см};\ \frac{2{,}3\,см}{1{,}8\,см} = \frac{|CK|^{ист.}}{100\,см},$$

откуда $|CB|^{ист.} \approx 2{,}50\,м$; $|CK|^{ист.} \approx 1{,}28\,м$.

Подставляя полученные значения в тождество $AB = \sqrt{(BC^2 - KC^2)}$, определим длину отрезка |AB|:

$$|AB| = \sqrt{2{,}50^2 - 1{,}28^2} \approx 2{,}15\,м.$$

Алгоритмы восстановления *планов* обстановки с помощью перспективно-наклонного и перспективно-горизонтального измерительных фотоснимков аналогичны. В случае перспективно-наклонного фотоснимка следует использовать основную точку $P_1$ картины вместо главной точки $P$.

## Вопросы для самопроверки

1. В чем преимущества перспективно-наклонной фотосъемки перед перспективно-горизонтальной?
2. Назовите и охарактеризуйте основные элементы системы перспективных координат при перспективно-наклонной фотосъемке.
3. Сформулируйте алгоритмы определения масштабов по ширине и глубине на перспективно-наклонном фотоснимке. Чем они отличаются от аналогичных алгоритмов при перспективно-горизонтальной фотосъемке?
4. Как определить высоту объекта на перспективно-наклонном фотоснимке?
5. Можно ли по перспективно-наклонному фотоснимку построить план предметной плоскости? Каким образом?

## Задания для самостоятельного решения

**Задача 1.5**

Задан перспективно-наклонный фотоснимок (рис. 1.37). Точки *A*, *B* и *C* лежат в предметной плоскости, отрезок *AA'* перпендикулярен предметной плоскости. Требуется:

а) найти длины сторон и углы треугольника *ABC*;

б) найти высоту отрезка *AA'*;

в) построить план местности.

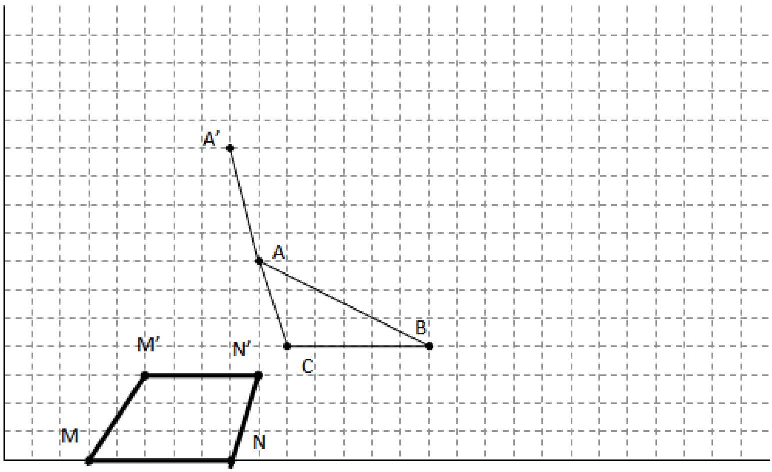



*Рис. 1.37. Местоположение масштабного квадрата и точек к задаче 1.5*

Ответ: $AB$ = 2,95 м; $BC$ = 1,35 м; $AC$ = 2,2 м; $\angle ACB$ = 110°; $\angle BAC$ = 25°; $\angle$ABC = 45°; $AA'$ = 1,02 м.

# Глава 2. Элементы теории вероятностей

## 2.1. Вероятность события

### 2.1.1. Классическое определение вероятности

Идея выражать числами степень возможности (мы намеренно избегаем пока термина «вероятность») появления тех или иных событий возникла давно на основе первых попыток исчисления шансов в азартных играх. Исторически первым определением вероятности является то, которое в настоящее время принято называть *классическим определением вероятности*, или короче – *классической вероятностью*.

Если опыт таков, что подразделяется только на конечное число элементарных событий, которые к тому же являются равновозможными, то говорят, что речь идет о *классическом случае*.

Примерами таких опытов являются броски идеально правильной монеты (два равновозможных элементарных события) или бросание идеально правильной игральной кости (шесть равновозможных элементарных событий).

Классическая формула вероятности применима только к классическому случаю.

Пусть имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных событий. Вероятность $P(A)$ наступления события $A$ вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к числу всех исходов испытания.

Если $n$ – общее число исходов, а $m$ – число исходов, благоприятствующих событию $A$, то $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Последняя формула и есть классическое определение вероятности.

**Пример 2.1**

Стрелок имеет 70 патронов, из них 5 с осечкой. Какова вероятность того, что:

а) взятый наудачу патрон окажется с осечкой;

б) взятые наудачу два патрона окажутся с осечкой?

**Решение**

Событие $A_1$ – взятый наудачу патрон с осечкой. Предполагается, что все патроны внешне одинаковы, поэтому все исходы считаются равновозможными. Всего количество возможных исходов будет равно числу патронов, т. е. $n = 70$, из них благоприятствующих событию $A_1$ будет $m = 5$, следовательно,

$$P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}.$$

Событие $A_2$ – оба патрона окажутся с осечкой. Всего количество возможных исходов (выбор двух патронов из 70) будет равно числу сочетаний из 70 по 2, т. е. $n = C_{70}^2$. Из них благоприятствующих событию $A_2$ будет $m = C_5^2$, следовательно,

$$P(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^2}{C_{70}^2} = \frac{2}{483}.$$

**Пример 2.2**

Набирая номер телефона, абонент забыл:

а) одну цифру и набрал любую наудачу;

б) две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу.

Найти вероятность того, что набран нужный номер.

**Решение**

Обозначим через $A$ событие – набран нужный номер.

1. Очевидно, общее количество всех исходов $n = 10$. Количество исходов, благоприятствующих событию $A$, $m = 1$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10}.$$

2. Общее количество всех возможных исходов $n = A_{10}^{2} = 90$. Количество исходов, благоприятствующих событию *A*, *m* = 1. Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{90}.$$

**Пример 2.3**

Подбрасывается игральный кубик. Какова вероятность того, что число выпавших очков на верхней грани:

а) меньше 3;

б) не меньше 3?

**Решение**

Рассмотрим событие $A_i$ - выпало *i* очков, *i* = 1, 2, … 6. Очевидно, что эти события равновозможны и образуют полную группу. Тогда число всех исходов *n* = 6.

1. Обозначим через *A* событие – выпавшее число очков меньше 3. Этому событию благоприятствуют события $A_1$, $A_2$, т. е. *m* = 2. По формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2. Обозначим через *B* событие – выпавшее число очков не меньше 3. Этому событию благоприятствуют события $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, т. е. *m* = 4. По формуле классической вероятности

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Заметим, что события *A* и *B* являются противоположными и сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A) + P(B) = 1.$$

**Пример 2.4**

Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков:

а) равна 5;

б) меньше 13;

в) больше 13?

**Решение**

Каждый из кубиков может упасть шестью различными способами. Тогда два кубика по правилу умножения могут упасть 6 х 6 = 36 различными способами. Каждому такому способу соответствует событие, которое является исходом испытания бросания двух кубиков. В силу симметричности кубиков все эти события равновозможны и образуют полную группу несовместных событий. Поэтому число всех исходов бросания двух кубиков $n = 36$.

1. Для подсчета числа исходов, благоприятствующих событию $A$, состоящему в выпадении суммы очков, равной 5, составим табл. 2.1.

*Таблица 2.1*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Число выпавших очков на 1-м кубике | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Число выпавших очков на 2-м кубике | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Сумма очков | 5 | 5 | 5 | 5 |

Как видно из табл. 2.1, число благоприятствующих исходов $m = 4$. Тогда, по определению,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

2. Число $n$ всех исходов испытания равно 36 и любой из них благоприятствует наступлению события $A$, заключающегося в том, что сумма выпавших очков меньше 13. Действительно, максимальная сумма очков выпадет тогда, когда на каждом кубике выпадет по 6 очков. Но эта сумма равна 12 и она меньше 13. Следовательно, $m = 36$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{36}{36} = 1.$$

3. Найдем число исходов, благоприятствующих появлению события $A$, заключающегося в том, что сумма выпавших очков

больше 13. Однако это число равно нулю, так как максимальная сумма выпавших очков равна 12 и она меньше 13. Таким образом, число благоприятствующих исходов $m = 0$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{36} = 0.$$

Заметим, что, сколько бы раз ни проводился опыт, событие $A$ в задании 3 никогда не наступит, поэтому оно является невозможным, а в задании 2 событие $A$ наступит всегда. Следовательно, оно является достоверным.

Обобщим результаты, полученные при решении задач, в виде свойств вероятности.

**Свойство 1.** Вероятность достоверного события равна единице: $P(U) = 1$.

**Свойство 2.** Вероятность невозможного события равна нулю: $P(V) = 0$.

**Свойство 3.** Вероятность события $A$ удовлетворяет двойному неравенству: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

**Свойство 4.** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

**Пример 2.5 (ошибка Д'Аламбера)**

Бросаются две монеты. Какова вероятность, что обе монеты упадут гербом кверху?

**Решение**

При решении задачи Д'Аламбер рассуждал следующим образом: в результате бросания двух монет возможны следующие три события: «выпали два герба», «выпали две решки», «выпали герб и решка», которые находятся в равных условиях. Поэтому их вероятности равны 1/3.

Решим эту задачу иначе. Возможные события, которые являются результатом опыта с двумя монетами, будем обозначать двумя буквами. Первая буква обозначает выпадение герба (*Г*) или решки (*Р*) на первой монете, а вторая – выпадение герба или решки на второй.

Тогда четыре исхода бросания двух монет можно записать так: *ГГ*, *ГР*, *РГ*, *РР*. Все эти исходы несовместны, равновозможные и образуют полную группу.

Пусть событие $A$ – «выпали два герба». Этому событию благоприятствует только один исход *ГГ*. Поэтому $m = 1$, $n = 4$, $P(A) = m/n = 1/4$.

Теперь нетрудно заметить ошибку Д'Аламбера. Он считал, что события «выпали два герба», «выпали две решки», «выпали герб и решка» равновозможные, а это не так. Последнему событию благоприятствуют два исхода: *ГР*, *РГ*, поэтому вероятность события «выпали герб и решка» $P = m/n = 2/4 = 1/2 \neq 1/3$. Таким образом, Д' Аламбер, применяя классическую формулу вероятности, нарушил требование равновозможности событий.

Аналогичную ошибку допустил известный французский криминалист Бальтазар, который произвел математические расчеты с целью определения минимального совпадения частных признаков для положительного вывода о тождестве по отпечатку пальцев. Он рассуждал следующим образом. Каждый папиллярный узор представляет собой комбинацию различных количеств частных признаков. Бальтазар вычислил вероятность комплекса признаков в зависимости от их количества. В конечном счете формула приняла следующий вид:

$$1/4^n,$$

где $n$ – количество признаков.

При количестве признаков, равном 17, вероятность комплекса выражается числом $1/14^{17} = 1/17179869184$, т. е. дробью, знаменатель которой – число, несколько больше 17 млрд. В то время население земного шара составляло 1,5 млрд человек и, следовательно, количество всех возможных отпечатков пальцев выражалось числом 15 млрд.

Таким образом, по мнению Бальтазара, достаточным признаком для вывода о тождестве является совпадение 17 признаков. Это количество, с его точки зрения, можно понизить до 12 и даже до 11 при наличии данных, позволяющих исключить проживание подозреваемого в какой-либо отдаленной части земного шара.

Данное положение долгое время считалось классическим и без достаточно критического отношения использовалось криминалистами во всем мире. Однако практика дактилоскопии нередко вступала в противоречие с этой догмой. Бальтазар допустил грубую ошибку, оценивая признаки лишь с количественной стороны и отвлекаясь от их качества. Он не учел того, что возможности проявления различных видов идентификации признаков неодинаковы. Разница в частоте встречаемости некоторых из них весьма значительна. Поэтому принцип равновозможности исходных событий в криминалистической идентификации в чистом виде неприемлем. Однако аппарат теории вероятности очень широк и позволяет исправить допущенную Бальтазаром ошибку.

Классическое определение вероятности позволяет решать многие практические задачи. Однако по мере расширения области использования теории вероятностей выявились и недостатки этого определения. К их числу, в первую очередь, следует отнести то, что классическая формула накладывает очень жесткие требования на первоначальный комплекс условий. Кроме того, классическая вероятность определена лишь для конечного числа исходов. На практике же весьма часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно.

Наиболее слабая сторона классического определения – зачастую невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных исходов. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные исходы равновозможными. Определяя некоторые события как равновозможные, обычно руководствуются соображениями симметрии. Но симметричность условий опыта на практике наблюдается только в искусственно организованных опытах. Так, при бросании игрального кубика или монеты считается, что эти объекты симметричны, изготовлены из однородного материала и т. д. Однако не всякая ситуация позволяет сделать подобные предположения и, следовательно, воспользоваться классической формулой определения вероятности.

По всем этим причинам наряду с классическим определением вероятности используются и другие определения:

– статистической вероятности;
– геометрической вероятности.

### 2.1.2. Статистическая вероятность и частота

Поскольку вероятность события существует объективно, независимо от того, можно или нельзя применить в данном конкретном случае классическую формулу, то возникают вопросы:

1. Что считать вероятностью события?
2. Как вычислить вероятность события?

Пусть стрелок производит выстрел по мишени. Как оценить вероятность попадания? Если события «попадание» и «промах» равновозможны, то ответ получаем сразу:

$$P(\text{"}\textit{попадания}\text{"}) = \frac{1}{2}.$$

Но они могут быть не равновозможны. Скажем, Иванов постоянно посещает тренировки по стрельбе и каждый раз из сотни выстрелов попадает в мишень 80–90 раз, а Петров на стрельбище бывает редко, поэтому из сотни выстрелов попадет только 30–40 раз (табл. 2.2). Ясно, что у Иванова возможность попадания больше, чем у Петрова. Как оценить эти различные возможности?

Из таблицы видно, что как у Иванова, так и у Петрова отношение числа попаданий к числу произведенных выстрелов меняется. Эти отношения в какой-то мере зависят от числа произведенных выстрелов. Но, вместе с тем, заметно, что упомянутое отношение для каждого стрелка колеблется около определенного числа: у Иванова около 8/10, у Петрова около 3/10. Эти числа логично принять за оценку вероятности. Эта оценка тем более надежна, чем больше проведено опытов с целью установления ее значения.

*Таблица 2.2*

| Произведено выстрелов | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число попаданий у Иванова | 8 | 17 | 26 | 33 | 41 | 49 | 56 | 65 | 72 | 82 |
| Число попаданий у Петрова | 3 | 5 | 8 | 12 | 15 | 19 | 22 | 25 | 28 | 32 |

Дадим определение.

Пусть опыт повторяется $n$ раз и при этом подсчитывается, как часто происходит интересующее нас событие. Допустим, что оно произошло $m$ раз. Тогда отношение $W_n(A) = \frac{m}{n}$ называется *относительной частотой появления события А,* а $m$ – *частотой появления события А в серии из n испытаний.*

Индекс $n$ специально ставим для того, чтобы подчеркнуть зависимость частоты от числа испытаний.

**Пример 2.6**

При исследовании почерков 1 000 лиц подсчитано, что буква «*д*» с надстрочным штрихом пишется 293 лицами. Относительная частота встречаемости данного признака равна 0,293.

Формулы вероятности и относительной частоты на первый взгляд одинаковы. Различие между ними состоит в том, что вероятность определяется до испытаний, а относительная частота – после.

Я. Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа опытов относительная частота появления события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа, которое и принимается за вероятность события. Многие исследователи проверяли закон Бернулли. Так, Дж. Керрих провел опыты с бросанием монеты. Им было осуществлено

10 серий, каждая из которых содержала по 1 000 бросков монеты. Оказалось, что герб выпал 502, 497, 511, 502, 504, 476, 507, 528, 504, 529 раз. Как видно, ни в одной из серий относительная частота выпадения герба не равна 0,5, т. е. не совпадает с вероятностью выпадения герба при одном бросании монеты. Результаты этого и ряда других опытов приведены в табл. 2.3.

*Таблица 2.3*

| | Число испытаний | Частота появления герба | Относительная частота |
|---|---|---|---|
| Опыт Керриха | 10 000 | 5 087 | 0,5087 |
| Опыт Бюффона | 4 040 | 2 048 | 0,5069 |
| Первый опыт Пирсона | 12 000 | 6 019 | 0,5016 |
| Второй опыт Пирсона | 24 000 | 12 012 | 0,5005 |

При изучении данных таблицы приближение относительной частоты с возрастанием числа опытов к вероятности $P(Г) = 0{,}5$. Так, на практике можно установить, что относительная частота обладает устойчивостью. В опытах по исследованию одного и того же объекта или явления относительная частота меняется незначительно и изменение будет тем меньше, чем больше проведено испытаний. Значение относительной частоты колеблется около некоторой постоянной величины, называемой статистической вероятностью.

Можно дать такое определение: *статистическая вероятность* есть предел, к которому стремится относительная частота при бесконечном числе испытаний $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} W_n(A)$.

Однако на практике говорят, что статистическая вероятность есть число, вокруг которого имеет тенденцию группироваться (стабилизироваться) относительная частота события при многократном повторении опыта. Отсюда следует, что при достаточно большом числе испытаний $P(A) \approx W_n(A)$.

В практике экспертных исследований относительную частоту называют частотой встречаемости признаков. Н. А. Селиванов, например, приводит данные анализа 500 отпечатков по 25 видам деталей. Частота встречаемости признаков имеет следующие значения:

а) «обрыв линии» – 0,4721;
б) «вилка» – 0,2889;
в) «точка» – 0,0527;
г) «петля с двумя внутренними линиями» – 0,0004 и т. д.

Поскольку некоторые признаки встречаются чаще других («обрыв линии»), идентификационная значимость их будет невелика. Если же признак встречается очень редко («петля с двумя внутренними линиями»), его идентификационная ценность значительно выше.

*Идентификационная значимость* отражает идентификационную ценность признака для целей криминалистического исследования.

В работах ученых–почерковедов определена величина идентификационной значимости.

*Величина идентификационной значимости* есть отрицательный десятичный логарифм вероятности появления данного признака: $I_A = -\lg P(A)$.

Если к этому определению подходить строго математически, то нужно учитывать не логарифм вероятности, а логарифм относительной частоты, так как вычисления по последней формуле основаны на экспериментальных данных частот встречаемости признаков: $I_A = -\lg W_n(A)$.

**Пример 2.7**

При исследовании отпечатков пальцев 5 000 лиц подсчитано, что признак «спираль» встретился 500 раз. Чему равна идентификационная значимость данного признака?

**Решение**

Относительная частота встречаемости данного признака: $W(A) = \frac{500}{5000} = 0{,}1,$ откуда идентификационная значимость $I(A) = -\lg W_n(A) = -\lg\ 0{,}1 = 1$.

**Пример 2.8**

Относительная частота встречаемости признаков имеет следующие значения:

а) «обрыв линии» – 0,4721;

б) «вилка» – 0,2889;

в) «точка» – 0,0527;

г) «петля с двумя внутренними линиями» – 0,0004.

Какой из данных признаков имеет большую идентификационную значимость?

**Решение**

Поскольку идентификационная значимость увеличивается с уменьшением относительной частоты, то большую идентификационную значимость имеет признак «петля с двумя внутренними линиями».

Понятия «идентификационная значимость» и «частота встречаемости» используются не только в экспертизе почерка, но и в дактилоскопических, портретных и других экспертных исследованиях.

### 2.1.3. Геометрическая вероятность

Иногда возникает ситуация, когда все элементарные исходы эксперимента равновозможны, но их количество бесконечно. Чтобы преодолеть этот недостаток классического определения, вводят *геометрическую вероятность* – вероятность попадания точки в область (отрезок, часть плоскости, пространство и т. д.).

Пусть, например, мы имеем некоторую область $Y$ (отрезок, часть плоскости, часть пространства), и в ней содержится другая область $y$. В область $Y$ наудачу бросается точка. Выражению «точка бросается наудачу в область $Y$» придается следующий смысл: брошенная точка может попасть в любую точку области $Y$. Вероятность попадания в какую-либо часть $y$ области $Y$ пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от ее расположения и форм. Требуется найти вероятность того, что точка попадет в область $y$.

Вероятность попадания в область $y$ при бросании наудачу точки в область $Y$:

$$P(A) = \frac{mes\quad y}{mes\quad Y} \quad (mes \text{ – мера}).$$

**Пример 2.9**

В круг радиусом 10 см помещен круг радиусом 5 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг.

**Решение**

Площадь большого круга (фигуры $Y$):

$$S_Y = \pi \cdot 10^2 = 100\pi \quad (см^2).$$

Площадь малого круга (фигуры $y$):

$$S_Y = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \quad (см^2).$$

Искомая вероятность:

$$P = \frac{25\pi}{100\pi} = 0{,}25\,.$$

**Пример 2.10**

Оперативный работник и агент условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любой момент времени и моменты прихода независимы?

**Решение**

Обозначим моменты прихода оперативного работника через $x$ и агента через $y$. Для того чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно чтобы $|x - y| \leqslant 20$.

Изобразим $x$ и $y$ как декартовы координаты на плоскости, масштаб выберем 20 минут. Тогда все возможные исходы изобразятся точками квадрата со сторонами 60; исходы, благоприятствующие встрече, изобразятся точками, расположенными в заштрихованной области (рис. 2.1).

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной области к площади всего квадрата:

$$P = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

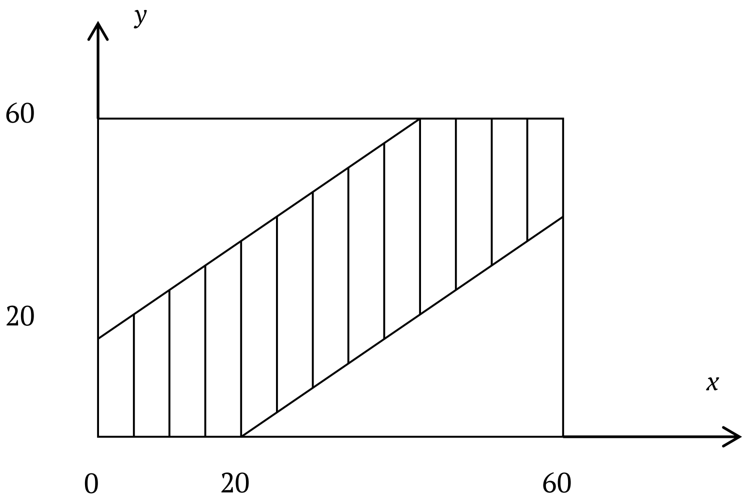



*Рис. 2.1. Иллюстрация к примеру 2.10*

### 2.1.4. Практически невозможные и практически достоверные события. Принцип практической уверенности

Ранее мы познакомились со строгими понятиями невозможного и достоверного событий. Вероятность невозможного события равна нулю, а вероятность достоверного события равна единице. На практике часто приходится иметь дело не с невозможными и не с достоверными событиями, а с так называемыми «практически невозможными» и «практически достоверными» событиями.

*Практически невозможным* называется событие, вероятность которого не в точности равна нулю, но очень близка к нулю.

**Пример 2.11**

Проведем следующий опыт: 33 буквы разрезанной азбуки смешаны между собой; вынимается одна карточка; изображенная на ней буква записывается, после чего карточка возвращается обратно и карточки перемешиваются. Рассмотрим событие $A$, состоящее в том, что после 25-кратного проведения опыта мы записываем первую строку «Евгения Онегина»: «Мой дядя самых честных правил».

**Решение**

Такое событие не является логически невозможным; можно подсчитать, что его вероятность $P(A) = 1/33^{25}$, но ввиду того, что вероятность события $A$ ничтожно мала ($\approx 10^{-38}$), его можно считать практически невозможным.

*Практически достоверным* называется событие, вероятность которого не в точности равна единице, но очень близка к единице.

Если событие $A$ в предыдущем примере практически невозможно, то противоположное ему событие $\overline{A}$ является практически достоверным.

Практически невозможные и практически достоверные события играют большую роль в теории вероятностей. На них основывается все практическое применение этой науки. Действительно, если вероятность появления события в данном опыте равна, например, 0,3, то это еще не даст нам возможности предсказать результат опыта. Но если вероятность события в данном опыте ничтожно мала или, наоборот, очень близка к единице, то это дает нам возможность предсказать результат опыта.

В первом случае мы не будем ожидать появления события $A$, во втором будем ожидать его с достаточным основанием. При этом руководствуемся так называемым принципом практической уверенности, который можно сформулировать следующим образом.

*Принцип практической уверенности*: если вероятность некоторого события в одном испытании очень мала (очень велика), то можно быть практически уверенным в том, что в единичном испытании событие $A$ не произойдет (произойдет).

В повседневной жизни мы часто бессознательно пользуемся этим принципом. Например, выезжая по железной дороге в Москву, мы все свое поведение организуем, не считаясь с возможностью прибытия в Париж, хотя вероятность такого события хоть и мала, но все же имеется.

Вопрос о том, насколько малой должна быть вероятность события, чтобы его можно было считать практически невозможным, выходит за рамки математической теории и в каждом отдельном случае решается из практических соображений.

Например, если вероятность отказа взрывателя при выстреле равна 0,01, то мы еще можем примириться с этим и считать отказ взрывателя практически невозможным событием. Напротив, если вероятность нераскрытия парашюта также равна 0,01, то мы не можем считать это событие практически невозможным и должны добиваться большей надежности работы парашюта.

Достаточно малая вероятность, при которой (в данной определенной задаче) событие можно считать практически невозможным, называется *уровнем значимости*.

На практике часто уровень значимости заключен между 0,01 и 0,05. Уровень значимости, равный 0,01, называется *однопроцентным*, равный 0,02 – *двухпроцентным* и т. д.

Одной из важнейших задач теории вероятностей является выявление практически невозможных и практически достоверных событий, дающих возможность предсказать результат опыта, и выявление условий, при которых те или иные события становятся практически невозможными (достоверными).

### Вопросы для самопроверки

1. Как формулируется классическое определение вероятности?

2. Каковы недостатки классического определения вероятности? Придумайте примеры, когда нельзя применить классическое определение вероятности.

3. В каких случаях применяется статистическая вероятность? Придумайте примеры.

4. Что называется относительной частотой случайного события?

5. Что называется статистической вероятностью?

6. Что называется идентификационной значимостью? Как она вычисляется? Как меняется идентификационная значимость с увеличением относительной частоты?

7. В каких случаях применяется геометрическая вероятность? Как она вычисляется? Приведите примеры.

### Задания для самостоятельного решения

**Задача 2.1**

Слушатели первого курса в количестве 240 человек после сдачи первого экзамена получили 150 отличных отметок. Какова вероятность того, что выбранный наугад студент первого курса получил отличную отметку?

Ответ: 0,625.

**Задача 2.2**

В ящике 10 одинаковых на ощупь шаров с номерами от 1 до 10. Определить вероятность того, что наудачу выбранный шар имеет номер больше 7?

Ответ: 0,3.

**Задача 2.3**

Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней:

а) одну;

б) две;

в) три.

Ответ: а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008.

**Задача 2.4**

Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «юрист». Неграмотный мальчик перемешал буквы, а потом их наугад собрал. Какова вероятность того, что он опять собрал слово «юрист»?

Ответ: $\frac{1}{5!}$.

**Задача 2.5**

Из партии телевизоров в количестве 20 штук, из которых 5 неисправны, случайным образом отбираются для проверки 3 телевизора. Какова вероятность того, что в число отобранных войдут:

а) только исправные телевизоры;

б) только неисправные телевизоры;

в) 1 исправный и 2 неисправных телевизора?

Ответ: $а)\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3};\quad б)\frac{C_5^3}{C_{20}^3};\quad в)\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}.$

**Задача 2.6**

В лифт двенадцатиэтажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная с третьего. Найти вероятность того, что:

а) все пассажиры выйдут на двенадцатом этаже;

б) все пассажиры выйдут на разных этажах;

в) все пассажиры выйдут на одном и том же этаже.

Ответ: $а)\frac{1}{10^5};\quad б)\frac{A_{10}^5}{\tilde{A}_{10}^5};\quad в)\frac{1}{10^4}.$

**Задача 2.7**

При стрельбе 20 патронами была получена относительная частота попадания, равная 4/5. Определить число промахов.

Ответ: 4.

**Задача 2.8**

Стреляя ночью по бегущей фигуре, автоматчик получил частоту попадания в 3 раза меньшую, чем при тех же условиях днем. Определить число попаданий в цель ночью, если относительная частота попаданий при стрельбе днем была 2/3 и оба раза израсходовано по 18 патронов.

Ответ: 4.

**Задача 2.9**

При изучении 600 образцов рукописей с целью исследования частных признаков в группе простых высоковыработанных почерков русской скорописи установлена идентификационная значимость признака «упрощенное строение буквы „а" за счет утраты части овала», равная 1. В скольких образцах почерка встретился данный признак?

Ответ: 60.

**Задача 2.10**

Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов.

Ответ: 1/2.

**Задача 2.11**

Самолет бомбит мост шириной 12 м и длиной 50 м. Мост находится в зоне бомбометания, имеющей площадь шириной 100 м и длиной 300 м. Определить вероятность попадания бомбы в мост, если считать попадание бомбы равновероятным в любую точку зоны бомбометания.

Ответ: 0,02.

**Задача 2.12**

Перед окопами вдоль прямой линии через каждые 10 м установлены противотанковые мины. Перпендикулярно этой линии движется танк, ширина которого 3 м. Какова вероятность того, что танк пересечет линию установки мин невредимым?

Ответ: 0,7.

**Задача 2.13**

На плоскости нанесена сетка квадратов со стороной 8 см. Найти вероятность того, что брошенный на плоскость круг радиусом 1 см не пересечет ни одной стороны квадрата.

Ответ: 9/16.

## 2.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

В предыдущих примерах каждый изучаемый признак (событие) рассматривался отдельно от других. Однако теория вероятностей позволяет определять вероятности события по известным вероятностям других событий, если последние связаны с первыми.

Например, частота встречаемости признака «буква „*в*" с правоокружным овалом» в почерках 1000 обследованных лиц равна 0,052; признака «буква „*д*" с надстрочным штрихом» – 0,293. Какова вероятность появления обоих признаков в почерке одного лица? В этом случае используются теоремы сложения и умножения вероятностей. Они дают возможность найти вероятность появления одного из нескольких случайных событий или вероятность совместного наступления двух событий и более.

### 2.2.1. Условная вероятность

Перед тем, как излагать теорему умножения вероятностей, введем еще некоторые важные понятия.

Все в мире взаимосвязано, и поэтому вероятность некоторого случайного события $A$, как правило, изменяется, если известно, что произошло некоторое другое случайное событие $B$.

Вероятность события $A$ при условии, что событие $B$ с вероятностью $P(B) \neq 0$ уже произошло, обозначается $P(A/B)$ и называется *условной вероятностью события A при условии, что имело место событие B.*

**Пример 2.12**

Пусть имеются две урны. В первой находится 5 белых и 5 черных шаров, во второй – 1 белый и 9 черных. Опыт состоит в том, что наугад выбирается урна и наугад из нее выбирается шар.

Пусть $B$ – событие «вынутый шар – белый»;

$A_1$ – событие «шар вынимается из первой урны»;

$A_2$ – событие «шар вынимается из второй урны».

Тогда $P(B/A_1) = 5/10 = 1/2$, $P(B/A_2) = 1/10$.

Напомним, что два случайных события $A$ и $B$ называются *независимыми,* если осуществление одного не влияет на вероятность осуществления другого, т. е. $P(A/B) = P(A)$ или $P(B/A) = P(B)$.

Понятие независимости событий может быть распространено на случай произвольного числа событий.

Несколько событий называются *попарно независимыми*, если любые два из них независимы.

События называются *независимыми в совокупности* (или просто независимыми), если любое из них не зависит от любой совокупности остальных.

События, независимые в совокупности, очевидно, попарно независимы между собой, обратное неверно. Таким образом, требование независимости в совокупности сильнее попарной независимости.

### 2.2.2. Теоремы умножения вероятностей

**Теорема 1**

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \times P(B/A).$$

**Пример 2.13**

Из колоды 36 карт наугад одна за другой вынимаются две карты. Найти вероятность того, что вынуты две дамы.

**Решение**

Обозначим события *A* – «первая карта – дама», *B* – «вторая карта – дама». Нам следует найти *P(AB)*. Согласно теореме умножения, получаем:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} = \frac{1}{105} \cdot$$

**Теорема 2**

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \text{ x } P(B).$$

**Пример 2.14**

При исследовании 1000 образцов рукописей установлено, что вероятность появления признака *A* – «буква „*в*" с правоокружным овалом» – 0,052, признака *B* – «буква „*д*" с надстрочным штрихом» – 0,293. Какова вероятность появления обоих признаков в почерке одного лица?

**Решение**

Если определена взаимная независимость признаков почерка, то вероятность одновременного их появления в почерке одного лица равна: 0,052 х 0,293 = 0,015. Можно считать, что оба признака могут совместно появиться в почерках 15 лиц из 1000.

Для последней теоремы справедливо обратное утверждение: если для двух событий выполняется равенство *P(AB) = P(A)* х *P(B)*, то эти события независимые.

Теорема умножения вероятностей может быть обобщена на случай произвольного числа событий: вероятность совместного наступления конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили:

$$P(A_1 \cdot A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot ... \cdot P(A_n / A_1 A_2 ... A_{n-1}) .$$

**Пример 2.15**

33 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются одна за другой и укладываются на стол в порядке их появления. Найти вероятность того, что появится слово «юрист».

**Решение**

Обозначим события: $A_1$ – первая буква «ю», $A_2$ – вторая буква «р», $A_3$ – третья буква «и», $A_4$ – четвертая буква «с», $A_5$ – пятая буква «т», $B$ – появится слово «юрист». Тогда

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5) = \frac{1}{33} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{28480320}.$$

**Теорема 3**

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

**Пример 2.16**

Условие то же, что и в примере 2.15, но после каждого вынимания буквы возвращаются в совокупность и тщательно перемешиваются.

**Решение**

Воспользуемся обозначениями примера 2.15. В данном случае события $A_1$, $A_2$, …, $A_5$ независимы:

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5) = \left(\frac{1}{33}\right)^5 = \frac{1}{39135393}.$$

Пользуясь правилами умножения, можно определить вероятность совпадения совокупности независимых признаков. Однако, если число признаков достаточно большое, то процедура умножения чисел, меньших единицы, является громоздкой. Поэтому для вычислений в криминалистике было предложено использовать формулу, полученную логарифмированием теоремы 3:

$$lg\,P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots A_n) = lg\,P(A_1) + lg\,P(A_2) + lg\,P(A_3) + \ldots + lg\,P(A_n).$$

Подставляя значения идентификационной значимости в последнее выражение, получим:

$$I(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 ... A_n) = I(A_1) + I(A_2) + I(A_3) + ... + I(A_n),$$

где $I(A_1), I(A_2), I(A_3),..., I(A_n)$ – идентификационные значимости отдельных признаков;

$I(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n)$ – идентификационная значимость совокупности, причем признаки должны быть попарно независимы.

Рассмотрим применение данной теоремы в экспертной деятельности.

В почерковедческой экспертизе существует модифицированная методика вероятностно-статистической оценки совпадения признаков почерка с учетом его групповой принадлежности[1].

Методика достаточно проста:

1. Эксперт выделяет все информативные с его точки зрения, совпадающие частные признаки почерка: $A_1, A_2, ..., A_n$, причем все эти признаки должны быть независимы.

2. Каждому выделенному частному признаку приписывается его идентификационная значимость, взятая из соответствующей таблицы (табл. 2.4).

*Таблица 2.4*

| Описание признака | Графическое изображение | Частота встречаемости признака | Условная идентификационная значимость |
|---|---|---|---|
| Усложненное строение буквы за счет его повторения движения в овале |  | 0,06 | 0,87–0,86 |

---

[1] Почерковедение и почерковедческая экспертиза : учебник / под ред. В. В. Серегина. Волгоград : Волгоградская академия МВД России, 2014. С. 93.

В табл. 2.4 в четвертой графе указано два значения идентификационной значимости. Если число выделенных признаков в совокупности 8–15, то берется первое значение, если 16–33 – второе.

3. Значимость комплекса подсчитывается суммированием значимостей *I(C)* входящих в него признаков:

$$I(C)=I(A_1)+I(A_2)+\ldots+I(A_n).$$

4. Если *I(C)* > 10, то делается категорический положительный вывод о тождестве.

Разумеется, для категорического вывода о тождестве все различия, выявленные в результате сравнительного исследования, должны быть объяснены (либо вариационностью исследуемого почерка, либо разницей в условиях исполнения сравниваемых почерковых объектов).

Как было сказано ранее, экспертные методики, как правило, упрощены так, что возникает иллюзорное мнение, что ими можно пользоваться и без знания математики. Но, на наш взгляд, эксперт вправе применять лишь те методы, которые он не только четко представляет, но и может разъяснить любому участнику процесса.

Откуда же берется, например, число 10?

В процессе идентификации сравниваются материально фиксированные отображения признаков искомого человека с проверяемым (подозреваемым) лицом или отображениями его признаков. Для вывода о тождестве необходимо, чтобы совпало такое количество признаков, совокупность которых является индивидуальной, неповторимой, т. е. единственной в заданном множестве лиц. Очевидно, что вероятность совокупности таких признаков должна отвечать условию:

$$P < \frac{1}{N},$$

где $N$ – количество лиц, из числа которых требуется выделить единственного человека.

Так, в отношении лиц, пишущих на русском языке, эта вероятность равна приблизительно $1/10^8 = 10^{-8}$. Действительно, число пишущих по-русски равно $10^8$, а частота появления такого комплекса есть $P(C) = 10^{-8}$, т. е. комплекс не может встретиться более, чем в одном почерке. Поскольку реально частные признаки связаны статистической зависимостью, для повышения надежности процедуры идентификации вводят поправку, умножая вероятность комплекса на коэффициент возможной ошибки $K = 100$, т. е. $P(C) = 10^{-10}$. Чтобы еще больше повысить надежность метода принято считать, что $P(C) < 10^{-10}$.

Итак,

$$C = A_1 \times A_2 \times \cdot \ldots \times A_n. \tag{1}$$

Поскольку признаки независимы, то:

$$P(C) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n) < 10^{-10}. \tag{2}$$

Но

$$I(A) = -lg(P(A))$$

Прологарифмируем (2), получим с учетом свойств логарифма:

$$I(C) = I(A_1) + I(A_2) + \ldots + I(A_n) > 10.$$

### 2.2.3. Теоремы сложения вероятностей

**Теорема 1**

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

**Пример 2.17**

В учебной группе 25 курсантов, из которых 5 курсантов – отличники, 10 курсантов – хорошисты, 10 курсантов имеют удовлетворительные оценки. Какова вероятность того, что наугад вызванный курсант отличник или хорошист?

**Решение**

Пусть событие $A$ – наугад вызванный курсант-отличник, $B$ – наугад вызванный курсант-хорошист. Используя теорему, определим вероятность появления одного из двух несовместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=5/25+10/25=0{,}6.$$

Обобщим теорему для любого числа событий: вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n)\,.$$

**Следствие.** Сумма вероятностей попарно несовместных событий $A_1$, $A_2$, $A_3$, …, $A_n$, образующих полную группу, равна 1:

$$\mathrm{P}(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = 1.$$

**Пример 2.18**

При стрельбе из пистолета вероятность попадания в «десятку» равна 0,25; в «девятку» – 0,30; в «восьмерку» – 0,15; в «семерку» – 0,12. Какова вероятность того, что стрелок, сделав один выстрел, выбьет:

а) не менее 8 очков;

б) не более 8 очков?

**Решение**

Обозначим события:

$A_i$ – стрелок выбьет $i$ очков ($i$ = 0, 1, 2, … 10);

$B$ – стрелок выбьет не менее 8 очков;

$C$ – стрелок выбьет не более 8 очков.

1. Так как события $A_i$ – несовместны, то

$$B = A_8 + A_9 + A_{10}.$$

Тогда

$$P(B) = P(A_8) + P(A_9) + P(A_{10}) = 0{,}15 + 0{,}30 + 0{,}25 = 0{,}7.$$

2. Так как события $A_i$ – несовместны, то:

$$P(C) = P(A_0) + P(A_1) + \ldots + P(A_8).$$

Мы не знаем $A_0$, $A_1$, … $A_6$, но, с другой стороны, события $A_i$ ($i$ = 0, 1, 2, … 10) – попарно несовместны и образуют полную группу.

Следовательно,

$$P(C) + P(A_9) + P(A_{10}) = 1.$$

Отсюда

$$P(C) = 1 - (P(A_9) + P(A_{10})) = 1 - (0{,}25 + 0{,}3) = 0{,}45.$$

При решении задач необходимо внимательно анализировать их условия, обращать особое внимание на правомерность применения тех или иных формул. В противном случае могут быть допущены грубые ошибки. Рассмотрим следующий пример.

**Пример 2.19**

Два стрелка стреляют по одной и той же цели. Вероятности поражения ими цели соответственно равны 0,8 и 0,7. Какова вероятность поражения цели?

**Решение**

Обозначим события:

$A_1$ – поражение цели первым стрелком;

$A_2$ – поражение цели вторым стрелком;

$B$ – поражение цели вообще.

Тогда

$$B = A_1 + A_2, P(B) = P(A_1 + A_2).$$

Если к решению этой задачи мы применим формулу сложения вероятностей, то получим, что вероятность поражения цели равна 0,8 + 0,7 = 1,5 > 1! Ответ явно ошибочный. Ошибка же состоит в том, что события $A_1$ и $A_2$ являются совместными и к ним нельзя применять предыдущие теоремы.

Как же определить вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий?

**Теорема 2**

Вероятность появления хотя бы одного из двух *совместных независимых* событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теперь мы можем решить задачу в примере. Поскольку события $A_1$ и $A_2$ и являются совместными и независимыми, то

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \times A_2) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}94.$$

**Замечания**

1. Формула применима в случае, когда события $A$ и $B$ зависимы и когда независимы.

Если события $A$ и $B$ зависимы, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B/A) = P(A) + P(B) - P(B) \times P(A/B).$$

Если события $A$ и $B$ независимы, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B).$$

2. Формула применима в случае, когда события $A$ и $B$ несовместны, так как в этом случае совместное появление этих событий – невозможное событие, вероятность которого равна нулю.

В случае трех совместных событий вероятность их суммы вычисляется по формуле

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

**Пример 2.20**

Три стрелка стреляют по одной цели. Найти вероятность поражения цели при одном залпе, если вероятности поражения цели соответственно равны 0,8; 0,8 и 0,9.

**Решение**

Рассмотрим события:

$A_1$ – поражение цели первым стрелком;

$A_2$ – поражение цели вторым стрелком;

$A_3$ – поражение цели третьим стрелком;

$B$ – поражение цели вообще.

Тогда $B = A_1 + A_2 + A_3$, а так как события $A_i$ ($i = 1, 2, 3$) – совместные и независимые, то

$$\mathrm{P}(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \times A_2) - P(A_1 \times A_3) - P(A_2 \times A_3) + P(A_1 \times A_2 \times A_3) = 0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \times 0{,}8 - 0{,}8 \times 0{,}9 - 0{,}8 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}996.$$

Разобранную нами задачу можно решить и другим способом, более простым, если воспользоваться теоремой 3.

**Теорема 3**

Вероятность появления хотя бы одного из событий, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Решим задачу примера 2.20, воспользовавшись формулой последней теоремы:

$$P(B) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}996.$$

### 2.2.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

На практике часто возникают ситуации, когда требуется определить вероятность события, которое может произойти с одним из несовместных событий, образующих полную группу. Сформулированная ниже теорема, являющаяся следствием теорем сложения и умножения вероятностей, допускает нахождение подобных событий и дает для этого формулу.

**Теорема (формула полной вероятности)**

Вероятность события $A$, которое может наступить только при условии появления одного из событий $B_1, B_2, \ldots B_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события $A$:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A/B_n).$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности*, а события $B_1$, $B_2$, ... $B_n$ – *гипотезами*.

**Пример 2.21**

В случае сбоя в работе ПК вероятность того, что он произошел в арифметическом устройстве – 0,3, в оперативной памяти – 0,2, в остальных устройствах – 0,5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в ПК сбой будет обнаружен.

**Решение**

Обозначим через $A$ событие – сбой будет обнаружен. Возможны следующие предположения (гипотезы):

$B_1$ – сбой произошел в арифметическом устройстве;

$B_2$ – сбой произошел в оперативной памяти;

$B_3$ – сбой произошел в остальных устройствах.

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \times P(A/B_1) + P(B_2) \times P(A/B_2) + P(B_3) \times P(A/B_3) = 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}5 \times 0{,}9 = 0{,}87.$$

**Пример 2.22**

Шах решил казнить звездочета на следующих условиях: звездочет должен разложить 2 белых и 2 черных шара по двум урнам – хотя бы по одному шару в каждую урну. Палач выбирает любую урну и достает оттуда 1 шар. Если палач достанет черный шар – казнить, белый – помиловать. Как звездочету разложить шары наиболее выгодным способом, чтобы вероятность выжить была наибольшей?

**Решение**

Обозначим через $A$ событие – будет извлечен белый шар (звездочета не казнят); через $B_1$ – шар будет извлечен из первой урны, $B_2$ – шар будет извлечен из второй урны.

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \times P(A/B_1) + P(B_2) \times P(A/B_2).$$

Поскольку палач выбирает урну произвольным образом, то события $B_1$ и $B_2$ являются равновероятными и $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$.

Подсчитаем условные вероятности. Возможны четыре варианта раскладки шаров по урнам (табл. 2.5):

*Таблица 2.5*

| № | 1-я урна | 2-я урна |
|---|---|---|
| 1 | 1 черный | 1 черный, 2 белых |
| 2 | 2 черных | 2 белых |
| 3 | 1 черный, 1 белый | 1 черный, 1 белый |
| 4 | 1 белый | 2 черных, 1 белый |

Тогда вероятность события *A* определится следующим образом:

**Вариант 1**: $P(A) = 1/2 \times 0 + 1/2 \times 2/3 = 1/3$.

**Вариант 2**: $P(A) = 1/2 \times 0 + 1/2 \times 1 = 1/2$.

**Вариант 3**: $P(A) = 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2 = 1/2$.

**Вариант 4**: $P(A) = 1/2 \times 1 + 1/2 \times 1/3 = 2/3$.

Следовательно, для звездочета четвертый вариант предпочтительнее.

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является так называемая *теорема гипотез*, или *формула Байеса*.

Алгоритм применения данной формулы следующий:

1. Выдвигают предположения – гипотезы $B_1$, $B_2$, ... $B_n$. Они составляют полную группу несовместных событий.

2. Устанавливают доопытные вероятности данных гипотез: $P(B_1)$, $P(B_2)$, … $P(B_n)$ из интуитивных или каких-либо других соображений.

3. Проводят эксперимент, в результате которого происходит событие *A*. Таким образом получают новую информацию, на основании которой выполняют переоценку доопытных вероятностей гипотез по *формуле Байеса*:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(A)}, \qquad (3)$$

где $P(A)$ определяется по формуле полной вероятности.

Таким образом заменяют *доопытные* (*априорные)* вероятности гипотез *послеопытными* (*апостериорными)*.

**Пример 2.23**

В тире имеются четыре винтовки, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,7; 0,95; 0,58; 0,7. Из любой взятой винтовки производится выстрел, мишень поражена. Какова вероятность, что выстрел произведен из третьей винтовки?

**Решение**

Обозначим события:

*A* – мишень поражена;

$B_1$ – выстрел производился из первой винтовки;

$B_2$ – выстрел производился из второй винтовки;

$B_3$ – выстрел производился из третьей винтовки;

$B_4$ – выстрел производился из четвертой винтовки.

Априорные вероятности попадания из винтовок равны соответственно 0,7; 0,95; 0,58; 0,7. После того как мишень была поражена, произойдет переоценка этого утверждения. Подставив известные величины в формулу Байеса, получим:

$$P(B_3/A)=\frac{P(B_3)\cdot P(A/B_3)}{P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)+P(B_4)\cdot P(A/B_4)}=$$

$$\frac{0{,}25\cdot 0{,}58}{0{,}25\cdot 0{,}7+0{,}25\cdot 0{,}95+0{,}25\cdot 0{,}58+0{,}25\cdot 0{,}7}=0{,}199.$$

Таким образом, вероятность того, что мишень была поражена из третьей винтовки, составляет 0,199.

**Пример 2.24**

Вероятность обнаружить признак *A* в рукописи, выполненной женщиной, равна 0,1, а в рукописи, выполненной мужчиной, – 0,3. На исследование поступила рукопись, в которой обнаружен данный признак. Какова вероятность, что данная рукопись выполнена:

а) женщиной;

б) мужчиной?

**Решение**

Обозначим события:

*A* – в рукописи обнаружен признак *A*;

*М* – рукопись выполнена мужчиной;

*Ж* – рукопись выполнена женщиной.

Априорные вероятности отнесения почерка к женскому или мужскому равны 0,5. После обнаружения в рукописи признака *A* произойдет переоценка этого утверждения. Подставив известные величины в формулу Байеса, получим:

$$P(Ж/A)=\frac{P(Ж)\cdot P(A/Ж)}{P(Ж)\cdot P(A/Ж)+P(M)\cdot P(A/M)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}1}{0{,}5\cdot 0{,}1+0{,}5\cdot 0{,}3}=0{,}25.$$

$$P(M/A)=\frac{P(M)\cdot P(A/M)}{P(Ж)\cdot P(A/Ж)+P(M)\cdot P(A/M)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}3}{0{,}5\cdot 0{,}1+0{,}5\cdot 0{,}3}=0{,}75.$$

Таким образом, наличие в почерке признака *А* позволяет с большей уверенностью утверждать, что рукопись выполнена мужчиной.

Рассмотрим применение формулы Байеса при дифференциации рукописей на мужские и женские.

Все методики дифференциации пола исполнителя рукописи основаны на том, что мужчины и женщины обладают различными свойствами, сказывающимися на формировании и функционировании письменно-двигательного навыка. В задачу эксперта входит выявление комплекса признаков, который чаще встречался бы в почерке мужчин либо женщин. Такая методика была разработана в НИИ МВД СССР. Разработчики на очень большом экспериментальном материале просчитали частоту встречаемости 21 признака в почерках мужчин и женщин. Сущность методики состоит в том, что эксперт выявляет в исследуемой рукописи информативные признаки (табл. 2.6), и перемножает коэффициенты в третьем столбце. И если полученное произведение больше 1, то рукопись выполнена мужчиной, если меньше 1 – вероятно, женщиной. Авторами методики вероятность выявления определяется в 0,9.

*Таблица 2.6*

**Признаки, информативные для определения пола исполнителя рукописи**

| № | Признак | Коэффициент |
|---|---|---|
| 1 | Неодинаковый размер надстрочных элементов в буквах «*б*», «*в*», «*д*» | 1,31 |
| 2 | Неустойчивое расположение точки начала движения при выполнении букв «*а*», «*д*» | 0,67 |
| 3 | Различная конфигурация надстрочного элемента в букве «*й*» | 1,35 |

| № | Признак | Коэффициент |
|---|---|---|
| 4 | Различная конфигурация подстрочных элементов в буквах «*д*», «*у*» | 1,36 |
| 5 | Отсутствие надстрочной части первого элемента в букве «*р*» | 1,96 |
| 6 | Наличие буквы «*д*» с надстрочным элементом | 1,96 |

И опять применение методики очень просто, но в чем сущность метода?

В целях успешной дифференциации объектов выявляют не один признак, а комплекс признаков. В выражении (3) символ $A$ может обозначать комплекс признаков:

$$A = A_1 \text{ x } A_2 \text{ x } \dots A_k,$$

где $k$ – число признаков, входящих в комплекс.

Тогда вероятность того, что рукопись выполнена мужчиной, согласно формуле Байеса, примет вид:

$$P(M/A_1A_2 \dots A_k) = \frac{P(M)P(A_1A_2 \dots A_k/M)}{P(A_1A_2 \dots A_k)}.$$

Если признаки $A_i$ попарно независимы, то вероятность их совместного появления равна произведению появления каждого признака в отдельности:

$$P(M/A_1A_2 \dots A_k) = \frac{P(M)P(A_1/M)P(A_2/M) \dots P(A_k/M)}{P(A_1A_2 \dots A_k)}.$$

Аналогично определяется вероятность, что рукопись выполнена женщиной:

$$P(\text{Ж}/A_1A_2 \dots A_k) = \frac{P(\text{Ж})P(A_1/\text{Ж})P(A_2/\text{Ж}) \dots P(A_k/\text{Ж})}{P(A_1A_2 \dots A_k)}.$$

Разделив эти две формулы друг на друга, учитывая, что априорные вероятности равны $P(M) = P(\text{Ж})$, получаем:

$$\frac{P(M/A_1A_2 \dots A_k)}{P(\text{Ж}/A_1A_2 \dots A_k)} = \frac{P(A_1/M)}{P(A_1/\text{Ж})} \cdot \frac{P(A_2/M)}{P(A_2/\text{Ж})} \text{ x } \dots \text{ x } \frac{P(A_k/M)}{P(A_k/\text{Ж})}.$$

Отношение вероятностей выполнения исследуемой рукописи мужчиной и женщиной (при наличии комплекса независимых признаков и однозначности априорных вероятностей) равно произведению отношений вероятностей появления каждого признака в мужском и женском почерках.

Введем обозначения:

$$K_i = \frac{P(A_i/М)}{P(A_i/Ж)}.$$

Тогда

$$\frac{P(М/A_1A_2 \ldots A_k)}{P(Ж/A_1A_2 \ldots A_k)} = K_1K_2 \ldots K_k = K.$$

Значения $K_1$, $K_2$, … $K_k$ приводятся в третьем столбце табл. 2.6. Если вероятность того, что рукопись выполнена мужчиной (при условии, что в ней обужен комплекс признаков $A_1$, $A_2$, … $A_k$), больше, чем вероятность того, что она выполнена женщиной, то $K > 1$. В противном случае $K < 1$. Сущность методики становится понятной.

Сама методика, как было сказано выше, довольно проста и доступна любому эксперту-почерковеду, так как она основана на изучении признаков, применяемых в большинстве идентификационных почерковедческих экспертиз. Исследование рукописи начинается с детального изучения почерка в целях выявления информативных признаков, формирующих комплекс, необходимый для идентификации пола исполнителя. Все обнаруженные признаки фиксируются в таблицах-разработках, по которым определяются соответствующие коэффициенты статистических вероятностей.

Например, в разработке отмечены такие признаки:

– неодинаковый размер надстрочных элементов (коэффициент 1,31);

– неустойчивое расположение точки начала движения при написании букв «*а*» и «*д*» (коэффициент 0,67);

– различная конфигурация надстрочного элемента буквы «*й*» (коэффициент 1,35);

– различная конфигурация подстрочных элементов букв «*д*» и «*у*» (коэффициент 1,36);

– отсутствие надстрочечной части первого элемента буквы «*р*» (коэффициент 1,96);

– наличие буквы «*д*» с надстрочным элементом (коэффициент 1,96).

Согласно методике определяем произведение полученных коэффициентов:

$$K = 1,31 \times 0,67 \times 1,58 \times 1,35 \times 1,36 \times 1,96 \times 1,96 = 9,78.$$

Поскольку произведение коэффициентов статистических вероятностей больше единицы, можно сделать вывод о выполнении рукописи мужчиной.

### Вопросы для самопроверки

1. Какая вероятность события называется условной? Приведите примеры.
2. Какие события называются зависимыми? Приведите примеры.
3. Какие события называются независимыми? Приведите примеры.
4. Чему равна вероятность произведения событий (зависимых и независимых)?
5. Чему равна вероятность суммы несовместных событий?
6. Чему равна вероятность суммы совместных событий (зависимых и независимых)?
7. Как записать формулу полной вероятности? Придумайте задачу на нахождение полной вероятности.
8. Как записывается формула Байеса? Придумайте задачу на применение формулы Байеса.

9. Какая разница в формулировках задач на нахождение полной вероятности и на применение формулы Байеса?

## Задания для самостоятельного решения

**Задача 2.14**

Агент передает некоторое сообщение по рации. В целях повышения надежности передачи сообщения в условиях действия помех сообщение дублируется четыре раза. Сообщение считается искаженным, если все четыре посылки оказываются искаженными помехами. Какова вероятность искажения сообщения, если вероятность его искажения при каждой посылке равна 0,3?

Ответ: 0,0081.

**Задача 2.15**

Десять участников собрания носят фуражки одинакового размера. Уходя с собрания домой, они вынуждены надевать фуражки в темном коридоре, поэтому не могут отличить свою фуражку от чужой, того же размера. Чему равна вероятность того, что каждый участник собрания вернется домой в своей фуражке?

Ответ: 1/10!

**Задача 2.16**

Три стрелка стреляют по одной цели. Найти вероятность поражения цели при одном залпе, если вероятности поражения цели каждым из стрелков соответственно равны 0,8; 0,8; 0,9?

Ответ: 0,996.

**Задача 2.17**

При стрельбе из пистолета вероятность попадания в «десятку» равна 0,25; в «девятку» – 0,30; в «восьмерку» – 0,15; в «семерку» – 0,12. Какова вероятность того, что стрелок, сделав один выстрел, выбьет:

а) не менее 8 очков;

б) не более 8 очков?

Ответ: а) 0,70; б) 0,45.

**Задача 2.18**

При приеме партии подвергается проверке половина изделий. Условиями приема допускается бракованных изделий не более 2 %. Определить вероятность того, что партия из 100 деталей, содержащая 3 % брака, будет принята.

Ответ: ≈ 0,12.

**Задача 2.19**

Слушатель разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится:

а) только в одном справочнике;

б) только в двух справочниках;

в) во всех трех справочниках.

Ответ: а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336.

**Задача 2.20**

Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найти вероятности, что будет сделано:

а) два выстрела;

б) не более двух выстрелов;

в) три выстрела;

г) не более трех выстрелов.

Ответ: а) 0,21; б) 0,91; в) 0,063; г) 0,973.

**Задача 2.21**

В пирамиде имеется 20 винтовок, из которых 8 снабжены оптическим прицелом. Вероятность поражения цели при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Стрелок производит выстрел из наудачу взятой винтовки. Какова вероятность поражения цели?

Ответ: 0,78.

**Задача 2.22**

В пирамиде имеется 20 винтовок, из которых 8 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Какова вероятность того, что стрелок стрелял из винтовки:

а) с оптическим прицелом;

б) без оптического прицела?

Ответ: а) $\frac{6}{13}$; б) $\frac{7}{13}$.

# Библиографический список

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей : учебник для студентов вузов / Е. С. Вентцель. – М., 2001. – 576 с.

2. Использование математических методов в криминалистических экспертных исследованиях : учебное пособие / под ред. Г. Л. Грановского. – Волгоград, 1981. – 95 с.

3. Калинкина, В. Н. Математическая статистика / В. Н. Калинкина, В. Ф. Панкин. – М., 1994.

4. Коимшиди, Г. Ф. Получение диагностической информации вероятностным методом распознавания образов : лекция / Г. Ф. Коимшиди, В. В. Серегин. – Волгоград, 1988. – 16 с.

5. Криминалистическая экспертиза // Вып. II. Разд. 3. Основы физических и химических методов исследования вещественных доказательств в криминалистической экспертизе : учебник / под ред. М. В. Кисина. – М., 1966. – 172 с.

6. Почерковедение и почерковедческая экспертиза : учебник / под ред. В. В. Серегина. – Волгоград : Волгоградская академия МВД России, 2014. – 340 с.

7. Харламова, И. Ю. Математика : учебное пособие / И. Ю. Харламова, К. П. Семенов. – Саратов : Саратовский юридический институт МВД России, 2009. – 296 с.

Учебное издание

**Куриленко Юлия Александровна**,
заместитель начальника кафедры информатики и математики
Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя,
кандидат юридических наук

**Харламова Ирина Юрьевна**,
доцент кафедры информатики и математики
Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя,
кандидат технических наук, доцент

# Математика для курсантов и слушателей, обучающихся по специальности «Судебная экспертиза»

Редактор *Васильевых Е. М.*
Корректор *Табунова Е. А.*
Компьютерная верстка *Табунова Е. А.*

Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 5,69.
Подписано в печать 23.07.2025. Заказ № 30.
Тираж 87 экз.

Отпечатано в Полиграфическом центре
Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя
https://мосу.мвд.рф, e-mail: support_mosu@mvd.ru