

ВОРОНЕЖСКИЙ ИНСТИТУТ МВД РОССИИ

О. Ю. Данилова

С. В. Синегубов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Воронеж
2025

ББК 67.54
УДК 311 : 519.4

Рецензенты:

С. Ю. Кобзистый — доцент кафедры технических комплексов охраны и связи Воронежского института ФСИН России, кандидат технических наук, доцент;

А. Ф. Самороковский — доцент кафедры гуманитарных и социально-экономических дисциплин Центрального филиала Российского государственного университета правосудия, кандидат технических наук, доцент.

Данилова О. Ю.

Основы теории управления : учебное пособие [Электронный ресурс] / О. Ю. Данилова, С. В. Синегубов. — Электр. дан. и прогр. — Воронеж : Воронежский институт МВД России, 2025. — 1 электр. опт. диск (CD-ROM) : 12 см. — Систем. требования: процессор Intel с частотой не менее 1,3 ГГц ; ОЗУ 512 Мб ; операц. система семейства Windows ; CD-ROM диск-вод.

Учебное пособие предназначено для проведения занятий по дисциплине «Основы теории управления» со слушателями радиотехнического факультета.

ISBN 978-5-00229-208-0

© О. Ю. Данилова, С. В. Синегубов

© Воронежский институт МВД России, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	8
1.1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики.....	8
1.2. Характеристические функции.....	12
1.3. Распределения случайных величин	14
1.3.1. Дискретные распределения.....	14
1.3.2. Непрерывные распределения.....	19
1.4. Определение закона распределения случайной величины на основе опытных данных	30
1.5. Предельные теоремы теории вероятностей	38
1.5.1. Неравенства Чебышева.....	38
1.5.2. Закон больших чисел.....	39
1.5.3. Центральная предельная теорема.....	41
1.6. Расчет необходимого количества прогонов модели	43
1.6.1. Количество реализаций при определении среднего арифметического случайной величины	43
1.6.2. Количество прогонов модели при определении вероятности появления события.....	44
1.7. Модель. Моделирование.....	47
1.8. Проверка модели	49
1.8.1. Критические точки. Критическая область.....	50
1.8.2. Сравнение двух дисперсий	51
1.8.3. Сравнение исправленной выборочной дисперсии с предполагаемой генеральной дисперсией	53
1.8.4. Сравнение средних значений откликов модели и системы, дисперсии генеральных совокупностей известны, малые выборки $n < 50$	55
1.8.5. Сравнение средних значений откликов модели и системы, дисперсии генеральных совокупностей известны, большие выборки $n > 50$	57
1.8.6. Сравнение средних значений откликов модели и системы, дисперсии генеральных совокупностей не известны, малые выборки $n < 50$	57
1.8.7. Сравнение выборочной средней с предполагаемой генеральной средней, дисперсия известна (большая выборка $n > 50$)	59
1.8.8. Сравнение выборочной средней с предполагаемой генеральной средней, дисперсия известна (малая выборка $n < 50$)	60
1.8.9. Проверка однородности результатов измерений.....	62
2. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ.....	68
2.1. Задача линейного программирования	68
2.1.1. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования ($n = 2$).....	72
2.1.2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования ($n > 2$).....	75
2.1.3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в пространстве условий	76
2.1.4. Симплексный метод (симплекс-метод) в форме уравнений.....	77
2.1.5. Анализ на чувствительность решения задачи линейного программирования	82

2.1.6. Двойственная задача линейного программирования	92
2.1.7. Симплексный метод (симплекс-метод) в форме таблиц (симплекс-таблицы).....	96
2.1.8. Метод искусственного базиса.....	111
2.2. Задачи транспортного типа (сетевые модели).....	116
2.2.1. Транспортная задача	116
2.2.2. Транспортная задача с промежуточными пунктами	124
2.3. Задача о назначениях	131
2.4. Поиск оптимального пути	146
2.5. Сетевое планирование.....	160
2.6. Поиск кратчайшего пути	171
3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР	190
3.1. Понятие игры	190
3.2. Принцип минимакса. Доминирование стратегий.....	193
3.3. Смешанные стратегии.....	198
3.4. Игры 2×2 , $2 \times n$, $m \times 2$	204
3.5. Сведение матричных игр к линейному программированию.....	212
3.6. Игры с «природой».....	219
3.7. Биматричные игры	224
3.8. Оптимальность по Парето. Равновесие по Штакельбергу	235
4. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....	241
4.1. Преобразование Лапласа	241
4.2. Свойства преобразования Лапласа	244
4.3. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.....	248
4.3.1. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	248
4.3.2. Системы дифференциальных уравнений	255
5. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ	263
5.1. Марковские процессы. Уравнения Колмогорова-Чепмена для вероятностей состояний.....	263
5.1.1 Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем.....	263
5.1.2. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем.....	265
5.2. Оценка вероятностей, входящих в состав матриц вероятностей переходов.....	280
5.3. Простейший поток событий, свойства	286
5.4. Предельные вероятности состояний.....	293
5.5. Процесс «гибели и размножения»	301
6. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ	305
6.1. Одноканальная СМО с отказами	305
6.2. Многоканальная СМО с отказами	312
6.3. Одноканальная СМО с ожиданием.....	318
6.3.1. Одноканальная СМО с очередью длиной n	318
6.3.2. Одноканальная СМО с неограниченной очередью	323
6.4. Многоканальная СМО с ожиданием	337
6.4.1. Многоканальная СМО очередью длиной m	337
6.4.2. Многоканальная СМО с неограниченной очередью	340
6.5. Формула Литтла.....	352
6.6. СМО с ограниченным временем ожидания	354
6.7. Замкнутые СМО	357
6.7.1. Одноканальная замкнутая СМО	357

6.7.2. Многоканальная замкнутая СМО.....	359
6.8. Немарковские СМО.....	366
6.8.1. n -канальная СМО с отказами, простейшим потоком заявок и произвольным распределением времени обслуживания.....	366
6.8.2. Одноканальная СМО с неограниченной очередью, простейшим потоком заявок и произвольным распределением времени обслуживания.....	367
6.8.3. Одноканальная СМО с произвольным потоком заявок и экспоненциальным распределением времени обслуживания.....	368
6.8.4. Одноканальная СМО с произвольным потоком заявок и произвольным распределением времени обслуживания.....	369
6.8.5. Многоканальная СМО с произвольным потоком заявок и произвольным распределением времени обслуживания.....	370
7. СЕТИ ПЕТРИ.....	371
7.1. Определения	371
7.2. Моделирование угроз безопасности информации, связанных с сетевыми атаками	385
7.3. Системы множественного доступа	395
7.4. Маршрутизаторы, концентраторы	397
8. УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	403
8.1. Общие сведения о решении дифференциальных уравнений и их систем	403
8.1.1. Дифференциальные уравнения.....	403
8.1.2. Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	405
8.2. Понятие об устойчивости решения дифференциальных уравнений.....	407
8.3. Простейшие типы точек покоя.....	411
8.4. Точки покоя и инварианты характеристического уравнения	414
8.5. Второй метод Ляпунова	416
8.6. Исследование на устойчивость по первому приближению	418
8.7. Критерий Рауса-Гурвица	421
8.8. Геометрический критерий устойчивости (критерий Михайлова)	424
9. ДИСКРЕТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ	427
9.1. Z -преобразование	427
9.2. Свойства z -преобразования	432
9.3. Разность. Изображение разностей	433
9.4. Разностные уравнения.....	435
9.5. Решение разностных уравнений	439
9.5.1. Решение разностных уравнений с помощью характеристического полинома	439
9.5.2. Решение разностных уравнений методом z -преобразования	446
9.5.3. Устойчивость решений разностных уравнений.....	448
10. ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	453
10.1. Характеристики сигналов, элементов и систем.....	453
10.2. Характеристики и модели типовых динамических звеньев.....	469
10.2.1. Идеальное усилительное (безынерционное) звено.....	469
10.2.2. Инерционные звенья первого порядка (апериодические 1-го порядка)....	470
10.2.3. Инерционные звенья второго порядка (апериодические 2-го порядка)....	472
10.2.4. Колебательные звенья	474
10.2.5. Идеальное интегрирующее звено	476
10.2.6. Реальное интегрирующее звено	477
10.2.7. Идеальное дифференцирующее звено	477

10.2.8. Реальное дифференцирующее звено.....	478
10.2.9. Неустойчивое апериодическое звено.....	479
10.2.10. Неустойчивое колебательное звено.....	479
10.3. Передаточные функции соединений.....	481
10.4. Уравнение системы в нормальной форме.....	487
СПИСОК ИСПОЛЪЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	494
11. ПРИЛОЖЕНИЯ.....	495
11.1. Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	495
11.2. Таблица значений функции Лапласа.....	496
11.3. Критические точки распределения F Фишера-Снедекора.....	497
11.4. Критические точки распределения χ^2	499
11.5. t -распределение Стьюдента.....	500
11.6. Таблица некоторых изображений (преобразование Лапласа).....	501
11.7. Таблица z -преобразования.....	502
11.8. Передаточные функции типовых звеньев.....	503
11.9. Основы языка CPN ML.....	504
11.10. Блоки, распределения и функции GPSS Word.....	513
11.11. Отчет в GPSS.....	521
11.12. Функция Дирака.....	525
11.13. Полезные формулы.....	529

ВВЕДЕНИЕ

В любой профессиональной (и не только) деятельности человек сталкивается с необходимостью решать различные задачи, результатом которых, как правило, является управленческое решение. Для осуществления профессиональной организационно-управленческой деятельности необходимы знания основных методов и моделей принятия решений, умение использовать современные, применяемые в практической деятельности методы разработки и принятия управленческих решений, а также самостоятельно адаптировать подобные методы к конкретным условиям.

Для осуществления организационно-управленческой деятельности необходимо знать сущность и виды управленческих решений, методы и организацию разработки таких решений; уметь анализировать проблемные ситуации и разрабатывать решения по ним, формулировать ограничения и критерии принятия решений, определять альтернативы и давать оценку, исходя из наличия имеющихся ресурсов. Для этого необходимо владеть методами решения типовых организационно-управленческих задач, способами их реализации, навыками компьютерных технологий.

Все излагаемые темы в учебном пособии снабжены большим количеством примеров применительно к практике, а также задачами для самостоятельного решения. Каждая из задач по существу является аналогом проблемы, решаемой человеком в повседневной жизни для принятия решения.

Результатом изучения данного пособия является получение практических навыков в применении инструментов и методов разработки и принятия управленческих решений при помощи проигрывания конкретных ситуаций и решения практических задач, формирование навыков адаптации рассмотренных методов к конкретным условиям.

Все примеры и задания носят академический характер, никаких социальных выводов по данным примерам и задачам делать не стоит.

Авторы выражают благодарность кандидату технических наук, доценту А. Н. Копылову за ценные замечания и предложения, высказанные при написании данного издания.

1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1.1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики

При проведении эксперимента с моделью ожидается появление некоторого события. Так при подбрасывании монеты возможно выпадение «герба»; на запрос рабочей станции ожидается ответ от сервера; при передаче пакетов данных возможна потеря информации. Появление данных событий при проведении испытания с моделью носит случайный характер.

Под **случайным событием** будем понимать событие, которое в результате данного опыта (эксперимента) может произойти, а может и не произойти. Или более строго — случайное событие это подмножество множества элементарных исходов данного испытания.

Количественной характеристикой появления некоторого события является **вероятность**

$$P(A) = \frac{m}{N},$$

вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих событию A исходов к общему числу равновозможных исходов (классическое определение вероятности).

Свойства вероятности события:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Вероятность достоверного события равна единице.
3. Вероятность невозможного события равна нулю.

Результатом проведения эксперимента с моделью являются элементарные исходы испытания. Множество единственно возможных и несовместных элементарных исходов опыта (эксперимента) образуют **полную группу**.

Под **случайной величиной** будем понимать переменную, которая в результате испытания принимает одно значение (заранее неизвестное) из возможного множества своих значений (из множества, образующего полную группу). Или более строго — случайной величиной X называется функция, заданная на множестве элементарных исходов

$$X = f(\omega),$$

где ω — элементарный исход, принадлежащий пространству Ω .

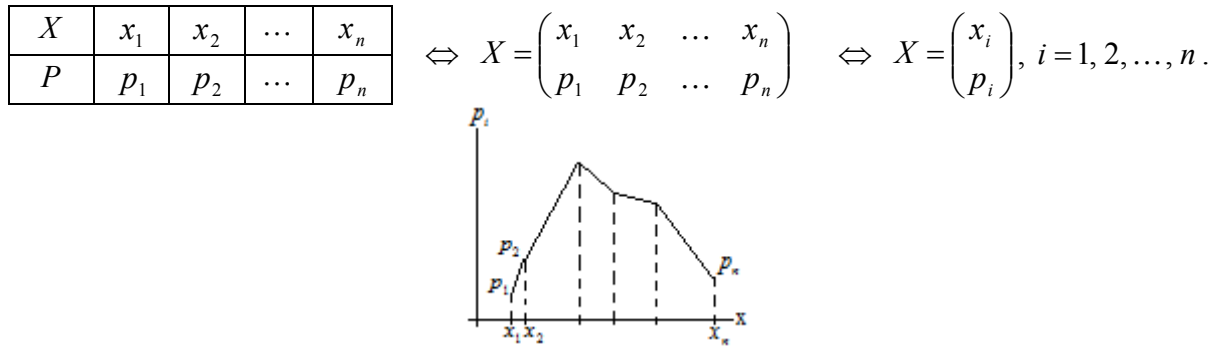
Так, при подбрасывании игрального кубика, случайная величина может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Дискретной случайной величиной называется величина, принимающая конечное, или бесконечное, но счетное (можно пересчитать) множество значений.

Непрерывная случайная величина принимает бесконечное несчетное множество значений из некоторого интервала числовой оси.

Закон распределения случайной величины — соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан таблицей, аналитически и графически.



Так как в результате испытания случайная величина X принимает несовместные и единственно возможные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, образующие **полную группу**, то

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Функция распределения случайной величины (интегральная функция распределения) — функция, выражающая вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее x

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $F(x)$ — неубывающая функция;
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$;
4. $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Плотность вероятности (плотность распределения) непрерывной случайной величины (дифференциальная функция распределения) — производная функции распределения

$$f(x) = F'(x).$$

Очевидно, что плотность распределения существует только для непрерывных случайных величин, а функция распределения — как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Свойства плотности распределения:

1. Плотность вероятности есть неотрицательная функция, как производная монотонно неубывающей функции $F(x)$ — $f(x) \geq 0$;

$$2. P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx;$$

$$3. F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt;$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Для сравнения случайных величин на практике применяются следующие числовые характеристики: начальные и центральные моменты. Начальные моменты рассматриваются относительно начала координат; центральные моменты — относительно среднего значения случайной величины.

Начальный момент k -го порядка ν_k случайной величины X определяется как

$$\nu_k = E X^k = \begin{cases} \sum_{i=1}^N x_i^k \cdot p_i & \text{для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx & \text{для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Центральный момент k -го порядка μ_k случайной величины X определяется как

$$\mu_k = E(X - EX)^k = \begin{cases} \sum_{i=1}^N (x_i - EX)^k \cdot p_i & \text{для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^k \cdot f(x) dx & \text{для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Наибольшее распространение получили первый начальный $\nu_1 = EX$ и второй центральный $\mu_2 = E(X - EX)^2$ моменты.

Математическое ожидание (первый начальный момент) $M(X)$ случайной величины X характеризует относительное расположение значений случайной величины на числовой оси и определяется как

$$\nu_1 = EX = M(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N x_i \cdot p_i & \text{для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx & \text{для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$, ($C = const$).
2. $M(k \cdot X) = k \cdot M(X)$, ($k = const$).
3. Если X и Y случайные величины, то $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. Если X и Y независимые случайные величины, то $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.
5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю $M[X - M(X)] = 0$.

Дисперсия (второй центральный момент) распределения $D(X)$ случайной величины X характеризует разброс значений случайной величины около математического ожидания и определяется как

$$\mu_2 = E(X - EX)^2 = D(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N (x_i - EX)^2 \cdot p_i & \text{для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x) dx & \text{для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Дисперсию распределения случайной величины удобнее вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$, ($C = const$).
2. $D(k \cdot X) = k^2 \cdot D(X)$, ($k = const$).
3. Если X и Y независимые случайные величины, то

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Так как дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, то удобнее использовать значение среднеквадратического отклонения.

Среднеквадратическое отклонение случайной величины X называется число $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Иногда удобно использовать **факториальный момент** k -го порядка $\mu_{(k)}$

$$\mu_{(k)} = M(X^k) = M[X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)].$$

Начальные моменты можно получить из факториальных моментов как

$$\mu_{(1)} = v_1 = M(X),$$

$$\mu_{(2)} = v_2 - v_1 = M(X^2) - M(X),$$

$$\mu_{(3)} = v_3 - 3 \cdot v_2 + 2 \cdot v_1 = M(X^3) - 3 \cdot M(X^2) + 2 \cdot M(X),$$

откуда следует, что

$$\mu_2 = D(X) = \mu_{(2)} + \mu_{(1)} - \mu_{(1)}^2 = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

$$\mu_3 = \mu_{(3)} + 3 \cdot \mu_{(2)} + \mu_{(1)} - 3 \cdot [\mu_{(2)} + \mu_{(1)}] \cdot \mu_{(1)} + 2 \cdot \mu_{(1)}^2.$$

Введенные выше соотношения позволяют определить количественные характеристики случайной величины в случае бесконечной генеральной совокупности, т. е. когда количество опытов стремится к бесконечности. На практике при проведении эксперимента с моделью проводят ограниченное количество испытаний, в результате получают генеральную совокупность, из которой выбирается выборка. На основании полученной выборки производят оценку параметров изучаемой случайной величины.

Все оценки должны обладать свойствами:

1. Несмещенность. Математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру.
2. Состоятельность. Оценка называется состоятельной, если она удовлетворяет закону больших чисел, т. е. сходится по вероятности к оцениваемому параметру.
3. Эффективность. Несмещенная оценка называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок изучаемого параметра, вычисленных по выборкам одного и того же объема.

Пусть в результате эксперимента ожидается появление события A . В качестве оценки вероятности будем понимать **частоту** появления события A

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

где n — объем выборки,

m — число появлений события A .

При исследовании характеристик модели на практике, как правило, получают наборы дискретных случайных величин в виде конкретных значений или их интервалов, на основе которых строят дискретный или интервальный вариационный ряд. Полученные данные позволяют сделать оценку количественных характеристик изучаемой случайной величины.

Пусть в результате проведения n прогонов модели случайная величина X приняла значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, причем x_1 — n_1 раз, x_2 — n_2 и т.д.

Оценкой математического ожидания случайной величины X служит **выборочное среднее значение** (среднее значение)

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_n \cdot n_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i.$$

Оценкой дисперсии случайной величины X служит **выборочная дисперсия**

$$s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i.$$

Полученная оценка дисперсии, являясь состоятельной, обладает систематическим смещением в меньшую сторону по сравнению с истинной дисперсией распределения. Поэтому будем использовать **несмещенную выборочную дисперсию**

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i.$$

Полученные теоретические и эмпирические характеристики случайного события A сведем в таблицу.

Теоретические характеристики		Эмпирические характеристики	
Вероятность	$P(A) = \frac{m}{N}$	Частота	$p(A) = \frac{m}{n}$
Математическое ожидание	$M(X) = a$	Выборочное среднее	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i$
Дисперсия	$D(X) = \sigma^2$	Выборочная дисперсия	$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i$
		Несмещенная выборочная дисперсия	$s_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i$

1.2. Характеристические функции

Данный математический аппарат был специально создан Александром Михайловичем Ляпуновым для доказательства центральной предельной теоремы.

Характеристической функцией случайной величины X называется функция $\varphi_X(t) = M(e^{itX})$ вещественной переменной t ($i = \sqrt{-1}$).

Свойства:

1. Модуль характеристической функции не превышает 1.

$$|\varphi_X(t)| = |M(e^{itX})| \leq 1.$$

2. По характеристической функции однозначно восстанавливается распределение случайной величины. Т. е., если две случайные величины имеют одинаковые характеристические функции, то они распределены одинаково с одинаковыми параметрами.

3. Если $Y = a + bX$ — случайная величина, то

$$\varphi_{a+bX}(t) = M(e^{it(a+bX)}) = e^{ita} M(e^{i(tb)X}) = e^{ita} \varphi_X(bt).$$

4. Если X и Y независимые случайные величины, то

$$\varphi_{X+Y}(t) = M(e^{it(X+Y)}) = M(e^{itX})M(e^{itY}) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t).$$

5. Если существуют k -е моменты случайной величины X , то k -ая производная в $t = 0$ определяется как

$$\varphi_X^{(k)}(0) = \left(\frac{d^k}{dt^k} M(e^{itX}) \right) \Big|_{t=0} = \left(M(i^k X^k e^{itX}) \right) \Big|_{t=0} = i^k M(X^k).$$

6. Если существуют k -е моменты случайной величины X , то характеристическую функцию можно разложить в ряд Тейлора около нуля

$$\varphi_X(t) = 1 + itM(X) - \frac{t^2}{2}M(X^2) + \dots + \frac{i^k t^k}{k!}M(X^k) + o(t).$$

Пример. Найдем характеристическую функцию стандартного нормального распределения $N_{0,1}$ заданного плотностью $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ($m = 0$, $\sigma = 1$).

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x^2 - 2xit + (it)^2) + (it)^2}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = \left| \frac{x-it}{\sqrt{2}} = z \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

Выражение $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$ называется интегралом Эйлера-Пуассона. Вычислим его.

$$\text{Пусть } I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

$$\text{Тогда } I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Перейдем к полярным координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$. Так как $-\infty < x < \infty$ и $-\infty < y < \infty$, то $0 < \varphi < 2\pi$ и $0 < r < \infty$. Тогда

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr.$$

Внутренний интеграл:

$$\int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-r^2} d(-r^2) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{2} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{2}.$$

Тогда внешний интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi.$$

Таким образом,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr = \pi.$$

$$\text{Следовательно, } I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом, характеристическая функция стандартного нормального отклонения

$$\varphi_x(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sqrt{\pi} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

1.3. Распределения случайных величин

1.3.1. Дискретные распределения

1. Распределение Бернулли B_p .

Пусть в результате проведения независимых испытаний ожидается появление события A , в каждом из которых случайная величина X может принимать только значения $x_1 = 1$ (событие A однозначно произошло) с вероятностью p и значение $x_2 = 0$ (событие A не произошло) с вероятностью $q = 1 - p$. Последовательность таких независимых испытаний называется схемой Бернулли.

Таблица распределения Бернулли $X \sim B_p$ имеет вид:

X	0	1
P	q	p

Математическое ожидание определим как

$$M(X) = x_1 \cdot p + x_2 \cdot q = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Второй начальный момент:

$$M(X^2) = x_1^2 \cdot p + x_2^2 \cdot q = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p.$$

Дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p) = pq.$$

Коэффициент вариации:

$$v(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = \frac{\sqrt{pq}}{p} = \sqrt{\frac{q}{p}}.$$

Пример. При работе антивирусной программы вероятность наличия вируса в проверяемом файле равна $1/8$. Тогда событие A , заключающееся в наличии вируса в проверяемых файлах, имеет распределение Бернулли: вирус есть ($x_1 = 1$) с вероятностью $1/8$, вируса нет ($x_2 = 0$) с вероятностью $7/8$.

2. Биномиальное распределение $B_{n,p}$.

Пусть в n испытаниях схемы Бернулли ожидаемое событие A появилось k раз с одинаковой вероятностью p , тогда в остальных $n - k$ исходах опыта данного события не произошло с вероятностью $1 - p$.

Так как испытания независимы, то вероятность появления события A в одном испытании k раз из n равна $p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$. Например, подбрасывая монетку 5 раз, может выпасть как «орел», так и «решка». Пусть «решка» выпала 2 раза, тогда результат

опыта можно описать как « p, p, z, z, z » и вероятность появления «решки» — $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3$.

Учитывая, что в результате опыта количество k может быть любым, то общее возможное число исходов эксперимента определяется как C_n^k .

Таким образом, вероятность наступления события A в n испытаниях ровно k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) раз определяется формулой Бернулли

$$P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Таблица биномиального распределения случайной величины $X \sim B_{n,p}$ имеет вид:

X	0	1	...	k	...	n
$P_{k,n}$	q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$	...	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	...	p^n

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, распределенные по закону Бернулли $B_p = B_{1,p}$ с $M(X) = p$ и $D(X) = pq$. Тогда их сумма $S_n = X_1 + \dots + X_n$ распределена как $B_{n,p}$.

Математическое ожидание:

$$M(S_n) = \sum_{i=1}^n M(X_i) = n \cdot M(X_1) = np.$$

Дисперсия:

$$D(S_n) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = n \cdot D(X_1) = npq.$$

Коэффициент вариации:

$$v(X) = \frac{\sigma(S_n)}{M(S_n)} = \frac{\sqrt{npq}}{np} = \sqrt{\frac{q}{np}}.$$

Пример. Пусть антивирусная программа проверяет 20 однотипных файлов. Событие A заключается в нахождении вируса в некотором файле с вероятностью $1/8$. Тогда случайная величина имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 20$ и $p = \frac{1}{8} \sim B_{20, \frac{1}{8}}$:

X	0	1	...	k	...	20
$P_{k,n}$	$\left(\frac{7}{8}\right)^{20}$	$20 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{19}$	...	$C_{20}^k \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^k \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{20-k}$	...	$\left(\frac{1}{8}\right)^{20}$

3. Геометрическое распределение G_p .

Пусть производятся испытания по схеме Бернулли. Ожидаемое событие A впервые произошло в k -ом испытании, тогда соответственно в $k-1$ исходе данного события не наблюдалось. Вероятность данного события определяется как

$$P(X = k) = p \cdot q^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и называется геометрическим распределением.

Таблица геометрического распределения случайной величины $X \sim G_p$, т.е. распределение случайной величины равной номеру первого успешного испытания, имеет вид:

X	1	2	3	...	k	...
$P(X = k)$	p	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$	...	$p \cdot q^{k-1}$	...

Математическое ожидание дискретной случайной величины найдем, используя определение:

$$\begin{aligned} M(X) &= 1 \cdot p + 2 \cdot p \cdot q + 3 \cdot p \cdot q^2 + \dots + k \cdot p \cdot q^{k-1} + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dq^k}{dq} = p \cdot \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) = \end{aligned}$$

Учитывая, что $q < 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ представляет собой убывающую геометрическую прогрессию с суммой $\frac{q}{1-q}$, можно записать

$$= p \cdot \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1-q} \right) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1-q}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

Для нахождения дисперсии найдем второй факториальный момент случайной величины X . Учитывая, что факториальный момент k -го порядка $\mu_{(k)}$ определяется как

$$\mu_{(k)} = M(X^k) = M[X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)],$$

то

$$\begin{aligned} M(X(X-1)) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p \cdot q^{k-1} = p \cdot q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2} = p \cdot q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 q^k}{dq^2} = \\ &= p \cdot q \cdot \frac{d^2}{dq^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) = p \cdot q \cdot \frac{d^2}{dq^2} \left(\frac{q}{1-q} \right) = p \cdot q \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2 \cdot q \cdot (1-q)}{(1-q)^3} = \frac{2 \cdot q}{p^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Так как } M(X^2) = M(X(X-1)) + M(X), \text{ то } M(X^2) = \frac{2 \cdot q}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Тогда дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{2 \cdot q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2 \cdot q + p - 1}{p^2} = \frac{2 \cdot (1-p) + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Коэффициент вариации:

$$v(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = \frac{\sqrt{\frac{q}{p^2}}}{\frac{1}{p}} = \sqrt{q}.$$

Пример. Антивирусная программа проверяет 5 однотипных файлов на наличие ошибки. Вероятность того, что файл имеет ошибку, равна 0,1. Проверка продолжается до обнаружения первого файла, содержащего ошибку. Составить закон распределения числа проверенных файлов антивирусной программой.

X	1	2	3	4	5	Зараженных файлов нет
$P(X = k)$	0,1	0,09	0,081	0,073	0,066	$1-(0,1+0,09+0,081+0,073+0,066)=$ $=0,41$

4. Гипергеометрическое распределение.

Пусть группа курсантов состоит из 22 человек, 7 из которых учатся на «отлично». Необходимо выбрать 5 отличников для награждения за отличную учебу. Составить закон распределения выбора пяти отличников.

Гипергеометрическое распределение случайной величины имеет вид:

$$P = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где N — общее количество элементов;

M — количество элементов, обладающих нужным свойством;

n — количество отобранных элементов;

m — количество отобранных элементов, обладающих нужным свойством.

Так, для нашего примера:

Всего	Отобрано
$N = 22$	$n = 5$
$M = 7$	$m = 0..5$

Тогда закон распределения случайной величины:

X	0	1	2	3	4	5	$\sum P$
P	$\frac{C_7^0 \cdot C_{15}^5}{C_{22}^5} \approx$ $\approx 0,114$	$\frac{C_7^1 \cdot C_{15}^4}{C_{22}^5} \approx$ $\approx 0,363$	$\frac{C_7^2 \cdot C_{15}^3}{C_{22}^5} \approx$ $\approx 0,363$	$\frac{C_7^3 \cdot C_{15}^2}{C_{22}^5} \approx$ $\approx 0,139$	$\frac{C_7^4 \cdot C_{15}^1}{C_{22}^5} \approx$ $\approx 0,0199$	$\frac{C_7^5 \cdot C_{15}^0}{C_{22}^5} \approx$ $\approx 0,0008$	1

Математическое ожидание гипергеометрического распределения равно

$$M(X) = \frac{n \cdot M}{N}.$$

Дисперсия

$$D(X) = \frac{m(M/N)(1 - M/N)(N - m)}{N - 1}.$$

5. Распределение Пуассона (распределение числа редких событий) Π_λ .

Пусть в схеме Бернулли число испытаний n велико, а вероятность появления некоторого ожидаемого события A мала. Тогда для нахождения вероятности того, что в n испытаниях событие A появится k раз, справедлива приближенная формула Пуассона

$$P_{k,n} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda = n \cdot p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Данное распределение используют при $npq \leq 10$.

Таблица распределения Пуассона случайной величины $X \sim \Pi_\lambda$ имеет вид:

X	0	1	2	...	k	...
$P_{k,n}$	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$	...

Математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$M(X) = 0 \cdot e^{-\lambda} + 1 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + \dots + k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

так как первое слагаемое равно нулю, то суммирование можно начать с $k = 1$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \left| \begin{array}{l} \text{Замена} \\ m = k-1 \end{array} \right| = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} =$$

учитывая, что $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots = e^\lambda$, далее запишем

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^\lambda = \lambda.$$

Таким образом, параметр $\lambda = n \cdot p$ распределения Пуассона имеет смысл математического ожидания.

Для нахождения дисперсии найдем второй факториальный момент дискретной случайной величины X . Учитывая, что факториальный момент k -го порядка $\mu_{(k)}$ определяется как

$$\mu_{(k)} = M(X^k) = M[X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)],$$

то

$$M(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^\lambda = \lambda^2$$

Так как $M(X^2) = M(X(X-1)) + M(X)$, то $M(X^2) = \lambda^2 + \lambda$.

Тогда дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Коэффициент вариации:

$$v(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (\lambda > 0).$$

Пример. На сервер поступает 1000 однотипных запросов от рабочих станций за время T . Количество запросов, содержащих вирус, составляет 0,3 %. Составить закон распределения. Найти вероятность того, что зараженных вирусом запросов:

- а) ровно два;
- б) менее двух;
- в) более двух;
- г) хотя бы один.

Так как $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0,003 = 3$, то случайная величина распределена по закону Пуассона.

Таблица распределения будет иметь вид:

X	0	1	2	3	...	k	...
$P_{k,n}$	$e^{-3} \approx 0,05$	$3 \cdot e^{-3} \approx 0,149$	$\frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} = \approx 0,224$	$\frac{3^3}{3!} \cdot e^{-3} \approx 0,224$	...	$\frac{3^k}{k!} \cdot e^{-3}$	...

а) Вероятность того, что только два пришедших запроса содержат вирусы, равна:

$$P_{2,1000} = P_{1000}(2) = \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-2} \approx 0,224.$$

б) Вероятность того, что менее двух запросов будут заражены вирусами, определим как:

$$P_{1000}(0) + P_{1000}(1) = 0,05 + 0,149 = 0,199.$$

в) Вероятность того, что более двух запросов будут заражены вирусами, равна:

$$P_{1000}(< 2) = 1 - [P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)] = 1 - [0,05 + 0,149 + 0,224] = 0,577.$$

г) Событие «хотя бы один» является противоположным событию «ни один», тогда:

$$P_1 = 1 - P_{1000}(0) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

1.3.2. Непрерывные распределения

1. Равномерное распределение $U_{a,b}$.

Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, если ее плотность на данном отрезке постоянна и равна нулю вне него ($X \sim U_{a,b}$):

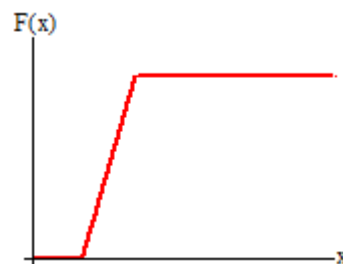
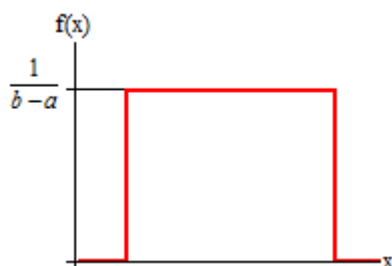
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}.$$

Так как слева плотность распределения ограничена a , то функция случайной величины X равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \cdot t \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

То есть,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}.$$



Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2 \cdot (b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Таким образом, математическое ожидание $X \sim U_{a,b}$ равно середине отрезка $[a, b]$, что можно интерпретировать как «центр тяжести».

Второй начальный момент:

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)} = \frac{b^2 + a \cdot b + a^2}{3}.$$

Тогда дисперсия:

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{a^2 + a \cdot b + b^2}{3} - \left[\frac{a+b}{2} \right]^2 = \\ &= \frac{4a^2 + 4a \cdot b + 4b^2 - 3a^2 - 6a \cdot b - 3b^2}{12} = \frac{a^2 - 2a \cdot b + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Коэффициент вариации:

$$v(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = \frac{\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}}{\frac{b+a}{2}} = \frac{b-a}{\sqrt{3} \cdot (b+a)}.$$

2. Показательное распределение E_λ .

Случайная величина X имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda > 0$ ($X \sim E_\lambda$), если

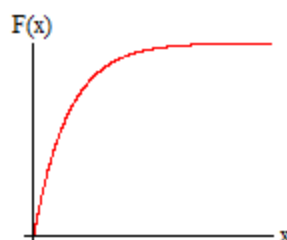
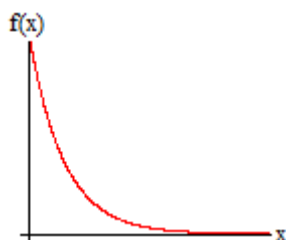
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Так как плотность показательного распределения ограничена слева нулем, то функция распределения:

$$F(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$



Определим первый начальный момент (математическое ожидание):

$$M(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} dx \quad v = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \end{array} \right| =$$

$$= \lambda \cdot \left(-x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \right) = \lambda \cdot \left(-x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{1}{\lambda}.$$

То есть, параметр $\lambda = \frac{1}{M(x)}$.

Так как математическое ожидание представляет собой среднее значение изучаемой величины, то параметр λ характеризует среднее количество за единицу времени и далее определяется как интенсивность.

Найдем второй начальный момент, используя два раза метод интегрирования по частям:

$$M(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Тогда дисперсия показательного распределения:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Здесь наглядно видно, что дисперсия имеет квадрат измерения изучаемой величины.

Коэффициент вариации:

$$v(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = 1.$$

Равенство коэффициента вариации 1 делает показательное распределение отличным от других распределений.

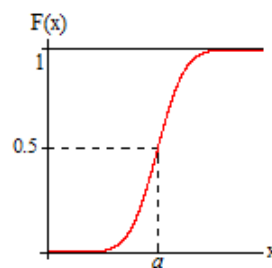
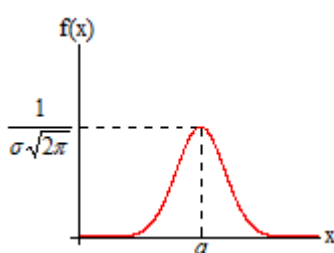
3. Нормальное распределение N_{a, σ^2} .

Случайная X величина распределена по нормальному закону (закону Гаусса) с параметрами a и σ ($X \sim N_{a, \sigma^2}$), если плотность имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Функция распределения произвольного нормального распределения N_{a, σ^2} имеет вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$



Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, то получим стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$ с плотностью

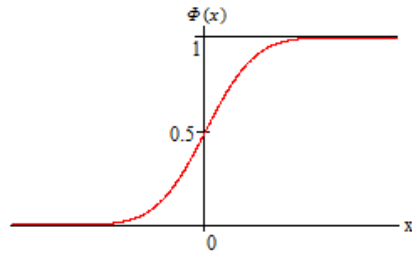
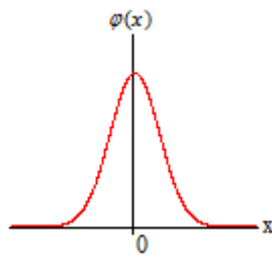
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Данная функция является четной и ее график симметричен относительно оси ординат.

Для $N_{0,1}$ функция распределения имеет вид:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Данная функция называется интегралом Лапласа (интегралом вероятности), для нахождения значений которой составлена таблица (приложение).



Найдем математическое ожидание случайной величины, распределенной по нормальному закону N_{a,σ^2} :

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x-a}{\sqrt{2} \cdot \sigma} \\ x = t\sigma\sqrt{2} + a \\ dx = \sigma\sqrt{2} dt \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t\sigma\sqrt{2} + a) \cdot e^{-t^2} dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2} dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Функция $t \cdot e^{-t^2}$ является нечетной, интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, поэтому

$$\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2} dt = 0.$$

$$\text{Интеграл Эйлера-Пуассона } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Тогда математическое ожидание случайной величины, распределенной по нормальному закону N_{a,σ^2} :

$$M(X) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = a.$$

То есть, параметр a в нормальном распределении случайной величины X соответствует ее математическому ожиданию.

Вычислим дисперсию нормально распределенной случайной величины:

$$\begin{aligned}
 D(X) &= M[(X - M(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left. \begin{aligned} t &= \frac{x-a}{\sqrt{2} \cdot \sigma} \\ (x-a)^2 &= 2\sigma^2 t^2 \\ x &= t\sigma\sqrt{2} + a \\ dx &= \sigma\sqrt{2} dt \end{aligned} \right| = \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot t^2 \cdot e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot 2 \cdot t \cdot e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2} dt^2 = \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[-t \cdot e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \sigma^2.
 \end{aligned}$$

То есть, параметр σ^2 в нормальном распределении соответствует дисперсии случайной величины.

Коэффициент вариации:

$$v(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = \frac{\sigma}{a}.$$

Установим связь между функцией распределения произвольного нормального закона $F(x)$ с интегралом Лапласа $\Phi(x)$.

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left| \frac{t-a}{\sigma} = y \right| = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \sigma \cdot dy = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Пусть $\xi \sim N_{a, \sigma^2}$. Найдем функцию распределения случайной величины $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$:

$$F_{\eta}(x) = P(\eta < x) = P\left(\frac{\xi - a}{\sigma} < x\right) = P(\xi < \sigma x + a) = F_{\xi}(\sigma x + a) = \Phi\left(\frac{\sigma x + a - a}{\sigma}\right) = \Phi(x),$$

т.е. функция распределения случайной величины $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$ равна $\Phi(x)$, следовательно,

$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$.

Таким образом:

1) $F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, где $t_a = \frac{x-a}{\sigma}$ — аргумент интеграла Лапласа.

2) Если случайная величина X имеет нормальное распределение N_{a, σ^2} , то случайная величина $\frac{x-a}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$.

3) Учитывая, что $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$, можно записать

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

Свойства функции распределения $\Phi(x)$:

1. $\Phi(0) = 0,5$. Так как $\Phi(0) = P(X < 0)$, то эта вероятность равна площади, заключенной под кривой Гаусса левее оси ординат, и в силу симметрии плотности распределения относительно оси ординат, делаем вывод, что $\Phi(0) = 0,5$.

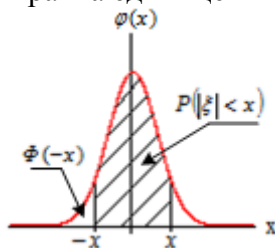


2. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

3. Если $\xi \sim N_{0,1}$, то для любого $x > 0$

$$P(|\xi| < x) = P(-x < \xi < x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 1 - 2\Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Площадь центральной части равна единице минус площади двух «хвостов».



4. Если $\xi \sim N_{a,\sigma^2}$, учитывая, что случайная величина $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$ имеет распределение $N_{0,1}$, то отклонение случайной величины ξ от математического ожидания a меньше, чем на 3σ определим как: $P(|\xi - a| < 3\sigma) = P\left(\left|\frac{\xi - a}{\sigma}\right| < 3\right)$.

$$\text{Тогда } P(|\eta| < 3) = 1 - 2\Phi(-3) = 1 - 2 \cdot 0,00135 = 0,9973.$$

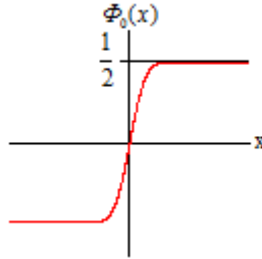
Таким образом, вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания (среднего) на величину меньшую, чем 3σ равна 0,9973, что очень близко к единице. То есть, вероятность попасть в интервал $[-3\sigma, 3\sigma]$ для случайной величины, распределенной по нормальному закону, равна 0,9973.

Данное свойство называется «правило трех сигм».

Замечание.

Наряду с рассмотренной функцией Лапласа под интегралом Лапласа так же понимают следующую функцию:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$



Свойства функции $\Phi_0(x)$:

1. $\Phi_0(0) = 0$. Что очевидно, так как $\Phi_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$.

2. Функция нечетная $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.

$$\Phi_0(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left| \begin{matrix} -t = z \\ dt = -dz \end{matrix} \right| = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\Phi_0(x).$$

3. $\Phi_0(+\infty) = 0,5$.

$$\Phi_0(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} d\frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$

4. Функция $\Phi_0(x)$ и функция $\Phi(x)$ связаны соотношением:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x).$$

5. Пусть $\Phi^*(t_\alpha) = \text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_\alpha} e^{-y^2} dy$ ($|t_\alpha| < \infty$) — **функция ошибок (интеграл**

вероятности). Данный интеграл связан с интегралом Лапласа соотношением

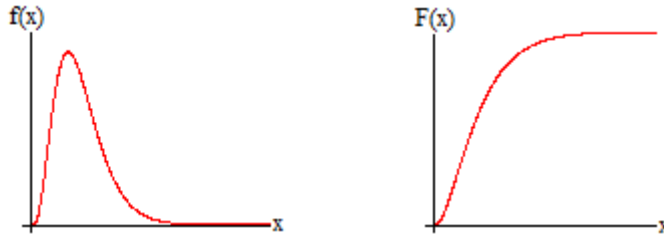
$$\Phi^*(t_\alpha) = 2 \cdot \Phi_0(t_\alpha).$$

4. Гамма-распределение $\Gamma_{\lambda,k}$.

Случайная величина X имеет гамма-распределение с параметрами $\lambda > 0$ и $k > 0$ ($X \sim \Gamma_{\lambda,k}$), если плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases},$$

где $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} \cdot e^{-x} dx$ — гамма-функция Эйлера.



Свойства гамма-функции:

1. $\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k)$, причем $\Gamma(1) = 0! = 1$.

2. $\Gamma(k+1) = k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$.

3. $\Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2k-1)!!}{2^k}$, $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2k-1)$. Так, при $k=5$, получим $(2 \cdot 5 - 1)!! = 9!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ (по нечетным).

Функция распределения гамма-распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^x t^{k-1} \cdot e^{-\lambda t} dt, & x > 0 \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины, имеющей гамма-распределение:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_0^\infty x \cdot \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{matrix} \lambda x = t \\ dx = \frac{1}{\lambda} dt \end{matrix} \right| = \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k \cdot e^{-t} \frac{1}{\lambda} dt = \\ &= \frac{1}{\lambda \cdot \Gamma(k)} \int_0^\infty t^k e^{-t} dt = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda \cdot \Gamma(k)} = \frac{k \cdot \Gamma(k)}{\lambda \cdot \Gamma(k)} = \frac{k}{\lambda}. \end{aligned}$$

Определим второй начальный момент:

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{matrix} \lambda x = t \\ dx = \frac{1}{\lambda} dt \end{matrix} \right| = \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k+1} \cdot e^{-t} \frac{1}{\lambda} dt = \\ &= \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(k)} \int_0^\infty t^{k+1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(k+2)}{\lambda^2 \cdot \Gamma(k)} = \frac{k \cdot (k+1) \cdot \Gamma(k)}{\lambda^2 \cdot \Gamma(k)} = \frac{k \cdot (k+1)}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Тогда дисперсия гамма-распределения:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{k \cdot (k+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 = \frac{k^2 + k - k^2}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Коэффициент вариации:

$$v(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = \frac{\sqrt{\frac{k}{\lambda^2}}}{\frac{k}{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1.$$

При $k=1$ гамма-распределение представляет показательное распределение с параметром λ .

При $k > 1$ гамма-распределение становится распределением Эрланга k -го порядка.

При $k > 10$ гамма-распределение приближается к нормальному.

5. Распределение Эрланга.

Если случайная величина X имеет гамма-распределение и k принимает произвольные целые положительные значения, то получим распределение Эрланга k -го порядка с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^k \cdot (\lambda \cdot x)^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, & x > 0 \end{cases} \quad (\lambda \geq 0, k = 1, 2, \dots).$$

Функция распределения Эрланга k -го порядка:

$$F_k(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}.$$

Значения математического ожидания, дисперсии и коэффициента вариации аналогичны значениям случайной величины, имеющей гамма-распределение.

Так же распределение Эрланга можно трактовать следующим образом: если случайная величина $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ представляет собой сумму n независимых случайных величин, распределенных по показательному закону с параметром λ , и если из данной последовательности выбрать каждую k -ую случайную величину, то полученная последовательность даст новую случайную величину, представляющую сумму k независимых случайных величин с параметром λ , которая имеет распределение Эрланга k -го порядка.

6. Распределение Вейбулла $W_{\lambda,k}$.

В теории надежности для описания усталостных отказов различных материалов, а так же для описания отказов электронных и механических узлов используется распределение Вейбулла (Вейбулла-Гнеденко). Так как понятие надежности связано со временем, то под переменной x будем понимать время t .

Случайная X величина распределена по закону Вейбулла с параметрами λ и k ($X \sim W_{\lambda,k}$), если плотность имеет вид

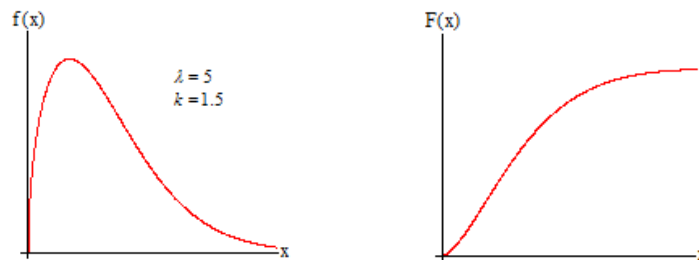
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot k \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x^k}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad (\lambda > 0, k > 0).$$

Функция распределения Вейбулла

$$F(x) = \int_0^x \lambda \cdot k \cdot t^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t^k} dt = - \int_0^x e^{-\lambda \cdot t^k} d(-\lambda \cdot t^k) = -e^{-\lambda \cdot t^k} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda \cdot x^k}.$$

Таким образом

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x^k}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad (\lambda > 0, k > 0).$$

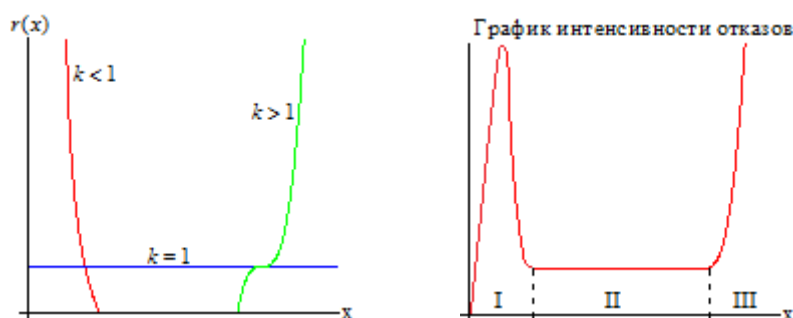


Если распределение отказов элементов некоторого устройства $F(x)$ имеет плотность $f(x)$, то функция интенсивности отказов $r(x)$ (λ характеристика, функция риска) определяется как

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\lambda \cdot k \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x^k}}{1 - (1 - e^{-\lambda \cdot x^k})} = \lambda \cdot k \cdot x^{k-1}.$$

Функция интенсивности отказов имеет следующий вероятностный смысл: $r(x)dx$ есть вероятность того, что некое устройство, проработавшее в течении x , откажет в интервале $[x, x + dx]$.

Функции интенсивности отказов называют U -образными.



Все периоды эксплуатации устройства можно описать семейством распределений Вейбулла.

I — период приработки устройства. В данный период происходит повышенное число отказов из-за производственных недостатков и выхода из строя элементов со скрытыми дефектами.

II — период нормальной эксплуатации устройства.

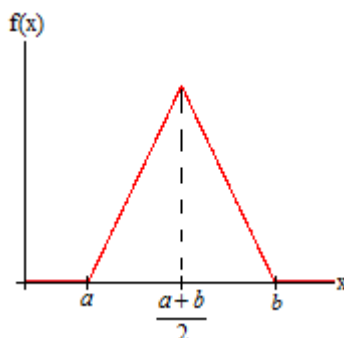
III — период износа устройства и как следствие массовые отказы при эксплуатации.

7. Треугольное распределение (распределение Симпсона).

Если X_1 и X_2 независимые одинаково равномерно распределенные случайные величины на отрезке $[a/2, b/2]$, то случайная величина $X = X_1 + X_2$ имеет треугольное распределение.

Случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[a, b]$ ($a < b$), если плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ \frac{2}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} \cdot |a+b-2 \cdot x|, & x \in [a, b] \end{cases}$$



Математическое ожидание и дисперсия треугольного распределения определяются как

$$M(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{24}.$$

Треугольное распределение характеризуется минимальным, максимальным и средним значениями исследуемой случайной величины и, как правило, задается в виде $\bar{x} \pm \Delta x$. Например: процессор обрабатывает пакет данных $7 \pm 0,5$ мс.

Распределение Симпсона применяется при моделировании случайных величин, в отношении которых нет возможности выдвинуть гипотезу об ином распределении в силу различных причин (малая выборка, не изученное явление и т.п.).

8. Специальные распределения.

8.1. Распределение χ^2 .

Если X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) нормально распределенные независимые величины с $M(X_i) = 0$ и $\sigma(X_i) = 1$, то сумма квадратов этих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

имеет распределение χ^2 («хи квадрат») с $k = n$ степенями свободы (если $\sum X_i = n \cdot \bar{x}$, то $k = n - 1$) с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k}{2}-1}, & x > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} \cdot e^{-x} dx$ — гамма-функция Эйлера.

Распределение χ^2 определяется одним параметром — числом степеней свободы k .

8.2. Распределение Стьюдента.

Если случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение ($M(X) = 0$ и $\sigma(X) = 1$), а Y — независимая от X величина, распределенная по закону χ^2 с k степенями свободы, то величина

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/k}}$$

имеет t распределение Стьюдента (В. Госсет).

8.3. F распределение Фишера-Снедекора.

Если U и V независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2 , то величина

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

имеет распределение F Фишера-Снедекора, с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ C_0 \frac{x^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2 + k_1 \cdot x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & x \geq 0 \end{cases},$$

где

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) \cdot k_1^{\frac{k_1}{2}} \cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}.$$

Распределение Фишера-Снедекора определяется только параметрами k_1 и k_2 .

1.4. Определение закона распределения случайной величины на основе опытных данных

Пусть в результате нескольких прогонов модели получена некоторая генеральная совокупность. Из данной совокупности извлечена выборка, причем значение x_1 наблюдалась m_1 раз, x_2 – m_2 раз и т.д. $\sum_{i=1}^k m_i = n$ – объем выборки. Если записать значения выборки в возрастающем (убывающем) порядке, то получим вариационный ряд.

Для дискретной случайной величины можем составить таблицу.

Значения	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_k
Эмпирические частоты	m_1	m_2	m_3	m_4	...	m_k
Относительные частоты w_i	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_2}{n}$	$\frac{m_3}{n}$	$\frac{m_4}{n}$	...	$\frac{m_k}{n}$
Накопленные частоты	0	m_1	$m_1 + m_2$	$m_1 + m_2 + m_3$	...	$\sum_{i=1}^k m_i = n$
Накопленные относительные частоты	0	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_1 + m_2}{n}$	$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{n}$	...	1

Если выборка задана в виде интервального вариационного ряда, то вместо значений случайной величины запишем интервалы.

Интервалы	$[t_1, t_2)$	$[t_2, t_3)$	$[t_3, t_4)$	$[t_4, t_5)$	...	$[t_k, t_{k+1})$
Эмпирические частоты	m_1	m_2	m_3	m_4	...	m_k
Относительные частоты w_i	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_2}{n}$	$\frac{m_3}{n}$	$\frac{m_4}{n}$	...	$\frac{m_k}{n}$
Накопленные частоты	0	m_1	$m_1 + m_2$	$m_1 + m_2 + m_3$	...	$\sum_{i=1}^k m_i = n$
Накопленные относительные частоты	0	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_1 + m_2}{n}$	$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{n}$	...	1

Для построения интервального вариационного ряда из выборки применяют следующий алгоритм:

1. По формуле Стерджеса определяют количество интервалов

$$k = 1 + [\log_2 n] = 1 + [3,322 \cdot \lg n].$$

2. Определяют ширину каждого интервала

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Накопленные относительные частоты позволяют построить эмпирическую функцию распределения $F_n(X)$ (функцию распределения выборки).

Далее строится гистограмма частот и делается предположение о виде распределения случайной величины.

Нулевая (проверяемая) гипотеза H_0 — выдвинутая гипотеза. Тогда, **конкурирующая (альтернативная) гипотеза** H_1 — гипотеза, противоречащая нулевой.

При проверке статистических гипотез проверяют согласованность данных выборки с предлагаемой гипотезой. При этом могут произойти ошибки.

Ошибка первого рода — отвергается верная гипотеза.

Ошибка второго рода — принимается ложная гипотеза.

Пусть выборка обладает следующими параметрами: $M(X) = a$ и $D(X) = \sigma^2$. В качестве оценок для a и σ^2 определим:

$$- \text{выборочную среднюю } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i ;$$

$$- \text{несмещенную выборочную дисперсию } s_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i .$$

При проверке гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения применяют критерии согласия: χ^2 -критерий Пирсона, λ -критерий Колмогорова и другие.

λ - критерий Колмогорова.

Данный критерий применяется для проверки гипотезы о распределении непрерывной случайной величины путем сравнения эмпирических $F_n(X)$ (характеризует относительную частоту события $X < x$) и предполагаемых $F(X)$ (характеризует относительную вероятность события $X < x$) значений функций распределения. Для данного критерия параметры закона распределения $F(X)$ считаются известными.

Алгоритм проверки:

1. Производится выборка ($n \geq 50$).
2. Определяются накопленные относительные частоты — эмпирическая функция распределения $F_n(X)$.
3. Так как параметры закона распределения $F(X)$ известны, то для каждого значения x_i рассчитываются $F(x_i)$.
4. Вычисляется статистика $\lambda = \sqrt{n} \cdot \max_{x_i} |F(x_i) - F_n(x_i)|$.
5. По уровню значимости α определяется критическое значение статистики $\lambda_{кр}$.
6. Если $\lambda < \lambda_{кр}$, то различия между эмпирическим и предполагаемым распределением несущественны. В противном случае, различия значимы и выдвинутая гипотеза отвергается.

χ^2 - критерий Пирсона.

Алгоритм проверки:

1. Производится выборка ($n \geq 30$).
2. При построении интервального вариационного ряда необходимо, чтобы в каждом интервале было, по крайней мере, 5 наблюдений изучаемой случайной величины. Если в интервале число наблюдений меньше пяти, то необходимо объединить соседние интервалы, чтобы объединенные интервалы содержали не менее пяти значений наблюдаемой случайной величины.
3. Определяются эмпирические частоты m_i .
4. Строится гистограмма и выдвигается гипотеза о предполагаемом законе распределения случайной величины.
5. Определяются параметры предполагаемого распределения: выборочное среднее и несмещенная выборочная дисперсия.
6. Рассчитываются теоретические частоты $n \cdot p_i$,

где n — объем выборки;

p_i — вероятность появления наблюдаемого значения x_i (для дискретной случайной величины) или вероятность попадания случайной величины в i -й интервал (для непрерывной случайной величины), рассчитанная при условии, что данная случайная величина подчинена предполагаемому закону распределения.

Для расчета теоретических частот в среде Mathcad применяются следующие функции:

- $X \sim U_{a,b}$: $\text{punif}(t_{i+1}, a, b) - \text{punif}(t_i, a, b)$;
- $X \sim E_\lambda$: $p \exp(t_{i+1}, 1/\bar{x}) - p \exp(t_i, 1/\bar{x})$;
- $X \sim N_{a, \sigma^2}$: $\text{pnorm}(t_{i+1}, \bar{x}, s_0^2) - \text{pnorm}(t_i, \bar{x}, s_0^2)$;
- и другие.

7. Вычисляется статистика

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = n \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\left(\frac{m_i}{n} - p_i \right)^2}{p_i}.$$

8. Определяется количество степеней свободы

$$r = k - m - 1,$$

где k — число значений или интервалов вариационного ряда;

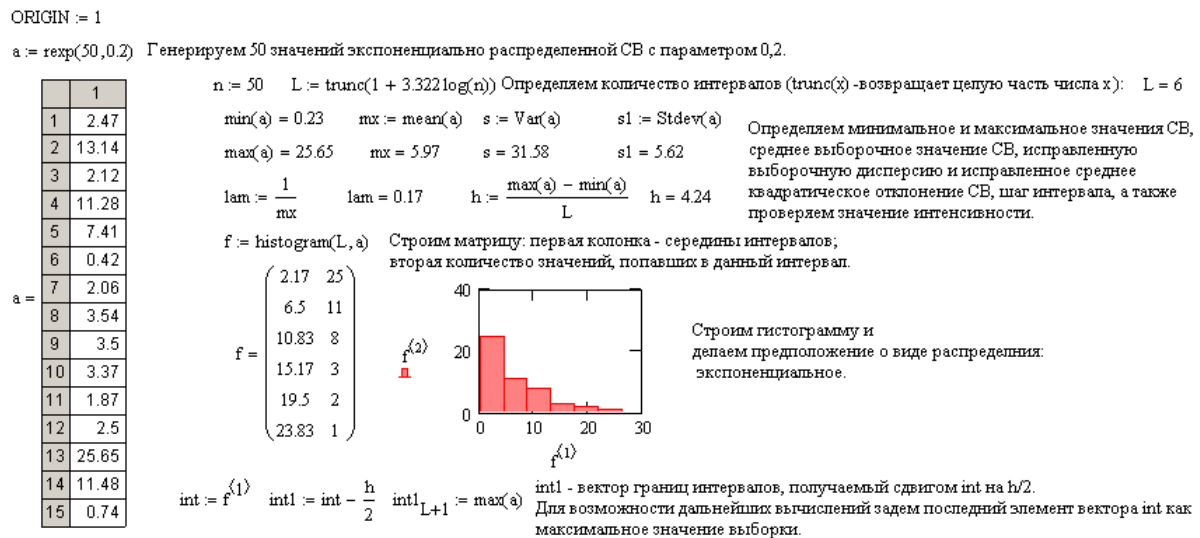
m — число параметров предполагаемого распределения, оцененных по данным выборки.

9. По уровню значимости α и числу степеней свободы определяется критическое значение статистики $\chi^2_{кр}(\alpha, r)$.

10. Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha, r)$, то нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу. В противном случае нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1.1.

В Mathcad сгенерируем 50 значений экспоненциально распределенной случайной величины с параметром 0,2. С помощью критерия χ^2 Пирсона проверим согласованность полученных значений с экспоненциальным законом распределения случайной величины с вероятностью ошибки 0,01.



С помощью сдвига значений вектора int1 на $h/2$ получаем вектор начальных значений t_i интервалов $[t_i, t_{i+1})$.

Так как для полученных значений случайной величины определено 6 интервалов для объединения данных, а для определения эмпирических частот необходимо 7 значений вектора int1 , то седьмое значение данного вектора определим как максимальной значение матрицы a (выборки).

$$i := 1..L$$

$$p_i := \text{rexp}(\text{int1}_{i+1}, \text{lam}) - \text{rexp}(\text{int1}_i, \text{lam})$$

Определяем теоретические частоты.

$$\text{hi1} := \sum_{i=1}^L \frac{[f^{(2)}_i - n p_i]^2}{n p_i}$$

Вычисляем статистику χ^2 .

$$\text{hi2} := \text{qchisq}(0.99, L - 1 - 1)$$

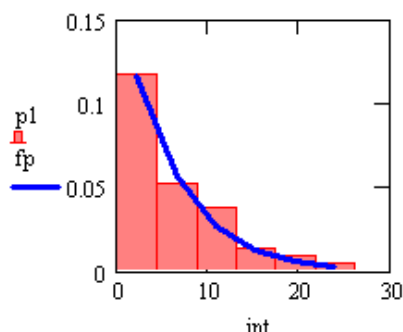
Находим χ^2 критический.

$$w := \text{if}(\text{hi1} < \text{hi2}, \text{"Принимаем"}, \text{"Отвергаем"})$$

$$w = \text{"Принимаем"}$$

Нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу.

$p1 := \frac{f^{(2)}}{n \cdot h}$ $fp := \text{dexp}(\text{int}, \text{lam})$ Определяем эмпирические частоты и эмпирическую плотность для построения гистограммы и графика плотности распределения экспоненциальной СВ.



Проведем аналогичную проверку, но теперь учтем, что при построении интервального вариационного ряда в каждом интервале должно быть не менее 5 значений наблюдаемой величины.

Заметим, что при объединении соседних интервалов произойдет увеличение значения дисперсии, а также уменьшение числа интервалов, что повлечет уменьшение критического значения критерия.

$\text{lower} := \text{floor}(\min(a))$ $\text{upper} := \text{floor}(\max(a)) + 1$ Определяем границы области выборочных данных, заданных матрицей a .
 $\text{lower} = 0$ $\text{upper} = 26$ Оператор floor округляет до целого числа.

$k := \text{upper} - \text{lower}$ Задаем число интервалов группировки.
 $k = 26$

$i := 1..k$ Формируем таблицу частот:
 $v_{i,1} := \text{lower} + i$ в 1-й строке начало i -го интервала;
 $v_{i,2} := \text{lower} + (i + 1)$ во 2-й - конец i -го интервала;
 $I(i, y) := y < v_{i,2} \wedge y \geq v_{i,1}$ в 3-й - количество попаданий случайной величины в этот интервал.

$$v_{i,3} := \sum_{j=1}^n I(i, a_j)$$

$$v^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
3	8	6	6	5	2	4	1	4	2	2	2	2	0	2	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0

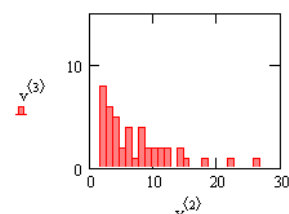
$z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 11 & 27 \\ 8 & 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ Формируем новую таблицу частот, в которой объединены интервалы, количество попаданий в которые незначительно (менее 5).

$z := z^T$ $L := \text{rows}(z)$ $L = 7$

$Mx := \frac{1}{n} \cdot \sum a$ $Mx = 5.97$ $\text{lam} := \frac{1}{Mx}$ $\text{lam} = 0.17$ Определяем параметры распределения.

$i := 1..L$ $q_i := \frac{z_{i,3}}{n}$ Определяем эмпирические частоты.

Строим гистограмму и делаем предположение о виде распределения: экспоненциальное.



$$q^T = (0.16 \ 0.12 \ 0.1 \ 0.12 \ 0.1 \ 0.12 \ 0.12)$$

$$p := \text{rexp}(z^{(2)}, \text{lam}) - \text{rexp}(z^{(1)}, \text{lam}) \quad \text{Определяем теоретические частоты.}$$

$$hi1 := n \cdot \sum_{i=1}^L \frac{(q_i - p_i)^2}{p_i} \quad hi1 = 1.03 \quad \text{Вычисляем статистику } \chi^2.$$

$$hi2 := \text{qchisq}(0.99, L - 1 - 1) \quad hi2 = 15.09 \quad \text{Находим } \chi^2 \text{ критический.}$$

$$w := \text{if}(hi1 < hi2, \text{"Принимаем"}, \text{"Отвергаем"})$$

$$w = \text{"Принимаем"} \quad \text{Нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу.}$$

Построим график эмпирической плотности распределения (синяя кривая) с параметрами, рассчитанными при обработке сгенерированных значений (выборки). Для сравнения построим график плотности экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 0,2$.

$$p(t) := \text{lam} \cdot e^{-\text{lam} \cdot t}$$

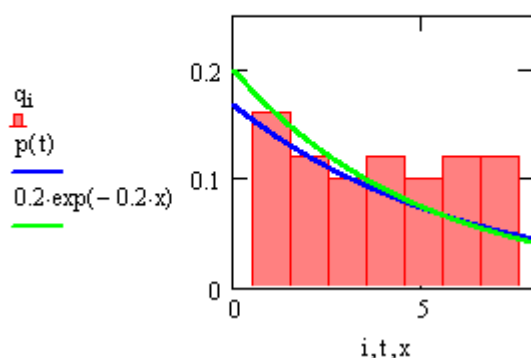


График эмпирической плотности распределения (синяя кривая) построен по рассчитанным значениям интенсивности.

Необходимо отметить, что при разыгрывании 50 значений любого распределения случайной величины, проверка согласованности полученных данных с законом распределения не всегда приносит «положительный» результат. Это обусловлено малым количеством значений разыгрываемой случайной величины.

Задача 1.1. По данным выборки выдвинуть гипотезу о виде распределения случайной величины и проверить данную гипотезу при уровне значимости (совершить ошибку первого рода) $\alpha = 0,05$.

1.	1.61; 1.83; 2.12; 11.6; 15.01; 3.84; 1.59; 1.93; 4.94; 14.98; 8.87; 5.85; 7.74; 3.62; 4.11; 2.5; 4.57; 0.86; 2.36; 14.64; 0.73; 5.91; 18.11; 4.69; 17.36; 0.77; 4.56; 2.46; 0.67; 2.6; 1.16; 2.63; 2.82; 1.98; 22.91; 5.37; 1.3; 0.7; 1.6; 0.56; 3.12; 1.24; 8.11; 1.13; 0.82; 2.32; 2.42; 6.92; 1.19; 1.69
2.	24.19; 22.37; 19.32; 27.55; 26.58; 25.29; 22.99; 23.15; 23.24; 25.56; 24.2; 27.6; 22.24; 25.76; 25.88; 28.52; 23.71; 26.1; 28.09; 21.36; 27.62; 22.9; 25.92; 22.9; 22.52; 25.85; 21.17; 24.75; 25.83; 27.93; 22.54; 24.23; 25.95; 25.37; 25.39; 26.04; 26.65; 26.86; 26.79; 25.52; 23.61; 25.93; 24.7; 23.27; 29.23; 22.53; 21.61; 25.77; 22.14; 24.18

3.	2.01; 2.97; 4.93; 3.75; 6.11; 2.87; 5.55; 3.52; 2.46; 2.74; 6.94; 2.6; 2.04; 4.66; 5.01; 2.83; 4.25; 2.29; 5.92; 4.6; 6.38; 6.78; 4.7; 4.31; 6.31; 5.9; 6.98; 5.06; 3.33; 6.2; 3.88; 5.39; 2.04; 3.38; 4.94; 6.19; 4.42; 5.72; 4.29; 5.72; 5; 5.68; 4.86; 2.76; 4.13; 4.59; 5.76; 2.84; 4.46; 5.5
4.	0.11; 0.59; 0.5; 4.99; 9.77; 0.72; 0.26; 0.66; 1.15; 0.96; 1.73; 3.31; 1.09; 3.33; 1.94; 2.61; 1.85; 2.27; 8.97; 1.29; 2.1; 2.4; 11.49; 0.36; 0.89; 1.27; 1.45; 2.43; 0.16; 0.09; 1.34; 2.25; 1.74; 0.33; 0.62; 1.33; 3.19; 0.34; 3; 0.36; 4.14; 0.29; 8.87; 7.06; 3.4; 5.38; 1.76; 7.53; 2.71; 1.66
5.	10.06; 9.18; 9.95; 9.75; 10.02; 11.79; 9.93; 9.53; 11.04; 11.39; 8.53; 11.29; 8.83; 8.6; 9.48; 9.82; 10.64; 9.79; 8.42; 9.98; 10.37; 10.78; 11.62; 9.39; 10.14; 8.81; 7.4; 11.51; 9.55; 8.2; 8.36; 10.23; 10.52; 9.09; 11.64; 10.6; 11.3; 10.48; 8.73; 10.99; 8.83; 9.97; 9.68; 9.04; 8.31; 10.35; 10.64; 9.78; 10.92; 9.95
6.	3.89; 3.85; 7.16; 5.56; 8.8; 3.92; 7.93; 4.15; 7.9; 3.93; 7.39; 4.68; 7.09; 7.33; 3.74; 8.01; 6.1; 5.56; 8.7; 6.3; 5.83; 8.08; 5.74; 8.9; 7.44; 4.18; 8.04; 6.01; 3.16; 6.44; 6.19; 8.06; 6.95; 8.05; 3.66; 4.88; 4.72; 3.84; 8.01; 6.6; 4.52; 3.01; 7.84; 4.26; 6.32; 3.68; 7.51; 6.26; 5.62; 7.18
7.	2.76; 1.35; 0.02; 4.21; 0.69; 2.44; 1.29; 1.32; 0.37; 4.53; 0.11; 1.49; 0.17; 2.01; 0.83; 1.36; 2.55; 0.47; 0.31; 1.54; 1.63; 1.94; 1.17; 0.36; 9.27; 6.41; 2.73; 0.69; 4.03; 0.31; 3.04; 2.32; 1; 0.09; 1.9; 2.88; 1.05; 8.2; 0.17; 2.99; 0.07; 1.83; 2.19; 0.94; 2.48; 0.21; 2.23; 1.55; 1.77; 4.22
8.	5.3; 4.87; 4.99; 5.28; 5.4; 4.98; 4.84; 4.96; 5.48; 4.48; 5.46; 4.84; 4.93; 6.31; 4.96; 5.3; 5.83; 5.43; 4.56; 5; 5.55; 4.92; 5.93; 5.08; 4.28; 5.78; 3.84; 5.06; 4.05; 5.26; 5.19; 5.4; 4.54; 4.68; 4.72; 5.16; 6.06; 4.37; 5.5; 5.09; 5.9; 4.94; 4.18; 5.34; 4.92; 5.75; 5.12; 5.42; 4.93; 4.56
9.	12.58; 12.58; 13.67; 5.5; 4.98; 13.37; 12.98; 2.53; 4.39; 7.84; 13.63; 9.1; 8.79; 14.99; 13.28; 3.91; 5.7; 14.66; 11.32; 10.39; 11.57; 3.62; 6.88; 13.9; 2.42; 7.84; 4.97; 4.04; 8.52; 11.81; 4.78; 12.03; 9.24; 13.08; 9.01; 13.3; 4.96; 6.82; 2.45; 7.17; 6.22; 4.62; 3.63; 13.62; 4.89; 9.28; 7.51; 13.23; 5.48; 10.86
10.	1.97; 0.77; 1.96; 2.81; 0.87; 2.23; 1.04; 3.34; 0.01; 0.43; 0.97; 0.84; 0.58; 3.59; 0.72; 0.9; 0.01; 0.44; 0.41; 1.05; 0.8; 0.19; 2.35; 0.6; 0.85; 4.47; 0.51; 2.74; 0.5; 1.11; 1.37; 1.06; 4.2; 0.06; 2.39; 0.2; 2.53; 0.84; 0.02; 2.88; 3.41; 0.58; 1.76; 2.67; 0.24; 0.2; 0.68; 4.91; 0.71; 1.29
11.	18.07; 19.53; 20.64; 23.71; 20.24; 20.79; 22.45; 19.17; 20.27; 22.17; 16.92; 18.45; 16.09; 23.67; 22.55; 21.04; 18.96; 22.28; 20.05; 23.59; 22.91; 17.5; 15.37; 20.5; 17.96; 22.99; 19.16; 18.1; 20.19; 19.39; 21.43; 21.87; 19.14; 20.15; 21.97; 20.96; 18.38; 24.52; 20.48; 19.14; 20.86; 17.13; 22.28; 14.72; 18.29; 26.31; 23.3; 20.8; 18.76; 21.89
12.	24.09; 20.34; 21; 5.99; 3.44; 19.46; 22.85; 19.89; 16.88; 18.01; 14.01; 8.85; 17.23; 8.8; 13.12; 10.74; 13.48; 11.89; 3.61; 16.13; 12.51; 11.43; 3.22; 22.03; 18.39; 16.25; 15.31; 11.32; 23.62; 24.21; 15.85; 11.95; 13.97; 22.24; 20.19; 15.95; 9.14; 22.14; 9.63; 22.06; 7.2; 22.59; 3.63; 4.3; 8.65; 5.55; 13.89; 4.08; 10.48; 14.34
13.	0.78; 0.12; 1.63; 0.38; 0.37; 1.33; 0.27; 0.05; 0.25; 3.43; 2.9; 0.35; 0.42; 0.34; 0.67; 1.86; 0.04; 0.05; 0.72; 0.34; 0.76; 1.94; 0.42; 1.53; 0.3; 1.22; 1.91; 0.03; 0.43; 3.85; 1.27; 4.75; 1.63; 1.17; 0.05; 0.87; 0.63; 1.44; 0.94; 2.08; 0.23; 0.27; 1.84; 2.98; 0.83; 0.7; 0; 1.34; 0.83; 2.08
14.	13.44; 12.55; 8.08; 10.46; 10.21; 10.14; 16.02; 7.93; 10.9; 12.82; 8.27; 10.74; 7.13; 11.51; 10.88; 12.2; 10.26; 12.98; 10.59; 10.32; 11.72; 13.48; 11.75; 11.32; 9.14; 10.39; 12.78; 8.67; 10.78; 10.69; 15.36; 8.44; 11.19; 11.47; 12.84; 13.94; 6.9; 10.79; 12.21; 7.69; 8.9; 10.53; 6.05; 9.77; 12.06; 11.02; 10.66; 13.75; 7.89; 9.2

15.	16.43; 23.04; 18.65; 35.3; 31.22; 30.06; 32.45; 34.87; 35.02; 6.47; 18.55; 2.93; 17.92; 6.76; 9.45; 29.9; 25.05; 29.35; 31.47; 19.46; 4.65; 14.47; 16.34; 12.43; 28.07; 4.04; 14.56; 7.56; 6.61; 8.35; 10.72; 14.14; 25.27; 34.64; 5.68; 21.53; 33.33; 32.53; 15.59; 25.52; 11.85; 36.37; 22.82; 6.62; 23.02; 14.44; 18.75; 35.18; 36.39; 19.97
16.	0; 0.01; 0.15; 0.12; 0.2; 0.83; 0.5; 0.16; 1.12; 1.47; 0.56; 0.35; 0.04; 0.14; 0.29; 0.77; 0.05; 0.01; 0.06; 1.53; 1.55; 0.1; 0.06; 0.55; 0.54; 0.65; 0.41; 0.44; 1.42; 0.55; 0.04; 1.24; 0.13; 0.12; 0.05; 0.21; 0.05; 0.28; 0.18; 0.22; 2.06; 0.11; 0.71; 1.27; 0.27; 0.5; 0.08; 0.38; 0.31; 0.8
17.	2.65; 2.31; 1.82; 0.87; 2.99; 2.44; 1.21; 1.46; 2; 1.89; 2.05; 1.76; 2.36; 1.9; 1.82; 2.13; 2.24; 1.92; 1.6; 2.23; 1.96; 1.86; 3.06; 2.54; 2.22; 1.39; 2.07; 1.66; 2.1; 2.09; 1.08; 2.49; 2.45; 0.92; 1.7; 1.75; 0.81; 2.05; 1.73; 2.42; 3.02; 1.78; 2.56; 2.56; 3.15; 1.52; 1.35; 2.1; 1.39; 2.23
18.	8.35; 7.02; 27.82; 20.67; 26.52; 26.04; 32.9; 34.61; 37.64; 29.13; 16.47; 33.69; 29.77; 11.48; 31.21; 23.28; 7.47; 17.9; 9.16; 11.69; 11.1; 28.14; 26.16; 14.86; 14.54; 8.87; 12.95; 11.5; 25.49; 23.98; 28.64; 28.71; 28.22; 7.55; 16.71; 34.11; 20.83; 27.18; 15.59; 30.51; 3.02; 29.93; 31.59; 29.06; 22.39; 6.66; 6.48; 8.83; 27.15; 34.98
19.	0.2; 0.22; 0.06; 0.14; 0.15; 0.09; 0.03; 0.08; 0.14; 0.08; 0.08; 0.16; 0.08; 0.5; 0.47; 0.11; 0.04; 0.59; 0.63; 0.1; 0.35; 0.28; 0.04; 0.41; 0.09; 0.21; 0.23; 0.08; 0.1; 0.25; 0.12; 0.38; 0.11; 0.01; 0.31; 0.49; 0.2; 0.03; 0.12; 0.25; 0.07; 0.03; 0.02; 0.3; 0.03; 0.26; 0.43; 0.47; 0.13; 0.05
20.	1.73; 1.4; 1.46; 1.74; 0.62; 1.1; 1.71; 2.12; 1.7; 1.89; 1.28; 1.61; 1.52; 1.29; 1.6; 1.27; 1.25; 1.7; 2.04; 1.24; 1.76; 2.01; 1.57; 1.15; 1.5; 1.91; 2.82; 1.11; 2.16; 0.33; 1.95; 2.35; 0.92; 1.73; 1.85; 1.17; 1.15; 0.58; 1.04; 0.75; 1.87; 1.61; 1.25; 1.38; 0.9; 1.87; 1.32; 2.38; 0.64; 1.42
21.	4.2; 1.22; 5.27; 3.67; 5.71; 2.77; 6.99; 6.66; 4.6; 1.45; 3.48; 0.82; 5.33; 4.73; 2.02; 6.96; 6.31; 6.3; 4.5; 5.25; 5.42; 3.13; 5.16; 6.26; 3.07; 3.67; 5.45; 2.68; 2.84; 1.03; 6.98; 3.08; 3.2; 2.25; 1.96; 4.67; 6.21; 3.18; 6.77; 2.72; 4.42; 6.31; 2.03; 3.96; 4.19; 3.82; 6.81; 5.07; 1.17; 3.53
22.	0.18; 0.09; 0.13; 0.02; 0.04; 0.06; 0.11; 0.37; 0.11; 0.16; 0.04; 0.12; 0.02; 0.02; 0.3; 0.07; 0.34; 0.35; 0.24; 0.08; 0.17; 0.22; 0.05; 0.1; 0.67; 0.24; 0.09; 0.04; 0.04; 0.04; 0.25; 0.29; 0.09; 0.22; 0.31; 0.01; 0.02; 0.06; 0.08; 0.1; 0.09; 0; 0.01; 0.07; 0.08; 0.12; 0.46; 0.23; 0.07; 0.03
23.	14.19; 15.95; 14.67; 14.81; 14.04; 16.28; 14.26; 13.64; 15.27; 14.4; 14.88; 15.53; 15.47; 16.51; 13.73; 13.72; 15.78; 16.37; 16.58; 14.53; 15.6; 14.02; 15.77; 13.89; 14.38; 14.62; 13.82; 13.87; 14.93; 14.32; 13.62; 15.6; 15.11; 13.75; 15.45; 14.42; 15.65; 14.47; 16.85; 16.3; 14.54; 14.38; 15.86; 14.91; 15.09; 15.67; 16.23; 15.35; 14.83; 13.2
24.	2.75; 3.08; 6.2; 2.52; 7.28; 6.25; 5.89; 5.81; 2.86; 6.81; 6.94; 3.26; 5.37; 3.38; 6.67; 6.79; 7.41; 6.04; 6.58; 7.37; 4.07; 3.53; 7.24; 3.75; 6.83; 3.53; 6.27; 4.37; 5.65; 6.18; 4.44; 7.4; 4.14; 5.64; 4.95; 3.84; 2.83; 4.77; 5.73; 3.83; 5.62; 3.01; 4.99; 6.02; 4.36; 7.31; 4.77; 5.1; 6.45; 6.19
25.	0; 0.01; 0.04; 0.05; 0.04; 0.01; 0.41; 0.16; 0.57; 0.04; 0.01; 0.22; 0.03; 0.03; 0.21; 0.14; 0.24; 0.19; 0.05; 0.04; 0.03; 0.3; 0.07; 0.13; 0.08; 0.08; 0.05; 0.01; 0.16; 0.01; 0.08; 0.21; 0.09; 0.04; 0.33; 0.15; 0.16; 0.07; 0.21; 0.02; 0.04; 0.37; 0.12; 0.03; 0.02; 0; 0.06; 0.03; 0.08; 0.04
26.	22.56; 22.04; 11.23; 0; 12.53; 1.94; 0.43; 11.4; 5.38; 6.5; 16.9; 18.85; 8.52; 0; 5.01; 7.21; 2.32; 12.57; 14.19; 12.08; 21.58; 3.25; 24.98; 4.64; 15.17; 0; 5.6; 16.98; 1.85; 6.86; 17.96; 21.73; 14.59; 12.19; 17.36; 3.44; 10.42; 13.32; 3.97; 10.72; 20.22; 24.64; 18.21; 1.29; 15.13; 0; 10.7; 11.05; 13.92; 7.74

27.	12.96; 13.26; 13.03; 16.98; 18.75; 20.39; 9.94; 8.81; 8.02; 16.86; 3.16; 9.55; 10.46; 12.8; 13.52; 9.13; 19.21; 17.43; 20.02; 5.75; 11.76; 17.68; 15.12; 9.53; 20.67; 6.81; 14.93; 20.06; 7.16; 5.85; 5.23; 15.72; 12.58; 20.93; 13.37; 11.98; 17.82; 12.47; 2.1; 17.53; 4.49; 9.25; 3.24; 2.31; 9.03; 6.37; 16.18; 10.35; 17.71; 8.08
28.	0.13; 0.35; 0.04; 1.21; 0.25; 0.16; 0.09; 0.5; 0.39; 0.08; 0.31; 0.19; 0.18; 0.57; 0.04; 0.19; 0.01; 1.11; 0.71; 0.01; 0.47; 1.13; 0.17; 0.14; 0.06; 0.17; 0.16; 0.47; 0.06; 0.1; 0.47; 0.47; 0.07; 0.16; 0.09; 0.04; 0.78; 0.16; 0.01; 0.17; 0.1; 0.72; 0.07; 1.66; 0.58; 0.05; 0.03; 0.13; 0.31; 1.46
29.	11.89; 8.54; 11.59; 13.12; 9.27; 14.36; 15.11; 11.85; 18.31; 8.14; 12.88; 10.56; 10.46; 12.94; 8.64; 14.21; 10.87; 12.39; 8.38; 10.01; 7.53; 9.97; 12.9; 11.88; 11.42; 12.04; 9.85; 10.79; 8.11; 9.32; 4.83; 10.5; 11.31; 13.13; 7.33; 15.61; 10.72; 8.44; 4.58; 10.17; 11.15; 8.04; 14.89; 10.08; 10.09; 13.64; 15.61; 13.3; 9.3; 6.53
30.	11; 7.25; 12.37; 16.4; 5.89; 15.16; 13.63; 14.48; 5.54; 16.25; 6.64; 6.57; 13.89; 16.4; 12.24; 9.5; 9.13; 13.97; 13; 10.48; 5.09; 6.37; 12.08; 16.73; 16.75; 4.72; 9.38; 9.17; 7.93; 4.68; 11.75; 8.34; 15.99; 4.33; 12.26; 5.35; 11.79; 4.27; 16.72; 4.98; 14.67; 15.75; 13.23; 11.99; 7.6; 12; 14.9; 12.39; 16.47; 4.67

1.5. Предельные теоремы теории вероятностей

1.5.1. Неравенства Чебышева

Неравенство Маркова.

Индикатором события A назовем такую случайную величину $I(A)$, что

$$I(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ произошло;} \\ 0, & \text{если } A \text{ не произошло.} \end{cases}$$

Получили **схему Бернулли**.

Пусть в результате события A оценивается параметр X . Тогда можно записать

$$|X| = |X| \cdot I(|X| < x) + |X| \cdot I(|X| \geq x) \geq |X| \cdot I(|X| \geq x) \geq x \cdot I(|X| \geq x),$$

т. е. оценку параметра X определим как математическое ожидание дискретной случайной величины, которое, в свою очередь, больше, чем любое из двух слагаемых. Так как ожидаемое событие заключается в попадании случайной величины внутрь интервала $[-x, x]$, то можно записать, что математическое ожидание будет больше, чем $|X| \cdot I(|X| \geq x)$. А так как рассматривается интервал $|X| \geq x$, то $|X|$ заменим x .

Тогда, учитывая, что в схеме испытаний Бернулли математическое ожидание равно вероятности появления события,

$$M(|X|) \geq M(x \cdot I(|X| \geq x)) = x \cdot P(|X| \geq x).$$

Разделив последнее выражение на x , получим неравенство Маркова

$$P(|X| \geq x) \leq \frac{M(|X|)}{x}.$$

Неравенство Чебышева.

Пусть в результате исследования некой модели для определения параметра получена его оценка $M(x)$. В силу случайных причин $M(x)$ будет несколько отличаться от X .

Оценим вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания превысит некоторое положительное x , т. е. $P(|X - M(X)| \geq x)$ для $x > 0$. Неравенство $|X - M(X)| \geq x$ равносильно неравенству $(X - M(X))^2 \geq x^2$. Используя неравенство Маркова можно записать

$$P(|X - M(X)| \geq x) = P[(X - M(X))^2 \geq x^2] \leq \frac{M[(X - M(X))^2]}{x^2} = \frac{D(X)}{x^2}.$$

Получено неравенство Чебышева

$$P(|X - M(X)| \geq x) \leq \frac{D(X)}{x^2}.$$

Пример. Оценим вероятность того, что отклонение случайной величины X , распределенной по произвольному закону, от математического ожидания $M(X)$ не меньше, чем 3σ .

$$P(|X - M(X)| \geq 3\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}.$$

Таким образом, вероятность не попадания (вероятность ошибки) произвольно распределенной случайной величины в интервал $[-3\sigma, 3\sigma]$ относительно математического ожидания не превысит $\frac{1}{9} \approx 0,111$.

Так, для случайной величины $X \sim N_{a, \sigma^2}$, вероятность невыполнения правила «трех сигм»

$$\begin{aligned} P(|X - M(X)| \geq 3\sigma) &= 1 - P(|X - M(X)| < 3\sigma) = 1 - P\left(\frac{|X - M(X)|}{\sigma} < \frac{3\sigma}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - P\left(\frac{|X - M(X)|}{\sigma} < 3\right) \approx 1 - 2\Phi_0(3) = 1 - 2 \cdot 0,49865 = 0,0027, \end{aligned}$$

т. е. для нормально распределенной случайной величины вероятность не попасть в интервал $|M(X)| \leq 3\sigma$ составляет менее 0,3 %.

1.5.2. Закон больших чисел

Пусть в результате исследования некой модели получена последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ для определения некоторого среднего параметра x , который в свою очередь так же является случайной величиной. ε -окрестностью x назовем интервал — $-\varepsilon < x < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (ε — точность).

Определение. Последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине x ($X_n \xrightarrow{P} x$) при $n \rightarrow \infty$, если для любого малого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$P(|X_n - x| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ или } P(|X_n - x| < \varepsilon) \rightarrow 1.$$

Закон больших чисел (ЗБЧ) в широком смысле: при очень большом числе случайных явлений их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой точностью.

Определение. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ с конечными математическими ожиданиями удовлетворяет закону больших чисел, если

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \xrightarrow{P} 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Закон больших чисел Чебышева.

Пусть случайная величина X имеет ограниченное математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. В результате исследования некой модели получена последовательность попарно независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$. Среднее арифметическое данных значений

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Тогда имеет место сходимостъ:

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} M(X_1) = M(X) \text{ или}$$

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - M(X_1) \xrightarrow{P} 0,$$

т. е. среднее арифметическое наблюдаемых значений в n независимых опытах сходится по вероятности к математическому ожиданию исследуемой величины при $n \rightarrow \infty$.

Стремление среднего арифметического к $M(X_1)$ объясняется тем, что рассматриваемые случайные величины одинаково распределены и имеют одинаковое математическое ожидание.

Докажем данное утверждение.

Пусть $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. В силу линейности математического ожидания

$$M\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} M(S_n) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} = \frac{nM(X_1)}{n} = M(X_1).$$

Согласно неравенства Чебышева при $\varepsilon > 0$ и в силу линейности и ограниченности дисперсии:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - M\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} =$$

$$= \frac{n \cdot D(X_1)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} = \frac{D(X_1)}{n \cdot \varepsilon^2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, получено **следствие закона больших чисел Чебышева**: оценка вероятности отличия среднего арифметического попарно независимых и одинаково распределенных случайных величин от математического ожидания $M(X_1)$ на положительную малую величину ε :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - M(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X_1)}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

Пусть в результате опыта получена последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, имеющих различные математические ожидания $M(X_i)$ и соответственно различные дисперсии $D(X_i)$. Причем все дисперсии ограничены сверху одним и тем же числом: $D(X_i) \leq D$.

Тогда

$$M\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{M(X_1) + \dots + M(X_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i),$$

$$D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{D(X_1) + \dots + D(X_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D(X_i),$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} = \frac{n \cdot D}{n^2 \cdot \varepsilon^2} = \frac{D}{n \cdot \varepsilon^2},$$

получили аналогичный результат.

Закон больших чисел Бернулли.

Закон больших чисел Бернулли справедлив только для схемы Бернулли.

Пусть в результате исследования модели ожидается появление события A . $v_n(A) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ — число осуществлений события A в n экспериментах с параметром $P(A) = p$. Тогда $\frac{v_n(A)}{n}$ — частота события A . $I(A)$ — индикатор события A такой, что

$$X_i = I_i(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ произошло в } i\text{-м эксперименте} \\ 0, & \text{если } A \text{ не произошло в } i\text{-м эксперименте} \end{cases}.$$

Учитывая, что при распределении Бернулли $M(X_1) = p$ и $D(X_1) = p(1-p)$, то на основании следствия закона больших чисел Чебышева можно записать

$$P\left(\left|\frac{v_n(A)}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

1.5.3. Центральная предельная теорема

Пусть $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Согласно закону больших чисел

$$\frac{S_n}{n} - M(X_1) = \frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

Однако, последовательность случайных величин

$$\sqrt{n} \cdot \frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{n} = \frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{\sqrt{n}}$$

не сходится к нулю. Распределение членов данной последовательности сходится к случайной величине, имеющей нормальное распределение (сходимость в смысле сходимости по распределению).

Центральная предельная теорема Ляпунова.

Пусть в результате исследования некой модели получена последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ с конечной и ненулевой дисперсией ($0 < D(X_1) < \infty$). Тогда имеет место сходимость

$$\frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{\sqrt{n \cdot D(X_1)}} = \frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{\sigma(X_1) \cdot \sqrt{n}} \Rightarrow N_{0,1}.$$

Доказательство.

Пусть $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, где X_i — случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. И пусть $Z_n = \frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{\sigma}$.

Требуется доказать, что $\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N_{0,1}$.

Найдем характеристическую функцию случайной величины $\frac{Z_n}{\sqrt{n}}$. По свойствам 3) и 4) характеристической функции имеем

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{Z_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Разложим полученную характеристическую функцию случайной величины X_1 в ряд Тейлора около точки $\frac{t}{\sqrt{n}}$, учитывая, что $M(X_1) = 0$ и $D(X_1) = 1$, получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}}(t) &= \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 + i \cdot t \cdot M(X) - \frac{t^2}{2} M(X^2) + o(t)\right)^n = \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t)\right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Получена характеристическая функция стандартного нормального распределения. Следовательно,

$$\frac{Z_n}{\sqrt{n}} = \frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{\sigma \sqrt{n}} \Rightarrow N_{0,1}.$$

Следствие.

1. Для любых вещественных $x < y$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$P\left(x \leq \frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{\sqrt{n \cdot D(X_1)}} \leq y\right) \rightarrow \Phi(y) - \Phi(x) = \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

2. Если $\eta \sim N_{0,1}$, то

$$\sqrt{n} \cdot \frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{n} = \frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{D(X_1)} \cdot \eta \in D_{0, D(X_1)}.$$

Предельная теорема Муавра-Лапласа.

Пусть в результате исследования модели ожидается появление события A . $v_n(A) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ — число осуществлений события A в n экспериментах параметром $P(A) = p$. Тогда $\frac{v_n(A)}{n}$ — частота события A . $I(A)$ — индикатор события A такой, что

$$X_i = I_i(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ произошло в } i\text{-м эксперименте} \\ 0, & \text{если } A \text{ не произошло в } i\text{-м эксперименте} \end{cases}.$$

Учитывая, что при распределении Бернулли $M(X_1) = p$ и $D(X_1) = p \cdot (1 - p)$, то на основании центральной предельной теоремы можно записать

$$P\left(x \leq \frac{v_n(A) - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \leq y\right) \rightarrow \Phi(y) - \Phi(x) = \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

следовательно

$$\frac{v_n(A) - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \Rightarrow N_{0,1}.$$

1.6. Расчет необходимого количества прогонов модели

При моделировании встает вопрос о количестве прогонов модели для получения достоверных результатов. Рассмотрим два случая:

- целью моделирования является нахождение среднего арифметического случайной величины;
- целью моделирования является вычисление вероятности появления некоторого события.

1.6.1. Количество реализаций при определении среднего арифметического случайной величины

Пусть в результате исследования некой модели для определения среднего арифметического случайной величины проведено N прогонов модели, случайная величина X приняла значения $X_1, X_2, \dots, X_N$.

Среднее арифметическое данных значений

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{S_N}{N}.$$

В силу закона больших чисел $\bar{x} \rightarrow M(X)$.

Дисперсия, в силу линейности и ограниченности сверху D определяется как

$$D\left(\frac{S_N}{N}\right) = \frac{D(X_1) + \dots + D(X_N)}{N} = \frac{N \cdot D(X_1)}{N^2} = \frac{N \cdot D}{N^2} = \frac{D}{N} \Rightarrow \sigma\left(\frac{S_N}{N}\right) = \sqrt{\frac{D}{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Вероятность того, что отличие ожидаемого параметра $\bar{x}$ от его $M(X)$ не превысит некоторой **точности** оценки $\varepsilon > 0$, назовем **достоверностью** полученных результатов Q , т.е.

$$P(|\bar{x} - M(X)| < \varepsilon) = P\left(\left|\frac{S_N}{N} - M(X)\right| < \varepsilon\right) = Q.$$

Домножим обе части неравенства под знаком вероятности на $\sqrt{N}$ и поделим на σ .

$$\begin{aligned} P(|\bar{x} - M(X)| < \varepsilon) &= P\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \cdot \left|\frac{S_N}{N} - M(X)\right| < \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \cdot \varepsilon\right) = \\ &= P\left(\left|\frac{S_N - N \cdot M(X)}{\sigma \cdot \sqrt{N}}\right| < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Согласно центральной предельной теоремы, при достаточно большом количестве проведенных опытов, закон распределения изучаемой случайной величины близок к нормальному:

$$P\left(x \leq \frac{S_n - n \cdot M(X_1)}{\sqrt{n \cdot D(X_1)}} \leq y\right) \rightarrow \Phi(y) - \Phi(x).$$

Тогда можем записать

$$\begin{aligned} P(|\bar{x} - M(X)| < \varepsilon) &= P\left(\left|\frac{S_N - N \cdot M(X)}{\sigma \cdot \sqrt{N}}\right| < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right)\right] = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right) - 1 = \left|\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)\right| = \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right)\right] - 1 = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что среднее арифметическое $\bar{x}$ отклонится от математического ожидания $M(X)$ на величину меньшую ε (заданная точность) при проведении N прогонов модели определяется как

$$P(|\bar{x} - M(X)| < \varepsilon) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right) = Q.$$

Пусть Q заданная достоверность при проведении эксперимента. Тогда количество прогонов модели для достижения данной достоверности (уровня достоверности) определим как

$$2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right) = Q \Rightarrow \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma} = \Phi_0^{-1}\left(\frac{Q}{2}\right) \Rightarrow N = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2 \cdot \left[\Phi_0^{-1}\left(\frac{Q}{2}\right)\right]^2,$$

где $\Phi_0^{-1}(x)$ — функция, обратная функции Лапласа.

1.6.2. Количество прогонов модели при определении вероятности появления события

Пусть в результате опыта произведено N прогонов модели для вычисления вероятности p некоторого случайного события A . Данное событие может наступить или не наступить. Т. е. количество X наступления события A в каждом прогоне модели является случайной величиной, которая принимает значение $x_1 = 1$ с вероятностью p и значение $x_2 = 0$ с вероятностью $1 - p$ — получили биномиальное распределение (схему Бернулли).

Величина $v_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ — сумма независимых, одинаково распределенных по закону Бернулли случайных величин, с параметром p .

Вероятность того, что отличие частоты появления события от его вероятности не превысит некоторой точности оценки $\varepsilon > 0$, назовем достоверностью полученных результатов Q , т. е.

$$P\left(\left|\frac{v_n}{N} - p\right| < \varepsilon\right) = Q.$$

Домножим обе части неравенства под знаком вероятности на $\sqrt{N}$ и поделим на σ .

$$P\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \cdot \left|\frac{v_N}{N} - M(X)\right| < \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \cdot \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{v_N - N \cdot M(X)}{\sigma \cdot \sqrt{N}}\right| < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sigma}\right).$$

В силу центральной предельной теоремы и учитывая, что случайная величина X , распределенная по закону Бернулли, имеет характеристики $M(X) = p$ и $D(X) = p \cdot (1 - p)$, запишем

$$P\left(\left|\frac{v_n}{N} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{v_N - N \cdot p}{\sqrt{N \cdot p \cdot (1 - p)}}\right| < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sqrt{p \cdot (1 - p)}}\right)$$

Таким образом, вероятность того, что частота появления события отклонится от вероятности на величину меньшую ε (заданная точность) при проведении N прогонов модели определяется как

$$P\left(\left|\frac{v_n}{N} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sqrt{p \cdot (1 - p)}}\right).$$

В данном случае можно было сразу воспользоваться предельной теоремой Муавра-Лапласа.

Пусть Q заданная достоверность при проведении эксперимента. Тогда количество прогонов модели для достижения данной достоверности (уровня достоверности) определим как

$$2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sqrt{p \cdot (1 - p)}}\right) = Q \Rightarrow \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{N}}{\sqrt{p \cdot (1 - p)}} = \Phi_0^{-1}\left(\frac{Q}{2}\right) \Rightarrow N = \frac{p \cdot (1 - p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1}\left(\frac{Q}{2}\right)\right]^2,$$

где $\Phi_0^{-1}(x)$ — функция, обратная функции Лапласа.

Замечание.

На практике обычно проводят $N_0 \approx 50$ прогонов модели, по результатам которых определяют $p \approx \frac{m}{N_0}$ или статистическую оценку дисперсии $\sigma \approx \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} (X_i^2 - \bar{x}^2)}$

($\bar{x} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} X_i$), а затем окончательно вычисляют N , исходя из заданных ε и Q .

Пример 1.2. Пусть проведено $N = 70$ независимых прогонов модели. Событие A появлялось с вероятностью $p = 0,4$. Определить:

1) вероятность того, что полученная частота события A отличается от вероятности на величину меньшую, чем $\varepsilon = 0,03$;

2) необходимое количество прогонов модели для достоверности выполнения данных условий с вероятностью $0,9$ и точностью $\varepsilon = 0,03$.

Решение.

$$1. P\left(\left|\frac{v_n}{N} - 0,4\right| < 0,03\right) = 2\Phi_0\left(\frac{0,03 \cdot \sqrt{70}}{\sqrt{0,4 \cdot 0,6}}\right) \approx 2\Phi_0(0,51) \approx 0,39.$$

$$2. N = \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,03^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{0,9}{2} \right) \right]^2 \approx 266,7 \cdot 2,71 = 722,757.$$

Полученное число округляем в большую сторону и окончательно имеем $N = 723$.

Значение функции Лапласа в Mathcad можно найти, используя функцию $\text{snorm}(x) - 0,5$.

Задача 1.2.

Произведено n прогонов модели для определения вероятности p появления некоторого события A . Данное событие произошло n_1 раз. Определить:

1) вероятность того, что, приняв за вероятность частоту появления события A , не будет сделана ошибка больше, чем ε ;

2) необходимое количество прогонов, для того, чтобы ошибка принятия частоты появления события A за вероятность с точностью ε выполнялась с достоверностью Q .

№ варианта	n	n_1	ε	Q
1.	350	210	0,02	0,90
2.	290	160	0,03	0,95
3.	410	320	0,04	0,80
4.	270	110	0,05	0,85
5.	360	145	0,01	0,95
6.	255	70	0,02	0,99
7.	422	55	0,03	0,60
8.	310	120	0,04	0,70
9.	200	45	0,05	0,80
10.	190	70	0,01	0,99
11.	300	200	0,02	0,75
12.	350	110	0,03	0,90
13.	270	100	0,04	0,99
14.	150	55	0,05	0,95
15.	220	110	0,01	0,95

№ варианта	n	n_1	ε	Q
16.	320	120	0,02	0,60
17.	221	95	0,03	0,70
18.	122	30	0,04	0,85
19.	321	90	0,05	0,99
20.	280	100	0,01	0,95
21.	285	80	0,02	0,90
22.	319	97	0,03	0,85
23.	219	98	0,04	0,80
24.	234	120	0,05	0,70
25.	432	150	0,01	0,95
26.	222	130	0,02	0,85
27.	333	90	0,03	0,80
28.	210	55	0,04	0,95
29.	220	70	0,05	0,90
30.	320	110	0,01	0,99

Задача 1.3.

При проверке n файлов на предмет наличия вирусов или ошибок были получены следующие результаты: среднее арифметическое количества файлов, содержащих ошибки или вирусы — $\bar{x}$, выборочная дисперсия — s^2 . Определить:

1) вероятность того, что, принимая в качестве оценки $\bar{x} = M(X)$, не будет совершено ошибки, большей чем ε ;

2) необходимое количество файлов для проверки, чтобы при заданных условиях, достоверность полученной информации составляла Q с точностью ε .

№ варианта	n	$\bar{x}$	s^2	ε	Q
1.	20	4,51	2,30	0,3	0,90
2.	30	3,82	1,75	0,2	0,95
3.	40	3,78	1,78	0,1	0,80
4.	25	5,11	2,01	0,4	0,85
5.	35	4,22	2,55	0,3	0,95
6.	45	5,01	1,25	0,1	0,99
7.	22	4,28	1,90	0,2	0,60
8.	33	3,89	1,80	0,3	0,70
9.	44	4,11	2,15	0,3	0,80
10.	20	4,23	2,55	0,2	0,99
11.	25	3,89	3,11	0,1	0,75
12.	35	4,77	2,55	0,1	0,90
13.	40	5,22	3,54	0,2	0,99
14.	25	5,11	2,45	0,3	0,95
15.	30	3,55	2,15	0,3	0,95

№ варианта	n	$\bar{x}$	s^2	ε	Q
16.	30	4,77	3,21	0,2	0,60
17.	25	3,55	1,75	0,1	0,70
18.	20	4,22	2,11	0,1	0,85
19.	22	4,33	2,57	0,2	0,99
20.	25	3,44	1,77	0,3	0,95
21.	30	4,55	2,57	0,3	0,90
22.	35	4,21	1,34	0,2	0,85
23.	30	4,17	2,51	0,1	0,80
24.	30	3,89	2,45	0,2	0,70
25.	25	3,98	1,90	0,3	0,95
26.	30	3,77	2,95	0,2	0,85
27.	40	4,15	1,45	0,2	0,80
28.	35	4,45	2,55	0,1	0,95
29.	25	5,23	2,35	0,1	0,90
30.	20	4,12	1,98	0,3	9

1.7. Модель. Моделирование

При исследовании физических явлений, процессов, протекающих в реальных технических системах, изучении связей между составляющими некоторого процесса, возникает проблема, связанная с размерами изучаемых объектов, воссозданию реальной ситуации (например, массовые беспорядки или стихийные бедствия), а так же, что немаловажно, больших материальных затрат и др. Так для повышения эффективности работы телекоммуникационной сети нецелесообразно экспериментировать над реальной сетью. Логичнее создать некое подобие реального объекта и уже на нем проводить исследования.

Под **моделью** (фр. *modèle*, от лат. *modulus* — мера, аналог, образец) будем понимать представление объекта (системы или понятия в некоторой форме), называемого оригиналом, для изучения свойств и (или) процессов, протекающих в данном объекте. Как правило, модель описывает лишь те характеристики, которые изучаются исследователем, поэтому модели одного и того же объекта, но описывающие разные характеристики, отличаются между собой. Так же при исследовании одного свойства объекта могут быть созданы различные модели.

Основная цель создания модели — прогнозирование поведения изучаемых объектов.

При создании модели исследователь должен ориентироваться на следующие критерии. Модель должна быть:

- простой и понятной пользователю;
- надежной в смысле гарантии от абсурдных ответов;
- удобной в использовании;
- полной с точки зрения решения поставленной задачи;
- адаптивной, позволяющей легко переходить к другим модификациям или обновлять данные;
- по возможности универсальной.

Обобщая вышесказанное, выдвинем требования, предъявляемые к моделям:

1. **Адекватность** (лат. *Adaequatus* — приравненный) — степень соответствия результатов (свойств), полученных при работе модели, характеристикам (свойствам) реальной системы.

2. **Точность** — степень совпадения полученных результатов при моделировании с заранее установленными, желаемыми (реальными).

3. **Универсальность** — возможность использования построенной модели для изучения других сходных явлений и систем.

4. **Информативность** — содержание достаточной информации о реальной системе.

4. **Экономичность** — затраты связанные с построением и использованием модели должны быть целесообразны («цели должны оправдывать средства»).

Классификация моделей разнообразна по различным критериям применения и использования моделей, а также характеристик процессов, протекающих в них.

Не претендуя на общность, приведем классификацию моделей в зависимости от:

1) способа представления действительности:

- эвристические — образы в воображении человека;
- натурные (физические, технические, социальные и т. д.) — макеты реальных систем;

– математические (аналитические, численные, формально-логические информационные) — формализованное описание с помощью абстрактного языка;

– алгоритмические, программные — алгоритмы и имитация на компьютере;

2) по способу представления:

– структурные — показана структура объекта как системы со своим устройством и механизмом функционирования;

– функциональные — отражают только воспринимаемое поведение объекта исследования (модели «черного ящика»);

3) назначения;

– статические — отображают состав и структуру;

– динамические — поведение изучаемого объекта во времени;

4) характера функционирования исследуемой системы:

– детерминированные (от лат. *determinans* — определяющий) — с определенными характеристиками и параметрами;

– стохастические (др.-греч. *στόχος* — цель, предположение) — вероятностные;

5) характера протекающих в исследуемой системе процессов:

– непрерывные — с течением промежутка времени параметры (поведение) меняются непрерывно;

– дискретные — с течением промежутка времени параметры (поведение) меняются скачкообразно в определенные (дискретные) моменты.

Данная классификация не является полной, она лишь помогает нам для описания моделей представленных в данном издании.

Моделирование — процесс создания и исследования модели.

Различают физическое, математическое и имитационное моделирование.

Физическое моделирование — метод экспериментального изучения различных физических явлений, основанный на их физическом подобии.

Математическое моделирование — описание объектов реального мира с помощью абстрактного языка математики.

Имитационное (ситуационное) моделирование — метод, позволяющий с помощью модели описать процессы, происходящие в изучаемой системе так, как они проходили бы в действительности. В результате имитационного моделирования строится логико-математическое описание объекта-оригинала для дальнейшего экспериментирования на компьютере, анализа и оценки функционирования. Различают агентное моделирование, дискретно-событийное моделирование и системную динамику.

В дальнейшем будем использовать математическое и, как следствие, имитационное моделирование.

Выделяют основные этапы моделирования.

1. Постановка задачи. Определение цели и путей их достижения.
2. Сбор информации об изучаемом объекте (явлении). Установление причинно-следственных связей между характеристиками, описывающих изучаемый объект (явление). Определяются входные и выходные данные.
3. Формализация. Описание процессов в виде математических выражений, определение класса задач к которым может быть отнесена предполагаемая модель.
4. Выбор метода решения. Устанавливаются параметры модели, выбирается метод решения.
5. Реализация модели. Создается как математическая модель, так и имитационная модель в виде программы или специальных моделирующих средств на компьютере.
6. Анализ результатов. Сопоставление предполагаемых и полученных при моделировании результатов.
7. Проверка модели.

1.8. Проверка модели

После построения модели и получения результатов моделирования возникает вопрос: «на сколько хороша модель, точно ли она описывает исследуемую систему (явление)?» Даже, если модель вроде нас устраивает, как она будет вести себя в предельных режимах (при $t \rightarrow \infty$)?

Проверка модели представляет собой процесс, в ходе которого исследователь получает приемлемый уровень уверенности, что выводы, сделанные по результатам работы модели, будут правильно описывать поведение изучаемой системы (явления).

Способы проверки модели можно разделить на три категории.

1. Верификация (лат *verus* — истинный и *facere* — делать) – подтверждение того, что модель ведет себя так, как было задумано.
2. Адекватность – соответствие поведения модели исследуемой системе. Так же говорят о валидации модели – подтверждении того, что модель в пределах рассматриваемой области приложений ведет себя с удовлетворительной точностью в соответствии с целями моделирования.
3. Проблемный анализ – формулирование статистически значимых выводов на основе данных, полученных в результате имитационного моделирования, т.е. используемые в модели данные обладают удовлетворительной точностью и не противоречат исследуемой системе, значения параметров точно определены и корректно используются.

Существует множество способов проверки соответствия модели реальной системе. Обозначим два основных подхода:

1. По дисперсиям отклонений откликов модели и системы от их средних значений.
2. По средним значениям откликов модели и системы.

Существуют непараметрические тесты для проверки статистических гипотез методами, не связанными с видом распределения генеральной совокупности: статистика Уилкоксона, U -тест Манна-Уитни, H -тест Краскела-Уоллиса, тест Уилкоксона, тест Фридмана и др. Применение данных методов не требует предположения о нормальности распределения.

Замечание.

Рассмотрим варианты построения моделей.

1. Модель построена с использованием известного математического аппарата и методов, которые прошли апробацию и не вызывают сомнений. Так же расчетные значения характеристик изучаемой системы совпадают с результатами работы имитационной модели. В данном случае можно говорить о том, что построенная модель должным образом описывает поведение изучаемой системы.

2. При построении модели создан новый математический аппарат, описывающий поведение модели в различных ситуациях. При этом сравнить результаты моделирования с реальным объектом не представляется возможным, например: моделирование чрезвычайных ситуаций.

3. Построенная модель является проектом еще не существующего физического объекта.

Как оценить адекватность модели в последних случаях? Выход есть. Если построенная модель для одного объекта «хорошо» описывает схожее поведение другого объекта, то можно говорить о том, что полученная модель адекватна. Так была создана модель, описывающая чрезвычайные ситуации, связанные с массовыми беспорядками. Она была проверена («обкатана») при моделировании трагедии, произошедшей на Зейской ГЭС, где результаты работы модели совпали с реальными. В данном случае, можно утверждать, что модель адекватна.

Если же модель получена для еще не существующего объекта (при проектировании различных систем), то здесь нужно воспользоваться мнением экспертов в области существования моделируемого объекта и на основании их высказываний делать вывод о содержательности модели.

1.8.1. Критические точки. Критическая область

В результате проведения опыта с моделью выдвигается нулевая гипотеза о совпадении результатов работы модели с характеристиками изучаемой системы.

Для проверки данной нулевой гипотезы подбирают случайную величину, распределение которой известно (или приближенно известно), называемую **статистическим критерием** k .

Множество значений статистического критерия разбивают на два непересекающихся подмножества:

1. подмножество, содержащее значение статистического критерия, при котором нулевая гипотеза принимается;
2. подмножество — при котором нулевая гипотеза отвергается.

При этом совокупность значений, при котором нулевую гипотезу отвергают, называется **критической областью**. Точки, отделяющие область принятия гипотезы от

критической области — **критические точки** $k_{кр}$. Если критическая область задана как $k > k_{кр}$ ($k_{кр}, +\infty$), то область принятия нулевой гипотезы задается неравенством $k < k_{кр}$ ($-\infty, k_{кр}$).

Далее задаются **уровнем значимости** α . α — вероятность совершить ошибку первого рода, т. е. отвергнуть правильную (выдвинутую) гипотезу ($\alpha \ll 1$). Как правило, значение α выбирают равным 0,01 или 0,05.

В зависимости от вида конкурирующей гипотезы выбирают левостороннюю ($-\infty, k_{кр}$), правостороннюю ($k_{кр}, +\infty$), и двустороннюю $(-\infty, k_{кр1}) \cup (k_{кр2}, +\infty)$ критические области.

Тогда выражение $P[k > k_{кр}] = \alpha$ означает, что вероятность того, что статистический критерий k примет значения большее, чем $k_{кр}$ равна α , т. е. вероятность попасть в критическую область ($k_{кр}, +\infty$) (область не принятия нулевой гипотезы) мала.

Значения критических точек $k_{кр}$ определяются в зависимости от распределения (функции распределения), которому подчиняется выбранный статистический критерий k .

Критические точки ищут исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что статистический критерий примет значение большее $k_{кр}$, меньшее $k_{кр}$ или $(-\infty, k_{кр1}) \cup (k_{кр2}, +\infty)$, была равна заданному уровню значимости:

$$\begin{aligned} & - P[k > k_{кр}(\alpha)] = \alpha, \text{ для } (k_{кр}, +\infty); \\ & - P[k < k_{кр}(1-\alpha)] = 1-\alpha, \text{ для } (-\infty, k_{кр}); \\ & - P[(k < k_{кр1}) \cup (k_{кр2} < k)] = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow P\left[k < k_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\alpha}{2} \text{ и } P\left[k < k_{кр}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ & , (-\infty, k_{кр1}) \cup (k_{кр2}, +\infty) \end{aligned}$$

$$\text{— в случае симметрии статистического критерия относительно нуля} \\ P\left[k < k_{лев.кр}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\alpha}{2}, P\left[k > k_{прав.кр}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\alpha}{2}.$$

Исходя из выбранного статистического критерия, по характеристикам выборки вычисляют **наблюдаемое значение** $k_{набл}$ данного критерия.

Если $k_{набл} < k_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $k_{набл} > k_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают.

1.8.2. Сравнение двух дисперсий

Пусть в результате наблюдения за работой изучаемой системы получена генеральная совокупность X исследуемого параметра. Пусть так же получена генеральная совокупность Y того же параметра, но при прогонах модели.

Предполагается, что полученные генеральные совокупности распределены нормально. Действительно, при объеме совокупности больше 30 (чем больше, тем лучше), согласно закону больших чисел, можно считать, что она (совокупность) имеет нормальное распределение.

Из полученных генеральных совокупностей извлекаются выборки объема n_1 и n_2 . Далее находят выборочные средние и несмещенные выборочные дисперсии:

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i, \quad s_X^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i, \quad s_Y^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{y})^2.$$

При этом выборочные дисперсии имеют степени свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ соответственно.

Зададимся уровнем значимости α и проверим нулевую гипотезу о равенстве дисперсий генеральных совокупностей, т. е. $D(X) = D(Y)$. Учитывая, что найденные выборочные дисперсии являются несмещенными оценками генеральных дисперсий, т. е. $M(s_{\eta}^2) = D(\eta)$, то нулевую гипотезу определим как

$$H_0 : M(s_X^2) = M(s_Y^2).$$

Другими словами: определим, значимо ли отличие двух дисперсий генеральных совокупностей, полученных при наблюдении за изучаемой системой и при прогонах модели, или нет.

Вспомним, что если U и V независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2 , то величина

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

имеет распределение F Фишера-Снедекора.

Введем статистический критерий

$$F = \frac{s_{\text{большее}}^2}{s_{\text{меньшее}}^2}.$$

Рассчитаем наблюдаемое значение критерия как (отношение большей выборочной дисперсии к меньшей

$$F_{\text{набл}} = \frac{s_{\text{большее}}^2}{s_{\text{меньшее}}^2}.$$

Построим критическую область в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Возможны два варианта. Третий вариант невозможен, так как предполагается, что в статистическом критерии числитель больше знаменателя.

1. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : M(s_X^2) = M(s_Y^2)$$

при конкурирующей

$$H_1 : M(s_X^2) > M(s_Y^2).$$

В данном случае выберем правостороннюю критическую область. Тогда

$$P[F > F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)] = \alpha.$$

$F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$ найдем по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора (приложение 3), учитывая, что $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$, n_1 и n_2 — объемы выборок.

Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают, дисперсии изучаемых выборок отличаются значимо.

2. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : M(s_X^2) = M(s_Y^2)$$

при конкурирующей

$$H_1 : M(s_X^2) \neq M(s_Y^2).$$

В данном случае выберем двустороннюю критическую область. Тогда

$$P\left[F < F_{\text{лев. кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)\right] = \frac{\alpha}{2},$$

$$P\left[F > F_{\text{прав. кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)\right] = \frac{\alpha}{2}.$$

$F_{\text{прав. кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)$ найдем по таблице критических точек распределения Фише-

ра-Снедекора (приложение 3), учитывая, что $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$, n_1 и n_2 — объемы выборок.

Находить $F_{\text{лев. кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)$ в данном случае нет необходимости (оставим без доказательства).

Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{прав. кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $F_{\text{набл}} > F_{\text{прав. кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают, дисперсии изучаемых выборок отличаются значимо.

1.8.3. Сравнение исправленной выборочной дисперсии с предполагаемой генеральной дисперсией

Предположим, что спроектирована некоторая системы и известны ее характеристики с допустимыми диапазонами изменений («проектная дисперсия параметра σ_0^2 »). Исследователем создана модель, в результате прогона которой изучался параметр проектной системы. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n и рассчитана исправленная выборочная дисперсия s_0^2 с $k = n - 1$ степенями свободы. Предполагается, что генеральная совокупность распределена нормально.

Зададимся уровнем значимости α и проверим нулевую гипотезу о равенстве двух дисперсий, т. е.

$$H_0 : M(s_0^2) = \sigma_0^2.$$

Другими словами: определим, подходит ли построенная модель для описания проектной системы.

Введем статистический критерий, имеющий распределение χ^2 , и рассчитаем $\chi_{\text{набл}}^2$

$$\chi_{\text{набл}}^2 = (n - 1) \frac{M(s_0^2)}{\sigma_0^2}.$$

Построим критическую область в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Возможны три варианта.

1. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : M(s_0^2) = \sigma_0^2$$

при конкурирующей

$$H_1 : M(s_0^2) > \sigma_0^2.$$

В данном случае выберем правостороннюю критическую область. Тогда

$$P[\chi^2 > \chi_{кр}^2(\alpha, k)] = \alpha.$$

$\chi_{кр}^2(\alpha, k)$ найдем по таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 4), учитывая, что $k = n - 1$, n — объем выборки.

Если $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $\chi_{набл}^2 > \chi_{кр}^2$ — нулевую гипотезу отвергают, дисперсии изучаемых выборок отличаются значимо.

2. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : M(s_0^2) = \sigma_0^2$$

при конкурирующей

$$H_1 : M(s_0^2) \neq \sigma_0^2.$$

В данном случае выберем двустороннюю критическую область. Тогда

$$P\left[\chi^2 < \chi_{лев.кр}^2\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)\right] = \frac{\alpha}{2},$$

$$P\left[\chi^2 > \chi_{прав.кр}^2\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)\right] = \frac{\alpha}{2}.$$

$\chi_{прав.кр}^2\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$ найдем по таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 4), учитывая, что $k = n - 1$, n — объем выборки.

Для нахождения $\chi_{лев.кр}^2\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$, учтем, что события $\chi^2 < \chi_{лев.кр}^2$ и $\chi^2 > \chi_{прав.кр}^2$

противоположны, следовательно

$$P(\chi^2 < \chi_{лев.кр}^2) + P(\chi^2 > \chi_{прав.кр}^2) = 1.$$

Тогда

$$P(\chi^2 < \chi_{лев.кр}^2) = 1 - P(\chi^2 > \chi_{прав.кр}^2) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

следовательно, левую критическую точку найдем как

$$\chi_{лев.кр}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k\right).$$

Если $\chi_{лев.кр}^2 < \chi_{набл}^2 < \chi_{прав.кр}^2$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $\chi_{лев.кр}^2 > \chi_{набл}^2$ или $\chi_{набл}^2 > \chi_{прав.кр}^2$ — нулевую гипотезу отвергают, дисперсии изучаемых выборок отличаются значимо.

3. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : M(s_0^2) = \sigma_0^2$$

при конкурирующей

$$H_1 : M(s_0^2) < \sigma_0^2.$$

В данном случае выберем левостороннюю критическую область. Тогда

$$P[\chi^2 > \chi_{кр}^2(1 - \alpha, k)] = 1 - \alpha.$$

$\chi_{кр}^2(1-\alpha, k)$ найдем по таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 4), учитывая, что $k = n - 1$, n — объем выборки.

Если $\chi_{набл}^2 > \chi_{кр}^2$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$ — нулевую гипотезу отвергают, дисперсии изучаемых выборок отличаются значимо.

1.8.4. Сравнение средних значений откликов модели и системы, дисперсии генеральных совокупностей известны, малые выборки $n < 50$

Пусть $\bar{x}$ — выборочная средняя, найденная после прогона модели по выборке объема n_1 , извлеченной из генеральной совокупности X с дисперсией $D(X)$.

Пусть $\bar{y}$ — выборочная средняя, найденная при наблюдении за работой изучаемого объекта (системы), вычисленная по выборке объема n_2 , извлеченной из генеральной совокупности Y с дисперсией $D(Y)$.

Зададимся уровнем значимости α и проверим нулевую гипотезу о равенстве двух средних, т. е.

$$H_0 : M(X) = M(Y).$$

В силу несмещенности оценок генеральных средних нулевую гипотезу запишем в виде

$$H_0 : \bar{x} = \bar{y}.$$

Другими словами: определим значимо или нет различие между выборочными средними.

Введем статистический критерий

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma(\bar{X} - \bar{Y})}.$$

$$\text{Так как } \sigma(\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{D(\bar{X} - \bar{Y})} = \sqrt{D(\bar{X}) + D(\bar{Y})} \text{ и } D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n_1}, D(\bar{Y}) = \frac{D(Y)}{n_2}, \text{ то}$$

введенный критерий примет вид

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n_1} + \frac{D(Y)}{n_2}}}.$$

В силу центральной предельной теоремы Ляпунова, данная случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$.

Наблюдаемое значение статистического критерия определим как

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n_1} + \frac{D(Y)}{n_2}}}.$$

Построим критическую область в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Возможны три варианта.

1. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : M(X) = M(Y)$$

при конкурирующей

$$H_1 : M(X) \neq M(Y).$$

В данном случае выберем двустороннюю критическую область. Тогда

$$P\left[Z < z_{\text{лев.кр}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\alpha}{2}, \quad P\left[Z > z_{\text{прав.кр}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\alpha}{2}.$$

Учитывая, что

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi_0\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, можно записать

$$P(0 < Z < z_{\text{кр}}) = \Phi(z_{\text{кр}}) - \Phi(0) = \Phi(z_{\text{кр}}).$$

Так как распределение случайной величины Z симметрично относительно начала координат, то $P[0 < Z < z_{\text{кр}}] + P[Z > z_{\text{кр}}] = \frac{1}{2}$. Таким образом

$$\Phi(z_{\text{кр}}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow z_{\text{кр}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Значение критической точки определим с помощью приложения 2.

Тогда двусторонняя критическая область определяется как

$$Z < -z_{\text{кр}} \cup Z > z_{\text{кр}}.$$

Если $|Z_{\text{набл}}| < z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $|Z_{\text{набл}}| > z_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

2. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : M(X) = M(Y)$$

при конкурирующей

$$H_1 : M(X) > M(Y).$$

В данном случае выберем правостороннюю критическую область. Тогда

$$P[Z > z_{\text{кр}}] = \alpha.$$

Так как $P[0 < Z < z_{\text{кр}}] + P[Z > z_{\text{кр}}] = \frac{1}{2}$ и $P(0 < Z < z_{\text{кр}}) = \Phi(z_{\text{кр}}) - \Phi(0) = \Phi(z_{\text{кр}})$,

то

$$\Phi(z_{\text{кр}}) + \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \alpha \Rightarrow z_{\text{кр}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right).$$

Значение критической точки определим с помощью приложения 2.

Если $Z_{\text{набл}} < z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $Z_{\text{набл}} > z_{\text{кр}}$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

3. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : M(X) = M(Y)$$

при конкурирующей

$$H_1 : M(X) < M(Y).$$

В данном случае выберем правостороннюю критическую область. Тогда

$$P[Z < z_{\text{кр}}] = \alpha.$$

Учитывая, что распределение Z симметрично относительно нуля, то критическую точку определим как

$$-z_{кр} = -\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right).$$

Значение критической точки определим с помощью приложения 2.

Если $Z_{набл} > -z_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $Z_{набл} < -z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

1.8.5. Сравнение средних значений откликов модели и системы, дисперсии генеральных совокупностей известны, большие выборки $n > 50$

Если при сравнении двух средних генеральных совокупностей одна из генеральных совокупностей не имеет нормального распределения и выборки большие $n > 50$, то в качестве статистического критерия выбирают

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D_e(X)}{n_1} + \frac{D_e(Y)}{n_2}}},$$

где $D_e(X)$ и $D_e(Y)$ выборочные дисперсии.

Дальнейшие расчеты проводят аналогично случаю малых выборок.

1.8.6. Сравнение средних значений откликов модели и системы, дисперсии генеральных совокупностей не известны, малые выборки $n < 50$

Пусть необходимо сравнить характеристики, полученные в результате работы модели, и при наблюдении за изучаемой системой. В результате получены две генеральные совокупности X и Y , в предположении распределенные нормально, но в силу малых выборок сложно получить для них хорошие оценки генеральных дисперсий.

Если есть основания предполагать, что генеральные дисперсии не равны, то предварительно необходимо предварительно проверить гипотезу о незначительности их различия с помощью критерия Фишера-Снедекора.

Если есть основания утверждать, что генеральные дисперсии равны, то применим критерий Стьюдента.

Итак, пусть $\bar{x}$ — выборочная средняя, найденная после прогона модели по выборке объема n_1 , извлеченной из генеральной совокупности X с выборочной дисперсией s_x^2 .

Пусть $\bar{y}$ — выборочная средняя, найденная при наблюдении за работой изучаемого объекта (системы), вычисленная по выборке объема n_2 , извлеченной из генеральной совокупности Y с выборочной дисперсией s_y^2 .

Зададимся уровнем значимости α и проверим нулевую гипотезу о равенстве двух средних.

В силу несмещенности оценок генеральных средних нулевую гипотезу запишем в виде

$$H_0 : \bar{x} = \bar{y}.$$

Другими словами: определим значимо или нет различие между выборочными средними.

Введем статистический критерий и рассчитаем его наблюдаемое значение

$$T_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1) \cdot s_X^2 + (n_2 - 1) \cdot s_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}},$$

который имеет t -распределение Стьюдента с $k = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы.

Построим критическую область в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Возможны три варианта.

1. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : \bar{x} = \bar{y}$$

при конкурирующей

$$H_1 : \bar{x} \neq \bar{y}.$$

В данном случае выберем двустороннюю критическую область. Тогда

$$P\left[T < t_{\text{лев.кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)\right] = \frac{\alpha}{2}, \quad P\left[T > t_{\text{прав.кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)\right] = \frac{\alpha}{2}.$$

Учитывая, что t -распределение Стьюдента симметрично относительно нуля, достаточно найти правую границу двусторонней области

$$P[T > t_{\text{кр}}(\alpha, k)] = \alpha,$$

и значение критической точки найдем из приложения 5, учитывая, что число степеней свободы — $k = n_1 + n_2 - 2$.

Если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}}(\alpha, k)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}(\alpha, k)$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

2. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : \bar{x} = \bar{y}$$

при конкурирующей

$$H_1 : \bar{x} > \bar{y}.$$

В данном случае выберем правостороннюю критическую область.

$$P[T > t_{\text{кр}}(\alpha, k)] = \alpha.$$

Учитывая, что $k = n_1 + n_2 - 2$ критическую точку найдем из приложения 5.

Если $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}}(\alpha, k)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}}(\alpha, k)$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

3. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : \bar{x} = \bar{y}$$

при конкурирующей

$$H_1 : \bar{x} < \bar{y}.$$

В данном случае выберем левостороннюю критическую область.

$$P[T < t_{\text{кр}}(\alpha, k)] = \alpha.$$

Учитывая, что t -распределение Стьюдента симметрично относительно нуля, то $t_{\text{кр}}(\alpha, k) = -t_{\text{кр}}(\alpha, k)$.

Если $T_{набл} > -t_{кр}(\alpha, k)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $T_{набл} < -t_{кр}(\alpha, k)$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

1.8.7. Сравнение выборочной средней с предполагаемой генеральной средней, дисперсия известна (большая выборка $n > 50$)

Пусть спроектирована модель в результате работы, которой один из параметров должен быть равен a (согласно проектной документации).

Исследователем построена модель и получена генеральная совокупность исследуемого параметра. По выборке найдены выборочная средняя $\bar{x}$ и генеральная дисперсия (при достаточно большой выборке).

Зададимся уровнем значимости α и проверим нулевую гипотезу о равенстве $\bar{x} = a$.

Введем статистический критерий и рассчитаем его наблюдаемое значение

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

В силу центральной предельной теоремы Ляпунова, данная случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$.

Построим критическую область в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Возможны три варианта.

1. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : \bar{x} = a$$

при конкурирующей

$$H_1 : \bar{x} \neq a.$$

В данном случае выберем двустороннюю критическую область. Тогда

$$P\left[Z < z_{лев.кр}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\alpha}{2}, \quad P\left[Z > z_{прав.кр}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\alpha}{2}.$$

Учитывая, что

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi_0\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, можно записать

$$P(0 < Z < z_{кр}) = \Phi(z_{кр}) - \Phi(0) = \Phi(z_{кр}).$$

Так как распределение случайной величины Z симметрично относительно начала координат, то $P[0 < Z < z_{кр}] + P[Z > z_{кр}] = \frac{1}{2}$. Таким образом

$$\Phi(z_{кр}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi(z_{кр}) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow z_{кр} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Значение критической точки определим с помощью приложения 2.

Тогда двусторонняя критическая область определяется как

$$Z < -z_{кр} \cup Z > z_{кр}.$$

Если $|Z_{набл}| < z_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $|Z_{набл}| > z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают, различие $\bar{x}$ и a значимо.

2. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : \bar{x} = a$$

при конкурирующей

$$H_1 : \bar{x} > a.$$

В данном случае выберем правостороннюю критическую область. Тогда

$$P[Z > z_{кр}] = \alpha.$$

Так как $P[0 < Z < z_{кр}] + P[Z > z_{кр}] = \frac{1}{2}$ и $P(0 < Z < z_{кр}) = \Phi(z_{кр}) - \Phi(0) = \Phi(z_{кр})$,

то

$$\Phi(z_{кр}) + \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi(z_{кр}) = \frac{1}{2} - \alpha \Rightarrow z_{кр} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right).$$

Значение критической точки определим с помощью приложения 2.

Если $Z_{набл} < z_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $Z_{набл} > z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

3. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : \bar{x} = a$$

при конкурирующей

$$H_1 : \bar{x} < a.$$

В данном случае выберем правостороннюю критическую область. Тогда

$$P[Z < z_{кр}] = \alpha.$$

Учитывая, что распределение Z симметрично относительно нуля, то критическую точку определим как

$$-z_{кр} = -\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right).$$

Значение критической точки определим с помощью приложения 2.

Если $Z_{набл} > -z_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $Z_{набл} < -z_{кр}$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

1.8.8. Сравнение выборочной средней с предполагаемой генеральной средней, дисперсия известна (малая выборка $n < 50$)

Пусть спроектирована модель в результате работы, которой один из параметров должен быть равен a (согласно проектной документации).

Исследователем построена модель и получена генеральная совокупность исследуемого параметра. По выборке найдена выборочная средняя $\bar{x}$, но оценить генеральную дисперсию в случае малой выборки нельзя. Предположим, что по генеральной совокупности найдена s — исправленное среднее квадратическое отклонение.

Зададимся уровнем значимости α и проверим нулевую гипотезу о равенстве $\bar{x} = a$.

Введем статистический критерий и рассчитаем его наблюдаемое значение

$$T_{набл} = \frac{\bar{x} - a}{s} \cdot \sqrt{n}.$$

Полученная случайная величина имеет t -распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы.

Построим критическую область в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Возможны три варианта.

1. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : \bar{x} = a$$

при конкурирующей

$$H_1 : \bar{x} \neq a .$$

В данном случае выберем двустороннюю критическую область. Тогда

$$P\left[T < t_{лев.кр}\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)\right] = \frac{\alpha}{2}, \quad P\left[T > t_{прав.кр}\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)\right] = \frac{\alpha}{2} .$$

Учитывая, что t -распределение Стьюдента симметрично относительно нуля, достаточно найти правую границу двусторонней области

$$P[T > t_{кр}(\alpha, k)] = \alpha ,$$

и значение критической точки найдем из приложения 5, учитывая, что число степеней свободы — $k = n - 1$.

Если $|T_{набл}| < t_{кр}(\alpha, k)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $|T_{набл}| > t_{кр}(\alpha, k)$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

2. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : \bar{x} = a$$

при конкурирующей

$$H_1 : \bar{x} > a .$$

В данном случае выберем правостороннюю критическую область.

$$P[T > t_{кр}(\alpha, k)] = \alpha .$$

Учитывая, что $k = n - 1$ критическую точку найдем из приложения 5.

Если $T_{набл} < t_{кр}(\alpha, k)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $T_{набл} > t_{кр}(\alpha, k)$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

3. Пусть нулевая гипотеза

$$H_0 : \bar{x} = a$$

при конкурирующей

$$H_1 : \bar{x} < a .$$

В данном случае выберем левостороннюю критическую область

$$P[T < t_{кр}(\alpha, k)] = \alpha .$$

Учитывая, что t -распределение Стьюдента симметрично относительно нуля, то $t_{кр}(\alpha, k) = -t_{кр}(\alpha, k)$.

Если $T_{набл} > -t_{кр}(\alpha, k)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. В противном случае, если $T_{набл} < -t_{кр}(\alpha, k)$ — нулевую гипотезу отвергают, различие генеральных средних значимо.

1.8.9. Проверка однородности результатов измерений

Пусть в результате прогонов модели получена выборка $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ изучаемой величины. Причем одно из значений параметра принимает значение ($x_{\max}$ или $x_{\min}$), явно выделяющееся от остальных.

Возникает вопрос: является ли данный всплеск нормальным или это ошибка эксперимента?

Наличие ошибок при проведении эксперимента не дает правильно оценить параметры всей генеральной совокупности, что влечет за собой дальнейшие ошибки.

Введем случайные величины

$$v = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{s_X \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}}}, \quad v' = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{s_X \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}}},$$

где $\bar{x}$ и s_X — средняя выборочная и выборочная дисперсия.

Введенные случайные величины, имеют специальное распределение со степенью свободы $k = n - 2$.

Рассчитаем наблюдаемые значения статистического критерия $v_{\text{набл}}$ или $v'_{\text{набл}}$ и, сравним с критическими точками, значения которых в зависимости от $k = n - 2$ и уровня значимости α , приведены в таблице.

Если $v_{\text{набл}} < v_{\text{кр}}$, то всплеск не влияет на характеристики совокупности, в противном случае — данные всплески являются ошибкой эксперимента.

Если $v_{\text{набл}} > v_{\text{кр}}$, то ошибочное значение выбрасывается, и заново находятся характеристики совокупности.

Таблица значений v и v'

k	α		
	0,10	0,05	0,01
1	1,406	1,412	1,414
2	1,645	1,689	1,723
3	1,791	1,869	1,955
4	1,894	1,996	2,130
5	1,974	2,093	2,265
6	2,041	2,172	2,374
7	2,097	2,237	2,464
8	2,146	2,294	2,540
9	2,190	2,343	2,606
10	2,229	2,387	2,663
11	2,264	2,426	2,714

k	α		
	0,10	0,05	0,01
12	2,297	2,461	2,759
13	2,326	2,493	2,800
14	2,354	2,523	2,837
15	2,380	2,551	2,871
16	2,404	2,577	2,903
17	2,426	2,600	2,932
18	2,447	2,623	2,959
19	2,467	2,644	2,984
20	2,486	2,664	3,008
21	2,504	2,683	3,030
22	2,52	2,701	3,051

Задача 1.4.

1. По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 10$ и $n_2 = 15$, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2 = 11,85$ и $s_2^2 = 7,14$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(s_1^2) = M(s_2^2)$ при конкурирующей $H_1 : M(s_1^2) \neq M(s_2^2)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

2. Создана модель по проектной документации и изучается параметр, о котором известно, что он должен принимать значения 101 ± 11 . После прогона модели из результатов извлечена выборка объемом $n = 15$ и найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 15$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных с проектными, т. е. проверить $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ при конкурирующей $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

3. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 120$ из выборки $n_1 = 30$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 40$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 121$. Генеральные дисперсии: $D(X) = 10$ и $D(Y) = 12$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

4. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 125$ из выборки $n_1 = 80$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 90$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 121$. Выборочные дисперсии: $D(X) = 10$ и $D(Y) = 12$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Предполагается, что первая совокупности распределена нормально, вторая имеет неизвестное распределение.

5. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 5,4$ из выборки $n_1 = 9$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 7$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 4,4$. Так же по данным малым выборкам найдены исправленные дисперсии: $s_X^2 = 0,1$ и $s_Y^2 = 0,2$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

6. Необходимо сравнить характеристики, полученные в результате работы модели, и при наблюдении за изучаемой системой. Получены две генеральные совокупности X и Y , в предположении распределенные нормально, но в силу малых выборок сложно получить для них хорошие оценки генеральных дисперсий, поэтому рассчитаны исправленные дисперсии. Получены параметры: $n_1 = 5$, $\bar{x} = 3,2$, $s_X^2 = 0,22$, $n_2 = 7$, $\bar{y} = 2,8$, $s_Y^2 = 0,11$. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о значимости расхождения средних, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

7. Спроектирована модель в результате работы, которой один из параметров должен быть равен $a = 20$ (согласно проектной документации). При погонах построенной модели получена генеральная совокупность исследуемого параметра и найдены характеристики: $n = 80$, $\bar{x} = 21,5$, $\sigma = 0,87$. При уровне значимости 0,05 проверим нулевую гипотезу о равенстве $\bar{x} = a$, т. е. проверим $H_0 : \bar{x} = a$ при конкурирующей $H_1 : \bar{x} \neq a$.

8. Спроектирована модель в результате работы, которой один из параметров должен быть равен $a = 10$ (согласно проектной документации). При погонах построен-

ной модели получена генеральная совокупность исследуемого параметра и найдены характеристики: $n = 20$, $\bar{x} = 11,5$, исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 4,2$. При уровне значимости 0,05 проверим нулевую гипотезу о равенстве $\bar{x} = a$, т. е. проверим $H_0 : \bar{x} = a$ при конкурирующей $H_1 : \bar{x} \neq a$.

9. При прогоне модели получены совокупность значений исследуемой величины $\{10, 14, 37, 12, 14\}$. Проверить, является ли данный всплеск нормальным или это ошибка эксперимента.

10. По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 15$ и $n_2 = 10$, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2 = 8,75$ и $s_2^2 = 17,10$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(s_1^2) = M(s_2^2)$ при конкурирующей $H_1 : M(s_1^2) > M(s_2^2)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

11. Создана модель по проектной документации и изучается параметр, о котором известно, что он должен принимать значения 20 ± 12 . После прогона модели из результатов извлечена выборка объемом $n = 15$ и найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 29$. При уровне значимости 0,01 проверить согласованность полученных данных с проектными, т. е. проверить $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ при конкурирующей $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

12. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 70$ из выборки $n_1 = 25$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 35$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 34$. Генеральные дисперсии: $D(X) = 7$ и $D(Y) = 12$. При уровне значимости 0,01 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) > M(Y)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

13. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 5$ из выборки $n_1 = 100$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 90$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 8$. Выборочные дисперсии: $D(X) = 0,5$ и $D(Y) = 1,2$. При уровне значимости 0,01 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) > M(Y)$. Предполагается, что первая совокупности распределена нормально, вторая имеет неизвестное распределение.

14. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 12,4$ из выборки $n_1 = 7$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 5$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 7,8$. Так же по данным малым выборкам найдены исправленные дисперсии: $s_X^2 = 0,12$ и $s_Y^2 = 0,25$. При уровне значимости 0,01 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) > M(Y)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

15. Необходимо сравнить характеристики, полученные в результате работы модели, и при наблюдении за изучаемой системой. Получены две генеральные совокупности X и Y , в предположении распределенные нормально, но в силу малых выборок сложно получить для них хорошие оценки генеральных дисперсий, поэтому рассчитаны исправленные дисперсии. Получены параметры: $n_1 = 6$, $\bar{x} = 32$, $s_X^2 = 2,2$, $n_2 = 7$,

$\bar{x} = 28$, $s_Y^2 = 1,1$. При уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о значимости расхождения средних, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) > M(Y)$.

16. Спроектирована модель в результате работы, которой один из параметров должен быть равен $a = 14,5$ (согласно проектной документации). При погонах построенной модели получена генеральная совокупность исследуемого параметра и найдены характеристики: $n = 110$, $\bar{x} = 21,5$, $\sigma = 8,7$. При уровне значимости 0,01 проверим нулевую гипотезу о равенстве $\bar{x} = a$, т. е. проверим $H_0 : \bar{x} = a$ при конкурирующей $H_1 : \bar{x} > a$.

17. Спроектирована модель в результате работы, которой один из параметров должен быть равен $a = 0,11$ (согласно проектной документации). При погонах построенной модели получена генеральная совокупность исследуемого параметра и найдены характеристики: $n = 30$, $\bar{x} = 0,25$, исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 0,02$. При уровне значимости 0,01 проверим нулевую гипотезу о равенстве $\bar{x} = a$, т. е. проверим $H_0 : \bar{x} = a$ при конкурирующей $H_1 : \bar{x} > a$.

18. При прогоне модели получены совокупность значений исследуемой величины $\{10, 0.14, 0.16, 0.12, 0.14\}$. Проверить, является ли данный всплеск нормальным или это ошибка эксперимента.

19. По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 20$ и $n_2 = 15$, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2 = 7$ и $s_2^2 = 8$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(s_1^2) = M(s_2^2)$ при конкурирующей $H_1 : M(s_1^2) < M(s_2^2)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

20. Создана модель по проектной документации и изучается параметр, о котором известно, что он должен принимать значения $7 \pm 0,1$. После прогона модели из результатов извлечена выборка объемом $n = 32$ и найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 0,42$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных с проектными, т. е. проверить $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ при конкурирующей $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.

21. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 14$ из выборки $n_1 = 15$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 31$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 12$. Генеральные дисперсии: $D(X) = 1$ и $D(Y) = 2$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) < M(Y)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

22. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 12,5$ из выборки $n_1 = 110$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 90$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 12,1$. Выборочные дисперсии: $D(X) = 1$ и $D(Y) = 1,2$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) < M(Y)$. Предполагается, что первая совокупности распределена нормально, вторая имеет неизвестное распределение.

23. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 54$ из выборки $n_1 = 30$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 25$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 44$. Так же по данным малым выборкам найдены исправленные дисперсии: $s_X^2 = 1,5$ и $s_Y^2 = 2,2$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т.е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) < M(Y)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

24. Необходимо сравнить характеристики, полученные в результате работы модели, и при наблюдении за изучаемой системой. Получены две генеральные совокупности X и Y , в предположении распределенные нормально, но в силу малых выборок сложно получить для них хорошие оценки генеральных дисперсий, поэтому рассчитаны исправленные дисперсии. Получены параметры: $n_1 = 4$, $\bar{x} = 32$, $s_X^2 = 4,22$, $n_2 = 5$, $\bar{x} = 28$, $s_Y^2 = 3,11$. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о значимости расхождения средних, т.е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) < M(Y)$.

25. Спроектирована модель в результате работы, которой один из параметров должен быть равен $a = 12$ (согласно проектной документации). При погонах построенной модели получена генеральная совокупность исследуемого параметра и найдены характеристики: $n = 200$, $\bar{x} = 21,5$, $\sigma = 0,87$. При уровне значимости 0,05 проверим нулевую гипотезу о равенстве $\bar{x} = a$, т.е. проверим $H_0 : \bar{x} = a$ при конкурирующей $H_1 : \bar{x} < a$.

26. Спроектирована модель в результате работы, которой один из параметров должен быть равен $a = 120$ (согласно проектной документации). При погонах построенной модели получена генеральная совокупность исследуемого параметра и найдены характеристики: $n = 22$, $\bar{x} = 99$, исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 4,2$. При уровне значимости 0,05 проверим нулевую гипотезу о равенстве $\bar{x} = a$, т.е. проверим $H_0 : \bar{x} = a$ при конкурирующей $H_1 : \bar{x} < a$.

27. При прогоне модели получены совокупность значений исследуемой величины $\{2, 3, 2, 3, -14\}$. Проверить, является ли данный всплеск нормальным или это ошибка эксперимента.

28. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 14$ из выборки $n_1 = 15$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 31$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 12$. Генеральные дисперсии: $D(X) = 1$ и $D(Y) = 2$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т.е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) < M(Y)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

29. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 12,5$ из выборки $n_1 = 110$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 90$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 12,1$. Выборочные дисперсии: $D(X) = 1$ и $D(Y) = 1,2$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т.е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) < M(Y)$.

Предполагается, что первая совокупности распределена нормально, вторая имеет неизвестное распределение.

30. По результатам работы модели найдена средняя выборочная $\bar{x} = 54$ из выборки $n_1 = 30$. Так же по наблюдением за изучаемой системой получена выборка $n_2 = 25$ и вычислена выборочная средняя $\bar{y} = 44$. Так же по данным малым выборкам найдены исправленные дисперсии: $s_X^2 = 1,5$ и $s_Y^2 = 2,2$. При уровне значимости 0,05 проверить согласованность полученных данных при работе модели с данными, полученными при наблюдении за работой реальной системы, т. е. проверить $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей $H_1 : M(X) < M(Y)$. Предполагается, что обе совокупности распределены нормально.

2. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

2.1. Задача линейного программирования

Рассмотрим задачи распределительного типа.

«Задача о диете».

Для нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно требуется питание, содержащее не менее b_1 единиц калорий, b_2 единиц белка, b_3 единиц витамина С. Данную потребность можно покрыть (перекрыть), употребляя ежедневно x_1 единиц хлеба, x_2 единиц мяса. Пусть единица i -го продукта питания стоит c_k денежных единиц и содержит a_{ik} единиц питательного ингредиента k . Задача состоит в составлении наиболее дешевого суточного рациона.

Сведем данные задачи в таблицу.

	Хлеб (x_1)	Мясо (x_2)	Потребность (не менее)
Калории	a_{11}	a_{12}	b_1
Белок	a_{21}	a_{22}	b_2
Витамин С	a_{31}	a_{32}	b_3
Стоимость	c_1	c_2	

Решением является набор употребляемых в пищу продуктов, характеризуемый набором чисел (вектором) (x_1, x_2) . Решение допустимо, если соответствующий набор содержит достаточное количество каждого ингредиента питания:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3. \end{cases}$$

Целью задачи является минимизация цены употребляемого набора продуктов, т. е. суммы

$$c_1x_1 + c_2x_2.$$

В данной задаче одна целевая функция.

«Задача о рюкзаке» («Задача о ранце»).

Имеется пять предметов, причем каждый из них обладает массой m_i , объемом v_i , ценой c_i и численной оценкой полезности в походе p_i ($i = \overline{1,5}$). Турист составляет набор из предметов так, чтобы суммарная их масса и объем не превосходил заданных границ: веса M , который может нести турист, и объема его рюкзака V .

Пусть

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если предмет } i \text{ выбран;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда условия ограничений массы и объема

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5 \leq M,$$

$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 + v_5x_5 \leq V.$$

При этом суммарная цена должна быть по возможности наименьшей

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5,$$

а суммарная полезность

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5x_5$$

по возможности наибольшей.

Решениями являются всевозможные наборы предметов, которые удовлетворяют ограничениям по массе и объему. Оптимальными решениями будут те, которые обеспечивают наибольшую целесообразность в смысле цены и полезности.

В данной задаче две целевые функции.

Задача линейного программирования (ЗЛП) имеет вид:

Найти

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k \rightarrow \text{extr};$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i, & i \in I_1; \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, & i \in I_2; \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \geq b_i, & i \in I_3; \\ x_k \geq 0, & k = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где c_k , a_{ik} , b_i — заданные постоянные величины;

I_1 , I_2 , I_3 — попарно непересекающиеся множества и $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, \dots, m\}$.

Без ограничения общности будем считать, что все $b_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Если это условие нарушено, то необходимо умножить обе части неравенства на (-1) .

Задача оптимизации при таких ограничениях может иметь:

- 1) единственное допустимое оптимальное решение;
- 2) несколько допустимых оптимальных решений;

3) такое допустимое решение, при котором функция $\sum_{k=1}^n c_k x_k$ оказывается не-

ограниченной, т. е. значение функции может быть сколь угодно большим для задачи максимизации или сколь угодно малым для задачи минимизации за счет выбора соответствующего допустимого решения;

4) не иметь ни одного допустимого решения, т. е. может не существовать таких значений переменных $x_k \geq 0$, $k = \overline{1, n}$, которые удовлетворяли всем ограничениям.

Функцию $\sum_{k=1}^n c_k x_k$ называют **целевой** и, как правило, находят ее $\max$ или $\min$.

Если необходимо найти $\min$ целевой функции, то, умножив ее на (-1) , перейдем к нахождению $\max$, и наоборот, т. е.

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k \rightarrow \min \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (-c_k) x_k \rightarrow \max.$$

Любое неравенство типа « $\geq$ », умножением на (-1) , переведем к неравенству типа « $\leq$ ».

Ограничения типа неравенства можно записать в виде равенства путем введения нового неотрицательного элемента. Так если неравенство имеет вид

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i,$$

то с помощью дополнительного переменного (остаточного) $y \geq 0$ его можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + y = b_i.$$

Аналогично неравенство вида

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \geq b_i,$$

можно представить в виде ($y \geq 0$ — избыточная переменная)

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k - y = b_i, \quad y \geq 0.$$

Переменную x_k , принимающую любое действительное значение (положительное, отрицательное или нуль), можно заменить разностью $x'_k - x''_k$ двух переменных, принимающих лишь неотрицательные значения $x'_k \geq 0$ и $x''_k \geq 0$.

Таким образом, задачу линейного программирования можно представить в виде **стандартной (канонической) задачи** линейного программирования

Найти

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i, & i = \overline{1, m}; \\ x_k \geq 0, & k = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Так же линейную задачу путем введения новых неизвестных (путем увеличения размерности задачи) можно представить в виде **основной задачи** линейного программирования, когда все ее ограничения имеют форму равенств (кроме ограничений неотрицательности), т. е.:

Найти

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k \rightarrow \max ;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, & i = \overline{1, m}; \\ x_k \geq 0, & k = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, удовлетворяющий системе ограничений задачи линейного программирования, называется **допустимым решением (планом)**.

План $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$, при котором целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, называется **оптимальным**.

Задачу линейного программирования можно представить в матричной форме

Найти

$$F = c \cdot x \rightarrow \max ;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} A \cdot x = b; \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Здесь n — число переменных;

m — число неравенств (ограничений);

A — матрица размера $m \times n$;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — вектор неизвестных;

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$;

$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$.

Предполагается, что $\text{rang}(A) = m$, т. е. число уравнений равно рангу матрицы A . Если $\text{rang}(A) < m$, то одна или несколько строк матрицы (системы неравенств) могут быть представлены в виде линейной комбинации остальных. В зависимости от значений коэффициентов b_i соответствующие ограничения будут излишними (их можно исключить из задачи) либо не согласованными с остальными (система $A \cdot x = b$ не имеет решения).

Рассмотрим задачу линейного программирования в виде

Найти

$$F = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \max ;$$

при ограничениях

$$x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + \dots + x_n \cdot P_n = P_0,$$

$$x_k \geq 0, \quad k = \overline{1, n},$$

где P_0 и $P_1, \dots, P_n$ — m -мерные векторы-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы условий (уравнений) задачи

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

План $x^i = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ называется **опорным планом** задачи линейного программирования, если положительные коэффициенты $x_k > 0$ стоят при линейно независимых векторах P_k ($k = \overline{1, n}$).

2.1.1. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования ($n = 2$)

Для понимания сути алгебраического решения задач линейного программирования воспользуемся геометрическим методом. Рассмотрим некоторые задачи линейного программирования, содержащие две переменные.

Единственное решение.

Найти

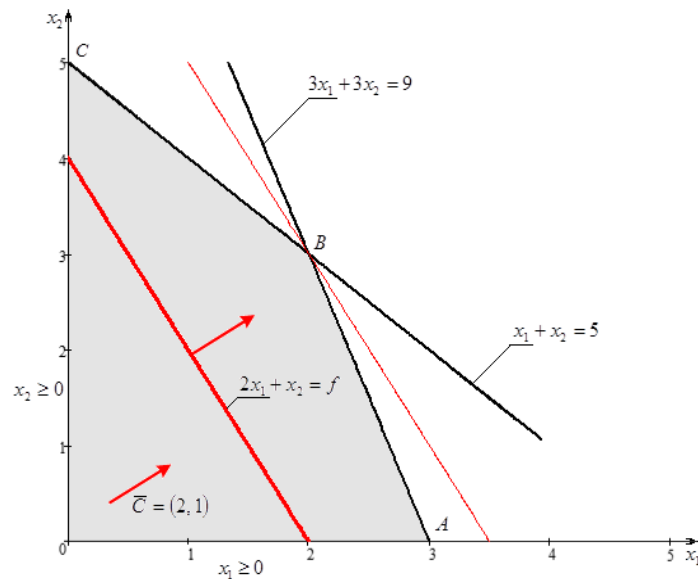
$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Каждое из ограничений представляет собой полуплоскость, а их совокупность образует многоугольник $OABC$, который содержит область значений x_1 и x_2 , удовлетворяющих системе неравенств. Множество точек, принадлежащих области, ограниченной многоугольником $OABC$, называется **множеством решений**. Данное множество должно быть **выпуклым**, т. е. любой отрезок, соединяющий две произвольным образом выбранные точки заданного множества, лежит внутри или проходит вдоль границы $OABC$.

Для построения области решений каждое неравенство заменим равенством, чертим данные прямые и, исходя из знака неравенств, определяем искомую область. Построим прямую $2x_1 + x_2 = f$, где f — произвольное число такое, что данная прямая проходит через многоугольник $OABC$. Построим вектор $\vec{C} = (2, 1)$. Мысленно передвигая прямую $2x_1 + x_2 = f$ в направлении вектора $\vec{C} = (2, 1)$, определяем, что целевая функция достигает максимума в точке B . Координаты точки B определяем из совместного решения уравнений $x_1 + x_2 = 5$ и $3x_1 + x_2 = 9$. В результате $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ и $F_{\max} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$.



Альтернативные оптимальные решения.

Найти

$$F = 5x_1 + 20x_2 \rightarrow \max;$$

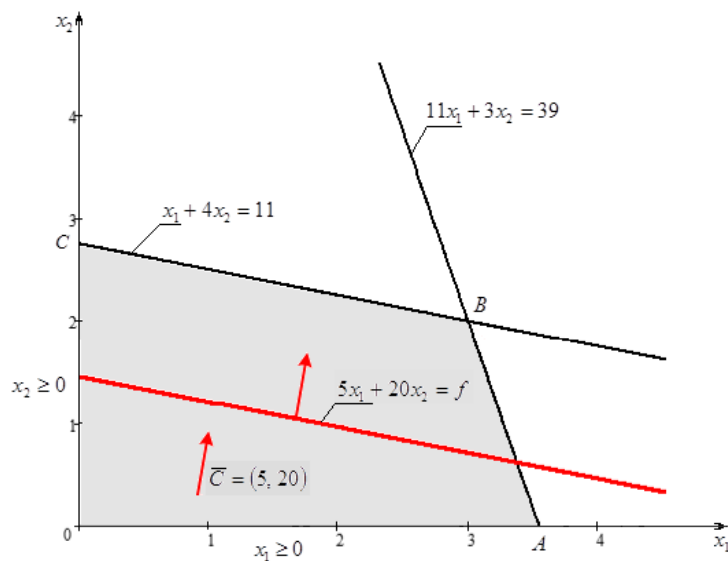
при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 11, \\ 11x_1 + 3x_2 \leq 39, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача отличается от предыдущей целевой функцией, коэффициенты при неизвестных которой пропорциональны коэффициентам в первом неравенстве системы ограничений, следовательно, имеем две параллельные прямые.

В данном случае все точки (бесконечное множество точек), принадлежащие отрезку BC , являются оптимальными. Значение целевой функции будет одинаковым для всех точек отрезка BC и равно 55.

Вариант решения задачи выбирает исследователь в зависимости от поставленных целей.



Неограниченные оптимальные решения.

Найти

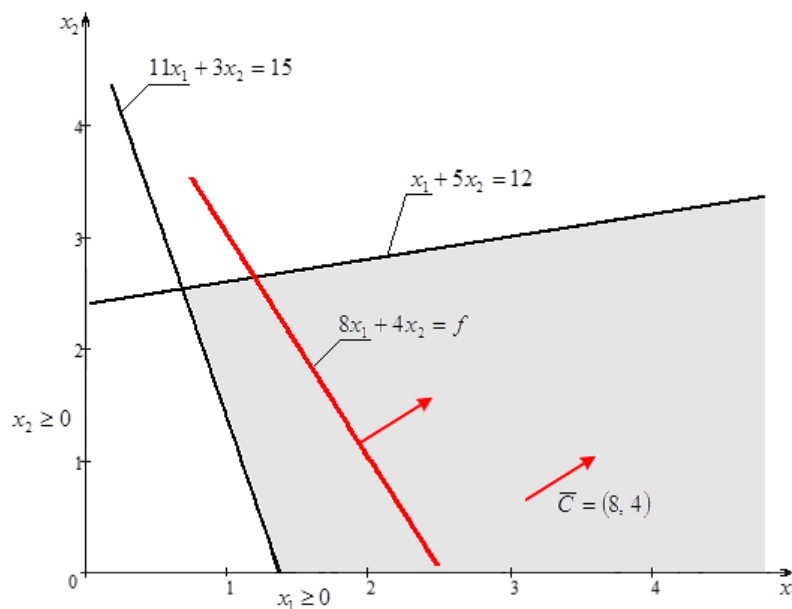
$$F = 8x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 12, \\ 11x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для данной задачи значение целевой функции может быть сколь угодно большим, т. к. не встречаем «преград» при передвижении функции $8x_1 + 4x_2 = f$ в направлении вектора $\bar{C} = (8, 4)$.

Учитывая, что решаем задачу на max, то на прямой $x_1 + 5x_2 = 12$ всегда найдется точка, в которой целевая функция примет еще большее значение.



Задача, не имеющая решение.

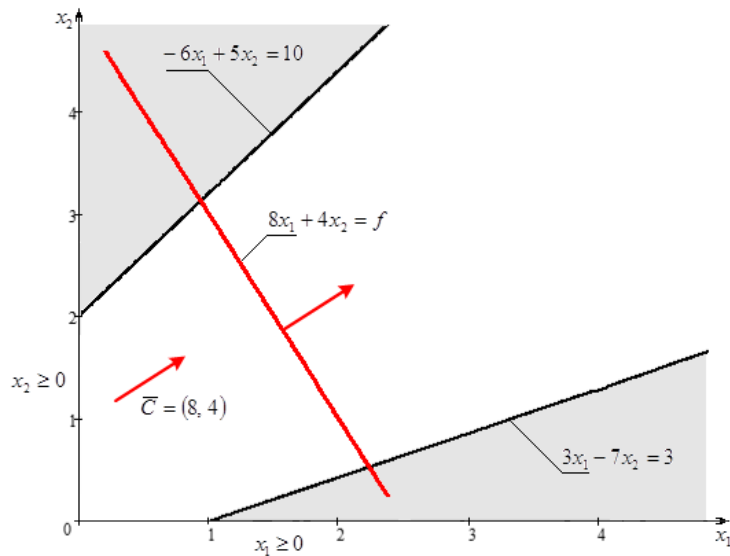
Найти

$$F = 8x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -6x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 3x_1 - 7x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Множество решений пусто.



2.1.2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования ($n > 2$)

Пусть требуется решить задачу

Найти

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k \rightarrow \max ;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i, & i = \overline{1, m}; \\ x_k \geq 0, & k = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Рассмотрим n -мерное евклидово пространство.

Каждому уравнению

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

соответствует гиперплоскость, делящая n -мерное пространство на два полупространства. Учитывая знак неравенства в ограничениях задачи, получим m гиперплоскостей, определяющих множество допустимых решений. Если данное множество непустое, то оно является выпуклым и **полиэдральным**. Грани полиэдра лежат на гиперплоскостях, а ребра и вершины — на их пересечении.

Целевая функция так же представляет собой гиперплоскость в пространстве решений.

Оптимальное решение задается экстремальной точкой (вершиной) полиэдра, определяющего область допустимых решений. Если таких точек несколько, то оптимальными являются все точки, лежащие на ребрах и гранях, соединяющие эти экстремальные точки.

2.1.3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в пространстве условий

Рассмотрим только случай существования единственного решения — ограниченное оптимальное решение.

Любая линейная модель может быть изображена графически в m -мерном пространстве условий, где m равно числу ограничений (не считая условий неотрицательности переменных). Учитывая, что коэффициенты при любой переменной x_k (так же, как и набор констант в правых частях ограничений) определяет вектор в m -мерном пространстве, запишем ограничения в виде одного векторного неравенства. Множество точек, получаемое перебором всех возможных сумм таких векторов, умноженных на произвольные неотрицательные числа, образует в **пространстве условий выпуклый полиэдральный конус**. Задача имеет хотя бы одно решение, если вектор, заданный набором чисел в правых частях ограничений, не выходит за пределы этого конуса.

Задача оптимизации в данном случае может быть сформулирована как:

Найти векторы, удовлетворяющие условиям:

- 1) векторы лежат внутри выпуклого полиэдрального конуса;
- 2) сумма векторов дает вектор, определяемый константами в правых частях ограничений;
- 3) векторы максимизируют (минимизируют) значение целевой функции.

Рассмотрим задачу

Найти

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Запишем ее в виде основной задачи линейного программирования, заменив неравенства равенствами, путем введения дополнительных переменных.

Введем две дополнительные переменные x_3 и x_4 со знаком плюс, так как имеем неравенства вида « $\leq$ ». Тогда исходная система примет вид

$$F = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \rightarrow \max;$$

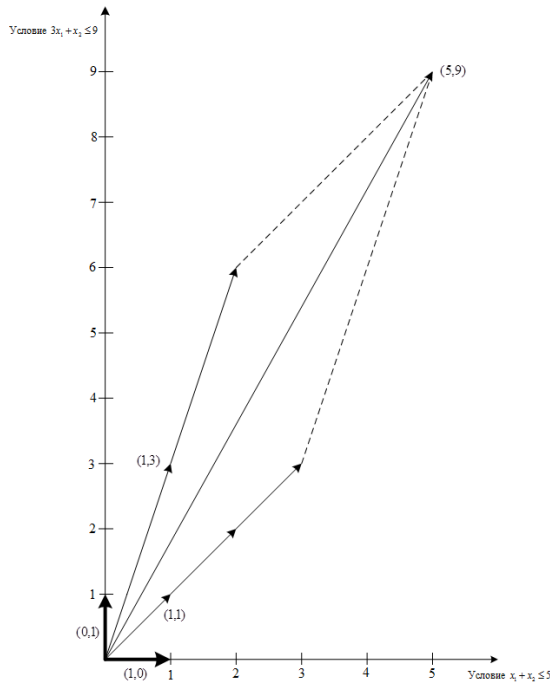
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 5, \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_4 = 9, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

Последнюю систему уравнений запишем в векторной форме

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4 = P_0,$$

где

$$P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Так как имеем два основных неравенства (равенства), то для образования опорного решения необходимо два единичных вектора, которые будут образовывать базис. Векторы P_3 и P_4 являются единичными, образуют базис двумерного пространства и лежат на осях.

Таким образом, пространство условий стало тождественно полному неотрицательному квадранту двумерного пространства.

Решение заключается в нахождении x_1 и x_2 . Как было показано выше, задача имеет решение $x^* = (2, 3)^T$. Тогда

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Никакая другая комбинация с векторами не дает аналогичного результата.

Таким образом, решение построено на двух единичных векторах, которые соответствуют дополнительным переменным x_3 и x_4 . Тогда, данные переменные назовем **базисными**, а остальные — **небазисными** (свободными).

Для нахождения максимального значения целевой функции, введем дополнительное (третье) измерение. Получаем набор векторов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

образующих в трехмерном пространстве полиэдральный конус.

Ограничивающий вектор имеет вид

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ Z \end{pmatrix},$$

где Z подлежит максимизации на множестве всех векторов, лежащих внутри конуса.

2.1.4. Симплексный метод (симплекс-метод) в форме уравнений

Пример 2.1.

Найти

$$F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 4x_1 + 1x_2 \leq 9, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

Решение.

Разделим первое и второе условие системы ограничений на 2.

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + 1x_2 \leq 9, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

Перейдем от системы неравенств к равенствам, введя три дополнительные переменные x_3 , x_4 и x_5 со знаком плюс, так как имеем неравенства вида « $\leq$ ». Тогда система примет вид

$$F = 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1 \cdot x_3 & = 4, \\ 2x_1 + 1x_2 & + 1 \cdot x_4 = 5, \\ 4x_1 + 1x_2 & + 1 \cdot x_5 = 9, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 5}), \end{cases}$$

Итерация 1.

Шаг 1. Систему уравнений запишем в векторной форме

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4 + x_5 P_5 = P_0,$$

где

$$P_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как имеем три основных неравенства (равенства), то для опорного решения необходимо три единичных вектора, которые будут образовывать базис. Векторы P_3 , P_4 и P_5 являются единичными, образуют базис трехмерного пространства. Тогда переменные x_3 , x_4 и x_5 — **базисные**; x_1 и x_2 — **небазисные**.

Пусть $F = x_0$. Выразим базисные переменные через небазисные и перепишем условие задачи в виде

$$\begin{cases} x_0 = 6x_1 + 4x_2, \\ x_3 = 4 - 1x_1 - 1x_2, \\ x_4 = 5 - 2x_1 - 1x_2, \\ x_5 = 9 - 4x_1 - 1x_2. \end{cases} \quad (*)$$

Приравняем небазисные переменные нулю и, согласно определению, запишем опорный план для нашей задачи: $x^0 = (0; 0; 4; 5; 9)^T$. Значение целевой функции $F = 0$.

Если все небазисные переменные целевой x_0 функции имеют отрицательные или нулевые коэффициенты, то решение на шаге 1 является оптимальным.

Полученный вектор не является оптимальным, т. к. коэффициенты при небазисных переменных положительные и, увеличивая x_1 и/или x_2 , можно увеличить значение целевой функции.

Шаг 2. В выражении для x_0 (целевая функция) выбираем небазисную переменную с наибольшим положительным значением, стоящего перед ней коэффициента, т. е. переменную, которая обеспечит наибольшее приращение значения целевой функции.

Учитывая, что в целевой функции переменные x_1 и x_2 входят с неотрицательными коэффициентами ($c_1 = 6$ и $c_2 = 4$), то значение F можно увеличить за счет увеличения x_1 и/или x_2 , при этом должны быть соблюдены условия (ограничения) задачи.

Шаг 3. Так как коэффициент при x_1 имеет наибольшее положительное значение ($c_1 = 6$), то будем увеличивать значение целевой функции F , увеличивая x_1 , при этом оставляя x_2 равным 0 и соблюдая ограничения задачи. Так как все $x_k \geq 0$, то выражение для x_3 в (*) позволяет увеличить x_1 до 4; выражение для x_4 ограничивает возможность увеличения x_1 до $5/2$; выражение для x_5 позволяет увеличить x_1 до $9/4$.

Для выполнения условий (*) найдем

$$\min \left\{ 4, \frac{5}{2}, \frac{9}{4} \right\} = \frac{9}{4},$$

следовательно, на данном этапе x_1 может принять лишь значение $9/4$, так как при остальных значениях не будут выполнены условия задачи.

Следовательно, x_5 (позволяющее увеличить x_1 до $9/4$) исключаем из базиса, а x_1 вводим в базис.

Шаг 4. Методом Гаусса-Жордана преобразуем систему, исключив x_1 из всех уравнений системы, кроме пятого (пятое уравнение содержит базисную переменную x_5).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_0 - 6x_1 - 4x_2 & = & 0, \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 & = & 4, \\ 2x_1 + 1x_2 & + & 1x_4 = 5, \\ 4x_1 + 1x_2 & & + 1x_5 = 9. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_0 & -\frac{5}{2}x_2 & +\frac{3}{2}x_5 = \frac{27}{2}, \\ & \frac{3}{4}x_2 + 1x_3 & -\frac{1}{4}x_5 = \frac{7}{4}, \\ & \frac{1}{2}x_2 & + 1x_4 - \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2}, \\ 1x_1 + \frac{1}{4}x_2 & & + \frac{1}{4}x_5 = \frac{9}{4}. \end{array} \right.$$

Выразим базисные x_1 , x_3 и x_4 переменные через небазисные x_2 и x_5 .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{27}{2} + \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_5, \\ x_3 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_5, \\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5, \\ x_1 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_5. \end{array} \right. \quad (**)$$

Приравняем небазисные переменные нулю и, согласно определению, запишем новый опорный план для нашей задачи: $x^1 = (9/4; 0; 7/4; 1/2; 0)^T$. Значение целевой функции составит $F = 27/2$.

Если все небазисные переменные целевой функции имеют отрицательные или нулевые коэффициенты, то решение является оптимальным.

Полученный вектор не является оптимальным, т. к. коэффициент при небазисной переменной x_2 положительный и значение целевой функции можно увеличить за счет увеличения x_2 .

Итерация 2.

Шаг 1. Пропускаем.

Шаг 2. Учитывая, что целевая функция в (**) содержит только переменную x_2 с неотрицательным коэффициентом, то значение F можно увеличить за счет увеличения данной переменной (x_2), при этом должны быть соблюдены условия (ограничения) задачи.

Шаг 3. Будем увеличивать значение целевой функции F , увеличивая x_2 , при этом оставляя x_5 равным 0 и соблюдая ограничения. Так как все $x_k \geq 0$, то выражение для x_3 в (**) ограничивает возможность увеличения x_2 до $7/3$; выражение для x_4 позволяет увеличить x_2 до 1; выражение для x_1 ограничивает возможность увеличения x_2 до 9.

Для выполнения условий (**) найдем

$$\min \left\{ \frac{7}{3}, 1, 9 \right\} = 1,$$

следовательно, на данном этапе x_2 может принять лишь значение 1, так как при остальных значениях не будут выполнены условия задачи.

Следовательно, x_4 (позволяющее увеличить x_2 до 1) исключаем из базиса, а x_2 вводим в базис.

Шаг 4. Методом Гаусса-Жордана преобразуем систему, исключив x_2 из всех уравнений системы, кроме третьего (третье уравнение содержит базисную переменную x_4).

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_5 = \frac{27}{2}, \\ \frac{3}{4}x_2 + 1x_3 - \frac{1}{4}x_5 = \frac{7}{4}, \\ \frac{1}{2}x_2 + 1x_4 - \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2}, \\ 1x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_5 = \frac{9}{4}. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 + 5x_4 - x_5 = 16, \\ 1x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 1, \\ 1x_2 + 2x_4 - 1x_5 = 1, \\ 1x_1 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 2. \end{array} \right.$$

Выразим базисные x_1 , x_2 и x_3 переменные через небазисные x_4 и x_5 .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 16 - 5x_4 + x_5, \\ x_3 = 1 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_4 + 1x_5, \\ x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5. \end{array} \right. \quad (***)$$

Приравняем небазисные переменные нулю и, согласно определению, запишем новый опорный план для нашей задачи: $x^2 = (2; 1; 1; 0; 0)^T$. Значение целевой функции $F = 16$.

Если все небазисные переменные целевой функции имеют отрицательные или нулевые коэффициенты, то решение является оптимальным.

Полученный вектор не является оптимальным.

Итерация 3.

Шаг 1. Пропускаем.

Шаг 2. Учítывая, что в целевой функции (первое уравнение) только переменная x_5 входит с неотрицательным коэффициентом, то значение F можно увеличить за счет увеличения данной переменной (x_5), при этом должны быть соблюдены условия (ограничения) задачи.

Шаг 3. Будем увеличивать значение целевой функции F , увеличивая x_5 , при этом оставляя x_4 равным 0 и соблюдая ограничения задачи. Так как все $x_k \geq 0$, то выражение для x_3 в (***) ограничивает возможность увеличения x_5 до 2 и x_1 до 4. При этом увеличение x_5 в x_2 неограниченно увеличивает ее (x_2), следовательно x_2 — оптимальная переменная.

Для выполнения условий (***) найдем

$$\min\{2, 4\} = 2,$$

следовательно, на данном этапе x_5 может принять лишь значение 2, так как при остальных значениях не будут выполнены условия задачи.

Следовательно, x_3 , позволяющее увеличить x_5 до 2, исключаем из базиса, а x_5 вводим в базис.

Шаг 4. Методом Гаусса-Жордана преобразуем систему, исключив x_3 из всех уравнений системы, кроме второго.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_0 & + 5x_4 & - x_5 = 16, \\ & 1x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 1, \\ & 1x_2 & + 2x_4 - 1x_5 = 1, \\ & 1x_1 & - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 2. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_0 & 2x_3 + 2x_4 & = 18, \\ & 2x_3 - 3x_4 + 1x_5 = 2, \\ & 1x_2 + 2x_3 - 1x_4 & = 3, \\ & 1x_1 & - 1x_3 + 1x_4 = 1. \end{array} \right.$$

Выразим базисные x_1 , x_2 и x_5 переменные через небазисные x_3 и x_4 .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 18 - 2x_3 - 2x_4, \\ x_5 = 2 - 2x_3 + 3x_4, \\ x_2 = 3 - 2x_3 + 1x_4, \\ x_1 = 1 + 1x_3 - 1x_4. \end{array} \right.$$

Приравняем небазисные переменные нулю и, согласно определению, запишем опорный план для нашей задачи: $x^3 = (1; 3; 0; 0; 2)^T$. Значение целевой функции $F = 18$.

Так как в целевой функции переменные x_3 и x_4 входят с отрицательными коэффициентами, то значение F увеличить нельзя. Таким образом, полученный вектор является оптимальным.

Удалим значения дополнительных переменных, получим оптимальное решение $x^* = (1; 3)^T$ и $F_{\max} = 18$.

2.1.5. Анализ на чувствительность решения задачи линейного программирования

Под **чувствительностью** будем понимать тот факт, что при изменении коэффициентов целевой функции и свободных коэффициентов ограничений в некотором диапазоне оптимальный базис решения не изменится. Или, в каком интервале можно менять входные параметры без значительного нарушения структуры базиса, формирующего оптимальное решение (т. е. базис при последней итерации симплекс-метода).

Целевая функция.

Пример 2.2. Рассмотрим задачу

Найти

$$F = 1x_1 + 2x_2 \rightarrow \max ;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 5, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

Решение.

Перейдем от системы неравенств к равенствам, введя дополнительные переменные.

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 1x_2 + x_4 = 5, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

Пусть $F = x_0$. Тогда условие задачи с учетом дополнительных переменных перепишем в виде

$$\begin{cases} x_0 = 1x_1 + 2x_2, \\ x_3 = 10 - 1x_1 + 3x_2, \\ x_4 = 5 - 2x_1 - 1x_2. \end{cases}$$

Так как коэффициент при x_2 в x_0 имеет наибольшее положительное значение ($c_2 = 2$), то будем увеличивать значение целевой функции F , увеличивая x_2 , при этом оставляя x_1 равным 0 и соблюдая ограничения задачи. Так как все $x_k \geq 0$, то выражение для x_3 позволяет увеличить x_2 до $10/3$; выражение для x_4 ограничивает возможность увеличения x_2 до 5.

Тогда

$$\min \left\{ \frac{10}{3}, 5 \right\} = \frac{10}{3},$$

следовательно, x_3 в базисе заменяем на x_2 .

Методом Гаусса-Жордана преобразуем систему, исключив x_2 из всех уравнений системы, кроме второго.

$$\begin{cases} x_0 - 1x_1 - 2x_2 = 0, \\ 1x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 1x_2 + x_4 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{20}{3}, \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{10}{3}, \\ \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + x_4 = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Последнюю систему перепишем в виде

$$\begin{cases} x_0 = \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3, \\ x_2 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3, \\ x_4 = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3. \end{cases}$$

Теперь будем увеличивать значение целевой функции F , увеличивая x_1 , при этом оставляя x_3 равным 0 и соблюдая ограничения задачи.

Тогда

$$\min\{10, 1\} = 1,$$

следовательно, в базисе x_4 заменяем на x_1 .

Методом Гаусса-Жордана преобразуем систему, исключив x_1 из всех уравнений системы, кроме последнего.

$$\begin{cases} x_0 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{20}{3}, \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{10}{3}, \\ \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + x_4 = \frac{5}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 7, \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 3, \\ x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальное решение $x^* = (1; 3)^T$ и $F_{\max} = 7$ при этом базисными переменными являются x_1 и x_2 .

Рассмотрим, в каких пределах можно изменить коэффициент при x_1 в целевой функции, чтобы оптимальный базис (базис последней итерации) остался неизменным.

Предположим, что коэффициент при x_1 получил приращение ε . Тогда целевая функция примет вид

$$F = (1 + \varepsilon)x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

Применяя симплекс метод к исходной системе

$$\begin{cases} x_0 - (1 + \varepsilon)x_1 - 2x_2 = 0, \\ 1x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 1x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} x_0 + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\varepsilon\right)x_3 + \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\varepsilon\right)x_4 = 7 + \varepsilon, \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 3, \\ x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = 1. \end{cases}$$

Откуда

$$F = x_0 = (7 + \varepsilon) - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\varepsilon\right)x_3 - \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\varepsilon\right)x_4.$$

Учитывая идею симплекс-метода (шаг 2 и шаг 3), решение будет оптимальным, если для коэффициентов целевой функции выполняются условия

$$\begin{cases} \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\varepsilon > 0, \\ \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\varepsilon > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon < 3, \\ \varepsilon > -\frac{1}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \varepsilon < 3.$$

В противном случае, коэффициенты при x_3 и x_4 будут положительными, полученный базис перестает быть оптимальным, что повлечет дальнейшее решение. Тогда, согласно симплекс-методу (шаг 3), x_3 или x_4 будут входить в очередное базисное решение.

Таким образом, для того чтобы полученное базисное решение не изменилось, коэффициент $c_1 = 1$ при x_1 в исходной системе можно изменять в пределах

$$-\frac{1}{3} < \varepsilon < 3 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3} < c_1 < 1 + 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < c_1 < 4.$$

Изменение коэффициента в целевой функции в найденных пределах не изменяет базиса, но (естественно) влечет к изменению значения целевой функции.

Приведем решение данной задачи в Mathcad с разными коэффициентами. Оптимальный базис не изменяется (x_1 и x_2 входят в решение с ненулевыми значениями), но значение целевой функции изменяется. Необходимо отметить, что решение также не изменилось $x^* = (1; 3)^T$.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &:= 0.7x_1 + 2 \cdot x_2 \\ x_1 &:= 0 \quad x_2 &:= 0 \\ \text{Given} \\ x_1 &\geq 0 \quad x_2 &\geq 0 \\ 1x_1 + 3x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 5 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &:= \text{Maximize}(f, x_1, x_2) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 6.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &:= 3.9x_1 + 2 \cdot x_2 \\ x_1 &:= 0 \quad x_2 &:= 0 \\ \text{Given} \\ x_1 &\geq 0 \quad x_2 &\geq 0 \\ 1x_1 + 3x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 5 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &:= \text{Maximize}(f, x_1, x_2) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 9.9 \end{aligned}$$

Замечание. Если значение переменной в оптимальном решении равно нулю, то, как правило, данная переменная не входит в итоговый базис. Варьирование значений коэффициентов в ограничениях условия задачи при данной переменной (без изменения знака) не влечет за собой никаких изменений.

$f(x_1, x_2) := 4x_1 + 2 \cdot x_2$
 $x_1 := 0 \ x_2 := 0$
Given
 $x_1 \geq 0 \ x_2 \geq 0$
 $1x_1 + 3x_2 \leq 10$
 $2x_1 + 1x_2 \leq 5$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 10$$

$f(x_1, x_2) := 4x_1 + 2 \cdot x_2$
 $x_1 := 0 \ x_2 := 0$
Given
 $x_1 \geq 0 \ x_2 \geq 0$
 $1x_1 + 505x_2 \leq 10$
 $2x_1 + 321x_2 \leq 5$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 10$$

Пример 2.3.

Рассмотрим условие предыдущего примера.

Найти

$$F = 1x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 5, \\ x_k \geq 0 \ (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

Решение.

Найдем интервалы изменений всех коэффициентов целевой функции, при которых оптимальный базис (базис последней итерации) останется неизменным.

Пусть c_1 и c_2 получили приращение ε_1 и ε_2 соответственно, тогда целевая функция примет вид

$$F = (1 + \varepsilon_1)x_1 + (2 + \varepsilon_2)x_2 \rightarrow \max.$$

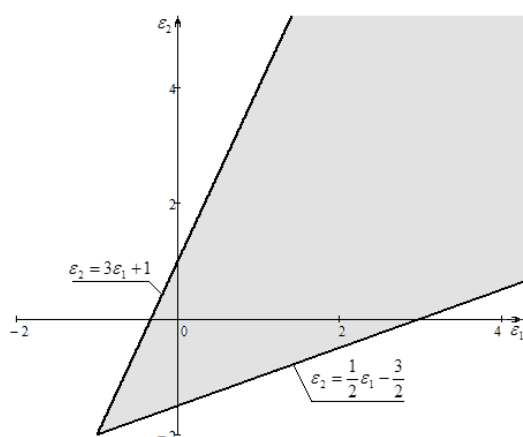
После решения симплекс-методом целевая функция примет вид

$$F = x_0 = (7 + \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2) - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\varepsilon_1 + \frac{2}{5}\varepsilon_2\right)x_3 - \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\varepsilon_1 - \frac{1}{5}\varepsilon_2\right)x_4.$$

Решение задачи будет оптимальным, если коэффициенты при переменных в целевой функции будут отрицательными, т. е. выполняются условия

$$\begin{cases} \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\varepsilon_1 + \frac{2}{5}\varepsilon_2 > 0, \\ \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\varepsilon_1 - \frac{1}{5}\varepsilon_2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}\varepsilon_1 - \frac{2}{5}\varepsilon_2 < \frac{3}{5}, \\ -\frac{3}{5}\varepsilon_1 + \frac{1}{5}\varepsilon_2 < \frac{1}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 < 3, \\ -3\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 < 1. \end{cases}$$

Решение системы образует плоскость, представленную на графике.



Возьмем произвольное решение системы возможных приращений: $\varepsilon_1 = -0,8$, $\varepsilon_2 = -1,89$ или $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3$. Тогда

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \quad \text{или} \quad F = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$f(x_1, x_2) := 0.2 \cdot x_1 + 0.11 \cdot x_2$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$1x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 5$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 0.53$$

$$f(x_1, x_2) := 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$1x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 5$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 17$$

Константы ограничений b_i .

Рассмотрим три случая:

1. Приращение дадим одному из коэффициентов b_i , соответствующему исходной переменной, входящей в итоговый базис и являющейся исходной переменной.

2. Приращение дадим одному из коэффициентов b_i , соответствующему дополнительной переменной, входящей в итоговый базис, но которая не входит в исходные переменные (одна из исходных переменных равна нулю).

3. В итоговый базис входят обе исходные переменные, приращение дадим обоим коэффициентам b_i .

Пример 2.4. Рассмотрим условие предыдущего примера.

Найти

$$F = 1x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 5, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

Решение.

В результате решения итоговая система принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 7, \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 3, \\ x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = 1. \end{cases}$$

Оптимальное решение данной задачи $x^* = (1; 3)^T$ и $F_{\max} = 7$ при этом базисными переменными являются x_1 и x_2 . Итоговой базисной переменной x_2 соответствует первое неравенство системы: $1x_1 + 3x_2 \leq 10$.

Найдем интервал изменений $b_1 = 10$ первого неравенства системы ограничений, при которых оптимальный базис (базис последней итерации) останется неизменным.

Система ограничений задачи примет вид

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq (10 + \varepsilon), \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 5, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

В результате решения получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_0 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 7 + \frac{3}{5}\varepsilon, \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 3 + \frac{2}{5}\varepsilon, \\ x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = 1 - \frac{1}{5}\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда $x_1 = 1 - \frac{1}{5}\varepsilon$ и $x_2 = 3 + \frac{2}{5}\varepsilon$. Учитывая, что $x_k \geq 0$ ($k = \overline{1, 2}$), запишем

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{5}\varepsilon \geq 0, \\ 3 + \frac{2}{5}\varepsilon \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon \leq 5, \\ \varepsilon \geq -\frac{15}{2}. \end{cases}$$

Таким образом

$$-\frac{15}{2} \leq \varepsilon \leq 5 \Leftrightarrow 10 - \frac{15}{2} \leq b_1 \leq 10 + 5 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq b_1 \leq 15.$$

Однако, подставив, граничные значения в систему ограничений, видим, что или x_2 , или x_1 выводятся из базиса.

$f(x_1, x_2) := 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ $x_1 := 0 \quad x_2 := 0$ Given $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $1x_1 + 3x_2 \leq \frac{5}{2}$ $2x_1 + 1x_2 \leq 5$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 5$	$f(x_1, x_2) := 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ $x_1 := 0 \quad x_2 := 0$ Given $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $1x_1 + 3x_2 \leq 15$ $2x_1 + 1x_2 \leq 5$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 25$

Запишем пределы изменения коэффициента b_1 , соответствующего исходной переменной x_2 , входящей в итоговый базис, в виде строгих неравенств

$$\frac{5}{2} < b_1 < 15,$$

тогда, при изменении b_1 в указанных пределах x_1 и x_2 остаются в итоговом базисе (базис остался неизменным), при этом, естественно, решение изменится.

$f(x_1, x_2) := 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ $x_1 := 0 \quad x_2 := 0$ Given $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $1x_1 + 3x_2 \leq \frac{5.1}{2}$ $2x_1 + 1x_2 \leq 5$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.49 \\ 0.02 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 5.08$	$f(x_1, x_2) := 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ $x_1 := 0 \quad x_2 := 0$ Given $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ $1x_1 + 3x_2 \leq 14.9$ $2x_1 + 1x_2 \leq 5$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 4.96 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 24.84$

Замечания.

1. Таким образом, знак ограничений на границе необходимо проверять отдельно.
2. В итоговой системе уравнений коэффициенты при ε равны соответствующим коэффициентам x_i .

Пример 2.5. Рассмотрим задачу.

Найти

$$F = 1x_1 + 2x_2 \rightarrow \max ;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 2, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

Решение.

В результате решения итоговая система принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + 3x_1 & + \frac{1}{5}x_4 = 4, \\ -5x_1 & + 1x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 1x_2 & + 1x_4 = 2. \end{cases}$$

Найдем интервал изменений $b_1 = 10$ первого неравенства системы ограничений, при которых оптимальный базис (базис последней итерации) останется неизменным.

Система ограничений задачи примет вид

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq (10 + \varepsilon), \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 2, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

В результате решения получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_0 + 3x_1 + \frac{1}{5}x_4 = 4, \\ -5x_1 + 1x_3 - 3x_4 = 4 + \varepsilon, \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_4 = 2. \end{cases}$$

Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 4 + \varepsilon$. Учитывая, что $x_k \geq 0$ ($k = \overline{1, 4}$), запишем $4 + \varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \varepsilon \geq -4$.

Таким образом

$$-4 \leq \varepsilon < +\infty \Leftrightarrow 10 - 4 \leq b_1 < +\infty \Leftrightarrow 6 \leq b_1 < +\infty.$$

Подставив, граничные значения в систему ограничений, видим, что итоговый базис и решение остались неизменными.

$$f(x_1, x_2) := 1x_1 + 2 \cdot x_2$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$1x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 4$$

$$f(x_1, x_2) := 1x_1 + 2 \cdot x_2$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$1x_1 + 3x_2 \leq 789$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 4$$

Пример 2.6. Рассмотрим задачу.

Найти

$$F = 1x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 5, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

Решение.

В результате решения итоговая система принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 7, \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 3, \\ x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = 1. \end{cases}$$

Оптимальное решение данной задачи $x^* = (1; 3)^T$ и $F_{\max} = 7$ при этом базисными переменными являются x_1 и x_2 .

Рассмотрим, в каких пределах можно изменить коэффициенты $b_1 = 10$ и $b_2 = 5$, чтобы оптимальный базис (базис последней итерации) остался неизменным.

Пусть b_1 и b_2 получили приращение ε_1 и ε_2 соответственно, тогда система ограничений примет вид

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq (10 + \varepsilon_1), \\ 2x_1 + 1x_2 \leq (5 + \varepsilon_2), \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

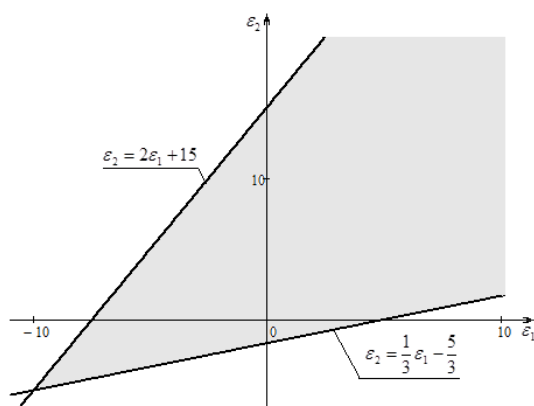
В результате решения получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_0 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 7 + \frac{3}{5}\varepsilon_1 + \frac{1}{5}\varepsilon_2, \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 3 + \frac{2}{5}\varepsilon_1 - \frac{1}{5}\varepsilon_2, \\ x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = 1 - \frac{1}{5}\varepsilon_1 + \frac{3}{5}\varepsilon_2. \end{cases}$$

Тогда $x_1 = 1 - \frac{1}{5}\varepsilon_1 + \frac{3}{5}\varepsilon_2$, $x_2 = 3 + \frac{2}{5}\varepsilon_1 - \frac{1}{5}\varepsilon_2$ и, учитывая, что $x_k \geq 0$ ($k = \overline{1, 4}$), запишем

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{5}\varepsilon_1 + \frac{3}{5}\varepsilon_2 > 0, \\ 3 + \frac{2}{5}\varepsilon_1 - \frac{1}{5}\varepsilon_2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}\varepsilon_1 - \frac{3}{5}\varepsilon_2 < 1, \\ -\frac{2}{5}\varepsilon_1 + \frac{1}{5}\varepsilon_2 < 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 < 5, \\ -2\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 < 15. \end{cases}$$

Решение системы образует плоскость, представленную на графике.



Возьмем произвольное решение системы возможных приращений: $\varepsilon_1 = -9$, $\varepsilon_2 = -4$ или $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3$. Тогда

$$f(x_1, x_2) := 1x_1 + 2 \cdot x_2$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$1x_1 + 3x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 0.8$$

$$f(x_1, x_2) := 1x_1 + 2 \cdot x_2$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$1x_1 + 3x_2 \leq 11$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 2.8 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 8.2$$

Таким образом, итоговый базис не изменился, решение изменилось.

Замечание.

1. Знак ограничений на границе необходимо проверять отдельно.
2. В итоговой системе уравнений коэффициенты при ε равны соответствующим коэффициентам x_i .

2.1.6. Двойственная задача линейного программирования

При установлении взаимосвязи для различных методов анализа математических моделей на чувствительность вводится понятие двойственности.

Каждой задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} & F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max; \\ & \sum_{k=1}^n c_k x_k \rightarrow \max; \\ & \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i, & i = \overline{1, m}; \\ x_k \geq 0, & k = \overline{1, n}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_k \geq 0, & k = \overline{1, n}. \end{cases} \end{aligned}$$

соответствует двойственная задача

$$\begin{aligned} & H = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min; \\ & \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min; \\ & \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ik} y_i \geq c_k, & k = \overline{1, n}; \\ y_i \geq 0, & i = \overline{1, m}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n, \\ y_i \geq 0, & i = \overline{1, m}. \end{cases} \end{aligned}$$

Или в матричной форме:

$$\begin{array}{ll} \text{прямая задача} & \text{двойственная задача} \\ F = c \cdot x \rightarrow \max; & H = b^T \cdot y \rightarrow \min; \\ \begin{cases} A \cdot x \leq b; \\ x \geq 0. \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} A^T \cdot y \geq c^T; \\ y \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Здесь A — матрица размера $m \times n$ коэффициентов ограничений;
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — вектор неизвестных; $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$; $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$.

Прямая и двойственная задачи связаны следующими правилами.

1. Значение целевой функции прямой задачи максимизируется, двойственной — минимизируется.
2. Знаки ограничений прямой задачи « $\leq$ », двойственной — « $\geq$ ».
3. Коэффициенты целевой функции заменяются коэффициентами правых частей неравенств и наоборот.
4. Матрица коэффициентов A одной задачи, в другой задаче будет A^T .
5. Если переменная x_j прямой задачи может принимать только неотрицательные значения, то j -е ограничение в системе двойственной задачи является неравенством вида « $\geq$ ». Если переменная x_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то j -е ограничение в системе двойственной задачи является уравнением (« $=$ »). Если i -е ограничение в системе прямой задачи является неравенством, то i -я переменная принимает только положительные значения ($y_i \geq 0$). Если i -е ограничение в системе прямой задачи является уравнением, то y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема двойственности.

1. Если прямая и двойственная ей задачи имеют допустимые решения, то:
 - а) существует оптимальное решение x_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$) исходной задачи;
 - б) существует оптимальное решение y_i^* ($i = 1, 2, \dots, m$) двойственной задачи;
 - в) имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*,$$

т. е. **обе задачи имеют одинаковое решение.**

2. Если прямая (двойственная) задача допускает оптимальное решение, для которого значение целевой функции ограничено, то соответствующая ей двойственная (прямая) задача допускает оптимальное решение при том же значении целевой функции.

Экономическая интерпретация. Рассмотрим задачу. При производстве двух устройств $U1$ (x_1) и $U2$ (x_2) используются три типа микросхем $M1$, $M2$ и $M3$. Для устройства $U1$ требуется микросхем типа $M1$ 7 штук, $M2$ — 3 штуки, $M3$ — 1 штука. Для $U2$: $M1$ — 5 штук, $M2$ — 4 штуки, $M3$ — 2 штуки. Запас микросхем на складе ограничен: $M1$ — 100 штук, $M2$ — 150 штук, $M3$ — 200 штук. Экономический эффект при сбыте устройства $U1$ составляет 5 условных единиц, $U2$ — 4 условные единицы. Какое количество каждого устройства необходимо произвести, чтобы экономический эффект был максимальным.

Данные внесем в таблицу.

	U1	U2	Ресурс
M1	7	5	100
M2	3	4	150
M3	1	2	200
Эффект	5	4	

Тогда формальное описание задачи имеет следующий вид.

Найти

$$F = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max ;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \leq 100, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 150, \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 200, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Двойственная ей задача имеет вид.

Найти

$$H = 100y_1 + 150y_2 + 200y_3 \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 7y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geq 5, \\ 5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 4, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вспомним, что F — максимальный экономический эффект (прибыль), при этом $F = H$, а $H \rightarrow \min$. Учитывая, что b_i — общее количество ресурса каждой микросхемы, то y_i должно выражаться в [у.е./шт.]. Если изменять количество запасов на складе микросхем разных типов, то получаем различные решения, при которых микросхемы одного типа будут израсходоваться полностью, а других будет в избытке. Следовательно, y_i двойственной задачи отражает дефицитность используемых ресурсов.

Так же двойственные переменные называют теневыми ценами ресурсов в прямой задаче и наоборот.

Замечание. Необходимо помнить, что объем вычислительных затрат при решении ЗЛП определяется не числом переменных целевой функции (числом переменных модели), а числом ограничений. Поэтому, какую задачу решать прямую или двойственную определяет исследователь. Так если прямая задача имеет матрицу A размера 10×4 , а следовательно 10 ограничений, то двойственная ей задача содержит матрицу A^T размера 4×10 , т. е. всего 4 ограничения.

Пример 2.7.

Найти

$$F = 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 10, \\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 15, \\ 1x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq 20, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем целевую функцию и неравенства для получения прямой задачи. Умножением на « -1 » целевую функцию получим стремление линейной формы к $\max$.

Аналогично, неравенство $1x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq 20$ эквивалентно неравенству $-1x_1 - 2x_2 - 8x_3 \leq -20$. Уравнение $3x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 15$ можно представить как два неравенства: $3x_1 + 4x_2 + 1x_3 \leq 15$ и $-3x_1 - 4x_2 - 1x_3 \leq -15$.

Таким образом, прямая задача будет иметь вид
Найти

$$F = -1x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 10, \\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 \leq 15, \\ -3x_1 - 4x_2 - 1x_3 \leq -15, \\ -1x_1 - 2x_2 - 8x_3 \leq -20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & -8 \end{pmatrix} \text{ и } A^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Двойственная задача имеет вид

Найти

$$F = 10y_1 + 15y_2 - 15y_3 - 20y_4 \rightarrow \min;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 7y_1 + 3y_2 - 3y_3 - 1y_4 \geq -1, \\ 5y_1 + 4y_2 - 4y_3 - 2y_4 \geq -2, \\ -2y_1 + 1y_2 - 1y_3 - 8y_4 \geq 3, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Пример 2.8.

Найти

$$F = 1x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем неравенства для получения прямой задачи. Так как условие неотрицательности наложено только на x_1 , то x_2 представим разностью двух переменных, принимающих лишь неотрицательные значения $x'_2 - x''_2$ ($x'_k \geq 0$, $x''_2 \geq 0$).

Получим

$$F = 1x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' \leq 5, \\ 3x_1 + x_2' - x_2'' = 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2' \geq 0, \quad x_2'' \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение $3x_1 + x_2' - x_2'' = 9$ можно представить как два неравенства: $3x_1 + x_2' - x_2'' \leq 9$ и $-3x_1 - x_2' + x_2'' \leq -9$.

Таким образом, прямая задача будет иметь вид

Найти

$$F = 1x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \rightarrow \max ;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' \leq 5, \\ 3x_1 + x_2' - x_2'' \leq 9, \\ -3x_1 - x_2' + x_2'' \leq -9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2' \geq 0, \quad x_2'' \geq 0. \end{cases}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Двойственная задача имеет вид

Найти

$$F = 5y_1 + 9y_2 - 9y_3 \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 1y_1 + 3y_2 - 3y_3 \geq 1, \\ y_1 + y_2 - 1y_3 \geq 2, \\ -1y_1 - 1y_2 + 1y_3 \geq -2, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{cases}$$

2.1.7. Симплексный метод (симплекс-метод) в форме таблиц (симплекс-таблицы)

Пример 2.9. При инспектировании здания подлежащие защите помещения объединены по некоторым признакам в две группы: тип A и тип B . Для защиты информации по трем каналам утечки (акустический, виброакустический и ПЭМИН) используются соответствующие средства I, II и III типов. Помещение типа A оборудуется 2 средствами I типа, 4 средствами II типа, 4 средствами III типа. Помещение типа B : 2 — I типа, 2 — II типа, 1 — III типа. Опрос экспертов показал, что оценка эффективности такого использования средств защиты составляет 6 единиц для помещений типа A и 4 единицы для помещений типа B .

Количество средств защиты информации по трем каналам утечки ограничено. Средств I типа — 8 шт., II типа — 10 шт., III типа — 9 шт. На общее количество помещений типа A и B нет ограничений.

Необходимо определить количество помещений A и B , при которых эффективность использования средств защиты будет максимальной.

Решить задачу:

1. геометрически;
2. симплексным методом;
3. используя Mathcad;
4. используя Excel.

Решение.

Условия задачи сведем в таблицу.

Средство защиты	Помещение		Ресурс средств защиты
	<i>A</i>	<i>B</i>	
I тип	2	2	8
II тип	4	2	10
III тип	4	1	9
Эффективность использования средств защиты	6	4	

Построим математическую модель.

Пусть x_1 количество помещений типа *A*, x_2 — типа *B*.

Распределение средств защиты, используемых в помещениях *A* и *B*, ограничено их ресурсом. Данные ограничения запишем в виде неравенств $2x_1 + 2x_2 \leq 8$ (для средств защиты I типа), $4x_1 + 2x_2 \leq 10$ (для средств защиты II типа) и $4x_1 + 1x_2 \leq 9$ (для средств защиты III типа).

Суммарная эффективность использования средств защиты информации при условии оборудования x_1 помещений типа *A* и x_2 помещений типа *B* составляет $F = 6x_1 + 4x_2$.

По своему содержанию переменные x_1 и x_2 могут принимать только неотрицательные значения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Сформулируем математическую задачу линейного программирования: среди всех неотрицательных решений системы неравенств требуется найти такое, при котором целевая функция F принимает максимальное значение. Или

Найти

$$F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

при ограничениях

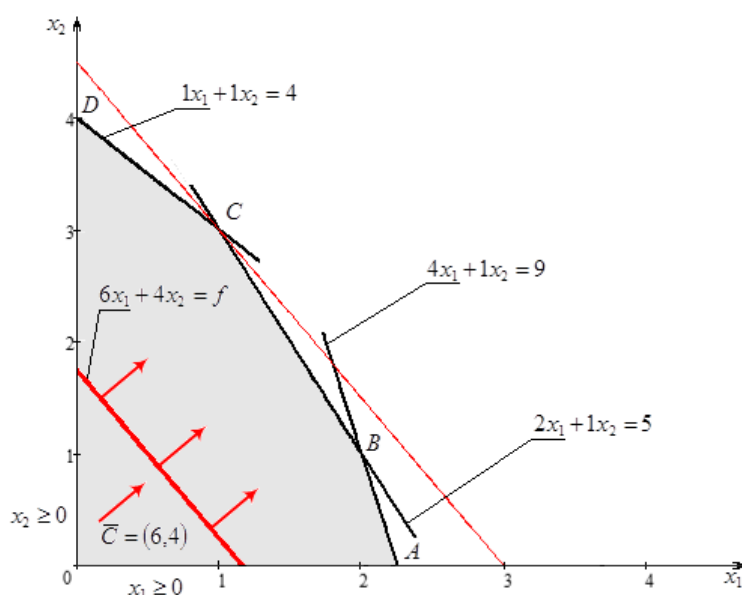
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 4x_1 + 1x_2 \leq 9, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

Упростим ограничения, разделив первое и второе на 2. Тогда ограничения примут вид

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + 1x_2 \leq 9, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

1. Представим геометрическую интерпретацию задачи.

Перепишем ограничения задачи в виде равенств $1x_1 + 1x_2 = 4$, $2x_1 + 1x_2 = 5$, $4x_1 + 1x_2 = 9$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и построим данные прямые. Учитывая знак неравенств, получаем многоугольник решений $OABCD$. Построим прямую $6x_1 + 4x_2 = f$, где f — произвольное число такое, что данная прямая проходит через многоугольник $OABCD$. Построим вектор $\vec{C} = (6, 4)$. Мысленно передвигая прямую $6x_1 + 4x_2 = f$ в направлении вектора $\vec{C} = (6, 4)$, определяем, что целевая функция достигает максимума в точке C . Координаты точки C определяем из совместного решения уравнений $1x_1 + 1x_2 = 4$ и $2x_1 + 1x_2 = 5$. В результате $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ и $F_{\max} = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 18$.



Для графической интерпретации дальнейшего решения задачи симплексным методом найдем координаты точек A и B , а также значение целевой функции в данных точках. Координаты точки A соответствуют точке пересечения прямой $4x_1 + 1x_2 = 9$ и оси абсцисс, следовательно, $x_1 = 9/4$ и $x_2 = 0$, при этом значение целевой функции в данной точке равно $F = 6 \cdot 9/4 + 4 \cdot 0 = 27/2$. Из совместного решения уравнений $4x_1 + 1x_2 = 9$ и $2x_1 + 1x_2 = 5$ находим координаты точки B $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$, тогда значение целевой функции равно $F = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 16$. Для наглядности сведем полученные данные в таблицу.

	x_1	x_2	F
A	$9/4$	0	$27/2$
B	2	1	16
C	1	3	18

2. Симплексный метод (симплекс-таблица).

Подготовительный этап.

Для решения задачи симплексным методом перейдем от системы неравенств к равенствам, введя три дополнительные переменные x_3 , x_4 и x_5 со знаком плюс, так как имеем неравенства вида « $\leq$ ».

Тогда исходная система примет вид

$$F = 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 1x_2 + x_4 = 5, \\ 4x_1 + 1x_2 + x_5 = 9, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 5}), \end{cases}$$

где x_3 — неиспользуемое количество средств I вида;

x_4 — неиспользуемое количество средств II вида;

x_5 — неиспользуемое количество средств III вида.

Последнюю систему уравнений запишем в векторной форме

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4 + x_5 P_5 = P_0,$$

где

$$P_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как имеем три основных неравенства (равенства), то для образования опорного решения необходимо три единичных вектора, которые будут образовывать базис.

Векторы P_3 , P_4 и P_5 являются единичными, образуют базис трехмерного пространства, и согласно определению, запишем опорный план для нашей задачи: $x^0 = (0; 0; 4; 5; 9)^T$. Данное решение является начальным и определяет начало координат на графике.

Векторы P_i , образующие базис, лежат на осях x_i . Поэтому, для наглядности, перейдем от векторов к переменным, которые назовем базисными, а их совокупность — базисом.

Построим симплексную таблицу.

Базис	$C_{\bar{\sigma}}$	P_0	6	4	0	0	0	Q
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	4	1	1	1	0	0	
x_4	0	5	2	1	0	1	0	
x_5	0	9	4	1	0	0	1	
F_0			$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$z_3 - c_3$	$z_4 - c_4$	$z_5 - c_5$	

Элементы столбца $C_{\bar{\sigma}}$ соответствуют коэффициентам при переменных выбранного базиса (x_3 , x_4 и x_5) в исходной целевой функции.

В столбце P_0 записаны элементы исходного опорного плана, выбранного базиса. Так же в данном столбце будут результаты оптимального плана.

Заполним последнюю строку таблицы, где

$$F_0 = (C_{\bar{\sigma}}, P_0), z_1 = (C_{\bar{\sigma}}, P_1), z_2 = (C_{\bar{\sigma}}, P_2), z_3 = (C_{\bar{\sigma}}, P_3), z_4 = (C_{\bar{\sigma}}, P_4), z_5 = (C_{\bar{\sigma}}, P_5)$$

скалярные произведения соответствующих векторов.

Таким образом,

$$F_0 = (C_{\bar{\sigma}}, P_0) = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 9 = 0,$$

$$z_1 - c_1 = (C_{\bar{\sigma}}, P_1) - c_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 - 6 = -6,$$

$$z_2 - c_2 = (C_{\bar{\sigma}}, P_2) - c_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 4 = -4 \text{ и т. д.}$$

Исходная таблица примет вид.

Базис	$C_{\bar{\sigma}}$	P_0	6	4	0	0	0	Q
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	4	1	1	1	0	0	
x_4	0	5	2	1	0	1	0	
x_5	0	9	4	1	0	0	1	
		0	-6	-4	0	0	0	

В дальнейших вычислениях столбец $C_{\bar{\sigma}}$ не участвует.

Итерация 1.

В последней строке таблицы определяем максимальное по абсолютной величине отрицательное число, крайний левый элемент в выборе не участвует. Для данной таблицы — «-6». Столбец с данным числом является ведущим на данном этапе.

Базис	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q
x_3	4	1	1	1	0	0	
x_4	5	2	1	0	1	0	
x_5	9	4	1	0	0	1	
	0	-6	-4	0	0	0	

Рассмотрим значения ведущего столбца. Если присутствует отрицательное число или нулевой элемент, то в соответствующей строке последнего столбца Q ставим прочерк. Остальные значения последнего столбца определим как отношение элементов столбца P_0 к соответствующим элементам ведущего столбца, т. е.

$$\frac{P_{0i}}{x_{ki}},$$

где k — номер вектора коэффициентов ведущего столбца;

i — номер соответствующей строки.

Базис	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q
x_3	4	1	1	1	0	0	4/1=4
x_4	5	2	1	0	1	0	5/2
x_5	9	4	1	0	0	1	9/4
	0	-6	-4	0	0	0	

Для определения переменной, подлежащей исключению из базиса, найдем среди полученных значений столбца Q наименьшее значение, т. е.

$$\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right\} = \min\left\{4, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right\} = \frac{9}{4}.$$

Строку с данным числом назовем ведущей. Элемент, стоящий на пересечении ведущей строки и ведущего столбца, назовем разрешающим на данном этапе.

Значения столбца Q показывают максимально возможное количество помещений определенного типа, которое можно оборудовать тем или иным средством защиты информации. Найдя $\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right\} = \frac{9}{4}$, определили, что ограничивающим фактором оборудования помещений типа A является ресурс средств защиты информации III типа. Т. е. при организации защиты информации, максимальное количество помещений типа A ограничено ресурсом средства защиты III типа.

Таким образом, переменную x_5 исключаем из базиса и заменяем на x_1 .

Значения элементов ведущей строки разделим на значение разрешающего элемента, все остальные элементы ведущего столбца полагаем равными нулю.

Базис	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q
x_3		0					
x_4		0					
x_1	9/4	1	1/4	0	0	1/4	
		0					

Остальные ячейки таблицы заполним (кроме последнего столбца Q), применяя правило прямоугольника.

Рассмотрим предыдущую таблицу. Для нахождения элемента строки x_3 столбца P_0 мысленно построим прямоугольник, содержащий разрешающий и искомый элементы. Диагональ прямоугольника, которая содержит разрешающий элемент, называется главной, другая — неглавной.

Базис	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q
x_3	4	1	1	1	0	0	4/1=4
x_4	5	2	1	0	1	0	5/2
x_1	9	4	1	0	0	1	9/4
	0	-6	-4	0	0	0	

Искомый элемент определяется как: от произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычитаем произведение элементов, стоящих на неглавной диагонали, и полученную разность делим на разрешающий элемент, т. е.

$$\frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 9}{4} = \frac{7}{4}.$$

Определим значение элемента строки x_4 столбца P_0 . Мысленно построим прямоугольник, содержащий разрешающий и искомый элементы. Диагональ прямоугольника, которая содержит разрешающий элемент, называется главной, другая — неглавная.

Базис	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q
x_3	4	1	1	1	0	0	$4/1=4$
x_4	5	2	1	0	1	0	$5/2$
x_1	9	4	1	0	0	1	$9/4$
	0	-6	-4	0	0	0	

Искомый элемент определяется как: от произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычитаем произведение элементов, стоящих на неглавной диагонали, и полученную разность делим на разрешающий элемент, т. е.

$$\frac{4 \cdot 5 - 2 \cdot 9}{4} = \frac{1}{2}.$$

Определим значение элемента строки x_3 столбца x_2 . Мысленно построим прямоугольник, содержащий разрешающий и искомый элементы. Диагональ прямоугольника, которая содержит разрешающий элемент, называется главной, другая — неглавная.

Базис	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q
x_3	4	1	1	1	0	0	$4/1=4$
x_4	5	2	1	0	1	0	$5/2$
x_1	9	4	1	0	0	1	$9/4$
	0	-6	-4	0	0	0	

Искомый элемент определяется как: от произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычитаем произведение элементов, стоящих на неглавной диагонали, и полученную разность делим на разрешающий элемент, т. е.

$$\frac{4 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{4} = \frac{3}{4}.$$

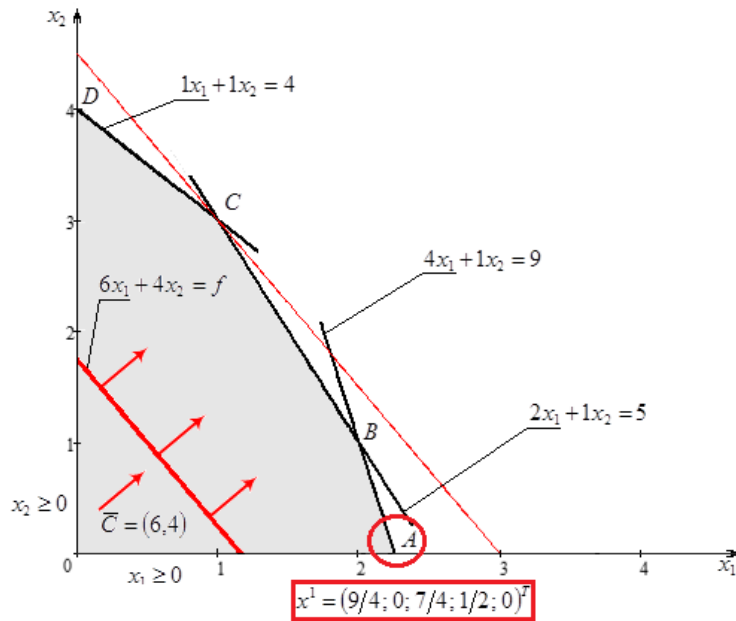
Остальные элементы определяются аналогично. В результате получаем следующую таблицу.

Базис	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q
x_3	$7/4$	0	$3/4$	1	0	$-1/4$	
x_4	$1/2$	0	$1/2$	0	1	$-1/2$	
x_1	$9/4$	1	$1/4$	0	0	$1/4$	
	$27/2$	0	$-5/2$	0	0	$3/2$	

Получаем новый опорный план (решение) $x^1 = (9/4; 0; 7/4; 1/2; 0)^T$, при этом значение целевой функции $F_0 = 27/2$.

Проверим данное решение на оптимальность: так как в последней строке присутствуют отрицательные элементы, то данное решение не является оптимальным

Полученному решению $x^1 = (9/4; 0; 7/4; 1/2; 0)^T$ соответствует точка $A(9/4, 0)$ графика геометрической интерпретации задачи.



Обратим внимание на то, что от точки $(0, 0)$ мы перешли в точку $A(9/4, 0)$, а не в точку D . Это объясняется тем, что наибольший коэффициент в $F = 6x_1 + 4x_2$ стоит при x_1 .

Итерация 2.

Составим таблицу для второй итерации.

В последней строке таблицы определяем максимальное по абсолютной величине отрицательное число, крайний левый элемент в выборе не участвует. Для данной таблицы — « $-5/2$ ». Столбец с данным числом является ведущим на данном этапе. Ведущий столбец не содержит отрицательных чисел и нулевых элементов, поэтому заполним последний столбец Q значениями, которые находятся делением элементов столбца P_0 на соответствующие значения элементов ведущего столбца x_2 .

Базис	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q
x_3	7/4	0	3/4	1	0	-1/4	7/3
x_4	1/2	0	1/2	0	1	-1/2	1
x_1	9/4	1	1/4	0	0	1/4	9
	27/2	0	-5/2	0	0	3/2	

Для определения вектора, подлежащего исключению из базиса, найдем среди полученных значений столбца Q наименьшее значение, т. е.

$$\min\left\{\frac{7}{3}, 1, 9\right\} = 1.$$

Строку с данным числом назовем ведущей. Элемент, стоящий на пересечении ведущей строки и ведущего столбца, назовем разрешающим на данном этапе.

Таким образом, переменную x_4 исключаем из базиса и заменяем на x_2 .

Значения элементов ведущей строки разделим на значение разрешающего элемента, все остальные элементы ведущего столбца полагаем равными нулю. Применяя

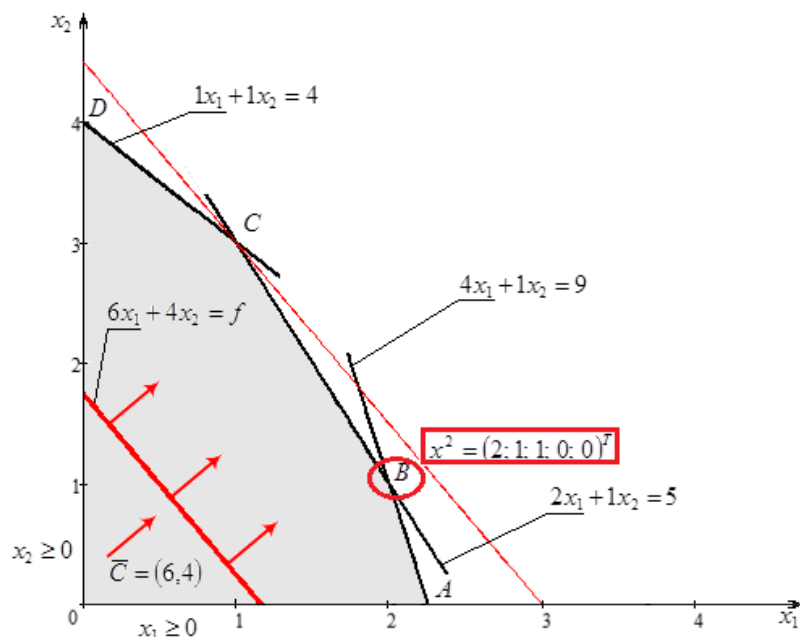
правило прямоугольника, заполним остальные ячейки таблицы (кроме последнего столбца Q).

Максимальное по абсолютной величине значение последней строки (первый элемент строки в выборе не участвует) — «-1». Ему соответствует ведущий столбец x_5 . В нем имеется отрицательное значение (-1), поэтому в данной строке столбца Q поставим прочерк. Остальные значения последнего столбца определим делением элементов столбца P_0 на соответствующие значения элементов ведущего столбца x_5 . В результате получаем таблицу.

Базис	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q
x_3	1	0	0	1	$-3/2$	$1/2$	2
x_2	1	0	1	0	2	-1	—
x_1	2	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	4
	16	0	0	0	5	-1	

Получаем новый опорный план (решение) $x^2 = (2; 1; 1; 0; 0)^T$, при этом значение целевой функции $F_0 = 16$. Так как в последней строке присутствуют отрицательные элементы, то данное решение не является оптимальным

Полученному решению $x^2 = (2; 1; 1; 0; 0)^T$ соответствует точка $B(2,1)$ графика геометрической интерпретации задачи.



Итерация 3.

Составим таблицу для третьей итерации.

Для определения вектора, подлежащего исключению из базиса, найдем среди полученных значений столбца Q наименьшее значение, т. е.

$$\min\{2, 4\} = 2.$$

Следовательно, переменную x_3 исключаем из базиса и заменяем на x_5 .

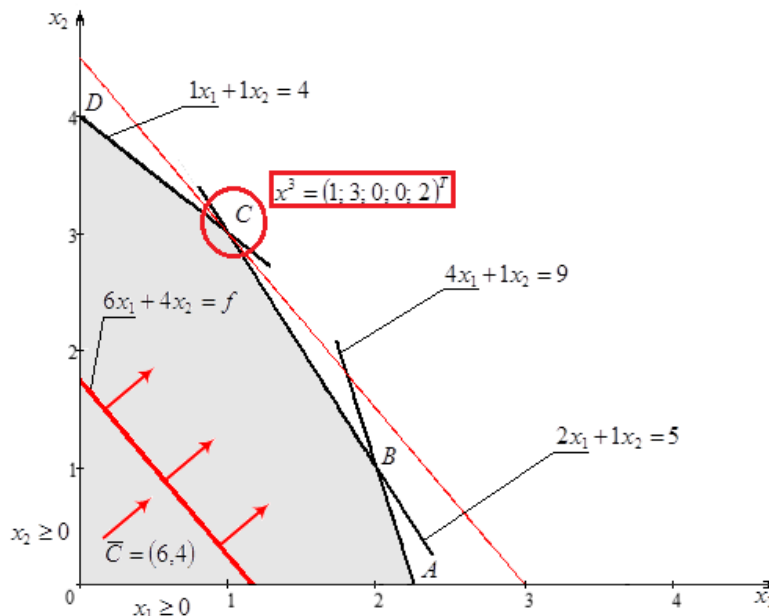
Результатом четвертой итерации является следующая таблица.

Базис	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q
x_5	2	0	0	2	-3	1	
x_2	3	0	1	2	-1	0	
x_1	1	1	0	1	1	0	
	18	0	0	2	2	0	

В последней строке (первый элемент в выборе не участвует) нет отрицательных элементов. Следовательно, найден опорный план исходной задачи $x^3 = (1; 3; 0; 0; 2)^T$, являющийся оптимальным и при этом значение линейной формы $F_{\max} = 18$.

Удалим значения дополнительных переменных, получим оптимальное решение $x^* = (1; 3)^T$ и $F_{\max} = 18$.

Данному решению соответствует точка $C(1,3)$ графика геометрической интерпретации.



Таким образом, для получения максимальной эффективности использования средств защиты информации, при заданных условиях, необходимо оборудовать одно помещение типа A и три помещения типа B .

Замечание.

Если в ведущем столбце нет положительных элементов, а последний элемент столбца P_0 конкретное число, то данная задача не имеет оптимальных решений (неограниченность целевой функции на множестве допустимых решений).

Если в ведущем столбце нет положительных элементов, а последний элемент столбца P_0 содержит M , то данная задача не имеет оптимальных решений (множество допустимых решений пусто).

Если хотя бы одна из искусственных переменных не равна нулю, то данная задача не имеет оптимальных решений (множество допустимых решений пусто).

3. Решение задачи в Mathcad.

$$f(x) := 6 \cdot x_0 + 4 \cdot x_1$$

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$x_1 := 0$$

Given

$$M \cdot x \leq v$$

$$a := \text{Maximize}(f, x)$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(a) = 18$$

или

$$f(x_1, x_2) := 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$4x_1 + 1x_2 \leq 9$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(x_1, x_2) = 18$$

4. Решение задачи в Excel.

Создадим в Excel таблицу.

В ячейки столбца «Эффективность» внесем формулы для расчета эффективности использования средств защиты информации по каждому типу помещений:

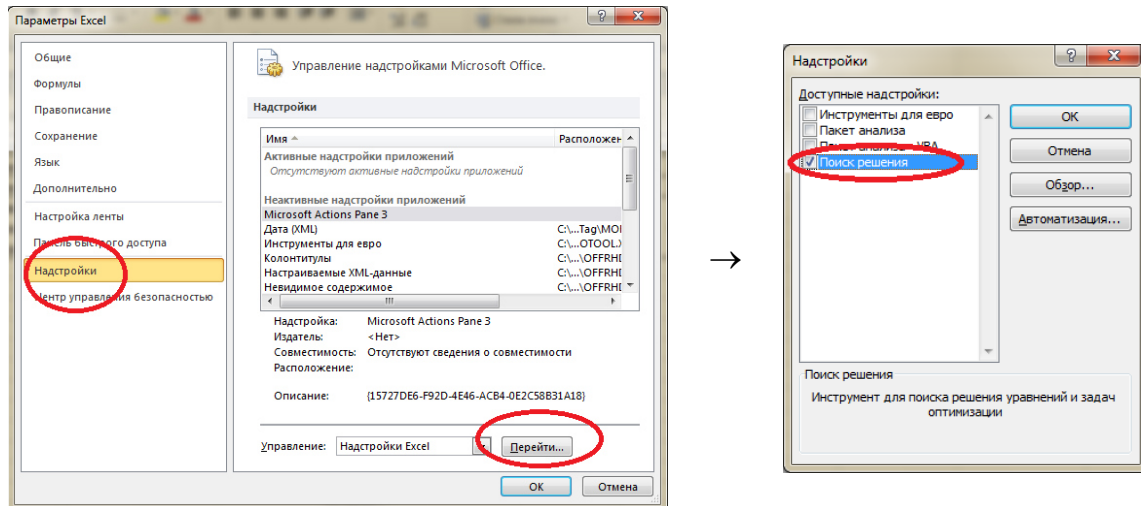
- 1) ячейка H4 — «= B6 * G4 »;
- 2) ячейка H5 — «= C6 * G5 »;
- 3) ячейка H6 — «= СУММ (H4 : H5) ».

Таблица «Расход средств защиты» необходима для записи условий (неравенств) задачи. Так в соответствующие ячейки запишем формулы:

- 1) ячейка B10 — «= B3 * G4 + C3 * G5 »;
- 2) ячейка C10 — «= B4 * G4 + C4 * G5 »;
- 3) ячейка D10 — «= B5 * G4 + C5 * G5 ».

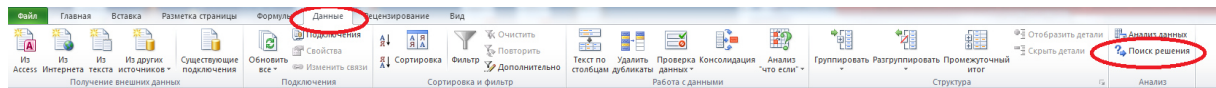
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Средство защиты	Помещение		Ресурс средств защиты					
2		A	B						
3	I тип	2	2	8		Помещение	Количество	Эффективность	
4	II тип	4	2	10		A		0	
5	III тип	4	1	9		B		0	
6	Эффективность использования средств защиты	6	4			Суммарная максимальная эффективность использования средств защиты		0	
7									
8		Расход средств защиты							
9		I тип	II тип	III тип					
10		0	0	0					
11									

Подгрузим пакет, позволяющий решать оптимизационные задачи. Для этого нажимаем правую клавишу на ленте → «Настройка ленты». В появившемся окне выбираем «Надстройки» и нажимаем «Перейти». В окне «Надстройки» выбираем «Поиск решения» → «ОК».

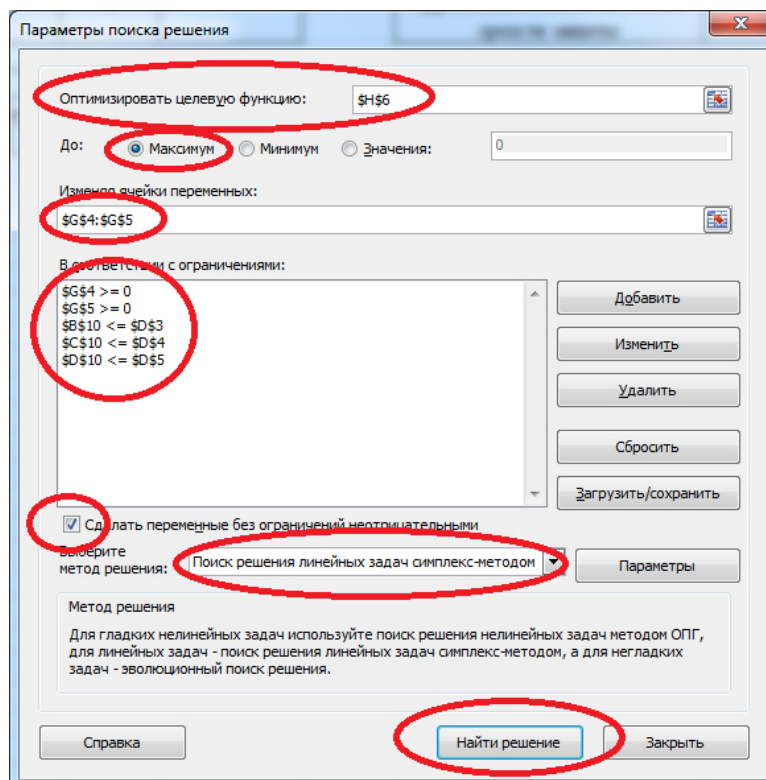


Найдем решение задачи.

Во вкладке «Данные» выбираем «Поиск решения».



В окне «Параметры поиска решения» заносим соответствующие номера ячеек, а также добавляем ограничения из условия задачи. Нажимаем «Найти решение».



В результате получаем решение задачи.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Средство защиты	Помещение		Ресурс средств защиты				
2		A	B					
3	I тип	2	2	8		Помещение	Количество	Эффективность
4	II тип	4	2	10		A	1	6
5	III тип	4	1	9		B	3	12
6	Эффективность использования средств защиты	6	4			Суммарная максимальная эффективность использования средств защиты		18
7								
8		Расход средств защиты						
9		I тип	II тип	III тип				
10		8	10	7				
11								

Задача 2.1. Решить задачу:

1. симплексным методом;
2. используя Mathcad;
3. используя Excel.

1. $F = 5x_1 + 8x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10, \\ 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 9, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.3.0.24

2. $F = 1x_1 + 6x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 5, \\ -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 10, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

12.7.0.54

3. $F = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 5, \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.0.1.4

4. $F = -4x_1 + 2x_2 - 1x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 15, \\ -2x_1 - 2x_2 + 10x_3 \geq -10, \\ -4x_1 - 5x_2 + 1x_3 \leq 6, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

5.0.0.20

16. $F = 4x_1 - 2x_2 + 1x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 15, \\ 2x_1 + 2x_2 - 10x_3 \leq 10, \\ -4x_1 - 5x_2 + 1x_3 \leq 6, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

5.0.0.20

17. $F = -1x_1 - 6x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 5, \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.1.0.6

18. $F = 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 5, \\ 4x_1 + 9x_2 + 1x_3 \leq 7, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

1.0.0.8

19. $F = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

10.6.0.38

5. $F = 1x_1 + 6x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 5, \\ -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

2.2.0.14

6. $F = -5x_1 - 8x_2 - 5x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq -8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10, \\ -4x_1 - 1x_2 - 1x_3 \geq -3, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.3.0.24

7. $F = -4x_1 + 2x_2 - 1x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 15, \\ -2x_1 - 2x_2 + 10x_3 \geq -10, \\ 4x_1 + 5x_2 - 1x_3 \geq -6, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

5.0.0.20

8. $F = 2x_1 + 12x_2 + 1x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 10, \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.1.0.12

9. $F = -1x_1 - 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 5, \\ -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq -10, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

12.7.0.54

10. $F = -8x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 \geq -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 5, \\ 4x_1 + 9x_2 + 1x_3 \leq 7, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

1.0.0.8

20. $F = 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 2, \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.0.2.10

21. $F = 1x_1 + 6x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq -5, \\ 1x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq -2, \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq -10, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

12.7.0.54

22. $F = 1x_1 + 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 5, \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.1.0.6

23. $F = -5x_1 - 8x_2 - 5x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10, \\ 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 3, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.3.0.24

24. $F = 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 + 4x_3 \leq 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 2, \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.0.2.10

25. $F = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 + 4x_3 \leq 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 2, \\ 7x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 5, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.0.2.10

11. $F = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq -6, \\ -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

10.6.0.38

12. $F = 2x_1 + 12x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 5, \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.1.0.12

13. $F = 12x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 7x_1 + 1x_2 + 4x_3 \leq 5, \\ 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 2, \\ 7x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 5, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.1.1.9

14. $F = 22x_1 + 7x_2 + 15x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 1x_2 + 4x_3 \leq 2, \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 8, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.2.0.14

15. $F = -1x_1 - 6x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 5, \\ -1x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq -2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.1.0.6

26. $F = -2x_1 - 12x_2 - 1x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 10, \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.1.0.12

27. $F = -1x_1 - 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 5, \\ -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 10, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

12.7.0.54

28. $F = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq -8, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

10.6.0.38

29. $F = -8x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 \geq -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 5, \\ -4x_1 - 9x_2 - 1x_3 \geq -7, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

1.0.0.8

30. $F = -12x_1 - 4x_2 - 5x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 7x_1 + 1x_2 + 4x_3 \leq 5, \\ 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 2, \\ -7x_1 - 1x_2 - 2x_3 \geq -5, \\ x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

0.1.1.9

Задача 2.2. Используя условие задачи 1, найти интервалы, при которых итоговый базис останется неизменным изменения коэффициентов:

1. при x_2 целевой функции;
2. свободного коэффициента первого неравенства ограничений.

Задача 2.3. Получить двойственную задачу из условия задачи 1 и решить ее:

1. симплексным методом;
2. используя Mathcad;
3. используя Excel.

2.1.8. Метод искусственного базиса

Сама постановка ЗЛП предусматривает неотрицательность b_i системы неравенств.

Запишем данную задачу в стандартной форме.

1. Умножим целевую функцию на « -1 » и перейдем от поиска $\min$ решения к нахождению $\max$.

2. Так как ограничение неотрицательности наложено только на x_1 , то произведем замену: $x_2 = x'_2 - x''_2$, причем $x'_2, x''_2 \geq 0$.

3. Заменим неравенства на равенства. Если знак неравенства « $\leq$ », то вводим новую переменную со знаком плюс; если « $\geq$ » — со знаком минус.

4. Если правая часть полученных уравнений со знаком минус, то умножим всю строку на « -1 ».

5. Если в полученных уравнениях дополнительная переменная отсутствует или введена со знаком минус, то в данное уравнение вводится новая (следующая по счету) переменная со знаком плюс, при этом, так же данная переменная вводится в целевую функцию с коэффициентом « $-M$ ». M — некоторое достаточно большое положительное число, существенно большее по абсолютной величине любого числа в условии задачи.

Пример 2.10. Найти решение задачи:

$$F = 12x_1 + 4x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \geq -4, \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ 4x_1 + 1x_2 \geq 18, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

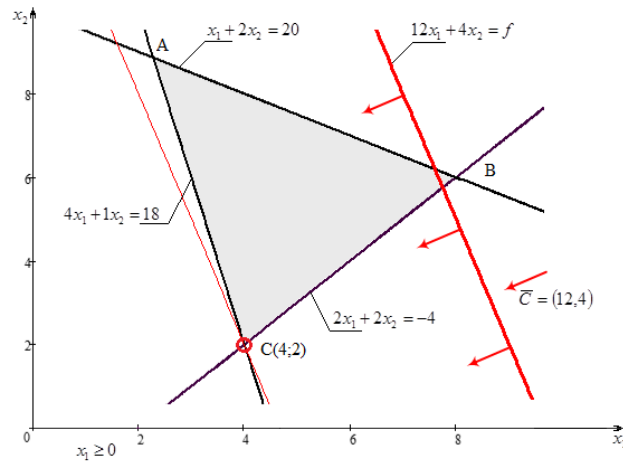
Решить задачу:

1. геометрически;
2. симплексным методом;
3. используя Mathcad;
4. используя Excel.

Решение.

1. Представим геометрическую интерпретацию задачи.

Перепишем ограничения задачи в виде равенств $2x_1 + 2x_2 = -4$, $x_1 + 2x_2 = 20$, $4x_1 + 1x_2 = 18$, $x_1 = 0$ и построим данные прямые. Учитывая знак неравенств, получаем треугольник решений ABC . Построим прямую $12x_1 + 4x_2 = f$, где f — произвольное число такое, что данная прямая проходит через многоугольник $OABCD$. Построим вектор $\vec{C} = (12, 4)$. Мысленно передвигая прямую $12x_1 + 4x_2 = f$ в направлении вектора $\vec{C} = (12, 4)$, определяем, что целевая функция достигает максимума в точке C . Координаты точки C определяем из совместного решения уравнений $2x_1 + 2x_2 = -4$ и $4x_1 + 1x_2 = 18$. В результате $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ и $F_{\min} = 12 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 56$.



2. Решим задачу симплексным методом.

Запишем данную задачу в стандартной форме.

1. Умножим целевую функцию на «-1» и перейдем от поиска $\min$ решения к нахождению $\max$.

2. Так как ограничение неотрицательности наложено только на x_1 , то произведем замену: $x_2 = x'_2 - x''_2$, причем $x'_2, x''_2 \geq 0$.

3. Заменяем неравенства на равенства. Если знак неравенства « $\leq$ », то вводим новую переменную со знаком плюс; если « $\geq$ » — со знаком минус.

4. Если правая часть полученных уравнений со знаком минус, то умножим всю строку на «-1».

5. Если в полученных уравнениях дополнительная переменная отсутствует или введена со знаком минус, то в данное уравнение вводится новая (следующая по счету) переменная со знаком плюс, при этом, так же данная переменная вводится в целевую функцию с коэффициентом « $-M$ ». M — некоторое достаточно большое положительное число, существенно большее по абсолютной величине любого числа в условии задачи.

В результате получаем следующую расширенную задачу.

$$F = -12 \cdot x_1 - 4 \cdot (x'_2 - x''_2) + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - M \cdot x_6 = \\ = -12x_1 - 4x'_2 + 4x''_2 - Mx_6 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2 \cdot (x'_2 - x''_2) + x_3 = 4, \\ 1x_1 + 2 \cdot (x'_2 - x''_2) + x_4 = 20, \\ 4x_1 + 1 \cdot (x'_2 - x''_2) - x_5 + x_6 = 18, \\ x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x''_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Или

$$F = -12x_1 - 4x'_2 + 4x''_2 - Mx_6 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x'_2 + 2x''_2 + x_3 = 4, \\ 1x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + x_4 = 20, \\ 4x_1 + 1x'_2 - 1x''_2 - x_5 + x_6 = 18, \\ x_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0, \end{cases}$$

Последнюю систему уравнений запишем в векторной форме

$$x_1 P_1 + x_2' P_2' + x_2'' P_2'' + x_3 P_3 + x_4 P_4 + x_5 P_5 + x_6 P_6 = P_0,$$

где

$$P_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 18 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, P_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2'' = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В условие задачи был искусственно введен вектор P_6 для получения базисного решения.

Так как P_3 , P_4 и P_6 являются единичными векторами, образуют базис трехмерного пространства, то согласно определению, запишем опорный план для расширенной задачи: $x^0 = (0; 0; 0; 4; 20; 0; 18)^T$. Данное решение является начальным и определяет начало координат на графике.

Векторы P_i , образующие базис, лежат на осях x_i . Поэтому, для наглядности, перейдем от векторов к переменным, которые назовем базисными, а их совокупность — базисом.

Построим симплексную таблицу.

Базис	$C_{\bar{\sigma}}$	P_0	-12	-4	4	0	0	0	-M	Q
			x_1	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	4	2	-2	2	1	0	0	0	2
x_4	0	20	1	2	-2	0	1	0	0	20
x_6	-M	18	4	1	-1	0	0	-1	1	9/2
			-18M	-4M+12	-M+4	M-4	0	0	M	0

Базис	P_0	x_1	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	x_6	Q
x_1	2	1	-1	1	1/2	0	0	0	—
x_4	18	0	3	-3	-1/2	1	0	0	6
x_6	10	0	5	-5	-2	0	-1	1	2
		-10M-24	0	-5M+16	5M-16	2M-6	0	M	0

Так как x_6 , выведенная из базиса, является искусственной, то в дальнейших вычислениях она не участвует.

Базис	P_0	x_1	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	Q
x_1	4	1	0	0	1/10	0	1/5	
x_4	12	0	0	0	7/10	1	-3/5	
x_2'	2	0	1	-1	-2/5	0	-1/5	
		-56	0	0	2/5	0	16/5	

В последней строке (первый элемент в выборе не участвует) нет отрицательных элементов. Следовательно, найден опорный план исходной задачи $x^2 = (4; 2; 0; 0; 12; 0; 0)^T$, являющийся оптимальным и при этом значение линейной формы $F_{\max} = -56$.

Из опорного плана определяем $x'_2 = 2$, $x''_2 = 0$. Тогда, учитывая, что $x_2 = x'_2 - x''_2$ находим $x_2 = 2$. Таким образом, $x^* = (4; 2; 0; 12; 0; 0)^T$

Удаляя значения дополнительных и искусственной переменных, получим оптимальное решение $x^* = (4; 2)^T$. Так как целевая функция исходной задачи минимизировалась, то значение исходной линейной формы $F_{\min} = -F_{\max} = 56$.

Окончательно запишем: $x^* = (4; 2)^T$ и $F_{\min} = 56$.

3. Решение задачи в Mathcad.

Для решения данным способом запишем систему в каноническом виде

$$f(x) := -12 \cdot x_0 - 4 \cdot x_1$$

$$M := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$x_1 := 0$$

Given

$$M \cdot x \leq v$$

$$a := \text{Maximize}(f, x)$$

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(a) = -56$$

или

$$f(x1, x2) := 12 \cdot x1 + 4 \cdot x2$$

$$x1 := 0 \quad x2 := 0$$

Given

$$x1 \geq 0$$

$$-2x1 + 2x2 \geq -4$$

$$1x1 + 2x2 \leq 20$$

$$4x1 + 1x2 \geq 18$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \text{Minimize}(f, x1, x2)$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(x1, x2) = 56$$

4. Решение задачи в Excel.

Создадим в Excel таблицу.

В ячейки столбца «Значение функции» внесем формулы для расчета значения функции по каждой переменной, а оптимальное значение функции:

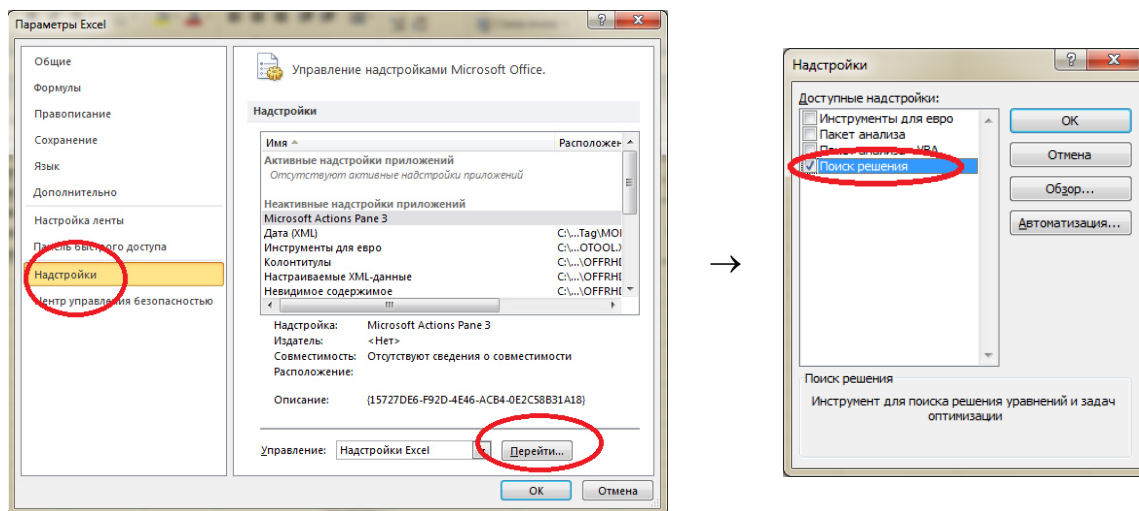
- 1) ячейка H4 — «= B5 * G2 »;
- 2) ячейка H5 — «= C5 * G3 »;
- 3) ячейка H6 — «= СУММ(H2 : H3) ».

Таблица «Проверка ограничений» необходима для записи условий (неравенств) задачи. Так в соответствующие ячейки запишем формулы:

- 1) ячейка B9 — «= B2 * G2 + C2 * G3 »;
- 2) ячейка C9 — «= B3 * G3 + C2 * G3 »;
- 3) ячейка D9 — «= B4 * G2 + C4 * G3 ».

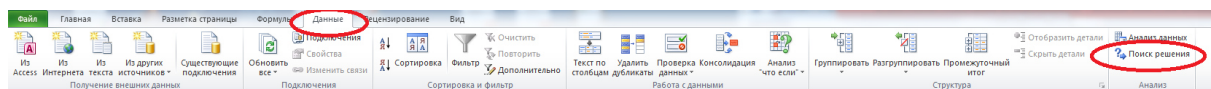
	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x1	x2	Ограничения		Значение переменной		Значение функции
2	I неравенство	-2	2	-4		x1		0
3	II неравенство	1	2	20		x2		0
4	III неравенство	4	1	18		Оптимальное значение		0
5	Коэффициенты целевой функции	12	4					
6								
7		Проверка ограничений						
8		I неравенство	II тип	III тип				
9		0	0	0				

Подгрузим пакет, позволяющий решать оптимизационные задачи. Для этого нажимаем правую клавишу на ленте → «Настройка ленты». В появившемся окне выбираем «Надстройки» и нажимаем «Перейти». В окне «Надстройки» выбираем «Поиск решения» → «ОК».

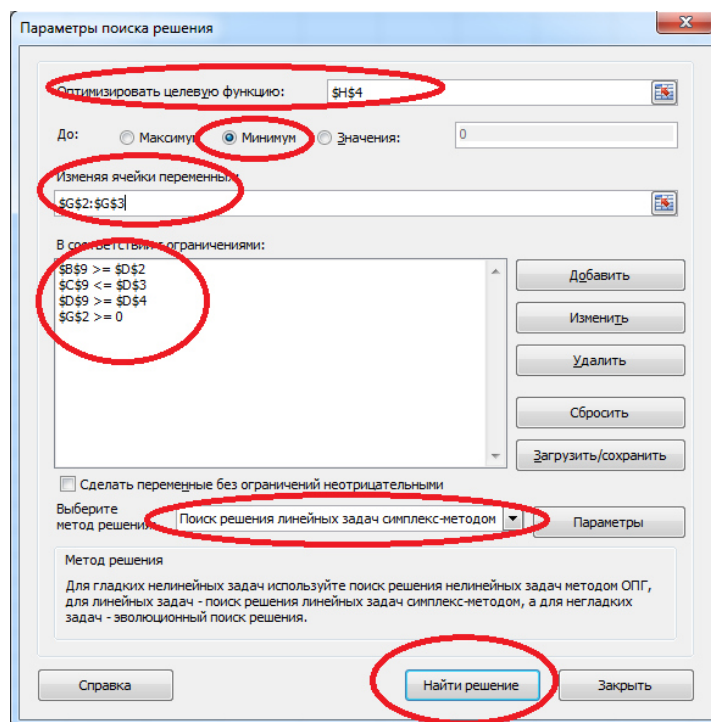


Найдем решение задачи.

Во вкладке «Данные» выбираем «Поиск решения».



В окне «Параметры поиска решения» заносим соответствующие номера ячеек, а также добавляем ограничения из условия задачи. Нажимаем «Найти решение».



В результате получаем решение задачи.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x1	x2	Ограничения		Значение переменной		Значение функции
2	I неравенство	-2	2	-4		x1	4	48
3	II неравенство	1	2	20		x2	2	8
4	III неравенство	4	1	18		Оптимальное значение		56
5	Коэффициенты целевой функции	12	4					
6								
7		Проверка ограничений						
8		I неравенство	II тип	III тип				
9		-4	8	18				

2.2. Задачи транспортного типа (сетевые модели)

2.2.1. Транспортная задача

Транспортная задача (от лат. *transporto* — переносу, перемещаю) — частный случай общей задачи линейного программирования.

Содержательная формулировка. Пусть в пунктах $A_1, A_2, \dots, A_m$ производится некоторый однородный продукт, причем объем производства этого продукта в пункте A_i составляет a_i единиц ($i = 1, \dots, m$). Произведенный в пунктах производства продукт требуется доставить в пункты потребления $B_1, B_2, \dots, B_n$, причем объем потребления в пункте B_k составляет b_k единиц продукта. Предполагается, что транспортировка готовой продукции возможна из любого пункта производства в любой пункт потребления, причем транспортные издержки, приходящиеся на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_k , составляют c_{ik} денежных единиц. Необходимо составить такой план перевозок, при котором суммарные транспортные издержки были минимальными.

Замечания.

1. Если затраты, связанные с производством единицы товара, в пунктах A_i различны, то их (затраты) можно включить в издержки на перевозку c_{ik} .

2. Если i -й пункт производства не доступен для k -го пункта потребления, то либо переменная x_{ik} исключается из рассмотрения, либо величина c_{ik} принимается сколь угодно большой.

Формальная постановка. Введем обозначения:

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$ — множество, характеризующее объем производства однородного продукта в пунктах A_i ;

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ — множество, характеризующее объем потребления однородного продукта в пунктах B_k .

Пусть

x_{ik} — количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_k ;

c_{ik} — транспортные издержки;

$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{k=1}^n b_k$, т. е. «предложение = спрос» — условие баланса (закрытая задача).

Найти

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n c_{ik} x_{ik} \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{наличие продукта} \text{ — предложение}),$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{спрос}),$$

$$x_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k.$$

Замечания.

1. Если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{k=1}^n b_k$, т. е. «предложение превышает спрос» — перепроизводство (открытая задача), то для преобразования задачи в закрытую модель вводится фиктивный потребитель $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{k=1}^n b_k$.

2. Если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{k=1}^n b_k$, т. е. «спрос превышает предложение» (открытая задача), то для преобразования задачи в закрытую модель вводится фиктивный поставщик $a_{m+1} = \sum_{k=1}^n b_k - \sum_{i=1}^m a_i$.

3. Если возникает необходимость наложения дополнительных ограничений на пропускные способности направлений, соединяющие A_i с B_k , то вводят дополнительное неравенство, которое в простейшем случае имеет вид

$$0 \leq x_{ik} \leq u_{ik} \quad (i = \overline{1, n}, k = \overline{1, n}).$$

Пример 2.11. В пунктах A_1 , A_2 и A_3 производится некоторый однородный продукт, причем объем его производства составляет 10, 30 и 20 единиц соответственно. Произведенный продукт требуется доставить в пункты потребления B_1 и B_2 , причем объем потребления составляет 25 и 30 единиц продукта соответственно. Необходимо составить такой план перевозок, при котором суммарные транспортные издержки были минимальными. Стоимость перевозки продукта c_{ik} из пункта A_i в пункт B_k приведена в таблице.

	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	4	1
A_3	3	2

Проверим выполнение условия $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{k=1}^n b_k$. Очевидно, что предложение ($10 + 30 + 20 = 60$) превышает спрос ($25 + 30 = 55$), поэтому введем фиктивный пункт потребления B_3 с размером спроса $60 - 55 = 5$ единиц продукта и нулевой стоимостью доставки.

Тогда **транспортная таблица** примет следующий вид, где x_{ik} — количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_k , а в скобках указана стоимость перевозки c_{ik} .

	B_1	B_2	B_3	Предложение
A_1	$x_{11}(2)$	$x_{12}(5)$	$x_{13}(0)$	10
A_2	$x_{21}(4)$	$x_{22}(1)$	$x_{23}(0)$	30
A_3	$x_{31}(3)$	$x_{32}(2)$	$x_{33}(0)$	20
Спрос	25	30	5	$60 = 60$

Фактически B_3 характеризует наличие товара на складе производителя, тогда стоимость перевозки можно принять равной нулю. Так же можно ввести штраф за хранение продукта на складе (стоимость хранения на складе), тогда стоимость перевозки будет равна стоимости хранения на складе.

Формальное описание задачи:

Найти

$$2x_{11} + 5x_{12} + 4x_{21} + 1x_{22} + 3x_{31} + 2x_{32} \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20 \end{array} \right\} \text{(предложение)}, \quad \left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 25 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5 \end{array} \right\} \text{(спрос)}, \quad x_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k.$$

или

Найти

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 c_{ik} x_{ik} \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^3 x_{1k} = 10 \\ \sum_{k=1}^3 x_{2k} = 30 \\ \sum_{k=1}^3 x_{3k} = 20 \end{array} \right\} \text{(предложение)}, \quad \left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 x_{i1} = 25 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 30 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 5 \end{array} \right\} \text{(спрос)}, \quad x_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k.$$

Решение задачи в Mathcad.

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) := 2x_{11} + 5x_{12} + 4x_{21} + x_{22} + 3x_{31} + 2x_{32}$$

$$x_{11} := 0 \quad x_{12} := 0 \quad x_{13} := 0$$

$$x_{21} := 0 \quad x_{22} := 0 \quad x_{23} := 0$$

$$x_{31} := 0 \quad x_{32} := 0 \quad x_{33} := 0$$

Given

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10 \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 25 \quad x_{11} \geq 0 \quad x_{12} \geq 0 \quad x_{13} \geq 0$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30 \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \quad x_{21} \geq 0 \quad x_{22} \geq 0 \quad x_{23} \geq 0$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20 \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5 \quad x_{31} \geq 0 \quad x_{32} \geq 0 \quad x_{33} \geq 0$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} := \text{Minimize}(f, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) \\
 \\
 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) = 95
 \end{array}$$

Пример 2.12. В пунктах A_1 и A_2 производится некоторый однородный продукт, причем объем его производства составляет 10 и 20 единиц соответственно. Произведенный продукт требуется доставить в пункты потребления B_1 и B_2 , причем объем потребления составляет 15 и 25 единиц продукта соответственно. Необходимо составить такой план перевозок, при котором суммарные транспортные издержки были минимальными. Стоимость перевозки продукта из пункта A_i в пункт B_k приведена в таблице.

	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	4	1

Решение.

Проверим выполнение условия $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{k=1}^n b_k$. Очевидно, что спрос ($15 + 25 = 40$) превышает предложение ($10 + 20 = 30$), поэтому введем фиктивного производителя A_3 с предложением $40 - 30 = 10$ единиц продукта и нулевой стоимостью доставки.

Тогда **транспортная таблица** примет следующий вид, где x_{ik} — количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_k , а в скобках указана стоимость перевозки c_{ik} .

	B_1	B_2	Предложение
A_1	$x_{11}(2)$	$x_{12}(5)$	10
A_2	$x_{21}(4)$	$x_{22}(1)$	20
A_3	$x_{31}(0)$	$x_{32}(0)$	10
Спрос	15	25	$40 = 40$

Фактически A_3 характеризует убытки производителей A_1 и A_2 (недополученная прибыль, штрафы), поэтому в стоимость перевозки целесообразно закладывать значения данных убытков.

Формальное описание задачи:

Найти

$$2x_{11} + 5x_{12} + 4x_{21} + 1x_{22} \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} = 10 \\ x_{21} + x_{22} = 20 \\ x_{31} + x_{32} = 10 \end{array} \right\} \text{(предложение),} \quad \left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 25 \end{array} \right\} \text{(спрос), } x_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k.$$

или

Найти

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 c_{ik} x_{ik} \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^2 x_{1k} = 10 \\ \sum_{k=1}^2 x_{2k} = 20 \\ \sum_{k=1}^2 x_{3k} = 10 \end{array} \right\} \text{(предложение),} \quad \left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 x_{i1} = 15 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 25 \end{array} \right\} \text{(спрос), } x_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k.$$

Решение задачи в Mathcad.

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}) := 2x_{11} + 5x_{12} + 4x_{21} + x_{22}$$

$$x_{11} := 0 \quad x_{12} := 0$$

$$x_{21} := 0 \quad x_{22} := 0$$

$$x_{31} := 0 \quad x_{32} := 0$$

Given

$$x_{11} + x_{12} = 10 \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \quad x_{11} \geq 0 \quad x_{12} \geq 0$$

$$x_{21} + x_{22} = 20 \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 25 \quad x_{21} \geq 0 \quad x_{22} \geq 0$$

$$x_{31} + x_{32} = 10 \quad x_{31} \geq 0 \quad x_{32} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix} := \text{Minimize}(f, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32})$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}) = 40$$

Задача 2.4. Найти оптимальный план перевозок.

1.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(1)	(2)	(8)	(3)	(10)	46
A_2	(1)	(5)	(7)	(10)	(6)	31
A_3	(10)	(5)	(4)	(2)	(4)	22
A_4	(5)	(3)	(10)	(1)	(6)	10
Спрос	36	47	30	40	47	

16

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(3)	(5)	(6)	(10)	(5)	30
A_2	(6)	(3)	(9)	(2)	(10)	54
A_3	(4)	(8)	(7)	(10)	(8)	40
A_4	(4)	(2)	(3)	(2)	(7)	77
Спрос	32	24	33	47	64	

2.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(1)	(2)	(8)	(3)	(10)	46
A_2	(1)	(5)	(7)	(10)	(6)	31
A_3	(10)	(5)	(4)	(2)	(4)	22
A_4	(5)	(3)	(10)	(1)	(6)	90
Спрос	36	47	30	40	47	

17.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(3)	(9)	(6)	(1)	(4)	18
A_2	(10)	(5)	(5)	(10)	(5)	50
A_3	(5)	(6)	(1)	(9)	(1)	46
A_4	(9)	(9)	(2)	(5)	(2)	76
Спрос	21	14	43	26	97	

3.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(4)	(9)	(9)	(9)	(1)	58
A_2	(9)	(7)	(10)	(9)	(4)	32
A_3	(8)	(7)	(7)	(8)	(2)	14
A_4	(3)	(7)	(7)	(3)	(1)	97
Спрос	18	47	30	35	79	

18.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(3)	(5)	(10)	(4)	(5)	10
A_2	(2)	(10)	(5)	(1)	(1)	29
A_3	(8)	(8)	(4)	(6)	(7)	58
A_4	(5)	(7)	(3)	(3)	(4)	95
Спрос	18	16	10	26	50	

4.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(4)	(1)	(3)	(1)	(3)	47
A_2	(8)	(1)	(6)	(6)	(4)	30
A_3	(7)	(6)	(8)	(5)	(3)	35
A_4	(3)	(5)	(3)	(8)	(8)	80
Спрос	45	25	30	50	40	

19.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(4)	(6)	(5)	(5)	(5)	50
A_2	(7)	(8)	(5)	(4)	(9)	36
A_3	(1)	(7)	(2)	(3)	(6)	30
A_4	(2)	(1)	(10)	(1)	(3)	80
Спрос	33	17	50	20	80	

5.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(10)	(1)	(4)	(3)	(8)	30
A_2	(10)	(9)	(4)	(1)	(3)	45
A_3	(6)	(9)	(7)	(5)	(1)	32
A_4	(6)	(1)	(2)	(7)	(2)	90
Спрос	30	48	29	40	50	

20.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(4)	(6)	(1)	(4)	(6)	50
A_2	(4)	(10)	(9)	(7)	(6)	25
A_3	(5)	(7)	(7)	(8)	(5)	55
A_4	(9)	(1)	(8)	(6)	(2)	70
Спрос	33	15	20	35	90	

6.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(9)	(4)	(9)	(8)	(1)	50
A_2	(9)	(1)	(5)	(4)	(10)	35
A_3	(7)	(3)	(8)	(10)	(9)	30
A_4	(6)	(6)	(4)	(4)	(6)	80
Спрос	30	15	0	10	90	

21.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(3)	(2)	(6)	(8)	(3)	50
A_2	(6)	(6)	(9)	(2)	(6)	40
A_3	(3)	(1)	(9)	(10)	(10)	32
A_4	(3)	(10)	(5)	(2)	(3)	60
Спрос	44	60	23	15	70	

7.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(5)	(10)	(4)	(10)	(6)	14
A_2	(10)	(2)	(6)	(5)	(4)	30
A_3	(4)	(8)	(10)	(4)	(5)	22
A_4	(2)	(10)	(7)	(7)	(3)	90
Спрос	38	45	33	40	60	

22.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(4)	(10)	(9)	(3)	(2)	30
A_2	(5)	(5)	(2)	(5)	(10)	15
A_3	(4)	(7)	(4)	(2)	(10)	20
A_4	(8)	(2)	(5)	(1)	(9)	90
Спрос	17	34	50	26	73	

8.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(4)	(10)	(6)	(9)	(6)	28
A_2	(5)	(10)	(10)	(8)	(6)	25
A_3	(10)	(5)	(4)	(3)	(10)	55
A_4	(3)	(1)	(7)	(9)	(5)	90
Спрос	20	25	25	45	95	

23.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(1)	(8)	(6)	(5)	(7)	35
A_2	(10)	(1)	(9)	(5)	(8)	35
A_3	(8)	(7)	(10)	(6)	(10)	45
A_4	(1)	(2)	(5)	(8)	(5)	90
Спрос	29	34	19	40	80	

9.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(10)	(1)	(7)	(4)	(9)	15
A_2	(10)	(8)	(3)	(1)	(1)	45
A_3	(3)	(9)	(1)	(6)	(4)	30
A_4	(1)	(4)	(4)	(8)	(5)	95
Спрос	10	50	26	35	80	

24.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(6)	(4)	(9)	(9)	(1)	25
A_2	(10)	(6)	(2)	(8)	(5)	45
A_3	(7)	(9)	(7)	(1)	(10)	15
A_4	(6)	(1)	(3)	(2)	(2)	95
Спрос	37	47	16	35	80	

10.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(3)	(4)	(4)	(10)	(5)	10
A_2	(2)	(7)	(9)	(2)	(7)	15
A_3	(10)	(4)	(8)	(2)	(4)	50
A_4	(3)	(7)	(4)	(3)	(7)	90
Спрос	30	45	44	12	70	

25.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(3)	(10)	(4)	(5)	(2)	60
A_2	(5)	(6)	(7)	(5)	(7)	30
A_3	(4)	(7)	(1)	(10)	(4)	40
A_4	(3)	(4)	(6)	(9)	(9)	80
Спрос	45	15	14	40	70	

11.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(10)	(4)	(3)	(5)	(3)	43
A_2	(3)	(1)	(3)	(4)	(3)	41
A_3	(8)	(8)	(2)	(7)	(1)	18
A_4	(10)	(8)	(1)	(5)	(4)	98
Спрос	45	40	50	30	50	

26.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(9)	(4)	(1)	(1)	(10)	25
A_2	(6)	(7)	(4)	(6)	(10)	19
A_3	(6)	(8)	(10)	(5)	(5)	15
A_4	(10)	(4)	(3)	(4)	(7)	90
Спрос	26	40	20	40	80	

12.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(8)	(9)	(9)	(5)	(8)	48
A_2	(1)	(2)	(3)	(1)	(5)	46
A_3	(9)	(1)	(9)	(2)	(7)	55
A_4	(1)	(4)	(9)	(10)	(6)	60
Спрос	40	15	32	49	65	

27.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(4)	(9)	(9)	(1)	(7)	20
A_2	(7)	(1)	(10)	(4)	(6)	40
A_3	(10)	(6)	(1)	(9)	(4)	25
A_4	(7)	(6)	(5)	(7)	(1)	90
Спрос	30	40	30	10	70	

13.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(9)	(5)	(1)	(6)	(4)	25
A_2	(7)	(6)	(5)	(8)	(4)	40
A_3	(10)	(5)	(10)	(4)	(3)	41
A_4	(4)	(5)	(3)	(8)	(1)	50
Спрос	15	50	35	45	60	

28.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(1)	(9)	(6)	(4)	(5)	20
A_2	(1)	(5)	(5)	(6)	(2)	35
A_3	(10)	(7)	(5)	(6)	(8)	25
A_4	(10)	(3)	(5)	(4)	(5)	90
Спрос	35	45	35	40	49	

14.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(8)	(9)	(8)	(3)	(3)	30
A_2	(8)	(10)	(2)	(8)	(3)	15
A_3	(3)	(8)	(9)	(5)	(5)	45
A_4	(2)	(9)	(3)	(4)	(2)	95
Спрос	29	47	21	22	77	

29.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(9)	(2)	(3)	(8)	(4)	46
A_2	(1)	(2)	(6)	(6)	(2)	25
A_3	(7)	(6)	(1)	(5)	(10)	30
A_4	(9)	(6)	(8)	(1)	(4)	90
Спрос	34	38	50	40	45	

15.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(7)	(8)	(1)	(3)	(8)	37
A_2	(1)	(7)	(6)	(6)	(10)	39
A_3	(4)	(10)	(3)	(6)	(2)	40
A_4	(8)	(8)	(9)	(7)	(8)	80
Спрос	35	34	33	32	147	

30.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	(1)	(2)	(1)	(1)	(2)	46
A_2	(2)	(1)	(7)	(2)	(6)	31
A_3	(10)	(5)	(4)	(2)	(4)	22
A_4	(5)	(3)	(4)	(1)	(6)	90
Спрос	36	47	30	40	47	

2.2.2. Транспортная задача с промежуточными пунктами

Содержательная формулировка. Необходимо выбрать план перевозок товаров от источников к стокам с учетом промежуточных пунктов, обеспечивающий минимальные транспортные затраты и потребности стоков.

Формальная постановка. Введем обозначения:

J^+ — множество номеров пунктов, на которые оборудование может быть доставлено из пункта j ;

J^- — множество номеров пунктов, с которых оборудование может быть доставлено в пункт j .

Пусть

x_{ik} — количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_k ;

c_{ik} — транспортные издержки;

t_j — чистый запас пункта.

Найти

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n c_{ik} x_{ik} \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

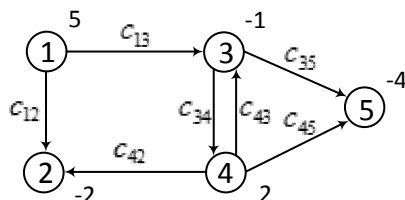
$$\sum_{k \in J^+} x_{jk} - \sum_{i \in J^-} x_{ij} = t_j ,$$

$$x_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k .$$

Поясним данное описание на примере.

Пример 2.13. В подразделениях организации образовался избыток (недостаток) однотипного оборудования. Необходимо перераспределить технику между подразделениями организации с минимальными затратами.

На рисунке представлена схема возможного перемещения оборудования между подразделениями.



Решение.

Пронумеруем подразделения в произвольном порядке. Цифра рядом с кружком показывает избыток (недостаток) оборудования: положительное число — избыток, отрицательное — недостаток.

Обратим внимание: «суммарный избыток» = «суммарный недостаток».

Пусть

x_{ik} — количество оборудования, перевозимого из подразделения i в подразделение k ;

c_{ik} — затраты, связанные с перемещением оборудования из подразделения i в подразделение k ($c_{ik} \geq 0$).

Сведем данную задачу к классической транспортной задаче.

Если стрелочка(и) только выходит(ят) из кружочка и в нем избыток оборудования, то данный пункт называется **источником**. Если стрелочка(и) только входит(ят) в кружочек и в нем недостаток оборудования — **сток**. Если стрелочки входят и выходят из кружка — **промежуточный пункт**. Таким образом, 1 — источник, 2 и 5 — стоки, 3 и 4 — промежуточные пункты.

Построим расширенную матрицу задачи.

		Пункты потребления				Поставки
		2 (сток)	3	4	5 (сток)	
Пункты поставок	1 (источник)	$x_{12}(c_{12})$	$x_{13}(c_{13})$			
	3			$x_{34}(c_{34})$	$x_{35}(c_{35})$	
	4	$x_{42}(c_{42})$	$x_{43}(c_{43})$		$x_{45}(c_{45})$	
	Спрос					$\sum a_i = \sum b_k$

Для заполнения таблицы используем следующий алгоритм.

1. Количество a_i для каждого источника определяется количеством поставляемого из него оборудования.

2. Значение b_k для каждого стока определяется потребностью оборудования.

3. Промежуточные пункты j . Пусть t_j — чистый запас промежуточного пункта. Если $t_j > 0$, то в данном пункте избыток оборудования, если $t_j < 0$ — недостаток. Пусть для каждого промежуточного пункта выполняется соотношение $a_j = t_j + D$ и

$b_j = D$, где D — суммарный избыток оборудования во всех пунктах (имеет смысл фиктивного **буферного запаса**).

4. Для каждого промежуточного пункта j ввести x_{jj} при $c_{jj} = 0$.

Применим предлагаемое правило к решению нашей задачи.

1. Имеем один источник с $a_1 = 5$ (5 единиц оборудования в излишке в пункте 1 по условию задачи).

		Пункты потребления				Поставки
		2 (сток)	3	4	5 (сток)	
Пункты поставок	1 (источник)	$x_{12}(c_{12})$	$x_{13}(c_{13})$			5
	3			$x_{34}(c_{34})$	$x_{35}(c_{35})$	
	4	$x_{42}(c_{42})$	$x_{43}(c_{43})$		$x_{45}(c_{45})$	
	Спрос					$\sum a_i = \sum b_k$

2. Имеем два стока: $b_2 = 2$ и $b_5 = 4$ (2 и 4 единицы оборудования требуются в пунктах 2 и 5 по условию задачи).

		Пункты потребления				Поставки
		2 (сток)	3	4	5 (сток)	
Пункты поставок	1 (источник)	$x_{12}(c_{12})$	$x_{13}(c_{13})$			5
	3			$x_{34}(c_{34})$	$x_{35}(c_{35})$	
	4	$x_{42}(c_{42})$	$x_{43}(c_{43})$		$x_{45}(c_{45})$	
	Спрос	2			4	$\sum a_i = \sum b_k$

3. Учитывая, что $D = 5 + 2 = 7$, $a_j = t_j + D$ и $b_j = D$ получим:

$$a_3 = t_3 + D = -1 + 7 = 6 \text{ и } b_3 = 7;$$

$$a_4 = t_4 + D = 2 + 7 = 9 \text{ и } b_4 = 7.$$

		Пункты потребления				Поставки
		2 (сток)	3	4	5 (сток)	
Пункты поставок	1 (источник)	$x_{12}(c_{12})$	$x_{13}(c_{13})$			5
	3			$x_{34}(c_{34})$	$x_{35}(c_{35})$	6
	4	$x_{42}(c_{42})$	$x_{43}(c_{43})$		$x_{45}(c_{45})$	9
	Спрос	2	7	7	4	$20 = 20$

4. Введем x_{jj} для каждого промежуточного пункта, учитывая, что $c_{jj} = 0$: $x_{33}(0)$ и $x_{44}(0)$.

Получаем таблицу аналогичную транспортной таблице классической транспортной задачи с одним отличием — в ней содержатся элементы x_{ji} , соответствующие промежуточным пунктам.

		Пункты потребления				Поставки
		2 (сток)	3	4	5 (сток)	
Пункты поставок	1 (источник)	$x_{12}(c_{12})$	$x_{13}(c_{13})$			5
	3		$x_{33}(0)$	$x_{34}(c_{34})$	$x_{35}(c_{35})$	6
	4	$x_{42}(c_{42})$	$x_{43}(c_{43})$	$x_{44}(0)$	$x_{45}(c_{45})$	9
	Спрос	2	7	7	4	$20 = 20$

Найдем примерное решение задачи.

Рассмотрим строку таблицы, соответствующую первому поставщику. Из пункта 1 можно переместить 5 единиц, пункту два требуется только 2 единицы, следовательно $x_{12} = 2$. Пункту 3 необходимо 7 единиц, а поставить из 1 можно только $5 - 2 = 3$, следовательно $x_{13} = 3$. Оборудование первого пункта распределено.

Рассмотрим строку таблицы, соответствующую третьему поставщику. Из пункта 3 возможно перемещение 6 единиц, но в пункт 3 требуется 7, следовательно в пункте 3 оставим $7 - 3 = 4$ единицы, т. е. $x_{33} = 4$ (обратим внимание, что затраты на данное перемещение равны 0). Пункту 4 требуется 7 единиц, но 4 единицы оставлены в пункте 3, следовательно $x_{34} = 6 - 4 = 2$. Возможности пункта 3 исчерпаны, следовательно $x_{35} = 0$.

Рассмотрим строку таблицы, соответствующую четвертому поставщику. В пункты 2 и 3 поставлять оборудование не нужно, т. к. их спрос удовлетворен, следовательно, $x_{42} = 0$ и $x_{43} = 0$. Пункт 4 может поставить 9 единиц оборудования и ему же необходимо 7, причем 2 единицы уже поставлено из пункта 3, следовательно $x_{44} = 5$. Оставшиеся 4 единицы оборудования необходимы пункту 5, следовательно $x_{45} = 4$.

Получили пример допустимых перемещений оборудования (одно из возможных решений — базисное решение). Данный метод нахождения базисного решения называется **методом северо-западного угла**.

		Пункты потребления				Поставки
		2 (сток)	3	4	5 (сток)	
Пункты поставок	1 (источник)	$2(c_{12})$	$3(c_{13})$			5
	3		$4(0)$	$2(c_{34})$	$0(c_{35})$	6
	4	$0(c_{42})$	$0(c_{43})$	$5(0)$	$4(c_{45})$	9
	Спрос	2	7	7	4	$20 = 20$

Рассмотрим один из промежуточных пунктов, например 3. Ограничения по предложению (поставки) и спросу будут иметь вид

$$x_{33} + x_{34} + x_{35} = -1 + D \quad (\text{поставки}),$$

$$x_{13} + x_{33} + x_{43} = D \quad (\text{спрос}).$$

Вычтем второе условие из первого, получим равносильное условие двум уравнениям

$$-x_{13} + x_{34} + x_{35} - x_{43} = -1 \Leftrightarrow x_{34} + x_{35} - x_{13} - x_{43} = -1.$$

Полученное выражение соответствует ограничению для пункта 3.

Для источника 1 нет множества номер пунктов, с которых на него поставляется оборудование, т. е. J^- , поэтому имеем

$$x_{12} + x_{13} = 5,$$

что соответствует ограничению простой транспортной задачи для поставок вида $\sum_{k=1}^n x_{ik} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$.

Аналогично для стока 5 нет множества номер пунктов, на которые с него будет поставляться оборудование, т. е. J^+ , следовательно

$$-x_{35} + x_{45} = -4,$$

что соответствует ограничению простой транспортной задачи для спроса вида $\sum_{i=1}^m x_{ik} = b_k, k = 1, 2, \dots, n$.

Замечание. Последнее выражение можно получить следующим образом: если стрелочка выходит из пункта, то данная переменная входит в ограничение со знаком «+»; если стрелочка входит в пункт, то переменная входит в ограничение со знаком «-»; полученная сумма равна избытку (недостатку) данного пункта.

Запишем полученные выше выражения в общем виде. Пусть J^+ — множество номеров пунктов, на которые оборудование может быть доставлено из пункта j , а J^- — множество номеров пунктов, с которых оборудование может быть доставлено в пункт j . Тогда ограничение для пункта j имеет вид

$$\sum_{k \in J^+} x_{jk} - \sum_{i \in J^-} x_{ij} = t_j,$$

где t_j — чистый запас пункта.

Пусть заданы затраты на перемещение оборудования (значения в скобках).

		Пункты потребления				Поставки
		2 (сток)	3	4	5 (сток)	
Пункты поставок	1 (источник)	$x_{12}(10)$	$x_{13}(7)$			5
	3		$x_{33}(0)$	$x_{34}(3)$	$x_{35}(5)$	6
	4	$x_{42}(2)$	$x_{43}(4)$	$x_{44}(0)$	$x_{45}(11)$	9
	Спрос	2	7	7	4	20 = 20

Формальное описание задачи примет вид.

Найти

$$10x_{12} + 5x_{13} + 3x_{34} + 5x_{35} + 2x_{42} + 4x_{43} + 11x_{45} \rightarrow \min;$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} x_{12} + x_{13} &= 5 \\ x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 6 \\ x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 9 \end{aligned} \right\} \text{(поставки)}, \quad \left. \begin{aligned} x_{12} + x_{42} &= 2 \\ x_{13} + x_{33} + x_{43} &= 7 \\ x_{34} + x_{44} &= 7 \\ x_{35} + x_{45} &= 4 \end{aligned} \right\} \text{(спрос)}, \quad x_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k.$$

или
Найти

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^5 c_{ik} x_{ik} \rightarrow \min ;$$

при ограничениях (вида $\sum_{k \in J^*} x_{jk} - \sum_{i \in J^{**}} x_{ij} = t_j$)

$$10x_{12} + 7x_{13} = 5,$$

$$-10x_{12} - 2x_{42} = -2,$$

$$3x_{34} + 5x_{35} - 7x_{13} - 4x_{43} = -1,$$

$$2x_{42} + 4x_{43} + 11x_{45} - 3x_{34} = 2,$$

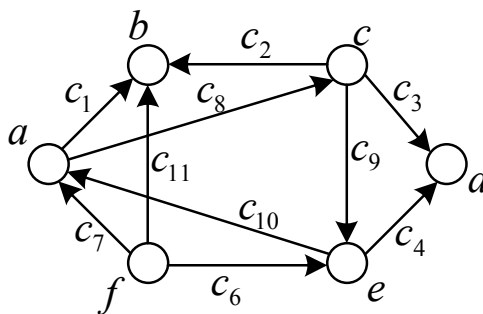
$$-5x_{35} - 11x_{45} = -4.$$

Решение данной задачи в Mathcad дает следующий результат.

		Пункты потребления				Поставки
		2 (сток)	3	4	5 (сток)	
Пункты поставок	1 (источник)		5			5
	3				4	6
	4	2				9
	Спрос	2	7	7	4	20 = 20

Значение целевой функции $F_{\min} = 59$.

Задача 2.5. Найти оптимальный план перевозок, предварительно определив опорное решение методом северо-западного угла.



	a	b	c	d	e	f	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁
1.	1	-2	3	-4	5	-3	1	2	4	3	6	5	3	7	8	4	9
2.	2	-7	5	-3	2	1	6	5	8	1	2	8	1	2	6	1	3
3.	3	-8	4	2	-2	1	7	8	4	9	3	3	1	5	2	4	8
4.	3	-1	-4	5	3	-6	2	3	7	1	4	6	7	9	3	6	9
5.	2	-7	3	-4	1	5	5	8	1	4	1	8	2	3	7	4	5
6.	-2	10	-4	-3	1	-2	4	3	7	9	1	9	6	7	4	3	2
7.	9	-5	-3	2	-4	1	7	5	2	1	4	8	2	2	3	7	6
8.	-3	-6	2	7	4	-4	3	5	6	5	7	5	9	8	7	2	5
9.	-2	-8	3	4	2	1	5	2	9	8	5	8	5	5	6	3	8
10.	4	-3	7	-5	-2	-1	6	9	1	6	7	1	8	2	9	1	3
11.	5	-2	3	4	-1	-9	8	6	9	4	3	6	7	6	5	5	5

	a	b	c	d	e	f	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}
12.	-6	8	-7	3	1	1	1	2	3	5	7	4	8	6	4	1	1
13.	5	9	-4	-1	-6	-3	6	2	3	7	1	8	3	5	4	7	5
14.	-3	2	4	-7	3	1	7	4	8	2	5	6	1	4	6	5	8
15.	-1	3	-5	4	-6	5	2	3	1	4	6	6	8	2	3	1	5
16.	-1	2	-3	4	-5	3	8	6	5	3	3	5	3	1	3	5	6
17.	-2	7	-5	3	-2	-1	2	4	1	5	6	8	4	6	1	8	7
18.	-3	8	-4	-2	2	-1	4	5	3	2	6	3	6	3	4	6	8
19.	-3	1	4	-5	-3	6	4	5	7	6	8	7	5	1	8	2	3
20.	-2	7	-3	4	-1	-5	4	1	8	5	8	3	6	4	5	3	6
21.	2	-9	4	3	-1	1	7	3	4	2	3	4	3	5	4	7	2
22.	-9	5	3	-2	4	-1	5	2	6	4	4	7	6	2	4	7	5
23.	3	6	-2	-7	-4	4	3	1	5	7	3	2	6	1	4	1	5
24.	2	8	-3	-4	-2	-1	6	8	7	4	5	7	5	7	4	3	8
25.	-4	3	-7	5	2	1	5	2	7	3	6	6	8	7	2	7	1
26.	-5	2	-3	-4	1	9	5	1	6	3	8	3	1	7	6	8	7
27.	6	-8	7	-3	-1	-1	2	7	5	2	4	4	5	2	3	5	7
28.	-5	-9	4	1	6	3	4	8	1	4	5	3	3	3	1	1	3
29.	3	-2	-4	7	-3	-1	7	1	7	3	2	4	8	3	1	1	8
30.	1	-3	5	-4	6	-5	3	2	4	8	6	1	7	2	1		4

2.3. Задача о назначениях

Частный случай классической транспортной задачи для случая $n = m$ и $a_i = b_k = 1$, т. е. количество поставщиков равно количеству потребителей и запасы каждого поставщика и потребности в спросе равны единице.

Содержательная формулировка. Задано n работ, каждую из которых может выполнить любой из n исполнителей. Стоимость выполнения работы i исполнителем k равна c_{ik} . Необходимо распределить исполнителей по работам таким образом, чтобы минимизировать общие затраты, причем один исполнитель назначается на одну работу.

Формальная постановка. Введем обозначения

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — множество работ;

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ — множество исполнителей.

Введем переменную

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если работу } i \text{ выполняет исполнитель } k; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (i = \overline{1, n}, k = \overline{1, n})$$

Пусть c_{ik} — стоимость выполнения работы i исполнителем k .

Найти

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} x_{ik} \rightarrow \min;$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{исполнитель выполняет только одну работу}),$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{одна работа только для одного исполнителя}),$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, k \quad (\text{условие целочисленности переменных}).$$

Замечание. Оптимизация перевозок или каких-либо других транспортных операций в задаче о назначениях не рассматривается.

Пример 2.14. Для выявления несанкционированного доступа по трем каналам утечки (акустический К1, виброакустический К2 и ПЭМИН К3) возможно использование четырех специальных средств (У1, У2, У3, У4). Подразумевается, что каждое средство способно выявлять нарушение в каждом канале, но затрачивает на обнаружение утечки разное время. Время выявления несанкционированного доступа (НСД) каждым устройством в каждом канале сведено в таблицу.

	К1	К2	К3
У1	1	5	9
У2	4	11	3
У3	7	1	10
У4	12	2	4

Необходимо: Распределить устройства по каналам утечки информации, таким образом, чтобы время выявления несанкционированного доступа было минимальным, причем одно устройство распределяется на один канал.

Решение. В данной трактовке поставленная задача не является задачей о назначениях, т. к. она подразумевает, чтобы число устройств было равно числу каналов. Поэтому введем фиктивный канал К4 с нулевым временем обнаружения НСД. Тогда можно составить транспортную (назовем ее так) таблицу.

	К1	К2	К3	К4	
У1	1	5	9	0	1
У2	4	11	3	0	1
У3	7	1	10	0	1
У4	12	2	4	0	1
	1	1	1	1	4=4

Единицы в последнем столбце показывают, что одно устройство распределяется на один канал, в последней строке — один канал обслуживается одним устройством. В левом нижнем углу таблицы показано соблюдение условия баланса (4=4).

Тогда формальное описание задачи примет вид.

Пусть c_{ik} — время обнаружения устройством i нарушения в канале k .

Найти

$$1x_{11} + 5x_{12} + 9x_{13} + 4x_{21} + 11x_{22} + 3x_{23} + 7x_{31} + 1x_{32} + 10x_{33} + 12x_{41} + 2x_{42} + 4x_{43} \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{устройство распределяется на один канал})$$

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{один канал обслуживается одним устройством})$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i, k \quad (\text{условие целочисленности переменных}).$$

или

Найти

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 c_{ik} x_{ik} \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^4 x_{ik} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 4 \quad (\text{устройство распределяется на один канал}),$$

$$\sum_{i=1}^4 x_{ik} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, 4 \quad (\text{один канал обслуживается одним устройством}),$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i, k \quad (\text{условие целочисленности переменных}).$$

Решение данной задачи в Mathcad представим в виде таблицы.

	K1	K2	K3	K4
Y1	1			
Y2			1	
Y3		1		
Y4				1

Минимальное суммарное время выполнения процедуры обнаружения НСД $F_{\min} = 5$. Четвертое устройство назначено на фиктивный канал, поэтому в работе оно не используется.

Венгерский алгоритм.

Для решения задачи о назначениях можно воспользоваться любым алгоритмом линейного программирования или методом потенциалов для решения транспортной задачи. Однако для решения задачи о назначениях применяют специальный **венгерский алгоритм**.

Пример 2.15. Для проведения следственных мероприятий необходимо выполнить четыре задачи. В подчинении у старшего группы четыре человека. Каждый сотрудник группы может выполнить любую из четырех задач. Время выполнения каждым сотрудником определенной задачи известно и сведено в таблицу. Старшему группы необходимо распределить задачи между сотрудниками таким образом, чтобы время выполнения работы было минимальным.

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4
Сотрудник 1	1	7	1	3
Сотрудник 2	5	3	4	2
Сотрудник 3	3	5	1	4
Сотрудник 4	2	9	3	2

Необходимо уточнить, что каждый сотрудник назначается для выполнения только одной задачи и одна задача для одного сотрудника. Решать задачи такого типа можно и на максимум.

Решение.

Решим данную задачу венгерским методом. Данный метод был разработан и опубликован Гарольдом Куном в 1955 году. Название алгоритма связано с тем, что он основан на более ранних работах венгерских математиков Кенига и Эгервари.

По сути, предлагаемое решение представляет собой нахождение совершенного паросочетания двудольного графа.

Проведем редукцию матрицы. Найдем минимальный элемент в каждой строке (так как решаем задачу на минимум).

1	7	1	3	1
5	3	4	2	2
3	5	1	4	1
2	9	3	2	2

Вычтем найденный элемент из каждого элемента соответствующей строки.

1-1	7-1	1-1	3-1
5-2	3-2	4-2	2-2
3-1	5-1	1-1	4-1
2-2	9-2	3-2	2-2

→

0	6	0	2
3	1	2	0
2	4	0	3
0	7	1	0

Полученное распределение сотрудников по задачам не является оптимальным, так как во втором столбце нет нулей.

В каждой строке и каждом столбце таблицы должен быть хотя бы один ноль. Если такого нет, то необходимо провести аналогичную операцию со столбцами для последней таблицы. Т. е. необходимо найти минимальные элементы в каждом столбце и вычесть их из всех элементов соответствующего столбца.

Во втором столбце таблицы нулей нет. Тогда получаем.

0	6	0	2
3	1	2	0
2	4	0	3
0	7	1	0
0	1	0	0

→

0-0	6-1	0-0	2-0
3-0	1-1	2-0	0-0
2-0	4-1	0-0	3-0
0-0	7-1	1-0	0-0

В результате получаем.

0	5	0	2
3	0	2	0
2	3	0	3
0	6	1	0

Теперь в каждой строке и каждом столбце есть нули.

Если назначим первого сотрудника на выполнение первой задачи, то лишаем четвертого сотрудника возможности выполнить эту же задачу. При назначении первого сотрудника для выполнения третьей задачи — третий сотрудник лишается возможности выполнить данную задачу. Далее аналогично.

Находим строки таблицы, содержащие один ноль. Отмечаем данный ноль, а в столбце, где находится этот ноль, все остальные нули зачеркиваем.

В нашей таблице только третья строка содержит один ноль — его выделяем, а другие нули третьего столбца зачеркиваем.

0	5	~~0~~	2
3	0	2	0
2	3	[0]	3
0	6	1	0

Теперь первая строка содержит один ноль: данный ноль выделяем, а другие нули первого столбца зачеркиваем

[0]	5	~~0~~	2
3	0	2	0
2	3	[0]	3
~~0~~	6	1	0

Четвертая строка содержит один ноль: данный ноль выделяем, а остальные нули четвертого столбца вычеркиваем.

[0]	5	~~0~~	2
3	0	2	~~0~~
2	3	[0]	3
~~0~~	6	1	[0]

Выделяем оставшийся ноль.

[0]	5	~~0~~	2
3	[0]	2	~~0~~
2	3	[0]	3
~~0~~	6	1	[0]

Таким образом, в каждой строчке (столбце) есть выделенные нули. Найдено совершенное паросочетание двудольного графа.

Таблица распределения задач между сотрудниками имеет вид.

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4
Сотрудник 1	1			
Сотрудник 2		3		
Сотрудник 3			1	
Сотрудник 4				2

Время на выполнение работы по проведению следственных мероприятий составляет $1+3+1+2=7$ ед.

Пример 2.16. Необходимо оборудовать четыре объекта четырьмя системами сигнализации. Экономический эффект от применения той или иной сигнализации на объекте известен и сведен в таблицу. Распределить системы сигнализации между объектами для получения максимального эффекта.

	Система 1	Система 2	Система 3	Система 4
Объект 1	10	20	11	5
Объект 2	3	14	9	2
Объект 3	9	8	6	12
Объект 4	7	15	6	9

Решать задачи такого типа можно и на минимум.

Решение. Решим данную задачу венгерским методом

Проведем редукцию матрицы. Найдем максимальный элемент в каждой строке (так как решаем задачу на максимум).

10	20	11	5	20
3	14	9	2	14
9	8	6	12	12
7	15	6	9	15

Вычтем из найденного элемента каждый элемент соответствующей строки.

20-10	20-20	20-11	20-5
14-3	14-14	14-9	14-2
12-9	12-8	12-6	12-12
15-7	15-15	15-6	15-9

В результате получаем.

10	0	9	15
11	0	5	12
3	4	6	0
8	0	9	6

Полученное распределение не является оптимальным, так как в первом и третьем столбцах нет нулей.

В каждой строке и каждом столбце таблицы должен быть хотя бы один ноль. Если такого нет, то необходимо провести аналогичную операцию со столбцами для последней таблицы (только ищем минимальные элементы). Т. е. необходимо найти минимальные элементы в каждом столбце и вычесть их из всех элементов соответствующего столбца.

Тогда получаем.

10	0	9	15
11	0	5	12
3	4	6	0
8	0	9	6
3	0	5	0

→

10-3	0-0	9-5	15-0
11-3	0-0	5-5	12-0
3-3	4-0	6-5	0-0
8-3	0-0	9-5	6-0

В результате получаем.

7	0	4	15
8	0	0	12
0	4	1	0
5	0	4	6

Теперь в каждой строке и каждом столбце есть нули.

Находим строки таблицы, содержащие один ноль. Отмечаем данный ноль, а в столбце, где находится этот ноль, все остальные нули зачеркиваем.

Первая строка содержит один ноль — его выделяем, а другие нули второго столбца зачеркиваем.

7	[0]	4	15
8	~~0~~	0	12
0	4	1	0
5	~~0~~	4	6

Во второй строке выделяем ноль.

7	[0]	4	15
8	~~0~~	[0]	12
0	4	1	0
5	~~0~~	4	6

Теперь проделываем аналогичные операции по столбцам. Находим столбцы, содержащие только один ноль, отмечаем его, а в строке, где находится данный ноль, все остальные нули зачеркиваем.

В таблице первый и четвертый столбцы содержат по одному нулю. Отметим ноль первого столбца, следовательно, в четвертом столбце ноль зачеркнем (можно сделать наоборот, но итоговый результат будет аналогичен).

7	[0]	4	15
8	~~0~~	[0]	12
[0]	4	1	~~0~~
5	~~0~~	4	6

В таблице больше нет неотмеченных (незачеркнутых) нулей. Полученное распределение не является оптимальным, так как в четвертой строке нет отмеченных нулей.

Через нули таблицы проводим **минимальное** количество горизонтальных и вертикальных линий.

7	0	4	15
8	0	0	12
0	4	1	0
5	0	4	6

Найдем минимальный элемент среди незачеркнутых чисел: $\min[7, 4, 15, 5, 4, 6] = 4$. Вычтем найденный минимум из всех незачеркнутых чисел и прибавим к числам, стоящим на пересечении прямых.

7-4	0	4-4	15-4
8	0+4	0	12
0	4+4	1	0
5-4	0	4-4	6-4

→

3	0	0	11
8	4	0	12
0	8	1	0
1	0	0	2

В каждой строке и каждом столбце есть нули, причем не по одному разу (совершенное паросочетание двудольного графа не найдено).

К полученной таблице применяем процедуру вычеркивания нулей.

Вторая строка содержит один ноль: его выделяем, нули в третьем столбце вычеркиваем.

3	0	~~0~~	11
8	4	[0]	12
0	8	1	0
1	0	~~0~~	2

Теперь первая и вторая строки содержат по одному нулю. Выделим ноль первой строки, нули во втором столбце вычеркиваем. (Можно было сделать наоборот — результат будет одинаковым).

3	[0]	~~0~~	11
8	4	[0]	12
0	8	1	0
1	~~0~~	~~0~~	2

Строк, содержащих один ноль, больше нет, переходим к столбцам. Первый и последний столбец содержат по одному нулю. Выделяем ноль первого столбца, остальные нули третьей строки зачеркиваем. (Можно было сделать наоборот — результат будет одинаковым).

3	[0]	~~0~~	11
8	4	[0]	12
[0]	8	1	~~0~~
1	~~0~~	~~0~~	2

В таблице больше нет не отмеченных (не зачеркнутых) нулей. Полученное распределение не является оптимальным, так как в последней строке нет отмеченных нулей.

Через нули таблицы проводим минимальное количество горизонтальных и вертикальных линий.

3	~~0~~	~~0~~	11
8	~~4~~	~~0~~	12
~~0~~	~~8~~	~~1~~	~~0~~
1	~~0~~	~~0~~	2

Найдем минимальный элемент среди незачеркнутых чисел: $\min[3, 11, 8, 12, 1, 2] = 1$. Вычтем найденный минимум из всех незачеркнутых чисел и прибавим к числам, стоящим на пересечении прямых.

3-1	0	0	11-1
8-1	4	0	12-1
0	8+1	1+1	0
1-1	0	0	2-1

→

2	0	0	10
7	4	0	11
0	9	2	0
0	0	0	1

К полученной таблице применяем процедуру вычеркивания нулей.

Вторая строка содержит один ноль: его выделяем, остальные нули третьего столбца вычеркиваем.

2	0	~~0~~	10
7	4	[0]	11
0	9	2	0
0	0	~~0~~	1

Первая строка содержит один ноль: его выделяем, нули третьего столбца вычеркиваем.

2	[0]	~~0~~	10
7	4	[0]	11
0	9	2	0
0	~~0~~	~~0~~	1

Последняя строка теперь содержит один ноль: его выделяем, остальные нули первого столбца вычеркиваем.

2	[0]	~~0~~	10
7	4	[0]	11
~~0~~	9	2	0
[0]	~~0~~	~~0~~	1

Выделяем оставшийся ноль третьей строки.

2	[0]	~~0~~	10
7	4	[0]	11
~~0~~	9	2	[0]
[0]	~~0~~	~~0~~	1

В каждой строке и каждом столбце выделено по одному нулю — найдено совершенное паросочетание двудольного графа.

Таблица распределения систем сигнализации между объектами для получения максимальной эффективности имеет вид

	Система 1	Система 2	Система 3	Система 4
Объект 1		20		
Объект 2			9	
Объект 3				12
Объект 4	7			

Таким образом, максимальный эффект равен $20+9+12+7=48$ ед.

Пример 2.17. Для выполнения работы необходимо выполнение четырех задач. Известно минимальное время выполнения сотрудниками разных задач, которое сведено в таблицу. Распределим задачи между сотрудниками таким образом, чтобы время выполнения работы было минимальным.

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4
Сотрудник 1	3	7	1	3
Сотрудник 2	5	3	4	2
Сотрудник 3	3	5	1	4
Сотрудник 4	2	9	3	2

Необходимо уточнить, что каждый сотрудник назначается для выполнения только одной задачи и одна задача для одного сотрудника. Решать задачи такого типа можно и на максимум.

Решение. Решим данную задачу венгерским методом

Проведем редукцию матрицы. Найдем минимальный элемент в каждой строке.

3	7	1	3	1
5	3	4	2	2
3	5	1	4	1
2	9	3	2	2

Вычтем найденный элемент из каждого элемента соответствующей строки.

3-1	7-1	1-1	3-1
5-2	3-2	4-2	2-2
3-1	5-1	1-1	4-1
2-2	9-2	3-2	2-2

В результате получаем

2	6	0	2
3	1	2	0
2	4	0	3
0	7	1	0

Полученное распределение не является оптимальным, так как во втором столбце нет нулей.

В каждой строке и каждом столбце таблицы должен быть хотя бы один ноль. Если такого нет, то необходимо провести аналогичную операцию со столбцами для последней таблицы. Т. е. необходимо найти минимальные элементы в каждом столбце и вычесть их из всех элементов соответствующего столбца.

Для нашего случая имеем

2	6	0	2
3	1	2	0
2	4	0	3
0	7	1	0
0	1	0	0

→

2-0	6-1	0-0	2-0
3-0	1-1	2-0	0-0
2-0	4-1	0-0	3-0
0-0	7-1	1-0	0-0

В результате получаем

2	5	0	2
3	0	2	0
2	3	0	3
0	6	1	0

Теперь в каждой строке и каждом столбце есть нули.

Находим строки таблицы, содержащие один ноль. Отмечаем данный ноль, а в столбце, где находится этот ноль, все остальные нули зачеркиваем.

В нашей таблице только первая строка содержит один ноль — его выделяем, а другие нули третьего столбца зачеркиваем.

2	5	[0]	2
3	0	2	0
2	3	~~0~~	3
0	6	1	0

Теперь проделываем аналогичные операции по столбцам. Находим столбцы, содержащие только один ноль, отмечаем его, а в строке, где находится данный ноль, все остальные нули зачеркиваем.

В таблице первый и второй столбцы содержат по одному нулю. Отмечаем их, а в соответствующих строках зачеркиваем остальные нули.

2	5	[0]	2
3	[0]	2	~~0~~
2	3	~~0~~	3
[0]	6	1	~~0~~

В таблице больше нет неотмеченных (незачеркнутых) нулей. Полученное распределение сотрудников по задачам не является оптимальным, так как в третьей строке нет отмеченных нулей.

Через нули таблицы проводим минимальное количество горизонтальных и вертикальных линий.

2	5	0	2
~~3~~	~~0~~	~~2~~	~~0~~
2	3	0	3
~~0~~	~~6~~	~~1~~	~~0~~

Найдем минимальный элемент среди незачеркнутых чисел: $\min[2, 5, 2, 2, 3, 3] = 2$. Вычтем найденный минимум из всех незачеркнутых чисел и прибавим к числам, стоящим на пересечении прямых.

2-2	5-2	0	2-2
3	0	2+2	0
2-2	3-2	0	3-2
0	6	1+2	0

→

0	3	0	0
3	0	4	0
0	1	0	1
0	6	3	0

В каждой строке и каждом столбце есть нули.

К полученной таблице применяем процедуру вычеркивания нулей.

Во втором столбце один ноль: его выделяем, нули в строке вычеркиваем.

0	3	0	0
3	[0]	4	~~0~~
0	1	0	1
0	6	3	0

В оставшихся строках можно выделить нули, как в первом, в третьем так и в четвертом столбцах. Т. е. возможны три варианта.

Вариант 1. Выделим ноль в первой строке (первый столбец). Следовательно, все нули первого столбца зачеркиваем. А также зачеркнем все нули первой строки, так как первый сотрудник распределен на первую работу.

[0]	3	~~0~~	~~0~~
3	[0]	4	~~0~~
~~0~~	1	0	1
~~0~~	6	3	0

Очевидно, что необходимо выделить оставшиеся нули.

[0]	3	~~0~~	~~0~~
3	[0]	4	~~0~~
~~0~~	1	[0]	1
~~0~~	6	3	[0]

В каждой строке и каждом столбце выделено по одному нулю — найдено совершенное паросочетание двудольного графа.

Таблица распределения задач между сотрудниками имеет вид

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4
Сотрудник 1	3			
Сотрудник 2		3		
Сотрудник 3			1	
Сотрудник 4				2

Время на выполнение работы по проведению следственных мероприятий составляет $3+3+1+2=9$ ед.

Вариант 2. Выделим ноль в первой строке (третий столбец). Следовательно, все нули третьего столбца зачеркиваем. А также зачеркнем все нули первой строки, так как первый сотрудник распределен на первую работу.

~~0~~	3	[0]	~~0~~
3	[0]	4	~~0~~
0	1	~~0~~	1
0	6	3	0

Третья строка содержит один ноль: его выделяем, остальные нули первого столбца зачеркиваем.

~~0~~	3	[0]	~~0~~
3	[0]	4	~~0~~
[0]	1	~~0~~	1
~~0~~	6	3	0

Выделяем оставшийся ноль последней строки.

~~0~~	3	[0]	~~0~~
3	[0]	4	~~0~~
[0]	1	~~0~~	1
~~0~~	6	3	[0]

В каждой строке и каждом столбце выделено по одному нулю — найдено совершенное паросочетание двудольного графа.

Таблица распределения задач между сотрудниками имеет вид

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4
Сотрудник 1			1	
Сотрудник 2		3		
Сотрудник 3	3			
Сотрудник 4				2

Время на выполнение работы по проведению следственных мероприятий составляет $1+3+3+2=9$ ед.

Вариант 3. Выделим ноль в первой строке (четвертый столбец). Следовательно, все нули четвертого столбца зачеркиваем. А также зачеркнем все нули первой строки, так как первый сотрудник распределен на первую работу.

~~0~~	3	~~0~~	[0]
3	[0]	4	~~0~~
0	1	0	1
0	6	3	~~0~~

Четвертая строка содержит один ноль: его выделяем, остальные нули первого столбца зачеркиваем.

~~0~~	3	~~0~~	[0]
3	[0]	4	~~0~~
~~0~~	1	0	1
[0]	6	3	~~0~~

Выделяем оставшийся ноль последней строки.

~~0~~	3	~~0~~	[0]
3	[0]	4	~~0~~
~~0~~	1	[0]	1
[0]	6	3	~~0~~

В каждой строке и каждом столбце выделено по одному нулю — найдено совершенное паросочетание двудольного графа.

Таблица распределения задач между сотрудниками имеет вид

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4
Сотрудник 1				3
Сотрудник 2		3		
Сотрудник 3			1	
Сотрудник 4	2			

Время на выполнение работы по проведению следственных мероприятий составляет $3+3+1+2=9$ ед.

Задача 2.6. Необходимо выполнить комплекс работ. Работы могут выполняться параллельно. Минимальное время выполнения сотрудниками разных задач сведено в таблицу. Распределим задачи между сотрудниками таким образом, чтобы время выполнения работ было:

1) минимальным;

2) максимальным.

Найти решение:

— венгерским алгоритмом;

— как решение задачи линейного программирования.

1.

$$\begin{pmatrix} 46 & 22 & 41 & 53 \\ 22 & 18 & 30 & 13 \\ 13 & 35 & 43 & 19 \\ 19 & 9 & 51 & 24 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 43 & 38 & 42 & 40 \\ 42 & 39 & 44 & 40 \\ 40 & 43 & 41 & 44 \\ 44 & 38 & 42 & 41 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 93 & 92 & 99 & 95 \\ 99 & 91 & 96 & 92 \\ 95 & 93 & 96 & 94 \\ 92 & 91 & 99 & 95 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 56 & 30 & 89 & 51 \\ 43 & 11 & 51 & 43 \\ 25 & 37 & 25 & 30 \\ 11 & 28 & 43 & 23 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 15 & 14 & 13 & 16 \\ 16 & 10 & 15 & 12 \\ 25 & 11 & 16 & 13 \\ 18 & 11 & 17 & 12 \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} 46 & 49 & 41 & 42 \\ 43 & 44 & 42 & 49 \\ 48 & 46 & 43 & 44 \\ 49 & 47 & 41 & 46 \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} 24 & 11 & 31 & 33 \\ 11 & 16 & 40 & 12 \\ 12 & 25 & 22 & 17 \\ 17 & 10 & 51 & 32 \end{pmatrix}$$

8.

$$\begin{pmatrix} 17 & 15 & 37 & 89 \\ 58 & 25 & 89 & 77 \\ 15 & 34 & 25 & 83 \\ 37 & 17 & 62 & 17 \end{pmatrix}$$

9.

$$\begin{pmatrix} 71 & 80 & 72 & 70 \\ 80 & 69 & 75 & 73 \\ 72 & 71 & 76 & 80 \\ 73 & 69 & 75 & 77 \end{pmatrix}$$

10.

$$\begin{pmatrix} 17 & 21 & 17 & 34 \\ 34 & 16 & 41 & 21 \\ 41 & 17 & 57 & 34 \\ 21 & 16 & 41 & 16 \end{pmatrix}$$

11.

$$\begin{pmatrix} 24 & 31 & 19 & 18 \\ 11 & 16 & 20 & 49 \\ 44 & 18 & 24 & 11 \\ 19 & 53 & 31 & 15 \end{pmatrix}$$

12.

$$\begin{pmatrix} 40 & 25 & 12 & 80 \\ 16 & 24 & 32 & 15 \\ 93 & 63 & 76 & 20 \\ 76 & 81 & 69 & 98 \end{pmatrix}$$

13.

$$\begin{pmatrix} 32 & 81 & 66 & 54 \\ 66 & 94 & 26 & 80 \\ 93 & 15 & 62 & 28 \\ 30 & 24 & 51 & 91 \end{pmatrix}$$

14.

$$\begin{pmatrix} 99 & 50 & 44 & 88 \\ 71 & 68 & 73 & 93 \\ 65 & 72 & 99 & 48 \\ 53 & 77 & 42 & 35 \end{pmatrix}$$

15.

$$\begin{pmatrix} 20 & 21 & 14 & 15 \\ 24 & 23 & 13 & 18 \\ 19 & 20 & 10 & 15 \\ 14 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

16.

$$\begin{pmatrix} 53 & 17 & 21 & 32 \\ 47 & 88 & 57 & 62 \\ 13 & 12 & 43 & 24 \\ 25 & 33 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

17.

$$\begin{pmatrix} 22 & 19 & 15 & 20 \\ 13 & 20 & 14 & 15 \\ 15 & 13 & 20 & 19 \\ 14 & 12 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

18.

$$\begin{pmatrix} 14 & 89 & 73 & 32 \\ 15 & 38 & 86 & 17 \\ 82 & 68 & 81 & 48 \\ 49 & 20 & 31 & 64 \end{pmatrix}$$

19.

$$\begin{pmatrix} 18 & 37 & 42 & 22 \\ 11 & 18 & 39 & 44 \\ 57 & 19 & 28 & 31 \\ 49 & 61 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

20.

$$\begin{pmatrix} 24 & 11 & 12 & 17 \\ 11 & 16 & 25 & 10 \\ 31 & 40 & 22 & 51 \\ 33 & 12 & 17 & 32 \end{pmatrix}$$

21.

$$\begin{pmatrix} 55 & 19 & 27 & 31 \\ 65 & 55 & 15 & 57 \\ 70 & 81 & 44 & 97 \\ 24 & 25 & 80 & 14 \end{pmatrix}$$

22.

$$\begin{pmatrix} 55 & 31 & 19 & 71 \\ 40 & 92 & 68 & 41 \\ 32 & 70 & 63 & 18 \\ 22 & 89 & 89 & 93 \end{pmatrix}$$

23.

$$\begin{pmatrix} 61 & 59 & 34 & 58 \\ 47 & 54 & 69 & 71 \\ 42 & 54 & 66 & 34 \\ 51 & 49 & 42 & 44 \end{pmatrix}$$

24.

$$\begin{pmatrix} 87 & 89 & 78 & 75 \\ 84 & 89 & 79 & 81 \\ 86 & 90 & 76 & 75 \\ 86 & 86 & 79 & 77 \end{pmatrix}$$

25.

$$\begin{pmatrix} 13 & 31 & 38 & 18 \\ 26 & 46 & 24 & 23 \\ 38 & 10 & 41 & 26 \\ 11 & 19 & 37 & 40 \end{pmatrix}$$

26.

$$\begin{pmatrix} 13 & 12 & 15 & 12 \\ 17 & 19 & 12 & 13 \\ 18 & 15 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

27.

$$\begin{pmatrix} 37 & 68 & 41 & 31 \\ 99 & 6 & 58 & 8 \\ 31 & 22 & 74 & 14 \\ 95 & 51 & 90 & 47 \end{pmatrix}$$

28.

$$\begin{pmatrix} 35 & 35 & 37 & 20 \\ 37 & 16 & 10 & 25 \\ 17 & 40 & 29 & 13 \\ 29 & 31 & 21 & 11 \end{pmatrix}$$

29.

$$\begin{pmatrix} 22 & 35 & 28 & 17 \\ 13 & 28 & 19 & 38 \\ 37 & 15 & 14 & 12 \\ 18 & 32 & 31 & 24 \end{pmatrix}$$

30.

$$\begin{pmatrix} 15 & 16 & 24 & 44 \\ 25 & 33 & 11 & 13 \\ 55 & 22 & 48 & 50 \\ 45 & 12 & 36 & 28 \end{pmatrix}$$

2.4. Поиск оптимального пути

Задача коммивояжера (франц. *commisvoyageur*, от *comis* — служащий и *voa-geur* — странствующий) — одна из комбинаторных задач теории графов.

Содержательная формулировка. В простейшем случае формулируется следующим образом: даны n городов и известны расстояния между каждым двумя городами; коммивояжер, выходящий из какого-нибудь города, должен посетить $n-1$ других городов и вернуться в исходный. В каком порядке ему нужно посещать города (по одному разу каждый), чтобы общее пройденное расстояние было минимальным?

Формальная постановка. Пусть c_{ik} — затраты на переезд из i -го города в k -й ($i = \overline{1, n}, k = \overline{1, n}$), причем

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если переезд из } i\text{-го города в } k\text{-й включен в маршрут;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} x_{ik} \rightarrow \min ;$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ (отъезд),}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ (прибытие),}$$

$$c_{ii} = \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k.$$

В задаче коммивояжера для формирования оптимального маршрута объезда n городов необходимо выбрать один лучший из $n - 1$ вариантов по одному из критериев (время, стоимость или длина маршрута). Данная задача связана с определением гамильтонова цикла минимальной длины. При решении данной задачи множество всех возможных решений представляют в виде дерева — связного графа, не содержащего петель. Корень дерева объединяет все множество вариантов, а вершины дерева — подмножества частично упорядоченных вариантов решений. Всего возможно $\frac{(n-1)!}{2}$ вариантов: минус один — возвращаемся в ту же точку; делим на 2, т. к. 1-2-3 и 3-2-1 один вариант.

Пример 2.18. Сотруднику полиции необходимо посетить четыре контрольных точки и вернуться обратно. Для экономии служебного времени посещение одной точки дважды необходимо исключить. Время нахождения в пути известно и сведено в таблицу. Время в пути из точки A в точку B , как правило, не равно времени передвижения из B в A , что обусловлено различными причинами.

Необходимо составить маршрут перемещения сотрудника таким образом, чтобы были посещены все контрольные точки только по одному разу, и он должен вернуться обратно, т. е. необходимо решить задачу коммивояжера.

$$\begin{pmatrix} \infty & 20 & 10 & 25 & 10 \\ 5 & \infty & 22 & 11 & 5 \\ 7 & 9 & \infty & 15 & 10 \\ 11 & 10 & 12 & \infty & 21 \\ 10 & 7 & 15 & 25 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение.

Элемент упорядоченной таблицы (матрицы) обозначим как d_{ij} , где i — номер строки, j — номер столбца. Ориентированную (направленную) дугу из вершины i в вершину j обозначим как $d(i, j)$. Причем $d(i, j)$, как правило, не равно $d(j, i)$.

Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому посещается одна вершина только один раз и возвращается в исходную вершину. Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом матрицы d_{ij} .

Шаг 0.

Выберем начальное (базовое) решение — любое, например:

$$X_0 = [(1;2)(2;3)(3;4)(4;5)(5;1)] = (1-2-3-4-5-1),$$

тогда

$$F(X_0) = 20 + 22 + 15 + 21 + 10 = 88.$$

Для определения нижней границы множества воспользуемся операцией редукции (приведения матрицы по строкам).

Найдем минимальные значения в каждой строке.

(i, j)	1	2	3	4	5	
1	∞	20	10	25	10	10
2	5	∞	22	11	5	5
3	7	9	∞	15	10	7
4	11	10	12	∞	21	10
5	10	7	15	25	∞	7

Вычтем найденный элемент из каждого элемента соответствующей строки. В результате в каждой строке будет как минимум один ноль.

(i, j)	1	2	3	4	5	
1	∞	20–10	10–10	25–10	10–10	10
2	5–5	∞	22–5	11–5	5–5	5
3	7–7	9–7	∞	15–7	10–7	7
4	11–10	10–10	12–10	∞	21–10	10
5	10–7	7–7	15–7	25–7	∞	7

В результате получаем.

(i, j)	1	2	3	4	5
1	∞	10	0	15	0
2	0	∞	17	6	0
3	0	2	∞	8	3
4	1	0	2	∞	11
5	3	0	8	18	∞

Найдем минимальные значения в каждом столбце.

(i, j)	1	2	3	4	5
1	∞	10	0	15	0
2	0	∞	17	6	0
3	0	2	∞	8	3
4	1	0	2	∞	11
5	3	0	8	18	∞
	0	0	0	6	0

Вычтем найденный элемент из каждого элемента соответствующего столбца. В результате в каждом столбце будет как минимум один ноль.

(i, j)	1	2	3	4	5
1	∞	10-0	0-0	15-6	0-0
2	0-0	∞	17-0	6-6	0-0
3	0-0	2-0	∞	8-6	3-0
4	1-0	0-0	2-0	∞	11-0
5	3-0	0-0	8-0	18-6	∞

В результате получаем.

(i, j)	1	2	3	4	5	
1	∞	10	0	9	0	10
2	0	∞	17	0	0	5
3	0	2	∞	2	3	7
4	1	0	2	∞	11	10
5	3	0	8	12	∞	7
	0	0	0	6	0	$\sum = 45$

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H :

$$H = 10 + 5 + 7 + 10 + 7 + 0 + 0 + 0 + 6 + 0 = 45.$$

Шаг 1.

1.1. **Определим ребро ветвления** — разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i, j) и (i^*, j^*) .

Для каждого нулевого элемента получившейся преобразованной матрицы найдем «оценку». Оценка равна сумме минимального элемента по строке и минимального элемента по столбцу, на пересечении которых размещен данный нулевой элемент. Сам нулевой элемент при этом не участвует.

$$d(1, 3) = 0 + 2 = 2;$$

$$d(1, 5) = 0 + 0 = 0;$$

$$d(2, 1) = 0 + 0 = 0;$$

$$d(2, 4) = 0 + 2 = 2;$$

$$d(2, 5) = 0 + 0 = 0;$$

$$d(3, 1) = 2 + 0 = 2;$$

$$d(4, 2) = 1 + 0 = 1;$$

$$d(5, 2) = 3 + 0 = 3.$$

Наибольшая сумма равна 3 для ребра $d(5, 2)$, следовательно, множество разбивается на два подмножества $(5, 2)$ и $(5^*, 2^*)$.

1.2. **Исключаем ребро $(5, 2)$.** Исключение ребра $(5, 2)$ проведем путем замены нулевого элемента с наибольшей оценкой $d(5, 2)$ на ∞ . Далее осуществляем очередное приведение матрицы для образовавшегося подмножества $(5^*, 2^*)$.

Находим минимальные элементы в строках,

(i, j)	1	2	3	4	5	
1	∞	10	0	9	0	0
2	0	∞	17	0	0	0
3	0	2	∞	2	3	0
4	1	0	2	∞	11	0
5	3	∞	8	12	∞	3

вычитаем найденные элементы из элементов матрицы. Получаем:

(i, j)	1	2	3	4	5	
1	∞	10	0	9	0	0
2	0	∞	17	0	0	0
3	0	2	∞	2	3	0
4	1	0	2	∞	11	0
5	0	∞	5	9	∞	3

Аналогично поступаем со столбцами.

(i, j)	1	2	3	4	5	
1	∞	10	0	9	0	0
2	0	∞	17	0	0	0
3	0	2	∞	2	3	0
4	1	0	2	∞	11	0
5	0	∞	5	9	∞	3
	0	0	0	0	0	$\sum = 3$

Нижняя граница гамильтоновых циклов данного подмножества:

$$H(5^*, 2^*) = 45 + 3 = 48.$$

1.3. **Включаем ребро $(5, 2)$.** Включение ребра $(5, 2)$ проведем путем исключения (удаления) 5-й строки и 2-го столбца. Так как путь из вершины 5 в вершину 2 запомнили, то необходимо исключить путь из вершины 2 в 5, т. е. элемент d_{25} заменяем на ∞ для исключения негамильтонова цикла.

(i, j)	1	3	4	5
1	∞	0	9	0
2	0	17	0	∞
3	0	∞	2	3
4	1	2	∞	11

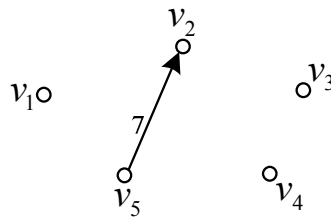
После операции приведения матрица будет иметь вид

(i, j)	1	3	4	5	
1	∞	0	9	0	0
2	0	17	0	∞	0
3	0	∞	2	3	0
4	0	1	∞	10	1
	0	0	0	0	$\Sigma=1$

Нижняя граница подмножества $(5, 2)$ равна

$$H(5, 2) = 45 + 1 = 46 < 48 = H(5^*, 2^*).$$

Так как нижняя граница подмножества $(5, 2)$ меньше, чем подмножества $(5^*, 2^*)$, то ребро $(5, 2)$ включаем в маршрут с новой нижней границей $H = 46$.



Шаг 2.

2.1. Определим ребро ветвления — разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i, j) и (i^*, j^*) .

Для каждого нулевого элемента получившейся преобразованной матрицы найдем «оценку». Оценка равна сумме минимального элемента по строке и минимального элемента по столбцу, на пересечении которых размещен данный нулевой элемент. Сам нулевой элемент при этом не участвует.

(i, j)	1	3	4	5
1	∞	0	9	0
2	0	17	0	∞
3	0	∞	2	3
4	0	1	∞	10

$$d(1, 3) = 0 + 1 = 1;$$

$$d(1, 5) = 0 + 3 = 3;$$

$$d(2, 1) = 0 + 0 = 0;$$

$$d(2, 4) = 0 + 2 = 2;$$

$$d(3, 1) = 2 + 0 = 2;$$

$$d(4, 1) = 1 + 0 = 1.$$

Наибольшая сумма равна 3 для ребра $d(1, 5)$, следовательно, множество разбивается на два подмножества $(1, 5)$ и $(1^*, 5^*)$.

2.2. Исключаем ребро $(1, 5)$. Исключение ребра $(1, 5)$ проведем путем замены нулевого элемента с наибольшей оценкой $d(1, 5)$ на ∞ . Далее осуществляем очередное приведение матрицы для образовавшегося подмножества $(1^*, 5^*)$.

После операции приведения матрица будет иметь вид

(i, j)	1	3	4	5	
1	∞	0	9	∞	0
2	0	17	0	∞	0
3	0	∞	2	0	0
4	0	1	∞	7	0
	0	0	0	3	$\Sigma = 3$

Нижняя граница подмножества $(1^*, 5^*)$ равна
 $H(1^*, 5^*) = 46 + 3 = 49$.

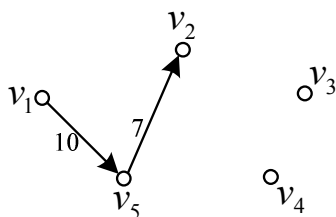
2.3. Включаем ребро $(1, 5)$. Включение ребра $(1, 5)$ проведем путем исключения (удаления) 1-й строки и 5-го столбца. Так как путь из вершины 1 в вершину 5 запомнили, то необходимо исключить путь из вершины 5 в 1, т. е. элемент d_{51} заменяем на ∞ для исключения негамильтонова цикла.

После операции приведения матрица будет иметь вид

(i, j)	1	3	4	
2	0	16	0	0
3	0	∞	2	0
4	0	0	∞	0
	0	1	0	$\Sigma = 1$

Нижняя граница подмножества $(1, 5)$ равна
 $H(1, 5) = 46 + 1 = 47 < 49 = H(1^*, 5^*)$.

Так как нижняя граница подмножества $(1, 5)$ меньше, чем подмножества $(1^*, 5^*)$, то ребро $(1, 5)$ включаем в маршрут с новой нижней границей $H = 47$.



Шаг 3.

Для исключения негамильтонова цикла (подциклов) запретим переход $(2, 1)$ — заменим элемент d_{21} на ∞ .

3.1. Определим ребро ветвления — разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i, j) и (i^*, j^*) .

Для каждого нулевого элемента получившейся преобразованной матрицы найдем «оценку». Оценка равна сумме минимального элемента по строке и минимального элемента по столбцу, на пересечении которых размещен данный нулевой элемент. Сам нулевой элемент при этом не участвует.

(i, j)	1	3	4
2	∞	16	0
3	0	∞	2
4	0	0	∞

$$d(2, 4) = 16 + 2 = 18;$$

$$d(4, 1) = 0 + 0 = 0;$$

$$d(3, 1) = 2 + 0 = 2;$$

$$d(4, 3) = 0 + 0 = 0.$$

Наибольшая сумма равна 18 для ребра $d(2, 4)$, следовательно, множество разбивается на два подмножества $(2, 4)$ и $(2^*, 4^*)$.

3.2. Исключаем ребро $(2, 4)$. Исключение ребра $(2, 4)$ проведем путем замены нулевого элемента с наибольшей оценкой $d(2, 4)$ на ∞ . Далее осуществляем очередное приведение матрицы для образовавшегося подмножества $(2^*, 4^*)$.

После операции приведения матрица будет иметь вид

(i, j)	1	3	4	
2	∞	16	∞	16
3	0	∞	0	0
4	0	0	∞	0
	0	0	2	$\sum = 18$

Нижняя граница подмножества $(2^*, 4^*)$ равна:

$$H(2^*, 4^*) = 47 + 18 = 65.$$

3.3. Включаем ребро $(2, 4)$. Включение ребра $(2, 4)$ проведем путем исключения (удаления) 2-й строки и 4-го столбца. Так как путь из вершины 2 в вершину 4 запомнили, то необходимо исключить путь из вершины 4 в 2, т. е. элемент d_{42} заменяем на ∞ для исключения негамильтонова цикла.

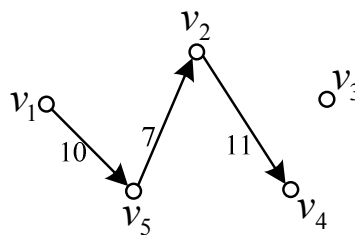
После операции приведения матрица будет иметь вид

(i, j)	1	3	
3	0	∞	0
4	0	0	0
	0	0	$\sum = 0$

Нижняя граница подмножества $(2, 4)$ равна:

$$H(2, 4) = 47 + 0 = 47 < 65 = H(2^*, 4^*).$$

Так как нижняя граница подмножества $(2, 4)$ меньше, чем подмножества $(2^*, 4^*)$, то ребро $(2, 4)$ включаем в маршрут с новой нижней границей $H = 48$.



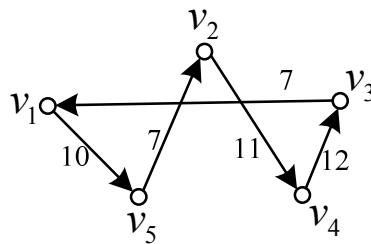
В соответствии с последней таблицей в гамильтонов маршрут включаем ребра $(3, 1)$ и $(4, 3)$.

В результате ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра:

$$(5, 2), (1, 5), (2, 4), (3, 1), (4, 3)$$

или по вершинам:

$$(1-5-2-4-3-1).$$



Длина маршрута $F(M_k) = 47$.

Задача 2.7. Патрульная машина объезжает контрольные точки и возвращается обратно в отдел полиции. Для экономии служебного времени посещение одной точки дважды необходимо исключить. Время нахождения в пути известно и сведено в таблицу. Время в пути из точки A в точку B , как правило, не равно времени передвижения из B в A , что обусловлено различными причинами.

Необходимо составить маршрут перемещения патруля таким образом, чтобы были посещены все контрольные точки только по одному разу, и он должен вернуться обратно, т.е. необходимо решить задачу коммивояжера.

Найти решение:

- определив гамильтонов цикл минимальной длины;
- как решение задачи линейного программирования.

1.

$$\begin{pmatrix} \infty & 27 & 89 & 54 & 19 \\ 25 & \infty & 75 & 3 & 28 \\ 94 & 91 & \infty & 85 & 82 \\ 43 & 86 & 32 & \infty & 21 \\ 83 & 69 & 55 & 41 & \infty \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} \infty & 25 & 86 & 50 & 14 \\ 70 & \infty & 16 & 86 & 59 \\ 3 & 6 & \infty & 12 & 15 \\ 50 & 3 & 53 & \infty & 56 \\ 78 & 59 & 40 & 21 & \infty \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} \infty & 83 & 38 & 90 & 45 \\ 41 & \infty & 44 & 94 & 47 \\ 26 & 79 & \infty & 88 & 44 \\ 37 & 49 & 61 & \infty & 85 \\ 74 & 1 & 25 & 49 & \infty \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} \infty & 78 & 10 & 39 & 68 \\ 77 & \infty & 85 & 89 & 93 \\ 71 & 18 & \infty & 9 & 53 \\ 26 & 79 & 35 & \infty & 44 \\ 29 & 62 & 95 & 31 & \infty \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} \infty & 45 & 58 & 71 & 84 \\ 20 & \infty & 12 & 8 & 4 \\ 39 & 70 & \infty & 35 & 66 \\ 87 & 89 & 91 & \infty & 95 \\ 84 & 9 & 31 & 53 & \infty \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} \infty & 68 & 51 & 34 & 17 \\ 21 & \infty & 32 & 86 & 43 \\ 58 & 27 & \infty & 62 & 31 \\ 69 & 94 & 22 & \infty & 72 \\ 67 & 73 & 79 & 85 & \infty \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} \infty & 23 & 90 & 60 & 30 \\ 56 & \infty & 53 & 3 & 50 \\ 39 & 70 & \infty & 35 & 66 \\ 38 & 11 & 81 & \infty & 27 \\ 80 & 64 & 48 & 32 & \infty \end{pmatrix}$$

8.

$$\begin{pmatrix} \infty & 84 & 63 & 42 & 21 \\ 76 & \infty & 65 & 11 & 54 \\ 10 & 8 & \infty & 4 & 2 \\ 63 & 31 & 96 & \infty & 32 \\ 77 & 81 & 85 & 89 & \infty \end{pmatrix}$$

9.

$$\begin{pmatrix} \infty & 17 & 37 & 57 & 77 \\ 41 & \infty & 44 & 94 & 47 \\ 87 & 89 & \infty & 93 & 95 \\ 60 & 48 & 36 & \infty & 12 \\ 21 & 75 & 32 & 86 & \infty \end{pmatrix}$$

10.

$$\begin{pmatrix} \infty & 30 & 71 & 15 & 56 \\ 77 & \infty & 85 & 89 & 93 \\ 10 & 8 & \infty & 4 & 2 \\ 71 & 18 & 62 & \infty & 53 \\ 41 & 91 & 44 & 94 & \infty \end{pmatrix}$$

11.

$$\begin{pmatrix} \infty & 52 & 39 & 26 & 13 \\ 20 & \infty & 12 & 8 & 4 \\ 58 & 27 & \infty & 62 & 31 \\ 87 & 89 & 91 & \infty & 95 \\ 13 & 88 & 66 & 44 & \infty \end{pmatrix}$$

12.

$$\begin{pmatrix} \infty & 14 & 59 & 7 & 52 \\ 41 & \infty & 44 & 94 & 47 \\ 71 & 18 & \infty & 9 & 53 \\ 37 & 49 & 61 & \infty & 85 \\ 23 & 96 & 72 & 48 & \infty \end{pmatrix}$$

13.

$$\begin{pmatrix} \infty & 56 & 42 & 28 & 14 \\ 21 & \infty & 32 & 86 & 43 \\ 15 & 12 & \infty & 6 & 3 \\ 28 & 3 & 75 & \infty & 25 \\ 78 & 43 & 8 & 70 & \infty \end{pmatrix}$$

14.

$$\begin{pmatrix} \infty & 13 & 34 & 55 & 76 \\ 76 & \infty & 65 & 11 & 54 \\ 87 & 89 & \infty & 93 & 95 \\ 63 & 31 & 96 & \infty & 32 \\ 20 & 16 & 12 & 8 & \infty \end{pmatrix}$$

15.

$$\begin{pmatrix} \infty & 80 & 60 & 40 & 20 \\ 41 & \infty & 44 & 94 & 47 \\ 10 & 8 & \infty & 4 & 2 \\ 60 & 48 & 36 & \infty & 12 \\ 76 & 22 & 65 & 11 & \infty \end{pmatrix}$$

16.

$$\begin{pmatrix} \infty & 76 & 26 & 82 & 41 \\ 77 & \infty & 85 & 89 & 93 \\ 87 & 89 & \infty & 93 & 95 \\ 71 & 18 & 62 & \infty & 53 \\ 56 & 6 & 53 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

17.

$$\begin{pmatrix} \infty & 76 & 57 & 38 & 19 \\ 56 & \infty & 53 & 3 & 50 \\ 82 & 85 & \infty & 91 & 94 \\ 59 & 86 & 16 & \infty & 70 \\ 83 & 47 & 11 & 72 & \infty \end{pmatrix}$$

18.

$$\begin{pmatrix} \infty & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 20 & \infty & 12 & 8 & 4 \\ 15 & 12 & \infty & 6 & 3 \\ 10 & 8 & 6 & \infty & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

19.

$$\begin{pmatrix} \infty & 41 & 55 & 69 & 83 \\ 21 & \infty & 32 & 86 & 43 \\ 82 & 85 & \infty & 91 & 94 \\ 28 & 3 & 75 & \infty & 25 \\ 41 & 55 & 69 & 83 & \infty \end{pmatrix}$$

20.

$$\begin{pmatrix} \infty & 19 & 87 & 58 & 29 \\ 77 & \infty & 85 & 89 & 93 \\ 26 & 79 & \infty & 88 & 44 \\ 26 & 79 & 35 & \infty & 44 \\ 19 & 87 & 58 & 29 & \infty \end{pmatrix}$$
Задача 2.8. Найти оптимальный маршрут задачи коммивояжера:

— определив гамильтонов цикл минимальной длины;

— как решение задачи линейного программирования.

1.

$$\begin{pmatrix} \infty & 25 & 34 & 43 & 52 & 61 & 70 & 79 & 88 \\ 95 & \infty & 20 & 31 & 42 & 53 & 64 & 75 & 86 \\ 37 & 76 & \infty & 57 & 96 & 38 & 77 & 19 & 58 \\ 54 & 48 & 42 & \infty & 30 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 74 & 55 & 36 & 17 & \infty & 76 & 57 & 38 & 19 \\ 62 & 12 & 59 & 9 & 56 & \infty & 53 & 3 & 50 \\ 70 & 73 & 76 & 79 & 82 & 85 & \infty & 91 & 94 \\ 48 & 75 & 5 & 32 & 59 & 86 & 16 & \infty & 70 \\ 33 & 94 & 58 & 22 & 83 & 47 & 11 & 72 & \infty \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} \infty & 86 & 51 & 16 & 78 & 43 & 8 & 70 & 35 \\ 72 & \infty & 56 & 48 & 40 & 32 & 24 & 16 & 8 \\ 55 & 92 & \infty & 69 & 9 & 46 & 83 & 23 & 60 \\ 24 & 86 & 51 & \infty & 78 & 43 & 8 & 70 & 35 \\ 19 & 60 & 4 & 45 & \infty & 30 & 71 & 15 & 56 \\ 61 & 65 & 69 & 73 & 77 & \infty & 85 & 89 & 93 \\ 18 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & \infty & 4 & 2 \\ 89 & 36 & 80 & 27 & 71 & 18 & 62 & \infty & 53 \\ 35 & 85 & 38 & 88 & 41 & 91 & 44 & 94 & \infty \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} \infty & 65 & 69 & 73 & 77 & 81 & 85 & 89 & 93 \\ 95 & \infty & 20 & 31 & 42 & 53 & 64 & 75 & 86 \\ 59 & 74 & \infty & 7 & 22 & 37 & 52 & 67 & 82 \\ 43 & 49 & 55 & \infty & 67 & 73 & 79 & 85 & 91 \\ 76 & 46 & 16 & 83 & \infty & 23 & 90 & 60 & 30 \\ 62 & 12 & 59 & 9 & 56 & \infty & 53 & 3 & 50 \\ 12 & 43 & 74 & 8 & 39 & 70 & \infty & 35 & 66 \\ 49 & 22 & 92 & 65 & 38 & 11 & 81 & \infty & 27 \\ 47 & 31 & 15 & 96 & 80 & 64 & 48 & 32 & \infty \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} \infty & 56 & 23 & 76 & 32 & 47 & 23 & 67 & 11 \\ 9 & \infty & 27 & 21 & 15 & 11 & 9 & 6 & 3 \\ 87 & 45 & \infty & 58 & 16 & 71 & 29 & 84 & 42 \\ 43 & 49 & 55 & \infty & 67 & 73 & 79 & 85 & 91 \\ 56 & 39 & 22 & 5 & \infty & 68 & 51 & 34 & 17 \\ 96 & 53 & 10 & 64 & 21 & \infty & 32 & 86 & 43 \\ 85 & 54 & 23 & 89 & 58 & 27 & \infty & 62 & 31 \\ 66 & 91 & 19 & 44 & 69 & 94 & 22 & \infty & 72 \\ 43 & 49 & 55 & 61 & 67 & 73 & 79 & 85 & \infty \end{pmatrix}$$

5.

6.

7.
$$\begin{pmatrix} \infty & 34 & 27 & 45 & 11 & 78 & 32 & 45 & 12 \\ 28 & \infty & 24 & 20 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 96 & 53 & \infty & 10 & 64 & 21 & 32 & 86 & 42 \\ 43 & 49 & 55 & \infty & 67 & 73 & 79 & 85 & 91 \\ 56 & 39 & 22 & 5 & \infty & 68 & 51 & 34 & 17 \\ 96 & 53 & 10 & 64 & 21 & \infty & 32 & 86 & 43 \\ 85 & 54 & 23 & 89 & 58 & 27 & \infty & 62 & 31 \\ 66 & 91 & 19 & 44 & 69 & 94 & 22 & \infty & 72 \\ 43 & 49 & 55 & 61 & 67 & 73 & 79 & 85 & \infty \end{pmatrix}$$
8.
$$\begin{pmatrix} \infty & 44 & 55 & 23 & 77 & 23 & 75 & 22 & 11 \\ 95 & \infty & 20 & 31 & 42 & 53 & 64 & 75 & 86 \\ 58 & 30 & \infty & 71 & 43 & 15 & 84 & 56 & 28 \\ 73 & 11 & 46 & \infty & 19 & 54 & 89 & 27 & 62 \\ 13 & 87 & 64 & 41 & \infty & 92 & 69 & 46 & 23 \\ 1 & 44 & 87 & 33 & 76 & \infty & 65 & 11 & 54 \\ 8 & 61 & 17 & 70 & 26 & 79 & \infty & 88 & 44 \\ 3 & 35 & 67 & 2 & 34 & 66 & 1 & \infty & 65 \\ 16 & 25 & 34 & 43 & 52 & 61 & 70 & 79 & \infty \end{pmatrix}$$
9.
$$\begin{pmatrix} \infty & 31 & 95 & 62 & 29 & 93 & 60 & 27 & 91 \\ 44 & \infty & 35 & 79 & 26 & 70 & 17 & 61 & 8 \\ 53 & 9 & \infty & 18 & 71 & 27 & 80 & 36 & 89 \\ 93 & 89 & 85 & \infty & 77 & 73 & 69 & 65 & 61 \\ 68 & 39 & 10 & 78 & \infty & 20 & 88 & 59 & 30 \\ 62 & 27 & 89 & 54 & 19 & \infty & 46 & 11 & 73 \\ 38 & 76 & 17 & 55 & 93 & 34 & \infty & 12 & 51 \\ 8 & 15 & 23 & 31 & 40 & 48 & 56 & \infty & 73 \\ 95 & 85 & 79 & 75 & 67 & 61 & 54 & 45 & \infty \end{pmatrix}$$
10.
$$\begin{pmatrix} \infty & 25 & 86 & 81 & 77 & 73 & 69 & 65 & 67 \\ 32 & \infty & 96 & 31 & 63 & 95 & 30 & 62 & 94 \\ 4 & 6 & \infty & 8 & 12 & 8 & 2 & 7 & 11 \\ 54 & 11 & 65 & \infty & 76 & 33 & 87 & 44 & 1 \\ 21 & 42 & 64 & 84 & \infty & 29 & 50 & 71 & 92 \\ 35 & 70 & 8 & 43 & 78 & \infty & 51 & 86 & 24 \\ 63 & 29 & 92 & 58 & 24 & 87 & \infty & 19 & 82 \\ 35 & 70 & 8 & 43 & 78 & 16 & 51 & \infty & 86 \\ 55 & 23 & 77 & 98 & 2 & 3 & 4 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$
11.
$$\begin{pmatrix} \infty & 18 & 27 & 36 & 45 & 55 & 62 & 71 & 79 \\ 65 & \infty & 67 & 5 & 34 & 67 & 3 & 18 & 55 \\ 53 & 9 & \infty & 18 & 71 & 27 & 80 & 36 & 89 \\ 54 & 11 & 65 & \infty & 76 & 33 & 87 & 44 & 2 \\ 74 & 51 & 28 & 5 & \infty & 56 & 33 & 10 & 84 \\ 62 & 27 & 89 & 54 & 19 & \infty & 46 & 11 & 73 \\ 69 & 41 & 12 & 82 & 54 & 26 & \infty & 67 & 39 \\ 55 & 23 & 65 & 71 & 27 & 34 & 71 & \infty & 12 \\ 5 & 15 & 25 & 5 & 15 & 27 & 55 & 11 & \infty \end{pmatrix}$$
12.
$$\begin{pmatrix} \infty & 65 & 49 & 33 & 17 & 2 & 82 & 67 & 50 \\ 27 & \infty & 81 & 11 & 28 & 65 & 92 & 22 & 49 \\ 31 & 62 & \infty & 27 & 58 & 89 & 23 & 54 & 85 \\ 50 & 3 & 54 & \infty & 57 & 9 & 59 & 11 & 61 \\ 67 & 37 & 7 & 74 & \infty & 14 & 81 & 51 & 21 \\ 91 & 85 & 79 & 73 & 67 & \infty & 55 & 49 & 43 \\ 15 & 31 & 45 & 59 & 74 & 90 & \infty & 23 & 32 \\ 86 & 75 & 67 & 55 & 41 & 32 & 11 & \infty & 20 \\ 56 & 32 & 84 & 67 & 22 & 42 & 11 & 74 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 53 & 6 & 56 & 9 & 57 & 12 & 59 \\ 53 & \infty & 62 & 18 & 71 & 27 & 80 & 36 & 89 \\ 95 & 93 & \infty & 89 & 87 & 85 & 83 & 81 & 79 \\ 93 & 88 & 85 & \infty & 83 & 85 & 87 & 89 & 91 \\ 41 & 82 & 26 & 67 & \infty & 52 & 93 & 37 & 78 \\ 35 & 70 & 8 & 43 & 78 & \infty & 51 & 86 & 24 \\ 37 & 74 & 14 & 51 & 88 & 28 & \infty & 5 & 42 \\ 62 & 27 & 89 & 54 & 19 & 81 & 46 & \infty & 11 \\ 35 & 58 & 34 & 41 & 18 & 19 & 64 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \infty & 49 & 25 & 1 & 74 & 50 & 26 & 2 & 75 \\ 85 & \infty & 61 & 49 & 37 & 25 & 12 & 1 & 86 \\ 44 & 88 & \infty & 79 & 26 & 70 & 17 & 61 & 8 \\ 47 & 94 & 44 & \infty & 41 & 88 & 38 & 85 & 35 \\ 45 & 90 & 38 & 83 & \infty & 76 & 24 & 69 & 17 \\ 62 & 27 & 89 & 54 & 19 & \infty & 46 & 11 & 73 \\ 86 & 75 & 64 & 53 & 42 & 31 & \infty & 20 & 10 \\ 24 & 42 & 56 & 65 & 78 & 87 & 90 & \infty & 9 \\ 12 & 24 & 36 & 48 & 60 & 72 & 84 & 90 & \infty \end{pmatrix}$$

13.

$$\begin{pmatrix} \infty & 53 & 31 & 9 & 84 & 62 & 40 & 18 & 93 \\ 95 & \infty & 91 & 89 & 87 & 85 & 83 & 81 & 79 \\ 67 & 35 & \infty & 70 & 39 & 8 & 74 & 43 & 12 \\ 4 & 9 & 5 & \infty & 3 & 6 & 5 & 2 & 7 \\ 84 & 71 & 58 & 45 & \infty & 19 & 16 & 6 & 90 \\ 91 & 85 & 79 & 73 & 67 & \infty & 55 & 49 & 43 \\ 57 & 17 & 11 & 26 & 34 & 28 & \infty & 30 & 32 \\ 37 & 41 & 35 & 42 & 39 & 43 & 33 & \infty & 40 \\ 36 & 43 & 38 & 44 & 27 & 12 & 29 & 31 & \infty \end{pmatrix}$$

14.

$$\begin{pmatrix} \infty & 45 & 59 & 76 & 90 & 47 & 61 & 78 & 11 \\ 75 & \infty & 89 & 46 & 50 & 77 & 91 & 48 & 62 \\ 58 & 74 & \infty & 2 & 8 & 11 & 15 & 1 & 79 \\ 88 & 10 & 17 & \infty & 3 & 18 & 9 & 63 & 49 \\ 73 & 57 & 22 & 25 & \infty & 23 & 19 & 80 & 12 \\ 87 & 14 & 16 & 21 & 24 & \infty & 14 & 50 & 64 \\ 56 & 72 & 54 & 7 & 15 & 20 & \infty & 4 & 81 \\ 86 & 70 & 84 & 6 & 53 & 67 & 82 & \infty & 51 \\ 71 & 55 & 85 & 69 & 85 & 5 & 52 & 65 & \infty \end{pmatrix}$$

15.

$$\begin{pmatrix} \infty & 16 & 26 & 40 & 55 & 58 & 28 & 57 & 43 \\ 54 & \infty & 60 & 67 & 27 & 41 & 44 & 59 & 29 \\ 61 & 39 & \infty & 68 & 73 & 77 & 56 & 42 & 45 \\ 65 & 80 & 53 & \infty & 76 & 17 & 81 & 30 & 64 \\ 38 & 18 & 84 & 86 & \infty & 90 & 83 & 46 & 74 \\ 82 & 92 & 11 & 56 & 95 & \infty & 87 & 63 & 31 \\ 78 & 37 & 79 & 88 & 32 & 78 & \infty & 69 & 47 \\ 72 & 52 & 35 & 75 & 50 & 33 & 85 & \infty & 48 \\ 36 & 71 & 51 & 34 & 62 & 70 & 49 & 32 & \infty \end{pmatrix}$$

16.

$$\begin{pmatrix} \infty & 25 & 19 & 50 & 14 & 75 & 39 & 3 & 64 \\ 70 & \infty & 16 & 86 & 59 & 32 & 5 & 75 & 48 \\ 3 & 5 & \infty & 7 & 4 & 6 & 7 & 6 & 4 \\ 54 & 20 & 11 & \infty & 76 & 33 & 87 & 44 & 1 \\ 21 & 42 & 63 & 84 & \infty & 29 & 50 & 71 & 92 \\ 35 & 70 & 8 & 21 & 43 & \infty & 51 & 86 & 24 \\ 63 & 29 & 92 & 58 & 24 & 87 & \infty & 19 & 82 \\ 35 & 70 & 8 & 43 & 78 & 16 & 51 & \infty & 86 \\ 12 & 87 & 45 & 67 & 23 & 89 & 44 & 55 & \infty \end{pmatrix}$$

17.

18.

$$\begin{array}{l}
 19. \begin{pmatrix} \infty & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 2 & 2 & 7 \\ 8 & \infty & 61 & 49 & 37 & 25 & 12 & 1 & 86 \\ 44 & 88 & \infty & 79 & 26 & 70 & 1 & 61 & 8 \\ 47 & 94 & 44 & \infty & 41 & 88 & 38 & 85 & 35 \\ 45 & 9 & 38 & 8 & \infty & 7 & 24 & 69 & 17 \\ 62 & 27 & 89 & 54 & 19 & \infty & 46 & 11 & 73 \\ 8 & 75 & 64 & 53 & 42 & 31 & \infty & 20 & 10 \\ 24 & 42 & 56 & 65 & 78 & 87 & 90 & \infty & 9 \\ 12 & 24 & 36 & 48 & 60 & 72 & 84 & 90 & \infty \end{pmatrix} \\
 20. \begin{pmatrix} \infty & 5 & 6 & 7 & 7 & 81 & 85 & 89 & 9 \\ 5 & \infty & 20 & 31 & 42 & 53 & 64 & 75 & 86 \\ 59 & 74 & \infty & 7 & 2 & 37 & 52 & 67 & 82 \\ 43 & 49 & 55 & \infty & 67 & 7 & 79 & 85 & 9 \\ 7 & 46 & 16 & 83 & \infty & 23 & 9 & 60 & 30 \\ 62 & 12 & 59 & 9 & 56 & \infty & 53 & 3 & 50 \\ 12 & 43 & 74 & 8 & 39 & 70 & \infty & 35 & 66 \\ 4 & 22 & 92 & 65 & 38 & 11 & 81 & \infty & 27 \\ 47 & 31 & 15 & 96 & 80 & 64 & 48 & 32 & \infty \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \infty & 43 & 27 & 45 & 11 & 78 & 32 & 54 & 12 \\ 82 & \infty & 24 & 20 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 96 & 53 & \infty & 10 & 64 & 21 & 32 & 86 & 42 \\ 43 & 49 & 55 & \infty & 67 & 73 & 79 & 85 & 91 \\ 5 & 39 & 22 & 5 & \infty & 68 & 51 & 34 & 17 \\ 96 & 53 & 10 & 64 & 21 & \infty & 32 & 86 & 43 \\ 85 & 54 & 23 & 89 & 58 & 27 & \infty & 62 & 31 \\ 67 & 91 & 19 & 44 & 69 & 94 & 22 & \infty & 72 \\ 43 & 49 & 55 & 61 & 67 & 73 & 79 & 58 & \infty \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \infty & 44 & 72 & 47 & 19 & 7 & 32 & 45 & 12 \\ 28 & \infty & 24 & 20 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 96 & 53 & \infty & 10 & 64 & 21 & 32 & 86 & 42 \\ 43 & 49 & 55 & \infty & 67 & 73 & 79 & 85 & 91 \\ 56 & 39 & 22 & 5 & \infty & 68 & 51 & 34 & 17 \\ 96 & 53 & 10 & 64 & 21 & \infty & 32 & 86 & 43 \\ 85 & 54 & 23 & 89 & 58 & 27 & \infty & 62 & 31 \\ 66 & 91 & 19 & 44 & 69 & 94 & 22 & \infty & 72 \\ 43 & 49 & 55 & 61 & 67 & 73 & 79 & 85 & \infty \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Муравьиный алгоритм (1992 г.)

Пример 2.19. Решить задачу коммивояжера муравьиным алгоритмом.

$$\begin{pmatrix} \infty & 20 & 10 & 25 & 10 \\ 5 & \infty & 22 & 11 & 5 \\ 7 & 9 & \infty & 15 & 10 \\ 11 & 10 & 12 & \infty & 21 \\ 10 & 7 & 15 & 25 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение.

Суть муравьиного алгоритма в следующем. Муравей выходит из вершины и проходит определенный путь, оставляя при этом на каждом ребре определенное количество феромонов. Следующий муравей проходит свой путь, учитывая, что его предыдущий товарищ прошел по определенному маршруту. Выбирая наилучший путь, муравьи оставят на нем большую часть феромонов.

Вероятность перехода из вершины i в вершину j определим как

$$p_{ij} = \frac{\tau_{ij}^{\alpha} \eta_{ij}^{\beta}}{\sum_m \tau_{im}^{\alpha} \eta_{im}^{\beta}},$$

α , β — константы, подбираемые опытным путем;

τ_{ij} — количество феромона между i -й и j -й вершинами;

$\eta_{ij} = \frac{1}{L_{ij}}$ — величина, обратная расстоянию L_{ij} между i -й и j -й вершинами;

m — доступные вершины, которые еще не посещали, при переходе из вершины i .

Если $\alpha = 0$, то получаем жадный алгоритм, т. е. идем в ближайшую вершину; если $\beta = 0$, то в расчет идет только количество феромона, оставленного муравьями, а близость вершины не участвует.

Уровень феромона обновляется как

$$\Delta\tau_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k(t)}, & \text{если } (i, j) \in T_k(t) \text{ (если ребро попало в маршрут муравья);} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-p) \cdot \tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij,k}(t)$$

t — номер итерации;

$\Delta\tau_{ij}(t)$ — добавка феромона при прохождении из i в j на шаге t ;

$(1-p)$ — коэффициент испарения феромона ($0 \leq p \leq 1$);

$L_k(t)$ — суммарное расстояние решения на предыдущем шаге;

k — количество муравьев (как правило, равно количеству вершин);

m — количество достигаемых вершин.

Q и p — подбираются экспериментально, в зависимости от решаемой задачи.

Если $p \rightarrow 0$, то последующее решение опирается на предыдущее количество феромонов; если, $p \rightarrow 1$, то значение феромонов на предыдущем этапе не имеет значение (все забывается). Как правило, на одной итерации необходимо сделать прогон для всех k вершин, при этом муравей выходит из разных вершин.

Задача 2.9. Найти оптимальный маршрут задачи коммивояжера, используя муравьиный алгоритм. Значения расстояний между вершинами сведены в таблицу. Также известно, что на начальном этапе количество феромона на каждом ребре равно 1, $Q = 100$, $p = 0,2$.

2.5. Сетевое планирование

Сетевая модель — информационная модель реализации некоторого комплекса взаимосвязанных работ, рассматриваемая как **ориентированный граф без контуров**, отображающий естественный порядок выполнения этих работ во времени.

Сетевые методы планирования и управления — совокупность методов, использующих сетевую модель как основную форму представления информации об управляемом комплексе работ.

Методы сетевого планирования:

1. Детерминированные:

— диаграмма Ганта;

— метод критического пути.

2. Вероятностные:

— метод статистических испытаний (метод Монте-Карло);

- метод оценки пересмотра планов (PERT — Program (Project) Evaluation and Review Technique);
- метод графической оценки и анализа.

Для наглядности сетевую модель изображают в виде **сетевого графика**. Существуют разные формы сетевых графиков:

- стрелками графа обозначают работы, а вершины — начало и окончание соответствующих работ;
- вершины графа — работы, а стрелки — логические связи между работами.

Пример 2.20. Необходимо выполнить комплекс работ. Время выполнения каждой работы известно. Работы могут выполняться параллельно. Для каждой работы указано, выполнение каких работ она требует (на какие работы она опирается). Данные сведены в **структурно-временную таблицу**.

№ п/п	Опирается на работу	Время выполнения t_i
1	—	7
2	1, 3	8
3	—	4
4	1, 2, 5	3
5	—	9
6	4, 5	6
7	2	5

Преобразуем таблицу — присвоим каждой работе **ранг**. Работа называется работой первого ранга, если для ее начала не требуется выполнения никаких других работ (1, 3 и 5). Работа второго ранга — если она опирается на одну или несколько работ первого ранга (2 и 4). Работа называется работой k -го ранга, если она опирается на одну или несколько работ не выше $(k-1)$ -го ранга, среди которых есть хотя бы одна работа $(k-1)$ -го ранга.

Присвоим работам новые номера, начиная с работ первого ранга. Внутри ранга работы нумеруются в произвольном порядке.

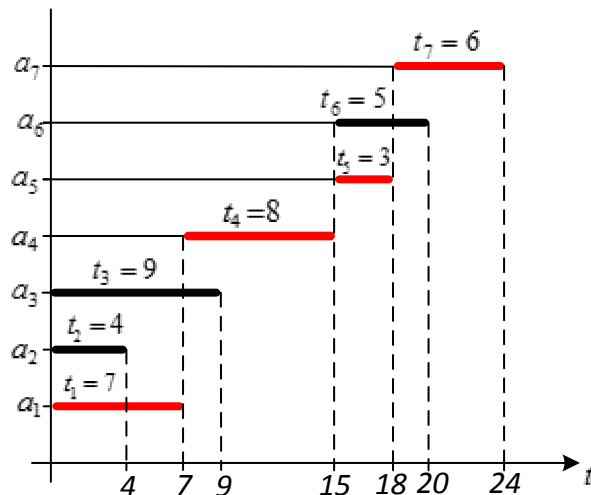
№ п/п	Опирается на работу	Время выполнения t_i	Ранг	Работа a_i
1	—	7	1	a_1
2	1, 3	8	2	a_4
3	—	4	1	a_2
4	1, 2, 5	3	3	a_5
5	—	9	1	a_3
6	4, 5	6	4	a_7
7	2	5	3	a_6

Получаем новую структурно-временную таблицу.

Работа a_i	Опирается на работу	Время выполнения t_i
a_1	—	7
a_2	—	4
a_3	—	9
a_4	a_1, a_2	8
a_5	a_1, a_3, a_4	3
a_6	a_4	5
a_7	a_3, a_5	6

Построим диаграмму Ганта — временной график комплекса работ.

На диаграмме прослеживается последовательность работ, на какую работу опирается последующая, а так же минимальное время, за которое может быть выполнен весь комплекс работ.



Работы, из длительностей которых образуется минимальное время T_0 , называются **критическими работами (критическим путем)**. На диаграмме данный путь выделен красным цветом.

Минимальное время выполнения T_0 представляет собой сумму a_1, a_4, a_5 и a_7 работ комплекса, которые являются критическими,

$$T_0 = \sum_{кр} t_i = t_1 + t_4 + t_5 + t_7 = 7 + 8 + 3 + 6 = 24.$$

Время выполнения критических работ не может быть изменено и каждая из них начинается точно в момент окончания предыдущей. В противном случае время T_0 будет увеличено.

Некритические работы a_2, a_3 и a_6 имеют резерв времени и могут быть закончены с некоторым опозданием. Учитывая, что работа a_4 опирается на a_1 и a_2 , то резерв времени для работы a_2 равен $R_2 = t_1 - t_2 = 7 - 4 = 3$. Аналогично, резервы времени

— для a_3 равен $R_3 = (t_1 + t_4) - t_3 = (7 + 8) - 9 = 6$;

— для a_6 — $R_6 = (t_5 + t_7) - t_6 = (3 + 6) - 5 = 4$.

Зная критические работы и работы, имеющие резерв времени, можно перераспределить ресурсы (человеческие, материальные и др.) с не критических работ на критические таким образом, чтобы уменьшить время T_0 . Однако, при этом может быть изменен критический путь.

Формализуем алгоритм нахождения критического пути.

Пусть

τ_i — минимально возможный срок начала работы a_i ;

t_i — время выполнения работы a_i .

Тогда, минимально возможный срок окончания работы a_i определим как

$$T_i = \tau_i + t_i.$$

Вычислим τ_i и T_i для всего комплекса работ исходной задачи.

Для работ a_1, a_2, a_3 имеем:

$$\tau_1 = 0; \quad T_1 = \tau_1 + t_1 = 0 + 7 = 7;$$

$$\tau_2 = 0; \quad T_2 = \tau_2 + t_2 = 0 + 4 = 4;$$

$$\tau_3 = 0; \quad T_3 = \tau_3 + t_3 = 0 + 9 = 9.$$

Работа a_4 опирается на работы a_1 и a_2 , следовательно, может начаться только тогда, когда закончится наиболее длительная из работ a_1 и a_2 , т. е.

$$\tau_4 = \max\{T_1, T_2\} = \max\{7, 4\} = 7,$$

и минимально возможный срок окончания работы a_4 :

$$T_4 = \tau_4 + t_4 = 7 + 8 = 15.$$

Проведем аналогичные вычисления для других работ и сведем полученные результаты в таблицу.

a_i	Опирается на работу	t_i	τ_i	T_i
a_1	—	7	$\tau_1 = 0$	$T_1 = \tau_1 + t_1 = 0 + 7 = 7$
a_2	—	4	$\tau_2 = 0$	$T_2 = \tau_2 + t_2 = 0 + 4 = 4$
a_3	—	9	$\tau_3 = 0$	$T_3 = \tau_3 + t_3 = 0 + 9 = 9$
a_4	a_1, a_2	8	$\tau_4 = \max\{T_1, T_2\} = \max\{7, 4\} = 7$	$T_4 = \tau_4 + t_4 = 7 + 8 = 15$
a_5	a_1, a_3, a_4	3	$\tau_5 = \max\{T_1, T_3, T_4\} = \max\{7, 9, 15\} = 15$	$T_5 = \tau_5 + t_5 = 15 + 3 = 18$
a_6	a_4	5	$\tau_6 = \max\{T_4\} = \max\{15\} = 15$	$T_6 = \tau_6 + t_6 = 15 + 5 = 20$
a_7	a_3, a_5	6	$\tau_7 = \max\{T_3, T_5\} = \max\{9, 18\} = 18$	$T_7 = \tau_7 + t_7 = 18 + 6 = 24$

Определим время окончания всего комплекса работ как максимальное из всех T_i :

$$T_0 = \max_{i=1, \dots, 7} \{T_i\} = \max\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\} = \max\{7, 4, 9, 15, 18, 20, 24\} = 24.$$

Найдем критические работы.

При нахождении времени окончания всего комплекса работ максимум достигается для T_7 , следовательно, a_7 является критической работой;

в τ_7 максимум приходится для T_5 , a_5 — критическая;

в τ_5 максимум приходится для T_4 , a_4 — критическая;

в τ_4 максимум приходится для T_1 , a_1 — критическая.

Таким образом, критические работы a_1 , a_4 , a_5 и a_7 .

Пусть при вложении в работу a_1 условной единицы средства x , время на ее выполнение сокращается на 20 %, в a_4 — 15 %, a_5 — 30 % и a_7 — 10 % (зависимость предполагается линейной). Размеры вложений в каждую работу a_i средств x_i ограничены значениями $c_1 = 2$, $c_4 = 3$, $c_5 = 4$ и $c_7 = 5$. При этом время окончания всего комплекса работ T_0 не должно превышать 20 и критический путь должен остаться прежним.

Определим необходимое количество вложений в каждую критическую работу, чтобы $T_0 \leq 20$, при этом сумма вложений была минимальной $x_1 + x_4 + x_5 + x_7 \rightarrow \min$.

Для a_1 имеем $t_1 = 7$, при дополнительном вложении условной единицы некоторого средства x_1 (по условию) время выполнения составит $t'_1 = 7 - 0,2 \cdot 7 = 5,6$. Таким образом, имеем две точки $(0; 7)$ и $(1; 5,6)$. Составим уравнение прямой.

$$\frac{x_1 - 0}{1 - 0} = \frac{t'_1 - 7}{5,6 - 7} \Leftrightarrow t'_1 = 7 - 1,4 \cdot x_1 = 7 \cdot (1 - 0,2 \cdot x_1) = t_1 \cdot (1 - 0,2 \cdot x_1).$$

Аналогично получим линейные зависимости уменьшения времени для работы

$$a_4 \text{ — } t'_4 = t_4 \cdot (1 - 0,15 \cdot x_4);$$

$$a_5 \text{ — } t'_5 = t_5 \cdot (1 - 0,3 \cdot x_5);$$

$$a_7 \text{ — } t'_7 = t_7 \cdot (1 - 0,1 \cdot x_7).$$

Тогда новое время окончания всего комплекса работ (при условии, что критический путь не изменится)

$$\begin{aligned} T'_0 &= t'_1 + t'_4 + t'_5 + t'_7 = t_1 \cdot (1 - 0,2 \cdot x_1) + t_4 \cdot (1 - 0,15 \cdot x_4) + t_5 \cdot (1 - 0,3 \cdot x_5) + t_7 \cdot (1 - 0,1 \cdot x_7) = \\ &= 24 - 1,4 \cdot x_1 - 1,2 \cdot x_4 - 0,9 \cdot x_5 - 0,6 \cdot x_7. \end{aligned}$$

Данная величина, по условию задачи не должна превосходить 20:

$$24 - 1,4 \cdot x_1 - 1,2 \cdot x_4 - 0,9 \cdot x_5 - 0,6 \cdot x_7 \leq 20$$

или

$$1,4 \cdot x_1 + 1,2 \cdot x_4 + 0,9 \cdot x_5 + 0,6 \cdot x_7 \geq 4.$$

Размеры вложений в каждую работу ограничены условием задачи ($x_i \leq c_i$)

$$x_1 \leq 2, \quad x_4 \leq 3, \quad x_5 \leq 4 \quad \text{и} \quad x_7 \leq 5$$

или

$$2 - x_1 \geq 0, \quad 3 - x_4 \geq 0, \quad 4 - x_5 \geq 0 \quad \text{и} \quad 5 - x_7 \geq 0.$$

Таким образом, необходимо решить задачу линейного программирования
Найти

$$F = x_1 + x_4 + x_5 + x_7 \rightarrow \min$$

При ограничениях

$$\begin{cases} 1,4 \cdot x_1 + 1,2 \cdot x_4 + 0,9 \cdot x_5 + 0,6 \cdot x_7 \geq 4; \\ 2 - x_1 \geq 0; \\ 3 - x_4 \geq 0; \\ 4 - x_5 \geq 0; \\ 5 - x_7 \geq 0; \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

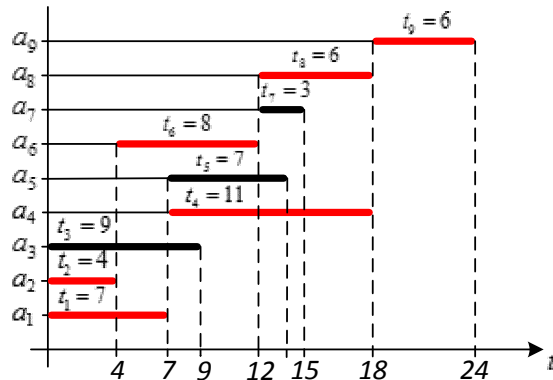
Оптимальным для данной задачи линейного программирования является решение $x^* = (2; 1; 0; 0)^T$ и $F_{\min} = 3$.

Таким образом, для сокращения времени выполнения всего комплекса работ необходимо вложить $x_1 = 2$ средств в работу a_1 , $x_4 = 1$ — в работу a_4 . При этом время окончания всего комплекса составит

$$T'_0 = t'_1 + t'_4 + t_5 + t_7 = 7 \cdot (1 - 0,2 \cdot 2) + 8 \cdot (1 - 0,15 \cdot 1) + 3 + 6 = 20.$$

Так как $t'_1 = 4,2$ и $t'_4 = 6,8$, то критический путь остается неизменным, что очевидно при анализе диаграммы Ганта.

Пример 2.21. В задачах планирования комплекса работ может быть несколько критических путей. Так для следующей задачи имеем два критических пути.



a_i	Опирается на работу	t_i	τ_i	T_i
a_1	—	7	$\tau_1 = 0$	$T_1 = \tau_1 + t_1 = 0 + 7 = 7$
a_2	—	4	$\tau_2 = 0$	$T_2 = \tau_2 + t_2 = 0 + 4 = 4$
a_3	—	9	$\tau_3 = 0$	$T_3 = \tau_3 + t_3 = 0 + 9 = 9$
a_4	a_1	11	$\tau_4 = \max\{T_1\} = \max\{7\} = 7$	$T_4 = \tau_4 + t_4 = 7 + 11 = 18$
a_5	a_1	7	$\tau_5 = \max\{T_1\} = \max\{7\} = 7$	$T_5 = \tau_5 + t_5 = 7 + 7 = 14$
a_6	a_2	8	$\tau_6 = \max\{T_2\} = \max\{4\} = 4$	$T_6 = \tau_6 + t_6 = 4 + 8 = 12$
a_7	a_1, a_3, a_6	3	$\tau_7 = \max\{T_1, T_3, T_6\} = \max\{7, 9, 12\} = 12$	$T_7 = \tau_7 + t_7 = 12 + 3 = 15$
a_8	a_6	6	$\tau_8 = \max\{T_6\} = \max\{12\} = 12$	$T_8 = \tau_8 + t_8 = 12 + 6 = 18$
a_9	a_4, a_7, a_8	6	$\tau_9 = \max\{T_4, T_7, T_8\} = \max\{18, 15, 18\} = 18$	$T_9 = \tau_9 + t_9 = 18 + 6 = 24$

Определим время окончания всего комплекса работ как максимальное из всех T_i :

$$T_0 = \max_{i=1,\dots,9} \{T_i\} = \max\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9\} = \max\{7, 4, 9, 18, 14, 12, 15, 18, 24\} = 24.$$

Найдем критические работы.

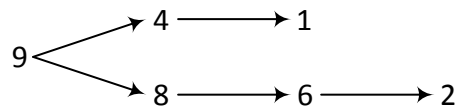
При нахождении времени окончания всего комплекса работ максимум достигается для T_9 , следовательно, a_9 является критической работой;

в τ_9 максимум приходится для T_4 и T_8 , a_4 и a_8 — критические.

Далее получаем два направления.

a_4	a_8
в τ_4 максимум приходится для T_1 , a_1 — критическая	в τ_8 максимум приходится для T_6 , a_6 — критическая
	в τ_6 максимум приходится для T_2 , a_2 — критическая

Изобразим поиск критических путей графически.



Таким образом, имеем два критических пути (a_1, a_4, a_9) и (a_2, a_6, a_8, a_9) .

Задача 2.10. Необходимо выполнить комплекс работ. Работы могут выполняться параллельно. Время выполнения каждой работы t_i . Для каждой работы указано, выполнение каких работ она требует (на какие работы она опирается). Данные сведены в структурно-временную таблицу. Найти:

1. критический путь;
2. минимальное время окончания всего комплекса работ.

3. Пусть при вложении в каждую критическую работу a_i условной единицы средства x_i время на ее выполнение сокращается на $m\%$ (зависимость предполагается линейной). Размеры вложений в каждую работу a_i средств x_i ограничены значением c_i . При этом время окончания всего комплекса работ T_0 должно быть сокращено не менее чем на $t\%$ и критический путь должен остаться прежним. Определить необходимое количество вложений в каждую критическую работу, чтобы сумма вложений была минимальной.

1.

№ п/п	Опирается на работу	t_i
1	—	2
2	4, 8	3
3	—	3
4	3	4
5	2	5
6	5	1
7	10	1
8	9	4
9	—	7
10	2, 4, 8	4

$a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 1$
 $a_2 \rightarrow 20\%, c_2 = 2$
 $a_3 \rightarrow 30\%, c_3 = 3$
 $a_4 \rightarrow 40\%, c_4 = 4$
 $a_5 \rightarrow 50\%, c_5 = 5$
 $T_0 \rightarrow 20\%$

2.

№ п/п	Опирается на работу	t_i
1	—	7
2	9	3
3	8	11
4	2, 10	5
5	8	1
6	—	3
7	1	2
8	2, 7, 10	5
9	1	4
10	1, 7	3

$a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 1$
 $a_2 \rightarrow 50\%, c_2 = 2$
 $a_3 \rightarrow 30\%, c_3 = 3$
 $a_4 \rightarrow 40\%, c_4 = 4$
 $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 5$
 $T_0 \rightarrow 20\%$

3.

№ п/п	Опирается на работу	t_i
1	1, 2	3
2	4	2
3	9	11
4	—	7
5	1, 10	5
6	9	1
7	—	3
8	4	4
9	1, 2, 10	5
10	9	3

$a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 3$
 $a_2 \rightarrow 50\%, c_2 = 2$
 $a_3 \rightarrow 30\%, c_3 = 4$
 $a_4 \rightarrow 40\%, c_4 = 0$
 $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 1$
 $T_0 \rightarrow 20\%$

4.

№ п/п	Опирается на работу	t_i
1	5	3
2	10	1
3	2	1
4	6, 9	7
5	—	2
6	1	5
7	4	1
8	4	5
9	5	1
10	4, 6, 7	1

$a_1 \rightarrow 20\%, c_1 = 3$
 $a_2 \rightarrow 15\%, c_2 = 2$
 $a_3 \rightarrow 10\%, c_3 = 4$
 $a_4 \rightarrow 40\%, c_4 = 2$
 $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 3$
 $T_0 \rightarrow 30\%$

5.

№ п/п	Опирается на работу	t_i
1	5	5
2	6	1
3	—	2
4	—	1
5	3	7
6	1, 4	5
7	8	1
8	10	1
9	6	5
10	1, 2, 6	1

$a_1 \rightarrow 20\%, c_1 = 3$
 $a_2 \rightarrow 45\%, c_2 = 2$
 $a_3 \rightarrow 20\%, c_3 = 4$
 $a_4 \rightarrow 25\%, c_4 = 2$
 $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 3$
 $T_0 \rightarrow 45\%$

6.

№ п/п	Опирается на работу	t_i
1	4	5
2	5	1
3	5, 7	5
4	5	5
5	7	5
6	7, 9	5
7	9, 10	7
8	—	3
9	—	1
10	—	2

$a_1 \rightarrow 20\%, c_1 = 3$
 $a_2 \rightarrow 15\%, c_2 = 2$
 $a_3 \rightarrow 20\%, c_3 = 4$
 $a_4 \rightarrow 25\%, c_4 = 2$
 $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 3$
 $T_0 \rightarrow 40\%$

7.

8.

9.

<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>4, 8</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>—</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>8, 10</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>2, 4</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>3</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 20\%, c_1 = 3$ $a_2 \rightarrow 15\%, c_2 = 2$ $a_3 \rightarrow 20\%, c_3 = 4$ $a_4 \rightarrow 25\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 3$ $T_0 \rightarrow 40\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	4, 8	5	2	—	5	3	9	5	4	—	1	5	10	1	6	—	3	7	8, 10	5	8	2, 4	3	9	10	5	10	8	3	<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>9</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>5, 8</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>7</td></tr> <tr><td>5</td><td>4, 8</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>5, 9</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>—</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>—</td><td>3</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 2$ $a_3 \rightarrow 20\%, c_3 = 4$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 3$ $T_0 \rightarrow 40\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	9	2	2	5, 8	5	3	6	5	4	—	7	5	4, 8	2	6	9	5	7	5, 9	5	8	—	1	9	5	7	10	—	3	<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>6, 10</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>6, 7</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>—</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>1, 6</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>4</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>4</td></tr> <tr><td>10</td><td>—</td><td>2</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 4$ $a_3 \rightarrow 10\%, c_3 = 5$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 3$ $a_5 \rightarrow 30\%, c_5 = 4$ $T_0 \rightarrow 40\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	6, 10	7	2	6, 7	5	3	7	3	4	7	3	5	—	7	6	5	2	7	1, 6	5	8	7	4	9	7	4	10	—	2
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	4, 8	5																																																																																																			
2	—	5																																																																																																			
3	9	5																																																																																																			
4	—	1																																																																																																			
5	10	1																																																																																																			
6	—	3																																																																																																			
7	8, 10	5																																																																																																			
8	2, 4	3																																																																																																			
9	10	5																																																																																																			
10	8	3																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	9	2																																																																																																			
2	5, 8	5																																																																																																			
3	6	5																																																																																																			
4	—	7																																																																																																			
5	4, 8	2																																																																																																			
6	9	5																																																																																																			
7	5, 9	5																																																																																																			
8	—	1																																																																																																			
9	5	7																																																																																																			
10	—	3																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	6, 10	7																																																																																																			
2	6, 7	5																																																																																																			
3	7	3																																																																																																			
4	7	3																																																																																																			
5	—	7																																																																																																			
6	5	2																																																																																																			
7	1, 6	5																																																																																																			
8	7	4																																																																																																			
9	7	4																																																																																																			
10	—	2																																																																																																			
10. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>3, 9</td><td>14</td></tr> <tr><td>2</td><td>7, 10</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>3, 9, 10</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>6</td><td>9, 10</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>—</td><td>8</td></tr> <tr><td>8</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>10</td><td>—</td><td>2</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 25\%, c_2 = 4$ $a_3 \rightarrow 15\%, c_3 = 2$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 3$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 3$ $T_0 \rightarrow 30\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	3, 9	14	2	7, 10	8	3	7	3	4	3, 9, 10	5	5	1	8	6	9, 10	4	7	—	8	8	1	1	9	2	10	10	—	2	11. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>4, 5</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>8, 9</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>—</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>10</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>5, 8, 9</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>5, 9</td><td>4</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 4$ $a_3 \rightarrow 30\%, c_3 = 2$ $a_4 \rightarrow 0\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 20\%, c_5 = 1$ $T_0 \rightarrow 20\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	4, 5	4	2	8, 9	5	3	2	7	4	—	3	5	—	2	6	10	3	7	5, 8, 9	5	8	4	3	9	1	5	10	5, 9	4	12. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>1, 4, 8</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>—</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>4, 8</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>3, 4</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>1, 8</td><td>10</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>10</td></tr> <tr><td>9</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>7</td><td>14</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 20\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 20\%, c_2 = 4$ $a_3 \rightarrow 10\%, c_3 = 2$ $a_4 \rightarrow 15\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 20\%, c_5 = 1$ $T_0 \rightarrow 10\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	3	4	2	1, 4, 8	5	3	—	4	4	—	3	5	4, 8	4	6	3, 4	5	7	1, 8	10	8	6	10	9	5	7	10	7	14
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	3, 9	14																																																																																																			
2	7, 10	8																																																																																																			
3	7	3																																																																																																			
4	3, 9, 10	5																																																																																																			
5	1	8																																																																																																			
6	9, 10	4																																																																																																			
7	—	8																																																																																																			
8	1	1																																																																																																			
9	2	10																																																																																																			
10	—	2																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	4, 5	4																																																																																																			
2	8, 9	5																																																																																																			
3	2	7																																																																																																			
4	—	3																																																																																																			
5	—	2																																																																																																			
6	10	3																																																																																																			
7	5, 8, 9	5																																																																																																			
8	4	3																																																																																																			
9	1	5																																																																																																			
10	5, 9	4																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	3	4																																																																																																			
2	1, 4, 8	5																																																																																																			
3	—	4																																																																																																			
4	—	3																																																																																																			
5	4, 8	4																																																																																																			
6	3, 4	5																																																																																																			
7	1, 8	10																																																																																																			
8	6	10																																																																																																			
9	5	7																																																																																																			
10	7	14																																																																																																			
13.	14.	15.																																																																																																			

<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>5, 7</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>10</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>7</td><td>—</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>4, 7</td><td>12</td></tr> <tr><td>9</td><td>1, 5, 7</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>1, 5</td><td>15</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 20\%, c_2 = 2$ $a_3 \rightarrow 20\%, c_3 = 5$ $a_4 \rightarrow 15\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 5$ $T_0 \rightarrow 15\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	4	4	2	5, 7	4	3	10	8	4	—	3	5	8	9	6	2	7	7	—	2	8	4, 7	12	9	1, 5, 7	5	10	1, 5	15	<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>3, 6</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>—</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>1, 6</td><td>12</td></tr> <tr><td>8</td><td>2, 6, 7</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>3, 8</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>4</td><td>8</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 15\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 20\%, c_2 = 2$ $a_3 \rightarrow 15\%, c_3 = 5$ $a_4 \rightarrow 25\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 5$ $T_0 \rightarrow 20\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	—	3	2	1	4	3	7	4	4	3, 6	1	5	8	7	6	—	2	7	1, 6	12	8	2, 6, 7	2	9	3, 8	2	10	4	8	<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>—</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>9, 10</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>4, 10</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td>2, 4</td><td>9</td></tr> <tr><td>9</td><td>4, 6, 8</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>4</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 3$ $a_2 \rightarrow 20\%, c_2 = 2$ $a_3 \rightarrow 15\%, c_3 = 5$ $a_4 \rightarrow 30\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 15\%, c_5 = 4$ $T_0 \rightarrow 20\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	7	3	2	—	7	3	9	7	4	—	2	5	9, 10	2	6	2	3	7	4, 10	7	8	2, 4	9	9	4, 6, 8	2	10	8	4
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	4	4																																																																																																			
2	5, 7	4																																																																																																			
3	10	8																																																																																																			
4	—	3																																																																																																			
5	8	9																																																																																																			
6	2	7																																																																																																			
7	—	2																																																																																																			
8	4, 7	12																																																																																																			
9	1, 5, 7	5																																																																																																			
10	1, 5	15																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	—	3																																																																																																			
2	1	4																																																																																																			
3	7	4																																																																																																			
4	3, 6	1																																																																																																			
5	8	7																																																																																																			
6	—	2																																																																																																			
7	1, 6	12																																																																																																			
8	2, 6, 7	2																																																																																																			
9	3, 8	2																																																																																																			
10	4	8																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	7	3																																																																																																			
2	—	7																																																																																																			
3	9	7																																																																																																			
4	—	2																																																																																																			
5	9, 10	2																																																																																																			
6	2	3																																																																																																			
7	4, 10	7																																																																																																			
8	2, 4	9																																																																																																			
9	4, 6, 8	2																																																																																																			
10	8	4																																																																																																			
16. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>10</td><td>4</td><td>1</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 3$ $a_3 \rightarrow 10\%, c_3 = 3$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 5$ $T_0 \rightarrow 10\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	4	1	2	4	1	3	7	1	4	—	1	5	4	1	6	4	1	7	8	1	8	2	1	9	4	1	10	4	1	17. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>9</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>—</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>1</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 3$ $a_3 \rightarrow 10\%, c_3 = 3$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 2$ $T_0 \rightarrow 20\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	8	1	2	8	1	3	4	1	4	8	1	5	8	1	6	8	1	7	9	1	8	—	1	9	3	1	10	8	1	18. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>5, 7, 9</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>3, 6</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>9, 10</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>6, 9</td><td>5</td></tr> <tr><td>9</td><td>—</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>—</td><td>7</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 15\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 3$ $a_3 \rightarrow 20\%, c_3 = 3$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 2$ $T_0 \rightarrow 25\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	3	7	2	8	5	3	5, 7, 9	2	4	3, 6	2	5	10	4	6	7	3	7	9, 10	5	8	6, 9	5	9	—	2	10	—	7
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	4	1																																																																																																			
2	4	1																																																																																																			
3	7	1																																																																																																			
4	—	1																																																																																																			
5	4	1																																																																																																			
6	4	1																																																																																																			
7	8	1																																																																																																			
8	2	1																																																																																																			
9	4	1																																																																																																			
10	4	1																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	8	1																																																																																																			
2	8	1																																																																																																			
3	4	1																																																																																																			
4	8	1																																																																																																			
5	8	1																																																																																																			
6	8	1																																																																																																			
7	9	1																																																																																																			
8	—	1																																																																																																			
9	3	1																																																																																																			
10	8	1																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	3	7																																																																																																			
2	8	5																																																																																																			
3	5, 7, 9	2																																																																																																			
4	3, 6	2																																																																																																			
5	10	4																																																																																																			
6	7	3																																																																																																			
7	9, 10	5																																																																																																			
8	6, 9	5																																																																																																			
9	—	2																																																																																																			
10	—	7																																																																																																			
19.	20.	21.																																																																																																			

<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>2, 8</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>—</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>7, 9</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>8, 9</td><td>15</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>7</td></tr> <tr><td>7</td><td>1, 8, 10</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td><td>11</td></tr> <tr><td>10</td><td>2</td><td>2</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 3$ $a_3 \rightarrow 10\%, c_3 = 3$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 2$ $T_0 \rightarrow 25\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	2, 8	5	2	—	7	3	7, 9	2	4	5	2	5	8, 9	15	6	7	7	7	1, 8, 10	2	8	—	3	9	1	11	10	2	2	<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>9</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>9, 10</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>1, 3, 10</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>11</td></tr> <tr><td>6</td><td>2, 4</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td>2, 10</td><td>15</td></tr> <tr><td>9</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>—</td><td>2</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 15\%, c_2 = 3$ $a_3 \rightarrow 25\%, c_3 = 2$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 1$ $a_5 \rightarrow 0\%, c_5 = 4$ $T_0 \rightarrow 20\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	9	2	2	3	7	3	9, 10	7	4	1, 3, 10	2	5	8	11	6	2, 4	2	7	4	7	8	2, 10	15	9	—	3	10	—	2	<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>—</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1, 3</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>—</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>11</td></tr> <tr><td>5</td><td>1, 8</td><td>11</td></tr> <tr><td>6</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>9</td></tr> <tr><td>9</td><td>1, 2, 7</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>8, 9</td><td>2</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 15\%, c_1 = 4$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 3$ $a_3 \rightarrow 25\%, c_3 = 4$ $a_4 \rightarrow 10\%, c_4 = 3$ $a_5 \rightarrow 0\%, c_5 = 4$ $T_0 \rightarrow 30\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	—	2	2	1, 3	7	3	—	8	4	5	11	5	1, 8	11	6	9	7	7	3	2	8	2	9	9	1, 2, 7	2	10	8, 9	2
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	2, 8	5																																																																																																			
2	—	7																																																																																																			
3	7, 9	2																																																																																																			
4	5	2																																																																																																			
5	8, 9	15																																																																																																			
6	7	7																																																																																																			
7	1, 8, 10	2																																																																																																			
8	—	3																																																																																																			
9	1	11																																																																																																			
10	2	2																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	9	2																																																																																																			
2	3	7																																																																																																			
3	9, 10	7																																																																																																			
4	1, 3, 10	2																																																																																																			
5	8	11																																																																																																			
6	2, 4	2																																																																																																			
7	4	7																																																																																																			
8	2, 10	15																																																																																																			
9	—	3																																																																																																			
10	—	2																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	—	2																																																																																																			
2	1, 3	7																																																																																																			
3	—	8																																																																																																			
4	5	11																																																																																																			
5	1, 8	11																																																																																																			
6	9	7																																																																																																			
7	3	2																																																																																																			
8	2	9																																																																																																			
9	1, 2, 7	2																																																																																																			
10	8, 9	2																																																																																																			
22. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>3, 6</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>—</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>1, 6</td><td>12</td></tr> <tr><td>8</td><td>2, 6, 7</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>3, 8</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>4</td><td>8</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 15\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 20\%, c_2 = 2$ $a_3 \rightarrow 15\%, c_3 = 5$ $a_4 \rightarrow 25\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 5$ $T_0 \rightarrow 20\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	—	3	2	1	4	3	7	4	4	3, 6	1	5	8	7	6	—	2	7	1, 6	12	8	2, 6, 7	2	9	3, 8	2	10	4	8	23. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>4, 8</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>—</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>8, 10</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>2, 4</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>3</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 20\%, c_1 = 3$ $a_2 \rightarrow 15\%, c_2 = 2$ $a_3 \rightarrow 20\%, c_3 = 4$ $a_4 \rightarrow 25\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 3$ $T_0 \rightarrow 40\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	4, 8	5	2	—	5	3	9	5	4	—	1	5	10	1	6	—	3	7	8, 10	5	8	2, 4	3	9	10	5	10	8	3	24. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>1, 2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>11</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>7</td></tr> <tr><td>5</td><td>1, 10</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>9</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>9</td><td>1, 2, 10</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>9</td><td>3</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 3$ $a_2 \rightarrow 50\%, c_2 = 2$ $a_3 \rightarrow 30\%, c_3 = 4$ $a_4 \rightarrow 40\%, c_4 = 0$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 1$ $T_0 \rightarrow 20\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	1, 2	3	2	4	2	3	9	11	4	—	7	5	1, 10	5	6	9	1	7	—	3	8	4	4	9	1, 2, 10	5	10	9	3
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	—	3																																																																																																			
2	1	4																																																																																																			
3	7	4																																																																																																			
4	3, 6	1																																																																																																			
5	8	7																																																																																																			
6	—	2																																																																																																			
7	1, 6	12																																																																																																			
8	2, 6, 7	2																																																																																																			
9	3, 8	2																																																																																																			
10	4	8																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	4, 8	5																																																																																																			
2	—	5																																																																																																			
3	9	5																																																																																																			
4	—	1																																																																																																			
5	10	1																																																																																																			
6	—	3																																																																																																			
7	8, 10	5																																																																																																			
8	2, 4	3																																																																																																			
9	10	5																																																																																																			
10	8	3																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	1, 2	3																																																																																																			
2	4	2																																																																																																			
3	9	11																																																																																																			
4	—	7																																																																																																			
5	1, 10	5																																																																																																			
6	9	1																																																																																																			
7	—	3																																																																																																			
8	4	4																																																																																																			
9	1, 2, 10	5																																																																																																			
10	9	3																																																																																																			
25.	26.	27.																																																																																																			

<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>10</td><td>4</td><td>1</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 3$ $a_3 \rightarrow 10\%, c_3 = 3$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 5$ $T_0 \rightarrow 10\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	4	1	2	4	1	3	7	1	4	—	1	5	4	1	6	4	1	7	8	1	8	2	1	9	4	1	10	4	1	<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>9</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>—</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>1</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 3$ $a_3 \rightarrow 10\%, c_3 = 3$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 2$ $T_0 \rightarrow 20\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	8	1	2	8	1	3	4	1	4	8	1	5	8	1	6	8	1	7	9	1	8	—	1	9	3	1	10	8	1	<table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>5, 7, 9</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>3, 6</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>9, 10</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>6, 9</td><td>5</td></tr> <tr><td>9</td><td>—</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>—</td><td>7</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 15\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 3$ $a_3 \rightarrow 20\%, c_3 = 3$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 2$ $T_0 \rightarrow 25\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	3	7	2	8	5	3	5, 7, 9	2	4	3, 6	2	5	10	4	6	7	3	7	9, 10	5	8	6, 9	5	9	—	2	10	—	7
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	4	1																																																																																																			
2	4	1																																																																																																			
3	7	1																																																																																																			
4	—	1																																																																																																			
5	4	1																																																																																																			
6	4	1																																																																																																			
7	8	1																																																																																																			
8	2	1																																																																																																			
9	4	1																																																																																																			
10	4	1																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	8	1																																																																																																			
2	8	1																																																																																																			
3	4	1																																																																																																			
4	8	1																																																																																																			
5	8	1																																																																																																			
6	8	1																																																																																																			
7	9	1																																																																																																			
8	—	1																																																																																																			
9	3	1																																																																																																			
10	8	1																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	3	7																																																																																																			
2	8	5																																																																																																			
3	5, 7, 9	2																																																																																																			
4	3, 6	2																																																																																																			
5	10	4																																																																																																			
6	7	3																																																																																																			
7	9, 10	5																																																																																																			
8	6, 9	5																																																																																																			
9	—	2																																																																																																			
10	—	7																																																																																																			
28. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>3, 9</td><td>14</td></tr> <tr><td>2</td><td>7, 10</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>3, 9, 10</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>6</td><td>9, 10</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>—</td><td>8</td></tr> <tr><td>8</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>10</td><td>—</td><td>2</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 25\%, c_2 = 4$ $a_3 \rightarrow 15\%, c_3 = 2$ $a_4 \rightarrow 20\%, c_4 = 3$ $a_5 \rightarrow 10\%, c_5 = 3$ $T_0 \rightarrow 30\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	3, 9	14	2	7, 10	8	3	7	3	4	3, 9, 10	5	5	1	8	6	9, 10	4	7	—	8	8	1	1	9	2	10	10	—	2	29. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>4, 5</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>8, 9</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>—</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>10</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>5, 8, 9</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>5, 9</td><td>4</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 10\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 10\%, c_2 = 4$ $a_3 \rightarrow 30\%, c_3 = 2$ $a_4 \rightarrow 0\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 20\%, c_5 = 1$ $T_0 \rightarrow 20\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	4, 5	4	2	8, 9	5	3	2	7	4	—	3	5	—	2	6	10	3	7	5, 8, 9	5	8	4	3	9	1	5	10	5, 9	4	30. <table border="1"> <tr><th>№ п/п</th><th>Опирается на работу</th><th>t_i</th></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>1, 4, 8</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>—</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>—</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>4, 8</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>3, 4</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>1, 8</td><td>10</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>10</td></tr> <tr><td>9</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>7</td><td>14</td></tr> </table> $a_1 \rightarrow 20\%, c_1 = 5$ $a_2 \rightarrow 20\%, c_2 = 4$ $a_3 \rightarrow 10\%, c_3 = 2$ $a_4 \rightarrow 15\%, c_4 = 2$ $a_5 \rightarrow 20\%, c_5 = 1$ $T_0 \rightarrow 10\%$	№ п/п	Опирается на работу	t_i	1	3	4	2	1, 4, 8	5	3	—	4	4	—	3	5	4, 8	4	6	3, 4	5	7	1, 8	10	8	6	10	9	5	7	10	7	14
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	3, 9	14																																																																																																			
2	7, 10	8																																																																																																			
3	7	3																																																																																																			
4	3, 9, 10	5																																																																																																			
5	1	8																																																																																																			
6	9, 10	4																																																																																																			
7	—	8																																																																																																			
8	1	1																																																																																																			
9	2	10																																																																																																			
10	—	2																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	4, 5	4																																																																																																			
2	8, 9	5																																																																																																			
3	2	7																																																																																																			
4	—	3																																																																																																			
5	—	2																																																																																																			
6	10	3																																																																																																			
7	5, 8, 9	5																																																																																																			
8	4	3																																																																																																			
9	1	5																																																																																																			
10	5, 9	4																																																																																																			
№ п/п	Опирается на работу	t_i																																																																																																			
1	3	4																																																																																																			
2	1, 4, 8	5																																																																																																			
3	—	4																																																																																																			
4	—	3																																																																																																			
5	4, 8	4																																																																																																			
6	3, 4	5																																																																																																			
7	1, 8	10																																																																																																			
8	6	10																																																																																																			
9	5	7																																																																																																			
10	7	14																																																																																																			

2.6. Поиск кратчайшего пути

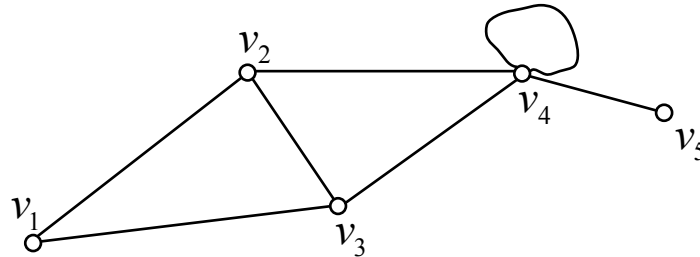
Графом $G = (GV, GE)$ называется пара конечных множеств $GV = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $GE = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ таких, что каждому элементу множества GE сопоставляется один или пара различных элементов множества GV .

Элементы множества GV называются **вершинами** графа.

Элементы множества GE называются **петлей, ребром, дугой** графа.

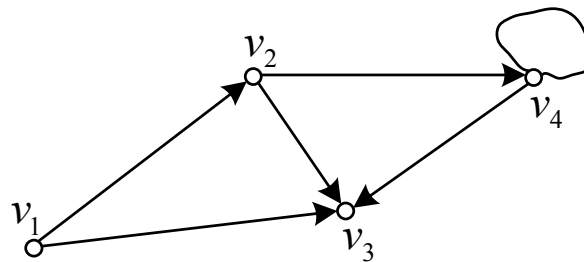
Граф, содержащий только ребра и петли, называется **неориентированным графом**.

Пример. Неориентированный граф, содержащий пять вершин, шесть ребер и одну петлю.



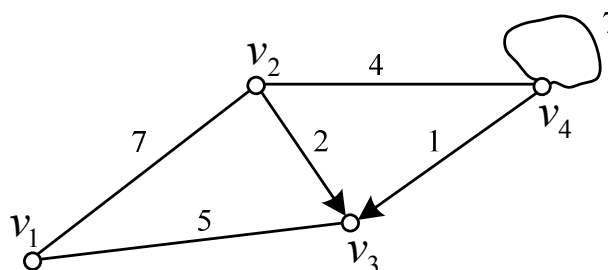
Граф, содержащий только дуги и петли, называется **ориентированным графом**.

Пример. Ориентированный граф, содержащий четыре вершины, пять дуг и одну петлю.



Граф называется **взвешенным**, если его элементам (вершинам, ребрам, дугам, петлям) приписаны некоторые числа, называемые **веса**ми. Веса могут соответствовать значениям различных величин: длине, времени, пропускной способности, стоимости и т. п.

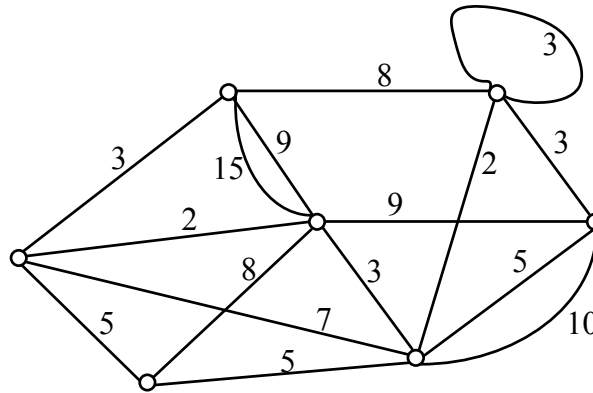
Пример.



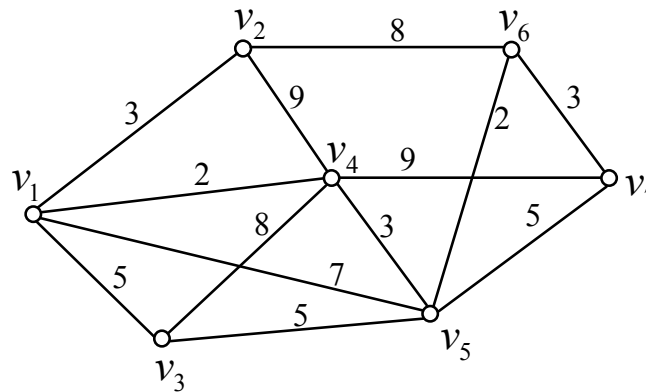
Пример 2.22. Участковому, находящемуся на опорном пункте, регулярно необходимо посещать шесть адресов. Между двумя адресами может быть две и более доро-

ги. Время нахождения в пути по каждой дороге известно и помечено на графе. Найти кратчайшие пути от опорного пункта до каждого места.

Решение. Применим алгоритм Дейкстры (1959). Граф решаемой задачи представлен на рисунке.



Пронумеруем вершины в произвольном порядке и уберем все дублирующие ребра с наибольшим весом, а также петли.



Запишем матрицу (упорядоченную таблицу), описывающую веса ребер графа. На пересечении первой строки и первого столбца запишем ∞ (недостижимое состояние) — петли нет. На пересечении первой строки и второго столбца запишем вес ребра, соединяющего вершину v_1 с вершиной v_2 — 3 и т. д. На пересечении первой строки шестого столбца запишем ∞ , так как нет ребра, соединяющего вершину v_1 с вершиной v_6 . Аналогично заполняется вся таблица.

$$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 5 & 2 & 7 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 9 & \infty & 8 & \infty \\ 5 & \infty & \infty & 8 & 5 & \infty & \infty \\ 2 & 9 & 8 & \infty & 3 & \infty & 9 \\ 7 & \infty & 5 & 3 & \infty & 2 & 5 \\ \infty & 8 & \infty & \infty & 2 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 5 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

Полученную матрицу называют — **весовой (платежной) матрицей**. Матрица является симметрической (симметричной) — элементы в строках равны элементам столбцов относительно главной диагонали.

Пусть опорный пункт находится в вершине v_1 . Найдем кратчайшие расстояния до каждой из вершин, используя алгоритм Дейкстры.

Шаг 1.

На каждом шаге решения задачи будем присваивать вершинам веса, которые соответствуют расстоянию от одной вершины до другой (через другие вершины).

Каждой промежуточной вершине v_i будем присваивать новую временную метку по правилу

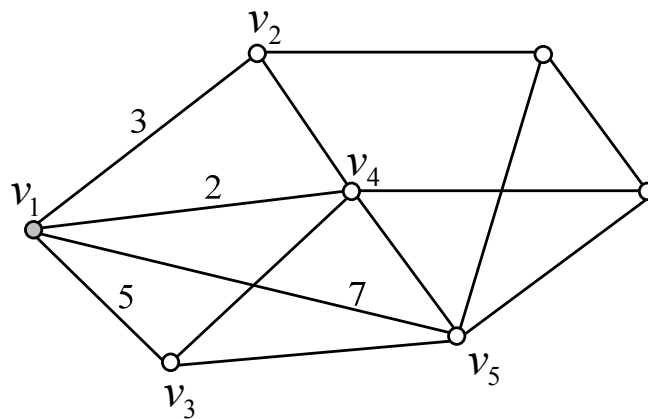
$$q_i = \min(q_i, Q_j + p_{ji}).$$

Так как будем искать расстояния от вершины v_1 , то расстояние от нее самой до нее равно $Q_1 = 0$. Расстояния до всех остальных точек примем равными бесконечности: $q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = \infty$. Данные занесем в таблицу.

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Шаг 2.

Рассмотрим ребра, ведущие от вершины v_1 к вершинам v_2 , v_3 , v_4 и v_5 .



Найдем метку для вершины v_2 .

Вершину v_1 с вершиной v_2 соединяет ребро с весом 3. Метка вершины v_1 равна $Q_1 = 0$. Предыдущая метка вершины v_2 была равна ∞ . Следовательно, новую метку вершины v_2 определим как

$$q_2 = \min(\infty, 0 + 3) = 3.$$

Аналогично для остальных вершин:

$$q_3 = \min(\infty, 0 + 5) = 5;$$

$$q_4 = \min(\infty, 0 + 2) = 2;$$

$$q_5 = \min(\infty, 0 + 7) = 7 ;$$

$$q_6 = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty ;$$

$$q_7 = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty .$$

Занесем данные в таблицу. В скобках обозначим вершину, из которой были получены данные значения. Первая вершина в дальнейших вычислениях (рассуждениях) не участвует.

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2		$3(v_1)$	$5(v_1)$	$2(v_1)$	$7(v_1)$	∞	∞

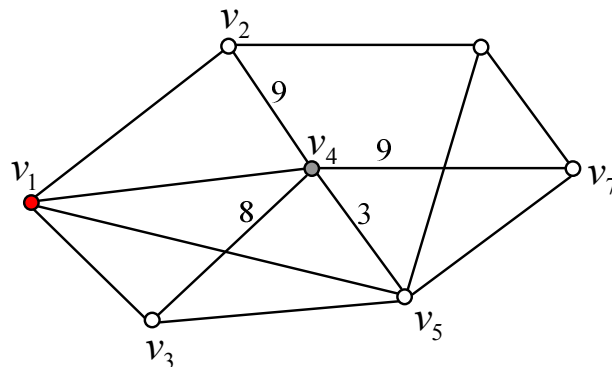
Найдем минимум из полученных значений

$$\min(q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7) = \min(3, 5, 2, 7, \infty, \infty) = q_4 = 2 ,$$

что соответствует вершине v_4 . Значит, окончательная метка вершины v_4 равна $Q_4 = 2$.

Шаг 3.

Рассмотрим ребра, ведущие от вершины v_4 к вершинам v_2 , v_3 , v_5 и v_7 . Вершина v_1 уже пройдена и в дальнейших рассуждениях не участвует.



Вершину v_4 с вершиной v_2 соединяет ребро с весом 9. Метка вершины v_4 равна $Q_4 = 2$. Предыдущая метка вершины v_2 была равна 3. Следовательно, новую метку вершины v_2 определим как

$$q_2 = \min(3, 2 + 9) = 3 .$$

Т. е. в строке 3 в столбе для v_2 сравниваем предыдущее значение (строка 2) со значением $2+9=11$ (путь от v_1 через v_4 до v_2). Так как $3 < 11$, то путь $v_1 \rightarrow v_2$ короче, чем $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2$. Значит, на пересечении строки 3 и столбца v_2 запишем предыдущее значение (значение строки 2) и в скобках запишем вершину, из которой был получен вес данного пути.

Аналогично для остальных вершин

$$q_3 = \min(5, 2 + 8) = 5 ;$$

$$q_5 = \min(7, 2 + 3) = 5 ;$$

$$q_6 = \min(\infty, 2 + \infty) = \infty ;$$

$$q_7 = \min(\infty, 2 + 9) = 11 .$$

Занесем данные в таблицу. В скобках обозначим вершину, из которой были получены данные значения. Первая и вторая вершины в дальнейших вычислениях (рассуждениях) не участвуют.

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2		$3(v_1)$	$5(v_1)$	$2(v_1)$	$7(v_1)$	∞	∞
3		$3(v_1)$	$5(v_1)$		$5(v_4)$	∞	$11(v_4)$

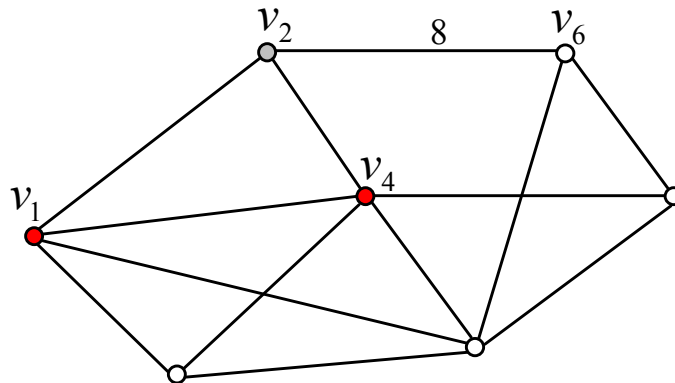
Найдем минимум из полученных значений

$$\min(q_2, q_3, q_5, q_6, q_7) = \min(3, 5, 5, \infty, 11) = q_2 = 3 ,$$

что соответствует вершине v_2 . Значит окончательная метка вершины v_2 равна $Q_2 = 3$.

Шаг 4.

Рассмотрим ребра, ведущие от вершины v_2 к вершинам v_1 , v_4 и v_6 . Вершины v_1 и v_4 уже пройдены и в дальнейших рассуждениях не участвуют.



Вершину v_2 с вершиной v_6 соединяет ребро с весом 8. Метка вершины v_2 равна $Q_2 = 3$. Предыдущая метка вершины v_6 была равна ∞ . Следовательно, новую метку вершины v_6 определим как

$$q_2 = \min(\infty, 3 + 8) = 11 .$$

Данное значение получено при переходе через вершину v_2 , поэтому в скобках пометим данный факт.

Аналогично для остальных вершин:

$$q_3 = \min(5, 3 + \infty) = 5 ;$$

$$q_5 = \min(5, 3 + \infty) = 5 ;$$

$$q_7 = \min(11, 3 + \infty) = 11 .$$

Занесем данные в таблицу. В скобках обозначим вершину, из которой были получены данные значения. Первая и вторая вершины в дальнейших вычислениях (рассуждениях) не участвуют.

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2		$3(v_1)$	$5(v_1)$	$2(v_1)$	$7(v_1)$	∞	∞
3		$3(v_1)$	$5(v_1)$		$5(v_4)$	∞	$11(v_4)$
4			$5(v_1)$		$5(v_4)$	$11(v_2)$	$11(v_4)$

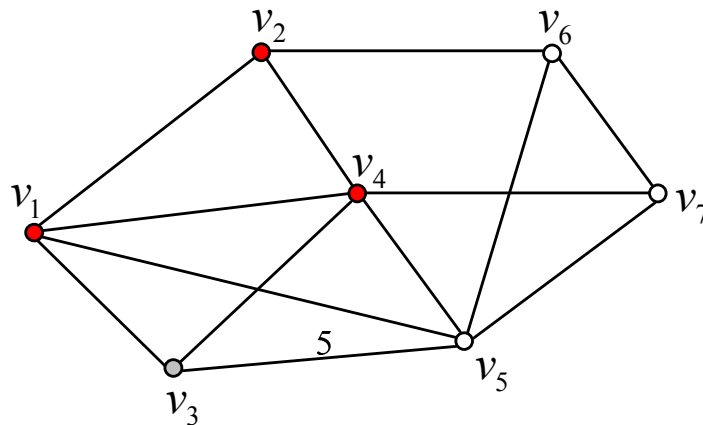
Найдем минимум из полученных значений

$$\min(q_3, q_5, q_6, q_7) = \min(5, 5, 11, 1) = q_3 = q_5 = 5.$$

Имеем два одинаковых значения — выбираем любую вершину. Пусть $q_3 = 5$ что соответствует вершине v_3 . Значит окончательная метка вершины v_3 равна $Q_3 = 5$.

Шаг 5.

Вершины v_1 , v_2 и v_4 уже пройдены и в дальнейших рассуждениях не участвуют.



Вершину v_3 с вершиной v_5 соединяет ребро с весом 5. Метка вершины v_3 равна $Q_3 = 5$. Предыдущая метка вершины v_5 была равна 5. Следовательно, новую метку вершины v_5 определим как

$$q_5 = \min(5, 5 + 5) = 5.$$

Данное значение получено при переходе через вершину v_4 , поэтому в скобках пометим данный факт.

Аналогично для остальных вершин:

$$q_6 = \min(11, 5 + \infty) = 11;$$

$$q_7 = \min(11, 5 + \infty) = 11.$$

Занесем данные в таблицу. В скобках обозначим вершину, из которой были получены данные значения. Первая и вторая вершины в дальнейших вычислениях (рассуждениях) не участвуют.

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2		$3(v_1)$	$5(v_1)$	$2(v_1)$	$7(v_1)$	∞	∞
3		$3(v_1)$	$5(v_1)$		$5(v_4)$	∞	$11(v_4)$
4			$5(v_1)$		$5(v_4)$	$11(v_2)$	$11(v_4)$
5					$5(v_4)$	$11(v_2)$	$11(v_4)$

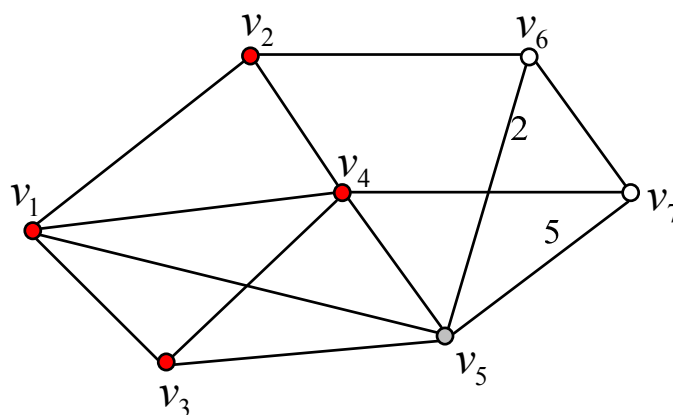
Найдем минимум из полученных значений

$$\min(q_5, q_6, q_7) = \min(5, 11, \infty, \infty) = q_5 = 5,$$

что соответствует вершине v_5 . Значит, окончательная метка вершины v_5 равна $Q_5 = 5$.

Шаг 6.

Вершины v_1 , v_2 , v_3 и v_4 уже пройдены и в дальнейших рассуждениях не участвуют.



Вершину v_5 с вершиной v_6 соединяет ребро с весом 2. Метка вершины v_5 равна $Q_5 = 5$. Предыдущая метка вершины v_6 была равна 11. Следовательно, новую метку вершины v_6 определим как

$$q_6 = \min(11, 5 + 2) = 7.$$

Данное значение получено при переходе через вершину v_5 , поэтому в скобках пометим данный факт.

Аналогично

$$q_7 = \min(11, 5 + 5) = 10.$$

Занесем данные в таблицу. В скобках обозначим вершину, из которой были получены данные значения. Первая и вторая вершины в дальнейших вычислениях (рассуждениях) не участвуют.

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2		$3(v_1)$	$5(v_1)$	$2(v_1)$	$7(v_1)$	∞	∞
3		$3(v_1)$	$5(v_1)$		$5(v_4)$	∞	$11(v_4)$
4			$5(v_1)$		$5(v_4)$	$11(v_2)$	$11(v_4)$
5					$5(v_4)$	$11(v_2)$	$11(v_4)$
6						$7(v_5)$	$10(v_5)$

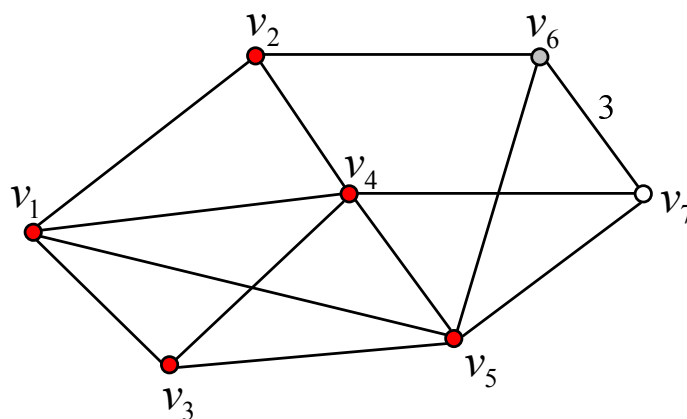
Найдем минимум из полученных значений:

$$\min(q_6, q_7) = \min(7, 10) = q_6 = 7,$$

что соответствует вершине v_6 . Значит, окончательная метка вершины v_6 равна $Q_6 = 7$.

Шаг 7.

Вершины v_1 , v_2 , v_3 , v_4 и v_5 уже пройдены и в дальнейших рассуждениях не участвуют.



Вершину v_6 с вершиной v_7 соединяет ребро с весом 3. Метка вершины v_6 равна $Q_6 = 7$. Предыдущая метка вершины v_7 была равна 10. Следовательно, новую метку вершины v_7 определим как

$$q_6 = \min(10, 3 + 7) = 10.$$

Получили два одинаковых значения. Запишем в последнюю клетку два значения, полученных при прохождении через вершины v_5 и v_6 .

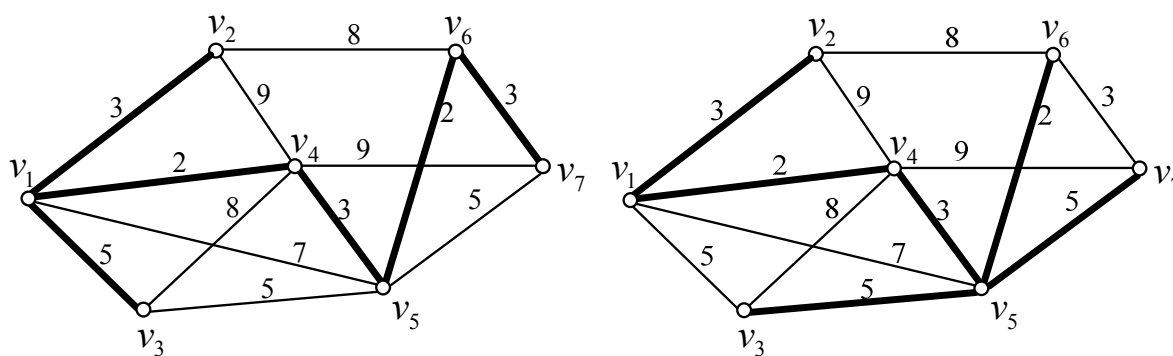
Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2		$3(v_1)$	$5(v_1)$	$2(v_1)$	$7(v_1)$	∞	∞
3		$3(v_1)$	$5(v_1)$		$5(v_4)$	∞	$11(v_4)$
4			$5(v_1)$		$5(v_4)$	$11(v_2)$	$11(v_4)$
5					$5(v_4)$	$11(v_2)$	$11(v_4)$
6						$7(v_5)$	$10(v_5)$
7							$10(v_5)$ $10(v_6)$

Шаг 8.

В последней строке таблицы запишем выбранное ребро графа и расстояние от исходной вершины v_1 до вершины, указанной в шапке таблицы. Т. е. в последней ячейке каждого столбца полученное число является расстоянием от исходной вершины до вершины, которой соответствует данный столбец.

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2		$3(v_1)$	$5(v_1)$	$2(v_1)$	$7(v_1)$	∞	∞
3		$3(v_1)$	$5(v_1)$		$5(v_4)$	∞	$11(v_4)$
4			$5(v_1)$		$5(v_4)$	$11(v_2)$	$11(v_4)$
5					$5(v_4)$	$11(v_2)$	$11(v_4)$
6						$7(v_5)$	$10(v_5)$
7							$10(v_5)$ $10(v_6)$
		1-2 (3)	1-3 (5)	1-4 (2)	4-5 (5)	5-6 (7)	5-7 или 6-7 (10)

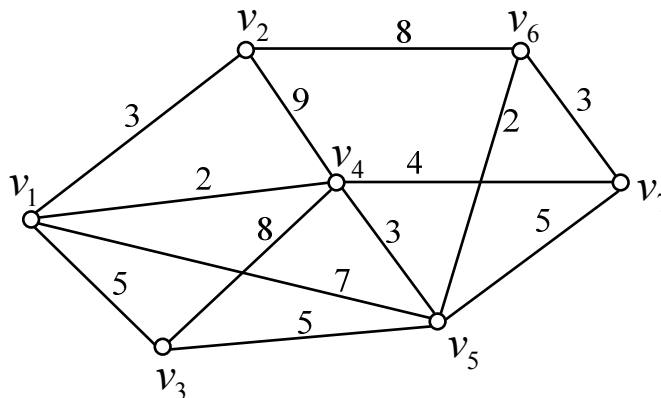
Выделим данные ребра на графе.



Так, кратчайший путь из v_1 в v_5 равен 5; а путь из v_1 в v_7 равен 10, но может быть разным: 1-4-5-6-7 или 1-4-5-7.

Пример 2.23. Рассмотрим условие предыдущей задачи, но начальная вершина будет v_5 .

Решение.



Шаг 1.

$$Q_5 = 0, \quad q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_6 = q_7 = \infty.$$

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞

Шаг 2.

$$Q_5 = 0.$$

$$q_4 = \min(\infty, 0 + 3) = 3;$$

$$q_6 = \min(\infty, 0 + 2) = 2;$$

$$q_7 = \min(\infty, 0 + 5) = 5;$$

$$q_3 = \min(\infty, 0 + 5) = 5;$$

$$q_1 = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty;$$

$$q_2 = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty.$$

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞
2	∞	∞	$5(v_5)$	$3(v_5)$		$2(v_5)$	$5(v_5)$

$$\min(q_1, q_2, q_3, q_4, q_6, q_7) = \min(\infty, \infty, 5, 3, 2, 5) = q_6 = 2, \quad Q_6 = 2.$$

Шаг 3.

$$Q_6 = 2.$$

$$q_2 = \min(\infty, 2 + 8) = 10;$$

$$q_4 = \min(3, 2 + \infty) = 3;$$

$$q_7 = \min(5, 2 + 3) = 5;$$

$$q_3 = \min(5, 2 + \infty) = 5;$$

$$q_1 = \min(\infty, 2 + \infty) = \infty.$$

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞
2	∞	∞	$5(v_5)$	$3(v_5)$		$2(v_5)$	$5(v_5)$
3	∞	$10(v_6)$	$5(v_5)$	$3(v_5)$			$5(v_6)$

$$\min(q_1, q_2, q_3, q_4, q_7) = \min(\infty, 10, 5, 3, 5) = q_4 = 3, \quad Q_4 = 3.$$

Шаг 4.

$$Q_4 = 3.$$

$$q_1 = \min(\infty, 3 + 2) = 5;$$

$$q_2 = \min(10, 3 + 9) = 10;$$

$$q_3 = \min(5, 3 + 8) = 5;$$

$$q_7 = \min(5, 3 + \infty) = 5.$$

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞
2	∞	∞	∞	$3(v_5)$		$2(v_5)$	$5(v_5)$
3	∞	$10(v_6)$	$5(v_5)$	$3(v_5)$			$5(v_6)$
4	$5(v_4)$	$10(v_6)$	$5(v_5)$				$5(v_6)$

$\min(q_1, q_2, q_3, q_7) = \min(5, 10, 5, 5) = q_1 = q_3 = q_7 = 5$. Так как имеем три одинаковых минимальных значения, то выбираем любую вершину (выбор вершины v_7 лишен смысла, так как из нее нет пути). Выберем v_3 , следовательно, $Q_3 = 5$.

Шаг 5.

$$Q_3 = 5.$$

$$q_1 = \min(5, 5 + 5) = 5;$$

$$q_2 = \min(10, 5 + \infty) = 10;$$

$$q_7 = \min(5, 5 + \infty) = 5.$$

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞
2	∞	∞	∞	$3(v_5)$		$2(v_5)$	$5(v_5)$
3	∞	$10(v_6)$	$5(v_5)$	$3(v_5)$			$5(v_6)$
4	$5(v_4)$	$10(v_6)$	$5(v_5)$				$5(v_6)$
5	$5(v_4)$	$10(v_6)$					$5(v_6)$

$\min(q_1, q_2, q_7) = \min(5, 10, 5) = q_1 = q_7 = 5$. Так как имеем два одинаковых минимальных значения, то выбираем любую вершину. Выберем v_1 , следовательно, $Q_1 = 5$.

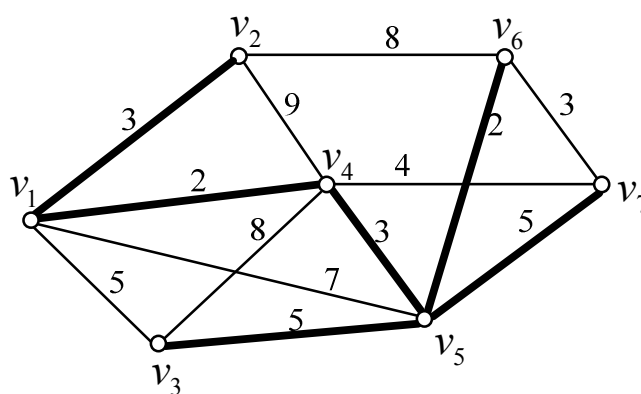
Шаг 6.

$$Q_1 = 5.$$

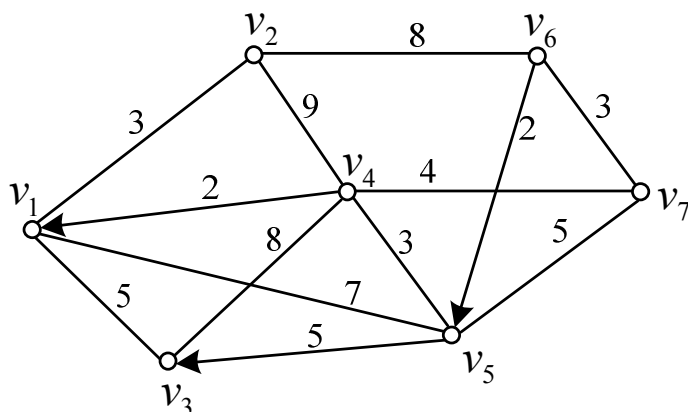
$$q_2 = \min(10, 5 + 3) = 8;$$

$$q_7 = \min(5, 5 + \infty) = 5.$$

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞
2	∞	∞	∞	$3(v_5)$		$2(v_5)$	$5(v_5)$
3	∞	$10(v_6)$	$5(v_5)$	$3(v_5)$			$5(v_6)$
4	$5(v_4)$	$10(v_6)$	$5(v_5)$				$5(v_6)$
5	$5(v_4)$	$10(v_6)$					$5(v_6)$
6		$8(v_1)$					$5(v_6)$
	1-4 (5)	1-2 (8)	3-5 (5)	4-5 (3)		5-6 (2)	6-7 (5)



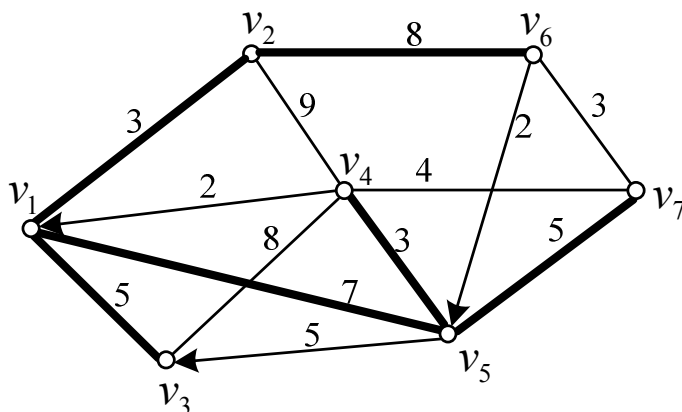
Пример 2.24. Найти кратчайшие расстояния из вершины v_1 до других вершин для графа, изображенного на рисунке.



Решение.

В данном случае некоторые дуги имеют направление. Это могут быть дороги с односторонним движением либо какие-нибудь другие ограничения на направление движения.

Шаг	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2		$3(v_1)$	$5(v_1)$	∞	$7(v_1)$	∞	∞
3			$5(v_1)$	$12(v_2)$	$7(v_1)$	$11(v_2)$	∞
4				$12(v_2)$	$7(v_1)$	$11(v_2)$	∞
5				$10(v_5)$		$11(v_2)$	$12(v_5)$
6						$11(v_2)$	$12(v_5)$
7							$12(v_5)$
		1-2 (3)	1-3 (5)	4-5 (10)	1-5 (7)	2-6 (11)	5-7 (12)



Задача 2.11. Найти кратчайшие расстояния из вершины v_1 до остальных вершин для графа, заданного матрицей.

1.

$$\begin{pmatrix} \infty & 2 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & \infty & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & \infty & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & \infty & 3 \\ 8 & 1 & 7 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 3 & 8 & 2 \\ 7 & \infty & 5 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & \infty & 3 & 7 \\ 8 & 9 & 3 & \infty & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} \infty & 9 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & \infty & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & \infty & 7 & 5 \\ 5 & 1 & 7 & \infty & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 5 & 8 & 3 \\ 7 & \infty & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & \infty & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 3 & \infty & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & \infty & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & \infty & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & \infty & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 9 & 5 & 8 \\ 7 & \infty & 4 & 5 & 3 \\ 9 & 4 & \infty & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & \infty & 3 \\ 8 & 3 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & \infty & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & \infty & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & \infty & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

8.

$$\begin{pmatrix} \infty & 9 & 7 & 8 & 5 \\ 9 & \infty & 9 & 7 & 8 \\ 7 & 9 & \infty & 9 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & \infty & 9 \\ 5 & 8 & 7 & 9 & \infty \end{pmatrix}$$

9.

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 5 & \infty & 1 & 9 & 7 \\ 7 & 1 & \infty & 5 & 7 \\ 9 & 9 & 5 & \infty & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

10.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & \infty & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & \infty & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & \infty & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

11.

$$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & \infty & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & \infty & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & \infty & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

12.

$$\begin{pmatrix} \infty & 9 & 7 & 7 & 9 \\ 9 & \infty & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & \infty & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 5 & \infty & 3 \\ 9 & 4 & 7 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

13.

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 7 & 1 & 3 \\ 5 & \infty & 4 & 8 & 2 \\ 7 & 4 & \infty & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & \infty & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

14.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 9 & 8 & 2 \\ 7 & \infty & 2 & 4 & 3 \\ 9 & 2 & \infty & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 5 & \infty & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

15.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 9 & 2 & 5 \\ 7 & \infty & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 5 & \infty & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & \infty & 3 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

16.

$$\begin{pmatrix} \infty & 4 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & \infty & 7 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & \infty & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & \infty & 3 \\ 7 & 8 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

17.

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & \infty & 4 & 9 & 3 \\ 7 & 4 & \infty & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 5 & \infty & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & \infty \end{pmatrix}$$

18.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 7 & \infty & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & \infty & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & \infty & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

19.

$$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & \infty & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \infty & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

20.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & \infty & 8 & 1 & 9 \\ 2 & 8 & \infty & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & \infty & 3 \\ 5 & 9 & 5 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

Задача 2.12. Найти кратчайшие расстояния из вершины v_1 до остальных вершин для графа, заданного матрицей.

1.

$$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 9 & 7 & 1 \\ 3 & \infty & 5 & 8 & 2 & 5 & 8 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & \infty & 4 & 1 & 6 & 8 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 4 & \infty & 7 & 3 & 4 & 6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 7 & \infty & 3 & 5 & 2 & 1 & 6 \\ 7 & 5 & 6 & 3 & 3 & \infty & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 8 & 4 & 5 & 7 & \infty & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 2 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & \infty & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & 9 & 1 & 9 & 4 & 7 & \infty & 5 \\ 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 2 & 2 & 3 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 4 & 7 & 3 & 2 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 7 & \infty & 7 & 9 & 3 & 2 & 1 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & \infty & 5 & 8 & 9 & 2 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & 5 & \infty & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 8 & 3 & \infty & 9 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 5 & 9 & \infty & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 9 & 1 & 2 & 7 & 5 & 3 & \infty & 9 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 7 & 9 & 4 & 4 & 9 & \infty & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 5 & 2 & 1 & \infty & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 7 & 1 & 5 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 7 & 8 & 2 & 3 & 1 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & \infty & 5 & 3 & 1 & 7 & 4 & 9 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & \infty & 8 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 8 & \infty & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \infty & 5 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 3 & 2 & 5 & \infty & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 4 & \infty & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 9 & 1 & 3 & 5 & 3 & 2 & \infty & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & \infty & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 3 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} \infty & 9 & 7 & 8 & 5 & 7 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 9 & \infty & 5 & 5 & 7 & 3 & 8 & 9 & 3 & 7 \\ 7 & 5 & \infty & 5 & 9 & 1 & 4 & 9 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 5 & \infty & 7 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 9 & 7 & \infty & 8 & 8 & 9 & 9 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 2 & 8 & \infty & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 8 & 1 & \infty & 7 & 3 & 9 \\ 4 & 9 & 9 & 7 & 9 & 2 & 7 & \infty & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 3 & 5 & 9 & 3 & 3 & 2 & \infty & 7 \\ 1 & 7 & 7 & 3 & 2 & 4 & 9 & 5 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 2 & 7 & 5 & 9 \\ 5 & \infty & 3 & 7 & 1 & 7 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 7 & 3 & \infty & 4 & 6 & 2 & 7 & 5 & 9 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & \infty & 5 & 7 & 3 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & \infty & 4 & 7 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 7 & 2 & 7 & 4 & \infty & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 3 & 7 & 5 & \infty & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 5 & 5 & 2 & 3 & 3 & \infty & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 1 & 3 & 6 & 4 & 6 & \infty & 3 \\ 9 & 7 & 3 & 7 & 6 & 3 & 6 & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 3 & 2 & 8 & 4 & 9 & 2 & 5 & 7 \\ 7 & \infty & 5 & 8 & 7 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & \infty & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 5 & \infty & 4 & 7 & 4 & 9 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 1 & 4 & \infty & 2 & 3 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 2 & \infty & 1 & 6 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & \infty & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 1 & 6 & 2 & \infty & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 3 & \infty & 4 \\ 7 & 1 & 7 & 6 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} \infty & 6 & 3 & 4 & 7 & 8 & 5 & 8 & 3 & 4 \\ 6 & \infty & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & \infty & 4 & 2 & 5 & 4 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 4 & \infty & 9 & 5 & 3 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 9 & \infty & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 8 & 6 & 5 & 5 & 2 & \infty & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 8 & 4 & 3 & 2 & 3 & \infty & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 3 & 2 & 3 & 4 & \infty & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & \infty & 7 \\ 4 & 5 & 9 & 4 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

8.

$$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 4 & 8 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & \infty & 3 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & \infty & 5 & 6 & 2 & 4 & 2 & 8 & 3 \\ 8 & 6 & 5 & \infty & 5 & 6 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 5 & \infty & 3 & 4 & 7 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 3 & \infty & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 4 & 2 & 4 & 4 & \infty & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 7 & 6 & 2 & \infty & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 8 & 5 & 8 & 2 & 5 & 3 & \infty & 4 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 2 & 5 & 6 & 6 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

9.

$$\begin{pmatrix} \infty & 8 & 5 & 8 & 5 & 3 & 8 & 9 & 2 & 5 \\ 8 & \infty & 5 & 6 & 3 & 8 & 4 & 8 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & \infty & 8 & 7 & 4 & 7 & 3 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & \infty & 5 & 2 & 3 & 7 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 5 & \infty & 5 & 3 & 7 & 9 & 3 \\ 3 & 8 & 4 & 2 & 5 & \infty & 2 & 6 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 7 & 3 & 3 & 2 & \infty & 3 & 8 & 3 \\ 9 & 8 & 3 & 7 & 7 & 6 & 3 & \infty & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 9 & 4 & 8 & 2 & \infty & 5 \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 3 & 8 & 3 & 8 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

10.

$$\begin{pmatrix} \infty & 4 & 3 & 9 & 6 & 7 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & \infty & 5 & 4 & 8 & 3 & 6 & 7 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 6 & 9 & 5 & 8 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 2 & \infty & 6 & 3 & 7 & 9 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 6 & 6 & \infty & 7 & 4 & 8 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 9 & 3 & 7 & \infty & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 4 & \infty & 6 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 8 & 9 & 8 & 3 & 6 & \infty & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 2 & 4 & 6 & \infty & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & \infty \end{pmatrix}$$

11.

$$\begin{pmatrix} \infty & 4 & 6 & 9 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & \infty & 5 & 8 & 5 & 4 & 6 & 3 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & \infty & 3 & 5 & 2 & 4 & 7 & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 3 & \infty & 8 & 4 & 6 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & \infty & 5 & 3 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 4 & 5 & \infty & 5 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 6 & 3 & 5 & \infty & 6 & 3 & 6 \\ 7 & 3 & 7 & 3 & 5 & 3 & 6 & \infty & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 & 7 & 7 & 3 & 4 & \infty & 4 \\ 8 & 8 & 3 & 4 & 3 & 4 & 6 & 8 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

12.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 5 & 3 & 8 & 5 & 7 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & \infty & 2 & 7 & 4 & 6 & 5 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & 2 & \infty & 3 & 7 & 7 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 3 & \infty & 8 & 6 & 4 & 7 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 7 & 8 & \infty & 5 & 8 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & \infty & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 8 & 3 & \infty & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 5 & 7 & 4 & 5 & 6 & \infty & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 2 & 8 & 3 & 8 & 3 & 3 & \infty & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 4 & 8 & 4 & 5 & 6 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

13.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 4 & 6 & 2 & 7 & 4 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & \infty & 9 & 4 & 2 & 4 & 6 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 9 & \infty & 5 & 3 & 6 & 8 & 4 & 8 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & \infty & 5 & 7 & 9 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & \infty & 8 & 3 & 7 & 3 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 7 & 8 & \infty & 6 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 & 6 & \infty & 7 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 & \infty & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 8 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & \infty & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 5 & 7 & 7 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

14.

$$\begin{pmatrix} \infty & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 4 & 8 & 5 & 3 \\ 6 & \infty & 5 & 8 & 7 & 5 & 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 5 & 6 & 3 & 5 & 7 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & 5 & \infty & 6 & 4 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 6 & 7 & 6 & 6 & \infty & 9 & 4 & 7 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 4 & 9 & \infty & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 4 & 4 & \infty & 6 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 7 & 5 & 7 & 3 & 6 & \infty & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 7 & \infty & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & 5 & 2 & 2 & 4 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

15.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 5 & 3 & 5 & 8 & 3 & 5 & 3 & 4 \\ 7 & \infty & 9 & 7 & 2 & 6 & 2 & 7 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & \infty & 7 & 5 & 3 & 8 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & \infty & 8 & 4 & 6 & 3 & 8 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 8 & \infty & 8 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ 8 & 6 & 3 & 4 & 8 & \infty & 7 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 6 & 5 & 7 & \infty & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & \infty & 9 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 8 & 7 & 5 & 5 & 9 & \infty & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 2 & 3 & 3 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

16.

$$\begin{pmatrix} \infty & 6 & 8 & 3 & 2 & 7 & 3 & 2 & 8 & 3 \\ 6 & \infty & 6 & 8 & 3 & 6 & 3 & 7 & 9 & 4 \\ 8 & 6 & \infty & 6 & 3 & 8 & 5 & 6 & 3 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & \infty & 6 & 5 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 6 & \infty & 8 & 4 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 5 & 8 & \infty & 6 & 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 4 & 6 & \infty & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 7 & 3 & 9 & 3 & \infty & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 3 & 5 & 8 & 4 & 2 & 7 & \infty & 4 \\ 3 & 4 & 8 & 3 & 5 & 3 & 7 & 3 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

17.

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & 7 & 4 & 7 & 8 & 9 & 4 & 6 \\ 5 & \infty & 8 & 5 & 6 & 4 & 8 & 5 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & \infty & 9 & 5 & 7 & 4 & 6 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 9 & \infty & 8 & 4 & 3 & 2 & 8 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 8 & \infty & 4 & 8 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 4 & 4 & \infty & 9 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 4 & 3 & 8 & 9 & \infty & 2 & 6 & 4 \\ 9 & 5 & 6 & 2 & 4 & 4 & 2 & \infty & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 6 & 5 & \infty & 5 \\ 6 & 8 & 4 & 5 & 5 & 3 & 4 & 8 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

18.

$$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & \infty & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & \infty & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & \infty & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 3 & \infty & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 4 & 8 & \infty & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 7 & 4 & \infty & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 4 & 6 & 6 & 5 & 7 & \infty & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 3 & 7 & 5 & 6 & 6 & 5 & \infty & 7 \\ 9 & 8 & 3 & 8 & 4 & 7 & 5 & 6 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

19.

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & 6 & 3 & 4 & 6 & 9 & 3 & 4 \\ 5 & \infty & 6 & 5 & 2 & 5 & 6 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & \infty & 8 & 3 & 4 & 2 & 9 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 8 & \infty & 8 & 3 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & \infty & 9 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 9 & \infty & 8 & 2 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 & 2 & 5 & 8 & \infty & 2 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 9 & 8 & 2 & 2 & 2 & \infty & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 6 & 5 & 8 & 4 & \infty & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & 4 & 8 & 9 & 2 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

20.

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 4 & 9 & 2 & 4 & 7 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & \infty & 9 & 7 & 4 & 6 & 3 & 8 & 5 & 4 \\ 4 & 9 & \infty & 8 & 4 & 9 & 8 & 5 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 8 & \infty & 8 & 4 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & \infty & 3 & 6 & 4 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 9 & 4 & 3 & \infty & 8 & 4 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 3 & 6 & 8 & \infty & 8 & 3 & 6 \\ 2 & 8 & 5 & 5 & 4 & 4 & 8 & \infty & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 2 & 3 & 4 & \infty & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 8 & 8 & 7 & 6 & 8 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

3.1. Понятие игры

Пример. Два человека не глядя друг на друга, кладут на стол по монете вверх гербом или вверх цифрой, по своему усмотрению. Если оба выбрали одинаковые стороны, то один из них забирает обе монеты; иначе их забирает другой. Формализовать условие задачи.

Решение. Обозначим: A — первый человек, B — второй. У каждого есть два возможных варианта действий положить вверх гербом или вверх цифрой. Обозначим данные действия как A_1 , A_2 и B_1 , B_2 соответственно. Ситуацию, когда человек забрал обе монеты обозначим «1». Сведем данные в таблицу.

	B_1 (герб)	B_2 (цифра)
A_1 (герб)	1	-1
A_2 (цифра)	-1	1

Назовем A и B **игроками**; A_1 , A_2 и B_1 , B_2 **стратегиями** игроков; «1» или «-1» — **выигрыш**.

Полученная таблица — **платежная матрица**. «1» означает, что игрок A получает выигрыш, «-1» — A проиграл (выиграл B).

Т. е. значения выигрыша (проигрыша) в платежной матрице будем записывать с позиций игрока A .

Пример. Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга записывают каждый одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Если сумма написанных чисел четная, то B платит A эту сумму; если она нечетная, то, наоборот, A платит B эту сумму. Формализовать условие задачи.

Решение. Обозначим

A_1 — первый пишет 1; B_1 — второй пишет 1;
 A_2 — первый пишет 2; B_2 — второй пишет 2;
 A_3 — первый пишет 3; B_3 — второй пишет 3.

Тогда задачу можно описать с позиций теории игр платежной матрицей.

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Пример. «Дилемма узников». Игроками являются два узника, находящихся в предварительном заключении по подозрению в совершении преступления. При отсутствии прямых улик возможность их осуждения в большей степени зависит от того, заговорят они или будут молчать.

Если оба будут молчать, то наказанием будет лишь срок предварительного заключения (потери каждого из узников составят (-1)). Если сознаются, то получают срок, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство (потери каждого из узников

составят в этом случае (-6)). Если же заговорит только один из участников, а другой будет молчать, то в этом случае заговоривший будет выпущен на свободу (его потери равны 0), а сохраняющий молчание получит максимально возможное наказание (его потери будут равны (-9)). Формализовать условие задачи.

Решение. Обозначим

A_1 — первый молчит; B_1 — второй молчит;
 A_2 — первый говорит; B_2 — второй говорит.

Тогда задачу можно описать с позиций теории игр платежной матрицей.

	B_1	B_2
A_1	(-1;-1)	(-9;0)
A_2	(0;-9)	(-6;-6)

 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (-1;-1) & (-9;0) \\ (0;-9) & (-6;-6) \end{pmatrix}$

Пример. «Семейный спор». Муж и жена могут выбрать одно из двух событий, происходящих одновременно: футбольный матч или театр. Поскольку оба мероприятия проводятся в одно и то же время, супруги могут посетить только одно из них. Предпочтение мужа — футбольный матч, жены — театр. Супругам важно провести вечер вместе, чем участвовать в развлечениях по одному. Муж получает пользу равную 2, если пойдет на футбольный матч вместе с женой, и 1, если они отправятся в театр; жена выигрывает 2, если пойдет в театр, и 1 при посещении футбольного матча. Если же каждый из супругов пойдет на мероприятие в одиночку, то получают нулевое удовольствие. Формализовать условие задачи.

Решение. Обозначим

A — муж; B — жена

A_1 — футбольный матч; B_1 — футбольный матч;
 A_2 — театр; B_2 — театр.

Тогда задачу можно описать с позиций теории игр платежной матрицей.

	B_1 (Ф)	B_2 (Т)
A_1 (Ф)	(2;1)	(0;0)
A_2 (Т)	(0;0)	(1;2)

 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (2;1) & (0;0) \\ (0;0) & (1;2) \end{pmatrix}$

Пример. Сельхозпредприятие хочет в будущем году посадить бананы и (или) ананасы. Если погода будет ясной, то прибыль от бананов составит 5 ед., а от ананасов — 4 ед.; если погода будет пасмурной, то прибыль от бананов составит 4 ед., а от ананасов — 7 ед.; если будет дождливо, то прибыль от бананов составит 2 ед., а от ананасов — 1 ед. При этом известно, что вероятность ясной погоды составляет $\frac{1}{4}$, пасмурной — $\frac{1}{4}$. Формализовать игру.

Решение. Обозначим:

игрок A — сельхозпредприятие;

игрок B — природа.

Тогда у игрока A две стратегии, а у B — три.

A_1 — сеять бананы; B_1 — ясно;
 A_2 — сеять ананасы; B_2 — пасмурно;
 B_3 — дождливо.

Тогда задачу можно описать с позиций теории игр платежной матрицей.

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
	B_1	B_2	B_3
A_1	5	4	2
A_2	4	7	1

При решении практических задач приходится анализировать ситуации, где налицо две (или более) враждующие стороны, преследующие противоположные цели, причем результат каждого мероприятия одной из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации будем называть «**конфликтными ситуациями**».

Теория игр — математическая теория конфликтных ситуаций. Цель теории — выработка рекомендаций по рациональному образу действий каждого из противников в ходе конфликтной ситуации.

От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что ведется по вполне определенным **правилам**. Примеры: шахматы, карточные игры и т. д. Такие игры заканчиваются выигрышем одной из сторон.

Если в игре сталкиваются интересы двух противников, то игра **называется парной**; если нескольких — **множественной**. Далее будем рассматривать игру двух игроков.

Игра — мероприятие, состоящее из ряда действий сторон A и B , подчиняющихся правилам игры.

Игра называется игрой с **нулевой суммой**, если один игрок выигрывает то, что проигрывает другой, т. е. сумма выигрышей обеих сторон равна нулю. В игре с нулевой суммой интересы игроков противоположны, т. е. выигрыш одного из игроков равен выигрышу другого с противоположным знаком. Такие игры называются **антагонистическими**. При этом сторона A (мы) всегда рассматривается как «выигрывающая», а сторона B (противник) как «проигрывающая».

Развитие игры во времени представляется состоящим из последовательных этапов — **ходов**. Различают личные и случайные ходы.

Личным ходом называется сознательный выбор одним из игроков одного из возможных в данной ситуации ходов и его осуществление.

Случайным ходом называется выбор из ряда возможностей, осуществляемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (подбрасывание монеты и т. п.). Правила игры для каждого случайного хода должны указывать распределение вероятностей возможных исходов.

Игрой с полной информацией называется игра, в которой каждый игрок при каждом личном ходе знает результаты всех предыдущих ходов, как личных, так и случайных. Большинство игр не принадлежат к классу игр с полной информацией, так как неизвестность по поводу действий противника обычно является существенным элементом конфликтных ситуаций.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих однозначно выбор при каждом личном ходе данного игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Конечной называется игра, в которой у каждого игрока имеется только конечное число стратегий.

Пусть A_i — i -я стратегия первого игрока, B_j — j -я стратегия второго игрока.

Если игра состоит только из личных ходов, то выбор A_i, B_j (стратегии игроков) однозначно определяет исход игры — наш **выигрыш** a_{ij} . Если игра содержит, кроме личных, случайные ходы, то выигрыш при паре стратегий A_i, B_j есть величина случайная, зависящая от исходов всех случайных ходов, и оценкой ожидаемого выигрыша является его среднее значение (математическое ожидание).

Значения a_{ij} записывают в виде прямоугольной таблицы — **платежной матрицы (матрицы игры)**.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный выигрыш (или, что то же, минимальный возможный средний проигрыш).

При выборе этой стратегии предполагается, что противник является по меньшей мере таким же разумным, как и мы сами, и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели.

3.2. Принцип минимакса. Доминирование стратегий

Рассмотрим игру $m \times n$, заданную матрицей

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Пусть A_i — i -я стратегия первого игрока, B_j — j -я стратегия второго игрока.

Очевидно, что цель первого игрока максимизировать свой выигрыш, а второго игрока — минимизировать свой проигрыш.

Определим оптимальную стратегию первого игрока. При выборе стратегии A_i всегда предполагается, что противник ответит на нее той стратегией B_j , для которой выигрыш a_{ij} первого игрока будет минимальным, т. е. необходимо найти минимальный элемент матрицы в каждой строке — $\min_j a_{ij}$. Таким образом, предполагается, что в результате адекватных действий противника игрок A не выиграет больше, чем $\min_j a_{ij}$. Так же, учитывая действия противника, игрок A должен выбрать ту стратегию, для которой полученные значения $\min_j a_{ij}$ будут максимальны, т. е. необходимо найти

$$\max_i \min_j a_{ij} = \alpha = \underline{\nu}.$$

Число $\alpha = \underline{\nu}$ показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе первый игрок, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях второго игрока, и называется **нижней ценой игры** (максимином). Стратегия, которая соответствует выбранному значению $\underline{\nu}$, называется **максиминной стратегией**.

Второй игрок при оптимальном своем поведении должен стремиться по возможности за счет своих стратегий минимизировать свой проигрыш — максимально уменьшить выигрыш первого игрока. Т. е. определяется максимальный выигрыш пер-

вого игрока, при условии, что второй игрок применит j -ю чистую стратегию — $\max_i a_{ij}$ (необходимо найти максимальный элемент матрицы в каждом столбце). Затем второй игрок должен выбрать ту стратегию, при которой выигрыш первого игрока будет минимальным (выбирает минимальное из чисел $\max_i a_{ij}$), т. е.

$$\min_j \max_i a_{ij} = \beta = \bar{v}.$$

Число $\beta = \bar{v}$ показывает, какой максимальный выигрыш может гарантировать себе первый игрок, применяя свои чистые стратегии, и называется **верхней ценой игры** (минимаксом).

Стратегия, которая соответствует выбранному значению $\bar{v}$, называется **минимаксной стратегией**.

Другими словами, применяя свои чистые стратегии, первый игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше $\alpha = \underline{v}$, а второй игрок за счет применения своих чистых стратегий может не допускать выигрыш первого игрока больше, чем $\beta = \bar{v}$.

Можно показать, что для верхней и нижней цены игры справедливо неравенство

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij} \text{ или } \underline{v} \leq \bar{v}.$$

Алгоритм нахождения нижней цены и верхней цены игры можно представить следующим образом.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right)}_{\substack{\max_i a_{i1} \quad \max_i a_{i2} \quad \dots \quad \max_i a_{in} \\ \beta = \min_j \max_i a_{ij} = \bar{v}}} \left. \begin{array}{l} \min_j a_{1j} \\ \min_j a_{2j} \\ \dots \\ \min_j a_{mj} \end{array} \right\} \alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \underline{v}$$

Если в игре нижняя и верхняя чистые цены игры совпадают, т. е. $\underline{v} = \bar{v}$, то такие игры называют играми **с седловой точкой**. (В геометрии точку являющейся одновременно минимумом по одной координате и максимумом по другой называют седловой точкой.) Т. е. седловый элемент является минимальным в i -й строке и максимальным в j -м столбце платежной матрицы.

Значение $\underline{v} = \bar{v}$, соответствующее седловой точке, называется **чистой ценой игры**, а пара стратегий A_i и B_j , позволяющие достичь этого значения — **оптимальными стратегиями**.

Если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не может поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей данной седловой точке.

Пара стратегий и значение седловой точки образуют **решение игры в чистых стратегиях**.

Пример 3.1. Методом минимакса найти решение игры, которая задана платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 10 & 11 & 9 & 7 & 12 \\ 10 & 8 & 11 & 6 & 10 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 11 & 12 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 10 & 11 & 9 & 7 & 12 \\ 10 & 8 & 11 & 6 & 10 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 11 & 12 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \min_j a_{1j} = 3 \\ \min_j a_{2j} = 7 \\ \min_j a_{3j} = 6 \\ \min_j a_{4j} = 1 \\ \min_j a_{5j} = 4 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 10 & 11 & 9 & 7 & 12 \\ 10 & 8 & 11 & 6 & 10 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 11 & 12 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}} \right\} \alpha = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \\ & & = \max(3, 7, 6, 1, 4) = 7 \\ \underbrace{\max_i a_{i1} = 11 \quad \max_i a_{i2} = 12 \quad \max_i a_{i3} = 11 \quad \max_i a_{i4} = 7 \quad \max_i a_{i5} = 12}_{\beta = \bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min(11, 12, 11, 7, 12) = 7} \end{array}$$

Таким образом,

- 1) нижняя цена игры $\alpha = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max(3, 7, 6, 1, 4) = 7$;
- 2) верхняя цена игры $\beta = \bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min(11, 12, 11, 7, 12) = 7$;
- 3) так как $\underline{v} = \bar{v}$, то элемент $a_{24} = 7$ является седловым и игра имеет решение в чистых стратегиях с ценой $\underline{v} = \bar{v} = v = 7$, а оптимальными чистыми стратегиями первого и второго игроков соответственно являются стратегии A_2 и B_4 .

Сложность решения матричной игры возрастает с увеличением размерности платежной матрицы A . В ряде случаев, анализ матрицы позволяет понизить ее размерность, отбросив не оптимальные стратегии.

Одним из способов понижения размерности решаемой задачи является **метод доминант**.

Для первого игрока стратегия i будет доминировать над стратегией k , если для всех элементов этих стратегий выполняется неравенство

$$a_{im} \geq a_{km}.$$

Для второго игрока стратегия j будет доминировать над стратегией k , если для всех элементов этих стратегий выполняется неравенство

$$a_{nj} \geq a_{nk}.$$

Пример 3.2. Методом доминант найти решение игры, которая задана платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 10 & 11 & 9 & 7 & 12 \\ 10 & 8 & 11 & 6 & 10 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 11 & 12 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение. Рассмотрим стратегии первого игрока. Каждый элемент второй строки превосходит соответствующий элемент первой строки ($a_2 \geq a_1$), т. е. применяя первую стратегию, первый игрок заведомо выбирает менее выигрышный вариант. Вычеркиваем первую стратегию.

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ 10 & 11 & 9 & 7 & 12 \\ 10 & 8 & 11 & 6 & 10 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 11 & 12 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Каждый элемент четвертой строки не превосходит соответствующий элемент второй строки, четвертую строку вычеркиваем.

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ 10 & 11 & 9 & 7 & 12 \\ 10 & 8 & 11 & 6 & 10 \\ - & - & - & - & - \\ 11 & 12 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим стратегии второго игрока. Учитывая, что второй игрок стремится получить наименьший проигрыш, то доминирующими стратегиями для него будут стратегии с наименьшими элементами. Элементы первого, второго и пятого столбцов превосходят соответствующие элементы четвертого, первый второй и пятый столбец вычеркиваем.

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & 9 & 7 & - \\ - & - & 11 & 6 & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & 4 & 5 & - \end{pmatrix}$$

Переходим к стратегиям первого игрока. Сравниваем вторую и третью строку с последней — последняя строка не является доминирующей, ее вычеркиваем.

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & 9 & 7 & - \\ - & - & 11 & 6 & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Сравнивая третий и четвертый столбцы, исключаем третью стратегию второго игрока.

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & - & 7 & - \\ - & - & - & 6 & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Сравнивая второй и третий столбцы, исключаем третью стратегию первого игрока.

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & - & 7 & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Таким образом, игра имеет решение в чистых стратегиях. Оптимальными стратегиями является пара (A_2, B_4) и цена игры $v = 7$.

Замечание. Можно показать, что в игре 2×2 наличие седловой точки всегда соответствует существованию заведомо невыгодных стратегий, которые можно вычеркнуть методом доминант.

Пример 3.3. Найти решение игры, которая задана платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Нижняя цена игры $\alpha = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max(2, 1) = 2$. Верхняя цена игры $\beta = \bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min(3, 2) = 2$. Так как $\underline{v} = \bar{v}$, то элемент $a_{12} = 2$ является седловым и игра имеет решение в чистых стратегиях с ценой $\underline{v} = \bar{v} = v = 2$, а оптимальными чистыми стратегиями первого и второго игроков соответственно являются стратегии A_1 и B_2 .

Найдем решение игры, вычеркивая заведомо невыгодные стратегии

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ - & - \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} - & 2 \\ - & - \end{pmatrix}.$$

Получили такой же результат.

Задача 3.1. Игра задана платежной матрицей. Найти решение игры:

1) методом исключения доминант;

2) методом минимакса.

1.	2.	3.	4.	5.
$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 9 & 7 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 7 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 9 & 1 & 9 & 2 \\ 8 & 6 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 9 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 9 & 0 & 9 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 7 \\ 4 & 9 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 6 \\ 9 & 1 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 7 & 1 \\ 9 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$
21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 & 9 \\ 8 & 8 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
24. $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 & 9 \\ 0 & 9 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
26. $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$
28. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & 6 \\ 8 & 9 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$
29. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 3 & 9 \\ 6 & 6 & 3 & 8 \\ 7 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$
30. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3.3. Смешанные стратегии

Пример. Найти решение игры в чистых стратегиях, заданной платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Нижняя цена игры: $\alpha = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max(-3, -2) = -2$.

2) Верхняя цена игры $\beta = \bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min(5, 4) = 4$.

3) Так как $\underline{v} \neq \bar{v}$, то матрица не имеет седловой точки, следовательно, решения игры в чистых стратегиях нет, значит, решение будем искать в смешанных стратегиях.

Как было показано, не каждая матричная игра имеет решение в оптимальных чистых стратегиях. Если матричная игра не имеет седловую точку, то можно найти нижнюю $\underline{v}$ и верхнюю $\bar{v}$ чистые цены игры, которые показывают, что первый игрок не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры $\bar{v}$, и может быть уверен, что получит выигрыш не меньше, чем нижняя цена игры $\underline{v}$, т. е. $\underline{v} \leq v \leq \bar{v}$. Естественно, такое решение не может удовлетворять исследователей. Выходом из данного положения может служить выбор своих стратегий игроками случайным образом при многократном проведении игры. Решением игры в каждом случае будет некое значение, среднее которых будет лежать в диапазоне $\underline{v} \leq \bar{v}$. И чем выше это среднее значение, тем лучше стратегии применяет игрок. Таким образом, каждый игрок может применять свои чистые стратегии с определенной вероятностью для максимального увеличения выигрыша. Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении игроками своих чистых стратегий с определенными частотами, называются **смешанными стратегиями**. Очевидно, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной.

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Пусть A_i — i -я стратегия первого игрока, B_j — j -я стратегия второго игрока.

Тогда, смешанная стратегия первого игрока

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1;$$

смешанная стратегия второго игрока

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}, \quad 0 \leq y_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

Тогда платежную матрицу можно представить как:

$$\begin{matrix} & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Средний выигрыш первого игрока (математическое ожидание выигрышей игрока A)

$$H_A(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j.$$

Теорема фон Неймана (Нэша). *Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение (возможно, в области смешанных стратегий).*

Данная теорема была впервые доказана Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштейном в 1944 году для игр двух лиц. Джон Нэш в 1950 году доказал о существовании равновесия для всех конечных игр с любым числом игроков.

Теорема. *Для того чтобы в матричной игре с ценой игры v смешанная стратегия x^0 первого игрока была оптимальной, необходимо и достаточно для смешанной стратегии y второго игрока выполнение неравенства*

$$H_A(x^0, y) \geq v.$$

Аналогично, чтобы смешанная стратегия y^0 второго игрока была оптимальной, необходимо и достаточно для смешанной стратегии x первого игрока выполнение неравенства

$$H_B(x, y^0) \leq v.$$

Следствие. Для того чтобы $x^0 = (x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_m^0)$ была оптимальной смешанной стратегией матричной игры с ценой игры v , необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^0 \geq v \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично, чтобы $y^0 = (y_1^0, \dots, y_j^0, \dots, y_n^0)$ была оптимальной смешанной стратегией матричной игры с ценой игры v , необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^0 \leq v \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Теорема. Пусть имеется матричная игра с матрицей A , ценой игры v , оптимальными смешанными стратегиями $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ соответственно первого и второго игроков.

Тогда, если для некоторого j будет

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i > v,$$

то $y_j = 0$;

если для некоторого i будет

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j < v,$$

то $x_i = 0$.

Таким образом, для нахождения решения матричной игры в смешанных стратегиях необходимо разрешить неравенства $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ и $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v \quad (j = 1, 2, \dots, n)$ при ограничениях $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ и $\sum_{j=1}^n y_j = 1$, и найти неотрицательные значения x_i и y_j ; в противном случае применить последнюю теорему.

Пример 3.4. Найти решение игры, заданной платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Нижняя цена игры: $\alpha = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max(-2; -1; -2) = -1$. Верхняя цена игры $\beta = \bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min(3; 4; 2) = 2$. Так как $\underline{v} \neq \bar{v}$, то матрица не имеет седловой точки, следовательно, решения игры в чистых стратегиях нет, значит, решение будем искать в смешанных стратегиях.

2) Пусть

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad (i=1, 2, 3), \quad \sum_{i=1}^3 x_i = 1,$$

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq y_j \leq 1 \quad (j=1, 2, 3), \quad \sum_{j=1}^3 y_j = 1$$

смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно.

Учитывая, что $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i^0 \geq v \quad (j=1, 2, \dots, n)$ и $\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j^0 \leq v \quad (i=1, 2, \dots, m)$, то для нахождения оптимальных стратегий обоих игроков необходимо найти неотрицательные $x_i \quad (i=1, 2, 3)$ и $y_j \quad (j=1, 2, 3)$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \geq v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \geq v, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \geq v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \leq v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \leq v, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \leq v, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} 3x_1 - 1x_2 - 1x_3 \geq v, \\ 2x_1 - 1x_2 + 4x_3 \geq v, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq v, \\ -1y_1 - 1y_2 + 2y_3 \leq v, \\ -1y_1 + 4y_2 - 2y_3 \leq v, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первую систему. Заменим все неравенства на равенства. Если решение даст неотрицательные значения x_1 , x_2 и x_3 , то получено решение игры.

$$\begin{cases} 3x_1 - 1x_2 - 1x_3 = v, \\ 2x_1 - 1x_2 + 4x_3 = v, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решая систему любым известным способом

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{15}{44} \\ \frac{13}{22} \\ \frac{3}{44} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

получим

$$x_1 = \frac{15}{44}, \quad x_2 = \frac{13}{22}, \quad x_3 = \frac{3}{44}, \quad v = \frac{4}{11}.$$

Полученные значения x_1 , x_2 и x_3 неотрицательные, следовательно, получено решение игры для первого игрока.

Решая вторую систему

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 - 2y_3 = v, \\ -1y_1 - 1y_2 + 2y_3 = v, \\ -1y_1 + 4y_2 - 2y_3 = v, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

любым известным способом

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

получим

$$y_1 = \frac{2}{11}, y_2 = \frac{4}{11}, y_3 = \frac{5}{11}.$$

Полученные значения неотрицательные, следовательно, получена оптимальная смешанная стратегия второго игрока.

Таким образом, оптимальными стратегиями A и B будут $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 15/44 & 13/22 & 3/44 \end{pmatrix}$ и $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 2/11 & 4/11 & 5/11 \end{pmatrix}$ с ценой игры $v = \frac{4}{11}$.

Пример 3.5. Найти решение игры, заданной платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Нижняя цена игры: $\alpha = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max(-2; -1; 2) = 2$. Верхняя цена игры $\beta = \bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min(3; 4; 6) = 3$. Так как $\underline{v} \neq \bar{v}$, то матрица не имеет седловой точки, следовательно, решения игры в чистых стратегиях нет, значит, решение будем искать в смешанных стратегиях.

2) Пусть

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, 0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, 2, 3), \sum_{i=1}^3 x_i = 1,$$

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, 0 \leq y_j \leq 1 \ (j = 1, 2, 3), \sum_{j=1}^3 y_j = 1$$

смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно.

Для нахождения оптимальных стратегий обоих игроков необходимо найти неотрицательные x_i ($i = 1, 2, 3$) и y_j ($j = 1, 2, 3$), которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \geq v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \geq v, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \geq v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \leq v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \leq v, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \leq v, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 \geq v, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq v, \\ -1y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq v, \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 \leq v, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Заменяем неравенства равенства и решим системы любым известным способом.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Так как некоторые полученные значения оказались отрицательными, то данные значения не образуют решение. Поэтому составляем системы, состоящие из равенств и неравенств, и решаем их.

Пусть первое неравенство первой системы является строгим, а остальные будут уравнениями

$$\begin{cases} 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 > v, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 = v, \\ -1y_1 + 4y_2 + 2y_3 = v, \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 = v, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Если для некоторого j равенство будет заменено строгим неравенством

$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i > v$, то согласно вышеуказанной теореме $y_j = 0$. Так как $3x_1 - 1x_2 + 2x_3 > v$, то $y_1 = 0$. Тогда вторая система примет вид:

$$\begin{cases} -2y_2 + 4y_3 = v, \\ 4y_2 + 2y_3 = v, \\ 2y_2 + 6y_3 = v, \\ y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим систему из первых трех уравнений

$$\begin{cases} -2y_2 + 4y_3 = v, \\ 4y_2 + 2y_3 = v, \\ 2y_2 + 6y_3 = v. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y_2 + 4y_3 - v = 0, \\ 4y_2 + 2y_3 - v = 0, \\ 2y_2 + 6y_3 - v = 0. \end{cases}$$

Последняя система является однородной и имеет нетривиальное решение только в случае, когда главный определитель системы равен нулю. Так как значение главного определителя отлично от нуля

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -20,$$

то существует только тривиальное (нулевое) решение $y_2 = y_3 = v = 0$, что противоречит условию нормировки $y_2 + y_3 = 1$. Следовательно, исходная система не имеет решения и предположение о замене первого равенства строгим неравенством неверно.

Делая последовательный перебор, приходим к системе:

$$\begin{cases} 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = v, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 > v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 < v, \\ -1y_1 + 4y_2 + 2y_3 = v, \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 = v, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Если для некоторого j равенство будет заменено строгим неравенством $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i > v$, то согласно вышеуказанной теореме $y_j = 0$, аналогично если для некоторого i равенство будет заменено строгим неравенством $\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j < v$, то $x_i = 0$. Значит, так как $4x_1 + 2x_2 + 6x_3 > v$, то $y_3 = 0$; так как $3y_1 - 2y_2 + 4y_3 < v$, то $x_1 = 0$. Таким образом, приходим к системам уравнений:

$$\begin{cases} -1x_2 + 2x_3 = v, \\ 4x_2 + 2x_3 = v, \\ x_2 + x_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} -1y_1 + 4y_2 = v, \\ 2y_1 + 2y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1x_2 + 2x_3 - v = 0, \\ 4x_2 + 2x_3 - v = 0, \\ x_2 + x_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} -1y_1 + 4y_2 - v = 0, \\ 2y_1 + 2y_2 - v = 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Решая последние системы любым известным способом

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

получим $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $y_1 = \frac{2}{5}$, $y_2 = \frac{3}{5}$, $v = 2$.

Таким образом, оптимальными стратегиями A и B будут $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и

$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}$ с ценой игры $v = 2$.

3.4. Игры 2×2 , $2 \times n$, $m \times 2$

Решение игры с платежной матрицей $m \times n$ при $m, n > 2$, у которой нет седловой точки, представляет собой достаточно трудную задачу. Поэтому при решении задач, формализованных с позиций теории игр, пытаются понизить размерность до 2×2 , $2 \times n$, $m \times 2$ либо методом доминант, либо определенными допущениями.

Матричная игра 2×2 задается платежной матрицей выигрышей первого игрока

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно.

Учитывая, что $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^0 \geq v$ ($j = 1, 2, \dots, n$) и $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^0 \leq v$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то для нахождения оптимальных стратегий обоих игроков необходимо найти решение систем, заданных условиями

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geq v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geq v, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leq v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Можно показать, что если в матричной игре с платежной матрицей 2×2 нет седловой точки, то все неравенства решения можно заменить равенствами.

Пример 3.6. Информационный ресурс, который может иметь два уровня защиты (A_1 и A_2), подвергается атаке. Правонарушитель может применить два типа атаки на данный ресурс (B_1 и B_2). При применении защиты A_1 атаки B_1 и B_2 отражаются с вероятностями 0,63 и 0,91; при защите A_2 — с вероятностями 0,79 и 0,67.

Формализовать задачу с позиций теории игр и найти ее решение.

Решение.

Информационный ресурс (игрок A) может иметь один из двух уровней защиты (стратегий):

A_1 — уровень защиты № 1;

A_2 — уровень защиты № 2.

Правонарушитель (игрок B) имеет также две стратегии:

B_1 — использовать атаку № 1;

B_2 — использовать атаку № 2.

Тогда задачу можно описать с позиций теории игр с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0,63 & 0,91 \\ 0,79 & 0,67 \end{pmatrix}.$$

1) Нижняя цена игры: $\alpha = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max(0,63; 0,67) = 0,67$. Верхняя цена игры $\beta = \bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min(0,79; 0,91) = 0,79$. Так как $\underline{v} \neq \bar{v}$, то матрица не имеет седловой точки, следовательно, решения игры в чистых стратегиях нет, значит, решение будем искать в смешанных стратегиях.

2) Пусть $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно.

Для нахождения оптимальных стратегий обоих игроков необходимо найти решение систем, заданных условиями

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geq v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geq v, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leq v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Учитывая тот факт, что если в матричной игре с платежной матрицей 2×2 нет седловой точки, то все неравенства решения можно заменить равенствами. Если игрок A будет придерживаться своей оптимальной стратегии S_A^* , то противник может пользоваться любой из своих чистых стратегий B_1, B_2 , не изменяя среднего выигрыша v .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,63x_1 + 0,79x_2 = v, \\ 0,91x_1 + 0,67x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,63x_1 + 0,79(1-x_1) = v, \\ 0,91x_1 + 0,67(1-x_1) = v, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично, запишем

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,63y_1 + 0,91y_2 = v, \\ 0,79y_1 + 0,67y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,63y_1 + 0,91(1-y_1) = v, \\ 0,79y_1 + 0,67(1-y_1) = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Из первой системы находим

$$x_1 = 0,3; \quad x_2 = 0,7; \quad v = 0,742.$$

Из второй системы уравнений определяем оптимальную стратегию B

$$y_1 = 0,6; \quad y_2 = 0,4.$$

Таким образом, оптимальными стратегиями A и B будут $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$,

$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ с ценой игры $v = 0,742$. Т. е. игра выгодна для A , т. к. $v > 0$; игрок A

должен в 70 % случаев использовать стратегию A_2 при этом атака будет отражена с вероятностью 0,742; игроку B необходимо в 60 % случаев использовать атаку B_1 , иначе вероятность отражения атаки увеличится.

Пример 3.7. Обратившись к одной из двух информационных систем, пользователь может получить ответ на вопрос, подав один из пяти запросов. Эффект от полученного ответа представлен платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти решение игры.

Решение.

Игрок A — информационные системы, игрок B — запросы.

1) Нижняя цена игры: $\alpha = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max(-1; 0) = 0$. Верхняя цена игры

$\beta = \bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min(6; 4; 3; 10; 4) = 3$. Так как $\underline{v} \neq \bar{v}$, то матрица не имеет седловой точки, следовательно, решения игры в чистых стратегиях нет, значит, решение будем искать в смешанных стратегиях.

2) Решим задачу графическим методом.

Пусть $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix}$ смешанные стратегии первого

и второго игроков соответственно.

Для нахождения оптимальных стратегий обоих игроков необходимо найти решение систем, заданных условиями

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geq v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geq v, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 \geq v, \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 \geq v, \\ a_{15}x_1 + a_{25}x_2 \geq v, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 + a_{15}y_5 \leq v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 + a_{25}y_5 \leq v, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}.$$

Или

$$\begin{cases} 6x_1 + 0x_2 \geq v, \\ 4x_1 + 2x_2 \geq v, \\ 3x_1 + 1x_2 \geq v, \\ -1x_1 + 10x_2 \geq v, \\ 1x_1 + 4x_2 \geq v, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 6y_1 + 4y_2 + 3y_3 - 1y_4 + 1y_5 \leq v, \\ 0y_1 + 2y_2 + 1y_3 + 10y_4 + 4y_5 \leq v, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}.$$

Пусть $M_j(x_1)$ — средний выигрыш игрока A при применении им смешанной стратегии при условии, что игрок B применил свою j -ю чистую стратегию. Тогда можно записать

$$M_j(x_1) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2, (j = \overline{1,5}).$$

Учитывая, что $x_2 = 1 - x_1$, получаем

$$M_1(x_1) = a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21} = 6x_1,$$

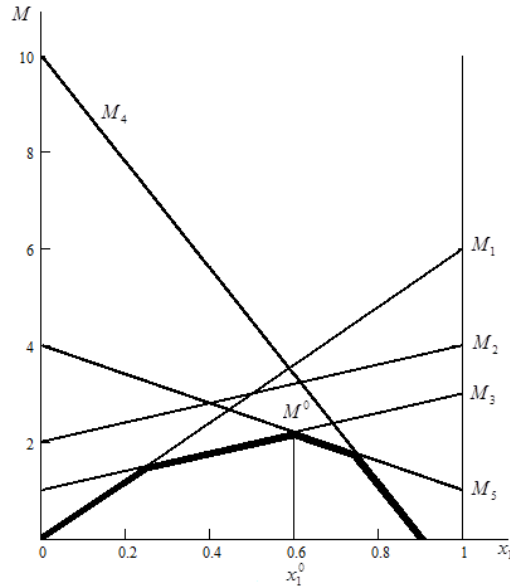
$$M_2(x_1) = a_{12}x_1 + a_{22}(1 - x_1) = (a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22} = 2x_1 + 2,$$

$$M_3(x_1) = a_{13}x_1 + a_{23}(1 - x_1) = (a_{13} - a_{23})x_1 + a_{23} = 2x_1 + 1,$$

$$M_4(x_1) = a_{14}x_1 + a_{24}(1 - x_1) = (a_{14} - a_{24})x_1 + a_{24} = -11x_1 + 10,$$

$$M_5(x_1) = a_{15}x_1 + a_{25}(1 - x_1) = (a_{15} - a_{25})x_1 + a_{25} = -3x_1 + 4.$$

Проведем линии средних выигрышей игрока A .



Цель игрока B минимизировать выигрыш игрока A за счет выбора своих стратегий, следовательно, находим

$$\min_j M_j(x_1) = M(x_1),$$

где $M(x_1)$ — нижняя граница множества ограничений изображена жирной линией.

Так как целью игрока A является максимизация своего выигрыша за счет выбора x_1 , то необходимо вычислить

$$\max_{x_1} M(x_1) = M(x_1^0) = M^0,$$

при этом цена игры

$$v = \min_j \max_{x_1} M_j(x_1) = M(x_1^0) = M^0.$$

Учитывая, что игра не имеет седловой точки, можем заменить неравенства равенствами

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 + a_{15}y_5 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 + a_{25}y_5 = v, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y_1 + 4y_2 + 3y_3 - 1y_4 + 1y_5 = v, \\ 0y_1 + 2y_2 + 1y_3 + 10y_4 + 4y_5 = v, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}.$$

Точка M^0 образована пересечением линий M_3 и M_5 , следовательно, полагаем $y_1 = y_2 = y_4 = 0$, и тогда можно записать

$$\begin{cases} a_{13}x_1 + a_{23}x_2 = v, \\ a_{15}x_1 + a_{25}x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{13}y_3 + a_{15}y_5 = v, \\ a_{23}y_3 + a_{25}y_5 = v, \\ y_3 + y_5 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = v, \\ 1x_1 + 4x_2 = v, \\ x_2 = 1 - x_1, \end{cases} \begin{cases} 3y_3 + 1y_5 = v, \\ 1y_3 + 4y_5 = v, \\ y_5 = 1 - y_3. \end{cases}$$

Решая полученные системы, находим

$$x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, y_3 = \frac{3}{5}, y_5 = \frac{2}{5}, v = \frac{11}{5},$$

а так же помним, что $y_1 = y_2 = y_4 = 0$.

Таким образом, в 3-х случаях из 5 необходимо обращаться к первой информационной системе с третьим запросом, в остальных случаях с пятым запросом ко второй системе, тогда полученный эффект будет равен $11/5$.

Пример 3.8. Обратившись к одной из двух информационных систем, пользователь может получить ответ на вопрос, подав один из трех запросов. Эффект от полученного ответа представлен платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти решение игры.

Решение.

Игрок A — запросы, игрок B — информационные системы.

1) Нижняя цена игры: $\alpha = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max(1; 3; 2) = 3$. Верхняя цена игры $\beta = \bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min(5; 7) = 5$. Так как $\underline{v} \neq \bar{v}$, то матрица не имеет седловой точки, следовательно, решения игры в чистых стратегиях нет, значит, решение будем искать в смешанных стратегиях.

2) Решим задачу графическим методом.

Пусть $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно.

Для нахождения оптимальных стратегий обоих игроков необходимо найти решение систем, заданных условиями

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \geq v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \geq v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leq v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq v, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \leq v, \\ y_1 + y_2 = 1, \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq v, \\ 1x_1 + 7x_2 + 2x_3 \geq v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 5y_1 + 1y_2 \leq v, \\ 3y_1 + 7y_2 \leq v, \\ 4y_1 + 2y_2 \leq v, \\ y_1 + y_2 = 1, \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $E_i(y_1)$ — средний выигрыш игрока A при применении им i -й чистой стратегии при условии, что игрок B применил свою смешанную стратегию. Тогда можно записать

$$E_i(y_1) = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2, \quad (j = \overline{1,3}).$$

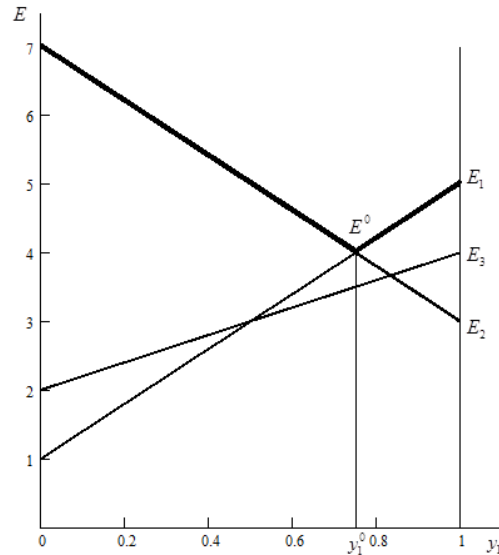
Учитывая, что $y_2 = 1 - y_1$, получаем

$$E_1(y_1) = a_{11}y_1 + a_{12}(1 - y_1) = (a_{11} - a_{12})y_1 + a_{12} = 4y_1 + 1,$$

$$E_2(y_1) = a_{21}y_1 + a_{22}(1 - y_1) = (a_{21} - a_{22})y_1 + a_{22} = -4y_1 + 7,$$

$$E_3(y_1) = a_{31}y_1 + a_{32}(1 - y_1) = (a_{31} - a_{32})y_1 + a_{32} = 2y_1 + 2.$$

Проведем линии средних выигрышей игрока A .



Цель игрока A максимизировать свой выигрыш, следовательно, находим $\max_i E_i(y_1) = E(y_1)$,

где $E(y_1)$ — верхняя граница множества ограничений изображена жирной линией.

Так как целью игрока B является минимизация своего проигрыша за счет выбора y_1 , то необходимо вычислить

$$\min_{y_1} E(y_1) = E(y_1^0) = E^0,$$

при этом цена игры

$$v = \min_{y_1} \max_i E_i(y_1) = E(y_1^0) = E^0.$$

Учитывая, что игра не имеет седловой точки, можем заменить неравенства равенствами

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = v, \\ 1x_1 + 7x_2 + 2x_3 = v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Точка E^0 образована пересечением линий E_1 и E_2 , следовательно, полагаем $x_3 = 0$, и тогда можно записать

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = v, \\ 1x_1 + 7x_2 = v, \\ x_2 = 1 - x_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y_1 + 1y_2 = v, \\ 3y_1 + 7y_2 = v, \\ y_2 = 1 - y_1. \end{cases}$$

Решая полученные системы, находим

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{3}{4}, y_2 = \frac{1}{4}, v = 4,$$

а так же помним, что $x_3 = 0$.

Таким образом, в 3-х случаях из 4-х необходимо обращаться к первой информационной системе поочередно с первым и со вторым запросами, полученный эффект будет равен 4.

Задача 3.2. Найти решение игры.

1. $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 17 & 3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix} 16 & -4 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}$
21. $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
24. $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
26. $\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$
28. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$
29. $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$
30. $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Задача 3.3. Найти решение игры.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$
21. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} 8 & -5 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
24. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$
26. $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} 4 & 9 & -2 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
28. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
29. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
30. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Задача 3.4. Найти решение игры.

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 9 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$
21. $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 0 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$
24. $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$
26. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
28. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$
29. $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -5 & -3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$
30. $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

3.5. Сведение матричных игр к линейному программированию

Рассмотрим игру $m \times n$, заданную платежной матрицей

$$\begin{matrix} & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Пусть A_i — i -я стратегия первого игрока, B_j — j -я стратегия второго игрока.

Тогда смешанная стратегия первого игрока

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1;$$

смешанная стратегия второго игрока

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}, \quad 0 \leq y_j \leq 1 \quad (j = \overline{1, n}), \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

Оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков должны удовлетворять ограничениям (v — цена игры)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v & (j = \overline{1, n}), \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ x_i \geq 0 & (i = \overline{1, m}). \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v & (i = \overline{1, m}), \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1, \\ y_j \geq 0 & (j = \overline{1, n}). \end{cases}.$$

Рассмотрим первую систему. В развернутом виде она имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v, \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v. \end{cases}$$

Разделим каждое из уравнений на $v > 0$ и обозначим

$$\frac{x_1}{v} = p_1; \quad \frac{x_2}{v} = p_2, \dots, \quad \frac{x_m}{v} = p_m.$$

Тогда можно записать

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq 1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq 1, \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq 1. \end{cases}$$

Так как $\sum_{i=1}^m x_i = 1$, то $p_1 + p_2 + \dots + p_m = \frac{1}{v}$.

Игрок A хочет сделать свой гарантированный выигрыш максимально возможным, следовательно, величина $\frac{1}{v}$ будет принимать минимальное значение.

Таким образом, задачу нахождения игры можно сформулировать следующим образом:

Определить неотрицательные величины $p_1, p_2, \dots, p_m$, если

$$\sum_{i=1}^m p_i \rightarrow \min.$$

При ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq 1 & (j = \overline{1, n}), \\ p_i \geq 0 & (i = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Рассуждая аналогично, для оптимальной смешанной стратегии второго игрока, обозначив $\frac{y_1}{v} = q_1; \quad \frac{y_2}{v} = q_2, \dots, \quad \frac{y_n}{v} = q_n$, где $q_1 + q_2 + \dots + q_n = \frac{1}{v}$, учитывая, что

т. к. второй игрок B хочет, чтобы цена игры v была наименьшей, то величина $\frac{1}{v}$, в данном случае, будет принимать максимальное значение.

Таким образом, задачу нахождения игры можно сформулировать следующим образом:

Определить неотрицательные величины $q_1, q_2, \dots, q_n$, если

$$\sum_{j=1}^n q_j \rightarrow \max.$$

При ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq 1 & (i = \overline{1, m}), \\ q_j \geq 0 & (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Полученные задачи являются двойственными друг другу.

Решив данные задачи, получим значения $p_1, p_2, \dots, p_m$ и $q_1, q_2, \dots, q_n$. Тогда смешанные стратегии игроков, определим как

$$\begin{aligned} x_i &= v \cdot p_i \quad (i = \overline{1, m}), \\ y_j &= v \cdot q_j \quad (j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Пример 3.9. Два студента поспорили о результатах сдачи экзамена. Если сумма полученных оценок четная, то второй покупает первому такое же количество шоколадок; если она нечетная, то, наоборот, первый покупает второму шоколадки.

Формализовать задачу с позиций теории игр и найти ее решение.

Решение.

Игрок A — первый студент, возможны четыре стратегии, игрок B — второй студент, возможны четыре стратегии.

A_1, B_1 — получить «2»;

A_2, B_2 — получить «3»;

A_3, B_3 — получить «4»;

A_4, B_4 — получить «5».

Тогда платежная матрица будет иметь вид

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 & -7 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 8 & -9 \\ -7 & 8 & -9 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Пусть $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ смешанные стратегии

игроков A и B , причем $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ и $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$.

Чтобы сделать все элементы платежной матрицы неотрицательными, прибавим к ним $t = 9$, получим

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 15 & 2 \\ 4 & 15 & 2 & 17 \\ 15 & 2 & 17 & 0 \\ 2 & 17 & 0 & 19 \end{pmatrix}.$$

Решим поставленную задачу теории игр, сведя ее к задаче линейного программирования.

Необходимо найти

$$\sum_{i=1}^m p_i \rightarrow \min,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq 1 & (j = \overline{1, n}), \\ x_i \geq 0 & (i = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Или

$$F = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \rightarrow \min,$$

$$13p_1 + 4p_2 + 15p_3 + 2p_4 \geq 1,$$

$$4p_1 + 15p_2 + 2p_3 + 17p_4 \geq 1,$$

$$15p_1 + 2p_2 + 17p_3 + 0p_4 \geq 1,$$

$$2p_1 + 17p_2 + 0p_3 + 19p_4 \geq 1,$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0, p_4 \geq 0.$$

Решением данной задачи является

$$p_1 \approx 0,028, p_2 \approx 0,056, p_3 \approx 0,028, p_4 = 0, F \approx 0,111.$$

Тогда,

$$v = \frac{1}{F} \approx 9, x_1 = p_1 v \approx 0,25; x_2 = p_2 v \approx 0,5, x_3 = p_3 v \approx 0,25, x_4 = p_4 v = 0.$$

Рассмотрим двойственную задачу.

Найти

$$\sum_{j=1}^n q_j \rightarrow \max,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq 1 & (i = \overline{1, m}), \\ q_j \geq 0 & (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Или

$$\Phi = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \rightarrow \max,$$

$$13q_1 + 4q_2 + 15q_3 + 2q_4 \leq 1,$$

$$4q_1 + 15q_2 + 2q_3 + 17q_4 \leq 1,$$

$$15q_1 + 2q_2 + 17q_3 + 0q_4 \leq 1,$$

$$2q_1 + 17q_2 + 0q_3 + 19q_4 \leq 1,$$

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0, q_4 \geq 0.$$

Решением данной задачи является

$$q_1 \approx 0,028, q_2 \approx 0,056, q_3 \approx 0,028, q_4 = 0, \Phi \approx 0,111.$$

Тогда,

$$v = \frac{1}{\Phi} \approx 9, y_1 = q_1 v \approx 0,25; y_2 = q_2 v \approx 0,5, y_3 = q_3 v \approx 0,25, y_4 = q_4 v = 0.$$

Решением игры являются следующие смешанные стратегии игроков

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}, S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом цена игры

$$v^* = v - 9 = 0.$$

Таким образом, в заданной игре — учись на «3» и не есть тебе шоколадок.

Решение данной прямой задачи в Mathcad имеет вид.

$$\begin{aligned} & \text{ORIGIN} := 1 \\ & A := \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 & -7 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 8 & -9 \\ -7 & 8 & -9 & 10 \end{pmatrix} \quad t := |\min(A)| \quad a := A + t \quad a = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 15 & 2 \\ 4 & 15 & 2 & 17 \\ 15 & 2 & 17 & 0 \\ 2 & 17 & 0 & 19 \end{pmatrix} \\ & f(p1, p2, p3, p4) := p1 + p2 + p3 + p4 \\ & p1 := 0 \quad p2 := 0 \quad p3 := 0 \quad p4 := 0 \\ & \text{Given} \\ & p1 \geq 0 \quad p2 \geq 0 \quad p3 \geq 0 \quad p4 \geq 0 \\ & a_{1,1} p1 + a_{2,1} p2 + a_{3,1} p3 + a_{4,1} p4 \geq 1 \\ & a_{1,2} p1 + a_{2,2} p2 + a_{3,2} p3 + a_{4,2} p4 \geq 1 \\ & a_{1,3} p1 + a_{2,3} p2 + a_{3,3} p3 + a_{4,3} p4 \geq 1 \\ & a_{1,4} p1 + a_{2,4} p2 + a_{3,4} p3 + a_{4,4} p4 \geq 1 \\ & \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \end{pmatrix} := \text{Minimize}(f, p1, p2, p3, p4) \\ & \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,028 \\ 0,056 \\ 0,028 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & f(p1, p2, p3, p4) = 0,111 \\ & x1 := \frac{p1}{f(p1, p2, p3, p4)} \quad x2 := \frac{p2}{f(p1, p2, p3, p4)} \quad x3 := \frac{p3}{f(p1, p2, p3, p4)} \quad x4 := \frac{p4}{f(p1, p2, p3, p4)} \\ & x1 = 0,25 \quad x2 = 0,5 \quad x3 = 0,25 \quad x4 = 0 \\ & v := \frac{1}{f(p1, p2, p3, p4)} - t \quad x1 + x2 + x3 + x4 = 1 \\ & v = 0 \end{aligned}$$

Решение данной двойственной задачи в Mathcad имеет вид.

$$\begin{aligned}
 & \text{ORIGIN} := 1 \\
 & A := \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 & -7 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 8 & -9 \\ -7 & 8 & -9 & 10 \end{pmatrix} \quad t := |\min(A)| \quad a := A + t \quad a = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 15 & 2 \\ 4 & 15 & 2 & 17 \\ 15 & 2 & 17 & 0 \\ 2 & 17 & 0 & 19 \end{pmatrix} \\
 & w(q1, q2, q3, q4) := q1 + q2 + q3 + q4 \\
 & q1 := 0 \quad q2 := 0 \quad q3 := 0 \quad q4 := 0 \\
 & \text{Given} \\
 & q1 \geq 0 \quad q2 \geq 0 \quad q3 \geq 0 \quad q4 \geq 0 \\
 & a_{1,1}q1 + a_{1,2}q2 + a_{1,3}q3 + a_{1,4}q4 \leq 1 \\
 & a_{2,1}q1 + a_{2,2}q2 + a_{2,3}q3 + a_{2,4}q4 \leq 1 \\
 & a_{3,1}q1 + a_{3,2}q2 + a_{3,3}q3 + a_{3,4}q4 \leq 1 \\
 & a_{4,1}q1 + a_{4,2}q2 + a_{4,3}q3 + a_{4,4}q4 \leq 1 \\
 & \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \\ q4 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(w, q1, q2, q3, q4) \\
 & \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \\ q4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.028 \\ 0.056 \\ 0.028 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & w(q1, q2, q3, q4) = 0.111 \\
 & y1 := \frac{q1}{w(q1, q2, q3, q4)} \quad y2 := \frac{q2}{w(q1, q2, q3, q4)} \quad y3 := \frac{q3}{w(q1, q2, q3, q4)} \quad y4 := \frac{q4}{w(q1, q2, q3, q4)} \\
 & y1 = 0.25 \quad y2 = 0.5 \quad y3 = 0.25 \quad y4 = 0 \\
 & y1 + y2 + y3 + y4 = 1 \\
 & v := \frac{1}{w(q1, q2, q3, q4)} - t \\
 & v = 0
 \end{aligned}$$

Задача 3.5. Найти решение игры.

1. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & -7 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -7 & 1 & 2 \\ -9 & 7 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & -3 \\ -7 & 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & 4 \\ 7 & -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 & 7 \\ 9 & -1 & 9 & 2 \\ 8 & -6 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -5 & 9 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & -4 & 3 \\ 6 & -5 & 4 & -6 \\ 5 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} -9 & 5 & -3 & 8 \\ 6 & -6 & 1 & 7 \\ 1 & -9 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 & -6 \\ -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & -5 & 8 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & -7 & 2 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -7 & 1 & 2 \\ -9 & 7 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & -3 \\ -7 & 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & 4 \\ 7 & -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \\ 9 & 0 & -9 & 5 \\ -4 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & -3 \\ -3 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 & 3 \\ -3 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 9 & -6 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -8 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & -3 \\ 7 & -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

13.

14.

15.

16.

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -8 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 7 \\ 4 & 9 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & -6 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & -2 & 8 & 6 \\ -9 & 1 & 7 & -1 \\ 7 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 & 7 \\ -7 & 0 & -6 & 0 \\ 6 & -8 & 1 & -8 \\ -3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

17.

18.

19.

20.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & -2 \\ -7 & -2 & 5 & 4 \\ 8 & -1 & 7 & -1 \\ 9 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & -7 \\ 1 & 9 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & 9 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & -9 & 4 \\ -5 & 4 & 4 & -4 \\ 5 & 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

21.

22.

23.

24.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -8 \\ -6 & 2 & 2 & -5 \\ 5 & -1 & -4 & 8 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 9 & -6 & 9 \\ 8 & -8 & 4 & 7 \\ -8 & -6 & -1 & -4 \\ 9 & 0 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 2 & -8 & 1 \\ -7 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & -4 \\ 8 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 9 & 2 & 9 \\ 0 & 9 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 8 & -8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

25.

26.

27.

28.

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \\ 8 & 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \\ 8 & 5 & -5 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & -7 & 6 \\ -5 & 5 & 7 & -9 \\ 0 & -4 & -9 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 6 \\ 8 & 9 & -7 & 6 \\ 6 & -6 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

29.

30.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ -7 & -8 & 3 & -9 \\ 6 & 6 & -3 & 8 \\ -7 & 8 & -8 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -2 \\ -8 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & -8 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6. Игры с «природой»

Рассмотренные ранее игры предусматривают принятие решения одним из игроков в условиях неопределенности, обусловленной не известными заранее способами действий другого игрока. При этом оба игрока принимают осознанные решения по уменьшению выигрыша противника. В данной антагонистической ситуации интересы игроков диаметрально противоположны.

Существуют ситуации, когда один из игроков не сознательно противодействует другому. Например, могут быть заранее неизвестны: погода в некотором районе, курсы валют, политика государства и т. д. Во всех такого рода случаях неопределенность зависит не от сознательно противодействующего нам игрока, а от не известной нам объективной действительности, которую будем называть **природой**. «Природные» неопределенные факторы относятся к факторам стохастической природы. Поведение природы неизвестно и не содержит элемента враждебности и сознательного противодействия достижению нашей цели. Такие игры называются **играми с природой**.

В случае игр с природой игрок A (мы) может располагать некоторой априорной информацией о вероятностях возможных состояний природы, т. е. нам **известны вероятности** «применения» природой своих стратегий.

Приступая к решению игры целесообразно упростить ее, уменьшив размер платежной матрицы, отбросив заведомо невыгодные стратегии. **Внимание:** можно убирать невыгодные стратегии только первого игрока. В случае игры с природой отбрасывать невыгодные стратегии природы нельзя, так как она не выбирает свои стратегии (состояния), тем более так, чтобы как можно больше нам навредить (обыграть).

Рассмотрим игру с природой $m \times n$, заданную матрицей

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Риском r_{ij} игрока A при использовании своих стратегий в условиях Π_j называется разность между максимальным выигрышем, который он мог бы получить, если бы достоверно знал, что имеет место состояние Π_j , и выигрышем при использовании стратегии A_i в условиях Π_j , т. е.

$$r_{ij} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} - a_{ij}.$$

Пример. Дана платежная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 5 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Построить матрицу рисков.

Решение.

Определим максимальные элементы каждого столбца: $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 8$, $\beta_3 = 10$.

Построим матрицу рисков, элементы которой найдем как $r_{ij} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} - a_{ij}$.

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выигрыши первого игрока при применении им второй стратегии, а природой первой и третьей равны $a_{21} = a_{23} = 5$. При этом, если природа использует первую стратегию, то максимальный выигрыш первого игрока составит 6, но в случае применения первым игроком второй стратегии выигрыш будет равен 5, т. е. 5 из 6. Если природа использует третью стратегию, то максимальный выигрыш первого игрока составит 10, но в случае применения первым игроком второй стратегии выигрыш будет равен 5, т. е. 5 из 10. Следовательно, можно сделать вывод, что выигрыши a_{21} и a_{23} не равноценны. Данный факт показывает матрица рисков. Так для получения выигрыша равного 5 при применении первым игроком второй стратегии в случае, когда природа использует первую стратегию $r_{21} = 1$ и он меньше, чем при применении природой третьей стратегии $r_{23} = 5$.

Таким образом, матрица рисков зачастую дает более наглядную картину неопределенной ситуации, чем платежная матрица (матрица выигрышей).

Рассмотрим подходы для нахождения решения в играх с природой.

Критерии нахождения оптимального решения в условиях полной неопределенности (принятие решений в играх с природой).

1. **Критерий максимакса.** С помощью данного критерия определяется стратегия, максимизирующая максимальные выигрыши для каждого состояния природы:

$$M = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij}.$$

Критерий крайнего оптимизма.

2. **Максиминный критерий Вальда.** При максиминном критерии Вальда оптимальной считается та стратегия, которая обеспечивает первому игроку максимум минимального выигрыша:

$$W = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}.$$

Критерий крайнего пессимизма. Данный критерий гарантированного результата, когда необходимо обеспечить успех при любых возможных условиях (застраховаться от неожиданных проигрышей).

3. **Критерий минимаксного риска Сэвиджа.** Критерий аналогичен критерию Вальда, но первый игрок руководствуется матрицей рисков. Оптимальной считается та стратегия, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации:

$$S = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij}.$$

Критерий крайнего пессимизма.

4. **Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица.** Данный критерий рекомендует при выборе решения не руководствоваться ни крайним оптимизмом, ни крайним пессимизмом:

$$G = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\alpha \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} + (1 - \alpha) \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \right),$$

где α — степень пессимизма ($0 \leq \alpha \leq 1$).

Если $\alpha = 0$, получаем максимаксный критерий крайнего оптимизма. Если $\alpha = 1$ — пессимистический максиминный критерий Вальда. Значение α выбирает пер-

вый игрок, в зависимости от обстоятельств игры. Если нет никаких предпочтений, то полагают $\alpha = 0,5$.

Для матрицы рисков данный критерий имеет вид:

$$G = \min_{1 \leq i \leq m} \left(\alpha \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} + (1 - \alpha) \min_{1 \leq j \leq n} r_{ij} \right).$$

Если $\alpha = 0$ выбор стратегии первым игроком осуществляется по условию наименьшего из всех возможных рисков. Если $\alpha = 1$ — критерий минимаксного риска Сэвиджа.

5. Критерий Лапласа. При неизвестных вероятностях состояний «природы» можно принять, что они равновероятны и выбор решения первым игроком определяется условием:

$$L = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right).$$

При нахождении решения в условиях неопределенности необходимо применить все пять критериев и по принципу «максимального правдоподобия» (какая стратегия будет оптимальной в большинстве случаев) принимать решение.

Пример 3.10. Определить оптимальные стратегии в условиях неопределенности игры, заданной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

с помощью критериев максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица ($\alpha = 0,2$), Лапласа.

Решение.

1. Критерий максимакса.

$M = \max_{1 \leq i \leq 3} \max_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} = 8$. Данный результат соответствует первой стратегии первого игрока — A_1 .

2. Максиминный критерий Вальда.

$$W = \max_{1 \leq i \leq 3} \min_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} = \max_{1 \leq i \leq 3} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 2. \text{ Результат соответствует стратегии } A_2. \text{ остальные}$$

стратегии содержат отрицательные значения, что говорит о получении убытков.

3. Критерий минимаксного риска Сэвиджа.

Предположим, что реализуется одна из гипотез о «поведении природы». Потери, выбранные неправильным выбором стратегии, определяются разностью между максимальным элементом в столбце платежной матрицы и элементом, выбранной стратегии. Элементы полученной матрицы (матрицы рисков) показывают величину возможного «сожаления» о том, что выбор остановился на конкретной стратегии, при условии, что «поведение природы» было бы известно. Оптимальной является стратегия, уменьшающая максимальный риск. При многократном взаимодействии можно использовать матрицу рисков совместно с информацией о вероятности стратегий природы (критерий Байеса для матрицы рисков в игре с «природой»). Для каждой стратегии активного игрока рассчитывается математическое ожидание величины риска, оптимальной призна-

ется стратегия, которой соответствует наименьшее математическое ожидание этой величины.

Построим матрицу рисков по правилу $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$, получим

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 3-0 & 7+3 & 4-4 & 8-8 \\ 3-2 & 7-7 & 4-3 & 8-2 \\ 3-3 & 7-5 & 4+5 & 8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$S = \min_{1 \leq i \leq 3} \max_{1 \leq j \leq 4} r_{ij} = \min_{1 \leq i \leq 3} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 6, \text{ что соответствует стратегии } A_2. \text{ Заметим, что}$$

стратегия A_1 содержит два нуля, т. е. дважды может быть названа наилучшей, но в ней же содержится наибольший риск $r_{12} = 10$.

4. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица.

$$G = \max_{1 \leq i \leq 3} \left(\alpha \min_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} + (1 - \alpha) \max_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} \right),$$

где α — степень пессимизма ($0 \leq \alpha \leq 1$).

$$\text{Учитывая, что } \alpha = 0,2, \min_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \max_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} G &= \max_{1 \leq i \leq 3} \left(0,2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + (1 - 0,2) \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \max_{1 \leq i \leq 3} \left(0,2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + 0,8 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \max_{1 \leq i \leq 3} \left(\begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,64 \\ 0,56 \\ 0,4 \end{pmatrix} \right) = \max_{1 \leq i \leq 3} \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,96 \\ 0,3 \end{pmatrix} = 0,96, \end{aligned}$$

что соответствует стратегии A_2 .

5. Критерий Лапласа.

$$L = \max_{1 \leq i \leq 3} \left(\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 a_{ij} \right) = \max_{1 \leq i \leq 3} \begin{pmatrix} 9/4 \\ 14/4 \\ 4/4 \end{pmatrix} = \frac{14}{4}, \text{ что соответствует стратегии } A_2.$$

Вывод: один раз выбрали стратегию A_1 и четыре раза — стратегию A_2 , следовательно, целесообразно выбрать стратегию A_2 .

Задача 3.6. Найти решение игры с помощью критериев максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица ($\alpha = 0,3$), Лапласа.

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 & -2 \\ -2 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 7 \\ -2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & -5 & 3 & -2 \\ 9 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\ 3. \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -3 \\ 6 & 3 & 9 & -2 \\ 5 & -4 & -5 & -4 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} & 4. \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 7 & 1 \\ 5 & -6 & 9 & 7 \\ 9 & -5 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5. \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & -4 & 9 \\ -1 & -5 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} & 6. \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 & 0 \\ -5 & -2 & 8 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & -3 \\ 6 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \\ 7. \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 9 & -7 & 3 & 3 \end{pmatrix} & 8. \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 7 & 8 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 9. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -3 \\ -4 & 0 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} & 10. \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 & -2 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \\ -5 & 3 & -4 & 2 \\ 6 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ 11. \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 4 \\ 6 & -3 & 9 & 9 \\ 4 & 0 & -4 & 6 \\ -2 & 5 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -2 & 1 \end{pmatrix} & 12. \begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 13. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -3 \\ -1 & 8 & 6 & 3 \\ -1 & 6 & 9 & 1 \\ 4 & 7 & -5 & 6 \\ -5 & 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} & 14. \begin{pmatrix} 9 & -1 & 7 & 6 \\ 7 & -2 & -5 & 2 \\ -5 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 3 & -5 \\ -1 & 6 & 9 & -5 \end{pmatrix} \\ 15. \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -4 \\ -5 & -3 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 6 & 9 \\ 2 & -2 & 5 & 8 \end{pmatrix} & 16. \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ 8 & -1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 17. \begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 & 4 \\ 9 & -5 & 8 & 7 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \\ 9 & -4 & -3 & 9 \\ -1 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} & 18. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 & 6 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 8 & 5 \\ -5 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \\ 19. \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 & -2 \\ 7 & -5 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 4 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} & 20. \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \\ -5 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

21.

22.

23.

24.

$$\begin{array}{llll}
\begin{pmatrix} -5 & 6 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & -5 & -3 \\ 9 & -4 & 6 & 9 \\ 7 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 6 \\ -5 & 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & -5 \\ 8 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & 8 & 7 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \\
25. & 26. & 27. & 28. \\
\begin{pmatrix} -6 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 9 \\ 2 & -3 & -4 & -2 \\ 5 & -5 & 4 & -3 \\ -6 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & -4 \\ 6 & 3 & -9 & 8 \\ 8 & -2 & 1 & 9 \\ 9 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & -9 \\ 1 & 5 & -5 & -2 \\ -2 & 2 & -5 & -3 \\ 7 & 7 & 1 & -3 \\ 6 & -8 & 5 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \\ -5 & -3 & 1 & 8 \\ 6 & -1 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\
29. & 30. & & \\
\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & -4 \\ 7 & 9 & 0 & -4 \\ -1 & 6 & 7 & -5 \\ -1 & -3 & -5 & 3 \\ -1 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8 & -1 & 8 & 9 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & -1 & -3 \\ -5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} & &
\end{array}$$

3.7. Биматричные игры

Рассмотрим конечные игры с **ненулевой суммой**, т. е. такие игры, в которых выигрыши игроков при выборе своих стратегий не являются прямо противоположными. В таких играх интересы игроков хотя и не совпадают, но уже не обязательно являются противоположными.

Пример. «Семейный спор». Муж (игрок A) и жена (игрок B) выбирают одно из двух вечерних развлечений: футбол (A_1 и B_1) или балет (A_2 и B_2). Как правило, мужчина предпочитает футбол, а женщина — балет; однако обоим важнее быть вместе, чем отдыхать отдельно. Такая игра может быть задана, например, матрицами

$$\begin{array}{cc}
& \begin{matrix} B_1 & B_2 \end{matrix} \\
\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} (2;1) & (-1;-1) \\ (-1;-1) & (1;2) \end{pmatrix}
\end{array} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если игрок A (муж) и игрок B (жена) выбирают футбол и будут смотреть его вместе, то A в выигрыше 2, а B — 1. Если A выбирает стратегию A_2 (балет), а B — стратегию A_1 (футбол), причем очевидно, что данные развлечения им не нравятся, и отдыхать они будут раздельно, то оба будут в проигрыше в размере 1. Остальные элементы матрицы описываются аналогично.

Как видно из примера, в данных играх оба игрока пытаются максимизировать свой выигрыш, в отличие от матричных, где первый игрок пытается максимизировать свой выигрыш, а второй — минимизировать свой проигрыш.

Такие игры называются **играми с произвольной суммой**; как частный случай они содержат игры с нулевой суммой.

Тогда, конечную игру с произвольной суммой можно описать парой $(m \times n)$ -матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, или $(m \times n)$ -матрицей (A, B) , каждый элемент которой есть упорядоченная пара (a_{ij}, b_{ij}) . Элементы a_{ij} и b_{ij} являются выигрышами игроков A и B , если они выберут соответственно свои i -ю и j -ю чистые стратегии. Такие игры называются **биматричными**.

Естественно предположить, что в данном случае игроки могут договориться между собой для получения максимального выигрыша. Поэтому будем различать:

1) **Некооперативные (бескоалиционные)** игры, в которых запрещены любые соглашения между игроками.

2) **Кооперативные** игры — соглашения (договоренности) возможны.

Далее будем рассматривать бескоалиционные игры.

Пара стратегий (A_i, B_j) будет **ситуацией равновесия в чистых стратегиях в биматричной игре**, если выполняются неравенства:

$$\begin{cases} a_{ij} \geq a_{kj}, & \forall k = \overline{1, m}; \\ b_{ij} \geq b_{il}, & \forall l = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Т. е. необходимо найти наибольший элемент a_{ij} в j -м столбце матрицы A и наибольший элемент b_{ij} в i -й строке матрицы B . Если их местоположение совпадает, то данные стратегии будут ситуацией равновесия и выигрыши обоих игроков соответствуют полученным a_{ij} и b_{ij} . Следует отметить, что ситуация равновесия может быть не одна.

Если решения биматричной игры в чистых стратегиях нет, решение игры будем искать в смешанных стратегиях.

Пусть полный набор вероятностей $x = (x_1, \dots, x_m)$ применения игроком A своих чистых стратегий смешанной стратегией игрока A , и $y = (y_1, \dots, y_n)$ — смешанной стратегией игрока B , причем

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1 \text{ и } \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

Средние выигрыши первого и второго игроков соответственно равны

$$H_A(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j,$$

$$H_B(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j.$$

Ситуация равновесия для биматричной игры составляет пару (x, y) таких **смешанных стратегий** первого и второго игроков, которые удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j & (i = 1, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j & (j = 1, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1. \end{cases}$$

Другой способ решения.

Решение биматричной игры также можно найти следующим способом. Если:

- 1) выражения $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$ и $b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$ не равны нулю;
- 2) решение игры седловая точка (не интервал);
- 3) решение не лежит в крайних точках, т. е. x и y не равны 0 и 1,

то решение биматричной игры можно найти как

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} H_A(x, y) &= 0, \\ \frac{d}{dy} H_B(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Если решение найти не удалось, то выполняется одно или несколько условий-ограничений.

Приведем еще один способ решения.

Решить биматричную игру можно с помощью матриц.

Пусть имеем биматричную игру $(m \times n)$ и матрицы A и B невырожденные. Если игра имеет вполне смешанную стратегию равновесия, то она единственная и вычисляется по формулам

$$x = v_2 u B^{-1}, \quad y = v_1 A^{-1} u,$$

где

$$v_1 = \frac{1}{u A^{-1} u}, \quad v_2 = \frac{1}{u B^{-1} u}, \quad u = (1, 1, \dots, 1).$$

Обратно, если для векторов $x, y \in R^m$, справедливо $x \geq 0, y \geq 0$, то пара (x, y) образует ситуацию равновесия в смешанных стратегиях в бескоалиционной игре с вектором равновесных выигрышей (v_1, v_2) .

Найти решение данным способом не получится, если решение лежит в крайних точках, т. е. x и y равны 0 и 1, а также, если определители матриц равны нулю.

Пример 3.11. Правонарушитель может совершить преступление, а может и не совершать. Сотрудник полиции может находиться на рабочем месте или в отпуске. Если правонарушитель совершил преступление и сотрудник полиции находится на рабочем месте, то сотрудник получит премию в 4 ед., а преступник потратит на адвоката 3 ед. При совершении преступления и нахождении сотрудника в отпуске правонарушитель получит «прибыль» в размере 7 ед., а сотрудник — не получит премию в размере 2 ед. за плохую профилактику. Если сотрудник на рабочем месте и не допустил совершения преступления, то ему выплатят премию в размере 5 ед., а правонарушитель не потратит средства на подготовку к преступлению в размере 3 ед. Если преступник не будет совершать преступление, а сотрудник в отпуске, то первый будет в выигрыше 2 ед., а сотруднику прибавят премию в размере 3 ед.

Формализовать задачу с позиций теории игр и найти ее решение.

Решение.

Правонарушитель (игрок A) имеет две стратегии:

A_1 — совершить правонарушение;

A_2 — не совершить правонарушение.

Сотрудник полиции (игрок B) имеет также две стратегии:

B_1 — находиться на рабочем месте;

B_2 — находиться в отпуске.

Тогда задачу можно представить как биматричную игру с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} (-3;4) & (7;-2) \\ (3;5) & (2;3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение биматричной игры в чистых стратегиях. Отметим максимальные элементы матрицы A в каждом столбце, матрицы B — в каждой строке

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7^* \\ 3^* & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4^* & -2 \\ 5^* & 3 \end{pmatrix}.$$

Расположение некоторых выбранных элементов в исходной матрице совпадает. Таким образом, решением (ситуацией равновесия в чистых стратегиях) биматричной игры будет пара стратегий (A_2, B_1) ; при этом выигрыш игрока A составит $v_A = 3$ ед., игрока B — $v_B = 5$ ед.

Пример 3.12. Найти решение биматричной игры в чистых стратегиях.

$$\begin{pmatrix} (7;5) & (1;-2) & (-2;1) \\ (6;-3) & (5;-2) & (8;1) \\ (3;-3) & (9;7) & (4;6) \end{pmatrix}.$$

Решение. Отметим максимальные элементы матрицы A в каждом столбце, матрицы B — в каждой строке.

$$\begin{pmatrix} (7;5) & (1;-2) & (-2;1) \\ (6;-3) & (5;-2) & (8;1) \\ (3;-3) & (9;7) & (4;6) \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 7^* & 1 & -2 \\ 6 & 5 & 8^* \\ 3 & 9^* & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5^* & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 1^* \\ -3 & 7^* & 6 \end{pmatrix}$$

Расположение некоторых выбранных элементов в исходной матрице совпадает. Решением (ситуацией равновесия в чистых стратегиях) биматричной игры будут пары стратегий с соответствующими выигрышами игроков:

- 1) (A_1, B_1) — $v_A = 7, v_B = 5$;
- 2) (A_2, B_3) — $v_A = 8, v_B = 1$;
- 1) (A_3, B_2) — $v_A = 9, v_B = 7$.

Пример 3.13. Найти решение игры

$$\begin{pmatrix} (4;-3) & (-2;7) \\ (-1;3) & (5;-2) \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Найдем решение (если есть) в чистых стратегиях. Отметим максимальные элементы матрицы A в каждом столбце, матрицы B — в каждой строке.

$$\begin{pmatrix} (4;-3) & (-2;7) \\ (-1;3) & (5;-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 4^* & -2 \\ -1 & 5^* \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 7^* \\ 3^* & -2 \end{pmatrix}.$$

Расположение выбранных элементов в исходной матрице не совпадает, следовательно, решения в чистых стратегиях нет, а значит, решение должно лежать в области смешенных стратегий.

2. Пусть вероятности выбора своих стратегий для игрока A $(x, 1-x)$, $0 \leq x \leq 1$; игрока B — $(y, 1-y)$, $0 \leq y \leq 1$.

Средний выигрыш игрока A определим как

$$\begin{aligned}
 H_A(x, y) &= 4xy - 2x(1-y) - 1(1-x)y + 5(1-x)(1-y) = \\
 &= 4xy - 2x + 2xy - y + xy + 5 - 5x - 5y + 5xy = \\
 &= 12xy - 7x - 6y + 5.
 \end{aligned}$$

Ситуация равновесия для игрока A имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}y + a_{12}(1-y) \leq H_A(x, y); \\ a_{21}y + a_{22}(1-y) \leq H_A(x, y). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 2(1-y) = 6y - 2 \leq H_A(x, y); \\ -y + 5(1-y) = 5 - 6y \leq H_A(x, y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y - 2 \leq 12xy - 7x - 6y + 5; \\ 5 - 6y \leq 12xy - 7x - 6y + 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12xy + 7x + 12y - 7 \leq 0; \\ -12xy + 7x \leq 0. \end{cases}$$

Решим последнюю систему неравенств, учитывая, что $0 \leq x \leq 1$. Рассмотрим 3 случая:

1) Если $x = 0$, т. е. $(0, y)$, то второе неравенство системы $-12xy + 7x \leq 0$ верно при любом y , а первое примет вид

$$12y - 7 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 7/12.$$

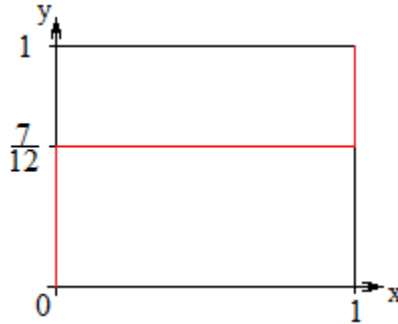
2) Если $x = 1$, т. е. $(1, y)$, то первое неравенство системы $-12xy + 7x + 12y - 7 \leq 0$ верно при любом y , а второе примет вид

$$-12y + 7 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 7/12.$$

3) Если $0 < x < 1$, то разделим первое неравенство системы на $(1-x)$, а второе на $-x$:

$$\begin{array}{ll}
 -12xy + 7x + 12y - 7 \leq 0 & -12xy + 7x \leq 0 \mid \div x \\
 12y(1-x) - 7(1-x) \leq 0 \mid \div (1-x) & -12y + 7 \leq 0 \\
 12y - 7 \leq 0 & y \geq 7/12. \\
 y \leq 7/12. &
 \end{array}$$

Т. е., учитывая ограничения $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$, если $x = 0$, то $0 \leq y \leq 7/12$; если $x = 1$ — $7/12 \leq y \leq 1$; если $0 < x < 1$ — $y = 7/12$.



Средний выигрыш игрока B определим как

$$\begin{aligned}
 H_B(x, y) &= -3xy + 7x(1-y) + 3(1-x)y - 2(1-x)(1-y) = \\
 &= -3xy + 7x - 7xy + 3y - 3xy - 2 + 2x + 2y - 2xy = \\
 &= -15xy + 9x + 5y - 2.
 \end{aligned}$$

Ситуация равновесия для игрока B имеет вид

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{21}(1-x) \leq H_B(x, y); \\ b_{12}x + b_{22}(1-x) \leq H_B(x, y). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3(1-x) = -6x + 3 \leq H_B(x, y); \\ 7x - 2(1-x) = 9x - 2 \leq H_B(x, y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 3 \leq -15xy + 9x + 5y - 2; \\ 9x - 2 \leq -15xy + 9x + 5y - 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15xy - 15x - 5y + 5 \leq 0; \\ 15xy - 5y \leq 0. \end{cases}$$

Решим последнюю систему неравенств, учитывая, что $0 \leq y \leq 1$. Рассмотрим 3 случая:

1) Если $y = 0$, т. е. $(x, 0)$, то второе неравенство системы $15xy - 5y \leq 0$ верно при любом x , а первое примет вид

$$-15x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/3.$$

2) Если $y = 1$, т. е. $(x, 1)$, то первое неравенство системы $15xy - 15x - 5y + 5 \leq 0$ верно при любом y , а второе примет вид

$$15x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1/3.$$

3) Если $0 < y < 1$, то разделим первое неравенство системы на $(1 - y)$, а второе на $-y$:

$$15xy - 15x - 5y + 5 \leq 0$$

$$-15x(1 - y) + 5(1 - y) \leq 0 \mid \div (1 - y)$$

$$-15x + 5 \leq 0$$

$$x \geq 1/3.$$

$$15xy - 5y \leq 0 \mid \div y$$

$$15x \leq 5$$

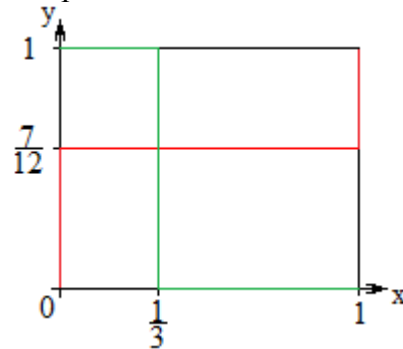
$$y \leq 1/3.$$

Т. е., учитывая ограничения $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$, если $y = 0$, то $1/3 \leq x \leq 1$; если $y = 1$ — $0 \leq x \leq 1/3$; если $0 < x < 1$ — $x = 1/3$.

Таким образом, решением игры является точка пересечения множеств M и N .

$$M : \begin{cases} (0, y), & \text{где } 0 \leq y \leq 7/12; \\ (1, y), & \text{где } 7/12 \leq y \leq 1; \\ (x, 7/12), & \text{где } 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$N : \begin{cases} (x, 0), & \text{где } 1/3 \leq x \leq 1; \\ (x, 1), & \text{где } 0 \leq x \leq 1/3; \\ (1/3, y), & \text{где } 0 < y < 1. \end{cases}$$



Точка пересечения множеств M и N имеет координаты $(1/3, 7/12)$.

Сделаем проверку. Подставим решение в систему неравенств.

$$\begin{cases} -12xy + 7x + 12y - 7 \leq 0; \\ -12xy + 7x \leq 0; \\ 15xy - 15x - 5y + 5 \leq 0; \\ 15xy - 5y \leq 0; \\ 0 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 0; \\ 0 \leq 0; \\ 0 \leq 0; \\ 0 \leq 0; \\ 0 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Найденное решение $x = 1/3$ и $y = 7/12$ удовлетворяет каждому неравенству системы.

Таким образом, игрок A должен использовать свою первую стратегию с вероятностью $x = 1/3$, а вторую — с вероятностью $(1 - x) = 2/3$; игрок B должен применять свою первую стратегию с вероятностью $y = 7/12$, а вторую — с вероятностью $(1 - y) = 5/12$. Т. е. в случае проведения 12 игр игрок A должен 4 раза использовать первую стратегию, а игрок B должен 7 раз применить первую стратегию для получения максимальной выгоды.

Определим средние выигрыши для игроков A и B .

$$H_A(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} - 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{12} + 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{3}{2},$$

$$H_B(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j = -3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} + 7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{12} - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{12} = 1.$$

Примечание. Деление неравенств на $(1-x) > 0$ и $(1-y) > 0$ не меняет знак неравенств. Если делить на $(x-1) < 0$ и $(y-1) < 0$, то знак неравенств изменится на противоположный.

Решение в Mathcad.

ORIGIN := 1

$$a := \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$x := 0$

$y := 0$

Given

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\begin{aligned} a_{1,1} \cdot y + a_{1,2} \cdot (1-y) - [a_{1,1} \cdot x \cdot y + a_{1,2} \cdot x \cdot (1-y) + a_{2,1} \cdot (1-x) \cdot y + a_{2,2} \cdot (1-x) \cdot (1-y)] &\leq 0 \\ a_{2,1} \cdot y + a_{2,2} \cdot (1-y) - [a_{1,1} \cdot x \cdot y + a_{1,2} \cdot x \cdot (1-y) + a_{2,1} \cdot (1-x) \cdot y + a_{2,2} \cdot (1-x) \cdot (1-y)] &\leq 0 \\ b_{1,1} \cdot x + b_{1,2} \cdot (1-x) - [b_{1,1} \cdot x \cdot y + b_{1,2} \cdot x \cdot (1-y) + b_{2,1} \cdot (1-x) \cdot y + b_{2,2} \cdot (1-x) \cdot (1-y)] &\leq 0 \\ b_{1,2} \cdot x + b_{2,2} \cdot (1-x) - [b_{1,1} \cdot x \cdot y + b_{1,2} \cdot x \cdot (1-y) + b_{2,1} \cdot (1-x) \cdot y + b_{2,2} \cdot (1-x) \cdot (1-y)] &\leq 0 \end{aligned}$$

$c := \text{Find}(x, y)$

$$c = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.583 \end{pmatrix}$$

Найдем решение игры следующим способом.

$$\frac{d}{dx} H_A(x, y) = \frac{d}{dx} (12xy - 7x - 6y + 5) = 12y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{12},$$

$$\frac{d}{dy} H_B(x, y) = \frac{d}{dy} (-15xy + 9x + 5y - 2) = -15x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Еще один способ решения.

$$a := \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$v1 := \frac{1}{(1 \ 1) \cdot a^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad v2 := \frac{1}{(1 \ 1) \cdot b^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$x := |v2| \cdot (1 \ 1) \cdot b^{-1} \quad y := |v1| \cdot a^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad y \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

Пример 3.14. Найти решение игры

$$\begin{pmatrix} (-5; -3) & (-2; 7) \\ (-1; 3) & (5; -2) \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Найдем решение (если есть) в чистых стратегиях. Отметим максимальные элементы матрицы A в каждом столбце, матрицы B — в каждой строке.

$$\begin{pmatrix} (-5; -3) & (-2; 7) \\ (-1; 3) & (5; -2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -1^* & 5^* \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 7^* \\ 3^* & -2 \end{pmatrix}.$$

Расположение выбранных элементов в исходной матрице не совпадает, следовательно, решения в чистых стратегиях нет, а значит, решение должно лежать в области смешенных стратегий.

2. Пусть вероятности выбора своих стратегий для игрока A $(x, 1-x)$, $0 \leq x \leq 1$; игрока B — $(y, 1-y)$, $0 \leq y \leq 1$.

Средний выигрыш игрока A определим как

$$\begin{aligned} H_A(x, y) &= -5xy - 2x(1-y) - 1(1-x)y + 5(1-x)(1-y) = \\ &= -5xy - 2x + 2xy - y + xy + 5 - 5x - 5y + 5xy = \\ &= 3xy - 7x - 6y + 5. \end{aligned}$$

Ситуация равновесия для игрока A имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}y + a_{12}(1-y) \leq H_A(x, y); \\ a_{21}y + a_{22}(1-y) \leq H_A(x, y). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3xy + 7x + 3y - 7 \leq 0; \\ -3xy + 7x \leq 0. \end{cases}$$

Решим последнюю систему неравенств, учитывая, что $0 \leq x \leq 1$. Рассмотрим 3 случая:

1) Если $x = 0$, т. е. $(0, y)$, то второе неравенство системы $-3xy + 7x \leq 0$ верно при любом y , а первое примет вид

$$3y - 7 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 7/3.$$

Несмотря на то, что $7/3 > 1$ (y — вероятность), $y \leq 7/3$ не противоречит условию $0 \leq y \leq 1$.

2) Если $x = 1$, т. е. $(1, y)$, то первое неравенство системы $-3xy + 7x + 3y - 7 \leq 0$ верно при любом y , а второе примет вид

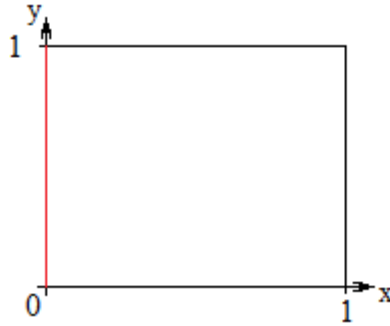
$$-3y + 7 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 7/3, \text{ что противоречит ограничению } 0 \leq y \leq 1.$$

3) Если $0 < x < 1$, то разделим первое неравенство системы на $(1-x)$, а второе на — x :

$$\begin{array}{ll} -3xy + 7x + 3y - 7 \leq 0 & -3xy + 7x \leq 0 \mid \div x \\ 3y(1-x) - 7(1-x) \leq 0 \mid \div (1-x) & -3y + 7 \leq 0 \\ 3y - 7 \leq 0 & y \geq 7/3. \\ y \leq 7/3. & \end{array}$$

Здесь, также, $y \geq 7/3$ противоречит ограничению $0 \leq y \leq 1$.

Таким образом, учитывая ограничения $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$, если $x = 0$, то $0 \leq y \leq 1$.



Средний выигрыш игрока B определим как

$$\begin{aligned} H_B(x, y) &= -3xy + 7x(1-y) + 3(1-x)y - 2(1-x)(1-y) = \\ &= -3xy + 7x - 7xy + 3y - 3xy - 2 + 2x + 2y - 2xy = \\ &= -15xy + 9x + 5y - 2. \end{aligned}$$

Ситуация равновесия для игрока B имеет вид

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{21}(1-x) \leq H_B(x, y); \\ b_{12}x + b_{22}(1-x) \leq H_B(x, y). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15xy - 15x - 5y + 5 \leq 0; \\ 15xy - 5y \leq 0. \end{cases}$$

Решим последнюю систему неравенств, учитывая, что $0 \leq y \leq 1$. Рассмотрим 3 случая:

1) Если $y = 0$, т. е. $(x, 0)$, то второе неравенство системы $15xy - 5y \leq 0$ верно при любом x , а первое примет вид

$$-15x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/3.$$

2) Если $y = 1$, т. е. $(x, 1)$, то первое неравенство системы $15xy - 15x - 5y + 5 \leq 0$ верно при любом y , а второе примет вид

$$15x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1/3.$$

3) Если $0 < y < 1$, то разделим первое неравенство системы на $(1-y)$, а второе на $-y$:

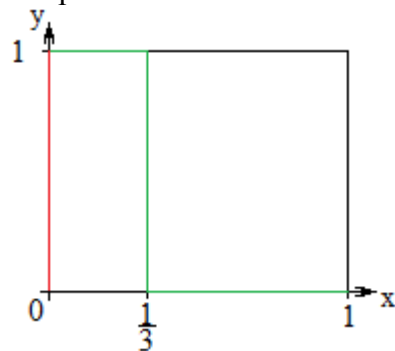
$$\begin{array}{ll} 15xy - 15x - 5y + 5 \leq 0 & 15xy - 5y \leq 0 \mid \div y \\ -15x(1-y) + 5(1-y) \leq 0 \mid \div (1-y) & 15x \leq 5 \\ -15x + 5 \leq 0 & y \leq 1/3. \\ x \geq 1/3. & \end{array}$$

Т. е., учитывая ограничения $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$, если $y = 0$, то $1/3 \leq x \leq 1$; если $y = 1$ — $0 \leq x \leq 1/3$; если $0 < y < 1$ — $x = 1/3$.

Таким образом, решением игры является точка пересечения множеств M и N .

$$M : \{(0, y), \text{ где } 0 \leq y \leq 1\}.$$

$$N : \begin{cases} (x, 0), & \text{где } 1/3 \leq x \leq 1; \\ (x, 1), & \text{где } 0 \leq x \leq 1/3; \\ (1/3, y), & \text{где } 0 < y < 1. \end{cases}$$



Точка пересечения множеств M и N имеет координаты $(0, 1)$.

Сделаем проверку. Подставим решение в систему неравенств.

$$\begin{cases} -3xy + 7x + 3y - 7 \leq 0; \\ -3xy + 7x \leq 0; \\ 15xy - 15x - 5y + 5 \leq 0; \\ 15xy - 5y \leq 0; \\ 0 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 7/3; \\ 0 \leq 0; \\ y \geq 1; \\ -5 \leq 0; \\ 0 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Найденное решение $x = 0$ и $y = 1$ удовлетворяет каждому неравенству системы.

Таким образом, игрок A должен использовать свою первую стратегию с вероятностью $x = 0$, а вторую — с вероятностью $(1 - x) = 1$; игрок B должен применять свою первую стратегию с вероятностью $y = 1$, а вторую — с вероятностью $(1 - y) = 0$. Т. е. игрок A должен постоянно использовать вторую стратегию, а игрок B должен постоянно применять первую стратегию для получения максимальной выгоды.

Определим средние выигрыши для игроков A и B .

$$H_A(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = -5 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 0 = -1,$$

$$H_B(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j = -3 \cdot 0 \cdot 1 + 7 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 3.$$

Решение в Mathcad.

ORIGIN := 1

$$a := \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$x := 0$

$y := 0$

Given

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$a_{1,1} \cdot y + a_{1,2} \cdot (1 - y) - [a_{1,1} \cdot x \cdot y + a_{1,2} \cdot x \cdot (1 - y) + a_{2,1} \cdot (1 - x) \cdot y + a_{2,2} \cdot (1 - x) \cdot (1 - y)] \leq 0$$

$$a_{2,1} \cdot y + a_{2,2} \cdot (1 - y) - [a_{1,1} \cdot x \cdot y + a_{1,2} \cdot x \cdot (1 - y) + a_{2,1} \cdot (1 - x) \cdot y + a_{2,2} \cdot (1 - x) \cdot (1 - y)] \leq 0$$

$$b_{1,1} \cdot x + b_{1,2} \cdot (1 - x) - [b_{1,1} \cdot x \cdot y + b_{1,2} \cdot x \cdot (1 - y) + b_{2,1} \cdot (1 - x) \cdot y + b_{2,2} \cdot (1 - x) \cdot (1 - y)] \leq 0$$

$$b_{1,2} \cdot x + b_{2,2} \cdot (1 - x) - [b_{1,1} \cdot x \cdot y + b_{1,2} \cdot x \cdot (1 - y) + b_{2,1} \cdot (1 - x) \cdot y + b_{2,2} \cdot (1 - x) \cdot (1 - y)] \leq 0$$

$c := \text{Find}(x, y)$

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем решение игры следующим способом.

$$\frac{d}{dx} H_A(x, y) = \frac{d}{dx} (3xy - 7x - 6y + 5) = 3y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{3} \notin [0; 1],$$

$$\frac{d}{dy} H_B(x, y) = \frac{d}{dy} (-15xy + 9x + 5y - 2) = -15x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Использовать данный способ не удалось, т. к. решением игры является точка $x = 0$, $y = 1$.

Представленный ниже способ решения также не дает результата.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &:= \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} & \mathbf{b} &:= \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\
 v1 &:= \frac{1}{(1 \ 1) \cdot \mathbf{a}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & v2 &:= \frac{1}{(1 \ 1) \cdot \mathbf{b}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
 x &:= |v2| \cdot (1 \ 1) \cdot \mathbf{b}^{-1} & y &:= |v1| \cdot \mathbf{a}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 x &\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & y &\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Задача 3.7. Найти решение игры.

1. $\begin{pmatrix} (3;-4) & (-7;2) \\ (-2;3) & (6;-5) \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} (-3;7) & (4;-10) \\ (2;-11) & (-3;12) \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} (3;-3) & (-4;1) \\ (-7;5) & (1;-6) \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} (-1;4) & (5;-1) \\ (3;-2) & (1;3) \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} (2;10) & (5;1) \\ (7;2) & (3;8) \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} (1;5) & (7;-2) \\ (3;1) & (-2;4) \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} (10;2) & (2;11) \\ (3;4) & (7;-3) \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} (-3;4) & (9;-2) \\ (8;-3) & (-5;7) \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} (12;7) & (4;10) \\ (3;11) & (15;3) \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} (15;2) & (5;11) \\ (4;13) & (12;7) \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} (10;9) & (15;3) \\ (14;4) & (11;8) \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} (3;11) & (9;5) \\ (10;7) & (2;10) \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} (17;5) & (3;12) \\ (9;16) & (14;11) \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} (16;-3) & (-4;10) \\ (5;8) & (17;-2) \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} (3;6) & (-8;7) \\ (-5;3) & (2;2) \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} (1;3) & (4;2) \\ (7;5) & (-8;6) \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} (1;3) & (4;2) \\ (7;5) & (-8;6) \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} (4;-3) & (-5;7) \\ (1;1) & (5;-5) \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} (7;1) & (4;4) \\ (-1;5) & (6;1) \end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix} (2;7) & (5;-4) \\ (6;-1) & (-3;1) \end{pmatrix}$
21. $\begin{pmatrix} (1;5) & (9;1) \\ (3;2) & (2;6) \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} (3;2) & (-9;-5) \\ (-7;-1) & (1;4) \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} (1;9) & (7;1) \\ (8;2) & (6;5) \end{pmatrix}$
24. $\begin{pmatrix} (9;-3) & (4;6) \\ (3;5) & (7;-1) \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} (7;2) & (3;5) \\ (2;7) & (4;1) \end{pmatrix}$
26. $\begin{pmatrix} (8;6) & (2;7) \\ (3;5) & (4;1) \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} (7;-3) & (-3;4) \\ (4;2) & (5;-1) \end{pmatrix}$
28. $\begin{pmatrix} (-8;6) & (9;2) \\ (7;1) & (3;5) \end{pmatrix}$

29.

$$\begin{pmatrix} (-3;4) & (5;-1) \\ (8;-3) & (-9;2) \end{pmatrix}$$

30.

$$\begin{pmatrix} (-3;5) & (9;-2) \\ (1;-1) & (4;3) \end{pmatrix}$$

3.8. Оптимальность по Парето. Равновесие по Штакельбергу

Пример 3.15. Найти решение игры

$$\begin{pmatrix} (3;3) & (1;5) \\ (5;1) & (2;2) \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Найдем решение (если есть) в чистых стратегиях. Отметим максимальные элементы матрицы A в каждом столбце, матрицы B — в каждой строке.

$$\begin{pmatrix} (3;3) & (1;5) \\ (5;1) & (2;2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5^* & 2^* \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5^* \\ 1 & 2^* \end{pmatrix}.$$

Расположение некоторых выбранных элементов в исходной матрице совпадает. Таким образом, решением (ситуацией равновесия в чистых стратегиях) биматричной игры будет пара стратегий (A_2, B_2) ; при этом выигрыш игрока A составит $v_A = 2$ ед., игрока B — $v_B = 2$ ед.

Однако. Если игроки выберут ситуацию (A_1, B_1) , то оба получают выигрыши $v_A = v_B = 3$ ед. Данная ситуация не является равновесной, но лучшая для обоих игроков.

Таким образом, необходимо рассмотреть другие принципы оптимальности в бескоалиционной игре, приводящие к ситуациям, более выгодным обоим участникам, чем в случае равновесных ситуаций.

Ситуация (p^0, q^0) в биматричной игре двух лиц называется **оптимальной по Парето**, если не существует ситуации (p, q) для которой выполняются неравенства

$$H_A(p^0, q^0) \leq H_A(p, q), H_B(p^0, q^0) \leq H_B(p, q).$$

Среди данных неравенств, по крайней мере, одно должно быть строгим.

В оптимальной по Парето ситуации, игроки, действуя совместно, не могут, меняя свои стратегии, увеличить выигрыш каждого, не уменьшив при этом выигрыш одного из них. В ситуации равновесия по Нэшу ни один из игроков, действуя в одиночку, не может увеличить своего собственного выигрыша.

Необходимо отметить, что исходы, оптимальные по Парето, не всегда справедливы.

Равновесие по Штакельбергу.

В данном случае «равновесие» не надо воспринимать дословно. Здесь под «равновесием» подразумевается решение бескоалиционной игры двух лиц при соблюдении определенных условий.

Обозначим

$$Z^1 = \left\{ (x_1, x_2) \mid H_1(x_1, x_2) = \sup_{y_1} H_1(y_1, x_2) \right\} \text{ — множество наилучших ответов игрока } A \text{ на действия игрока } B;$$

$Z^2 = \left\{ (x_1, x_2) \mid H_2(x_1, x_2) = \sup_{y_2} H_2(x_1, y_2) \right\}$ — множество наилучших ответов игрока B на действия игрока A .

Ситуация $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ называется i -равновесием по Штакельбергу в игре двух лиц, а $\bar{H}_i$ i -выигрышем, если $(x_1, x_2) \in Z^j$ выполняются равенства

$$\bar{H}_i = H_i(x_1, x_2) = \sup_{(y_1, y_2) \in Z^j} H_i(y_1, y_2), \quad i = 1, 2, i \neq j.$$

Понятие i -равновесия можно интерпретировать следующим образом. Пусть игрок A (лидер, $i = 1$) знает функции выигрыша обоих игроков H_1 и H_2 , а, следовательно, и множество наилучших ответов Z^2 игрока B (ведомого) на любую свою стратегию x_1 . Тогда он, будет максимизировать свой выигрыш, выбирая стратегию x_1 , чтобы выполнялось предыдущее условие. Таким образом, H_i — это выигрыш i -го игрока, действующего оптимально в качестве «лидера».

В игре двух лиц имеет место **борьба за лидерство**, если не существует такой ситуации $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, что

$$\bar{H}_i \leq H_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2.$$

Теорема. Если игра двух лиц имеет, по крайней мере, две оптимальные по Парето и одновременно равновесные по Нэшу ситуации (x_1, x_2) , (y_1, y_2) с различными векторами выигрышей

$$(H_1(x_1, x_2), H_2(x_1, x_2)) \neq (H_1(y_1, y_2), H_2(y_1, y_2)),$$

то в игре имеет место борьба за лидерство.

Пример 3.16. Дана игра

$$\begin{pmatrix} (1;7) & (5;3) & (-1;5) \\ (3;4) & (-7;1) & (4;8) \\ (9;1) & (-8;3) & (1;3) \end{pmatrix}.$$

Найти:

1. Решение в чистых стратегиях (равновесие по Нэшу).
2. Оптимальные по Парето решения.
3. Ситуации равновесия по Штакельбергу.

Решение.

1. Решение в чистых стратегиях (равновесие по Нэшу). Найдем решение (если есть) в чистых стратегиях. Отметим максимальные элементы матрицы A в каждом столбце, матрицы B — в каждой строке

$$\begin{pmatrix} (1;7) & (5;3) & (-1;5) \\ (3;4) & (-7;1) & (4;8) \\ (9;1) & (-8;3) & (1;3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 5^* & -1 \\ 3 & -7 & 4^* \\ 9^* & -8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7^* & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 8^* \\ 1 & 3^* & 3^* \end{pmatrix}.$$

Расположение некоторых выбранных элементов в исходной матрице совпадает. Решением (ситуацией равновесия в чистых стратегиях) биматричной игры будет пара стратегий с соответствующими выигрышами игроков

$$(A_2, B_3) \text{ — } v_A = 4, v_B = 8.$$

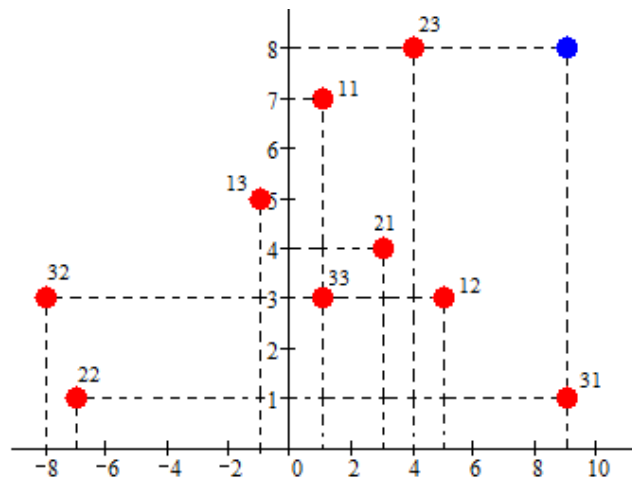
2. Оптимальные по Парето решения. Нанесем на плоскость точки с координатами, соответствующими значениям исходной матрицы. Так точка с координатами (1;7) является элементом исходной матрицы с индексами 11, точка (5;3) — элемент с индек-

сами 12, и т. д. Т. е. координатами точек служат соответствующие выигрыши игроков при выборе своих стратегий.

Каждую построенную точку будем перемещать до совпадения с другой точкой по вертикальным и горизонтальным линиям так, чтобы каждая ее координата **увеличивалась**. Перемещая таким образом точку 22 (координаты $(-7;1)$), попадаем в любую другую точку графика, кроме точки 32 (координаты $(-8;3)$). Здесь значение первой координаты уменьшается, а значение второй увеличивается.

После последовательного перебора указанным способом остаются точки 12, 23 и 31. Перемещая данные точки до совпадения с другими, получаем, что увеличение значения одной из координат ведет к уменьшению значения другой координаты.

Полученные точки соответствуют стратегиям игроков (A_1, B_2) , (A_2, B_3) и (A_3, B_1) . Данные решения игры являются оптимальными по Парето. Следует отметить, что на данном этапе игроки выступают как партнеры.



Для выбора лучшей из полученных стратегий, построим на графике **точку утопии** (обозначена синим цветом) с координатами

$$a = \max_{i,j} \{a_{ij}\} = 9, \quad b = \max_{i,j} \{b_{ij}\} = 8.$$

Данная точка характеризует максимально допустимые выигрыши первого и второго игроков.

Далее из множества оптимальных по Парето решений (точек) выбирается то, которое ближе (кратчайшее расстояние) к точке утопии (идеальной точке). Таким образом, решением будет стратегия (A_2, B_3) , при этом выигрыши игроков $v_A = 4, v_B = 8$.

Данный выбор можно сделать также следующим образом. Для всех оптимальных по Парето решений найдем сумму выигрышей обоих игроков, максимальное значение суммы будет указывать на лучшее решение, т. е.

$$(A_1, B_2) \text{ — } 5 + 3 = 8;$$

$$(A_2, B_3) \text{ — } 4 + 8 = 12;$$

$$(A_3, B_1) \text{ — } 9 + 1 = 10.$$

$\max(8; 12; 10) = 12$, следовательно, лучшим из оптимальных по Парето будет решение (A_2, B_3) .

Необходимо отметить, что при выборе наилучшего решения из оптимальных по Парето, игроки из партнеров превращаются в противников.

В данной задаче решение в чистых стратегиях (равновесие по Нэшу) совпало с оптимальным решением по Парето, в других задачах это не обязательно должно выполняться. Также решения в чистых стратегиях может и не быть, а оптимальное по Парето решение будет.

3. Ситуации равновесия по Штакельбергу. Пусть в игре лидером является игрок A . Определим множество Z^2 наилучших ответов игрока B на каждое действие лидера.

Если игрок A выберет стратегию A_1 , то игрок B должен выбрать стратегию B_1 , в противном случае игрок B получит меньший выигрыш. Если игрок A выберет стратегию A_2 , то игрок B должен выбрать стратегию B_3 . Если игрок A выберет стратегию A_3 , то игрок B должен выбрать стратегии B_2 или B_3 . Таким образом, множество Z^2 имеет вид

$$Z^2 = \{(A_1, B_1), (A_2, B_3), (A_3, B_2)\} \text{ или } Z^2 = \{(A_1, B_1), (A_2, B_3), (A_3, B_3)\}.$$

Определим значение выигрыша лидера в каждой из точек данных множеств: $H_1(A_1, B_1) = 1$, $H_1(A_2, B_3) = 4$, $H_1(A_3, B_2) = -8$, $H_1(A_3, B_3) = 1$.

Тогда, $\max(1, 4, -8, 1) = 4$, следовательно, точка (A_2, B_3) является ситуацией 1-го равновесия и $\bar{H}_1 = 4$.

Предположим, что лидером является игрок B . Определим множество Z^1 наилучших ответов игрока A на каждое действие лидера.

Если игрок B выберет стратегию B_1 , то игрок A должен выбрать стратегию A_3 , в противном случае игрок A получит меньший выигрыш. Если игрок B выберет стратегию B_2 , то игрок A должен выбрать стратегию A_1 . Если игрок B выберет стратегию B_3 , то игрок A должен выбрать стратегию A_2 . Таким образом, множество Z^1 имеет вид

$$Z^1 = \{(A_3, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_3)\}.$$

Определим значение выигрыша лидера в каждой из точек данных множеств: $H_2(A_3, B_1) = 1$, $H_2(A_1, B_2) = 3$, $H_2(A_2, B_3) = 8$.

Тогда, $\max(1, 3, 8) = 8$, следовательно, точка (A_2, B_3) является ситуацией 2-го равновесия и $\bar{H}_2 = 8$.

Найдем ситуацию, для которой в заданной игре будет выполняться условие $\bar{H}_1 \geq 4$, $\bar{H}_2 \geq 8$.

Таким свойством обладает ситуация (A_2, B_3) (в данной точке аналогичные выигрыши), следовательно, в данной игре **нет борьбы** за лидерство.

Пример 3.17. Дана игра

$$\begin{pmatrix} (1;2) & (-1;-1) \\ (-2;-2) & (2;1) \end{pmatrix}.$$

Найти ситуации равновесия по Штакельбергу.

Решение.

Пусть в игре лидером является игрок A . Определим множество Z^2 наилучших ответов игрока B на каждое действие лидера.

Если игрок A выберет стратегию A_1 , то игрок B должен выбрать стратегию B_1 , в противном случае игрок B получит меньший выигрыш. Если игрок A выберет стра-

тегию A_2 , то игрок B должен выбрать стратегию. Таким образом, множество Z^2 имеет вид

$$Z^2 = \{(A_1, B_1), (A_2, B_2)\}.$$

Определим значение выигрыша лидера в каждой из точек данных множеств: $H_1(A_1, B_1) = 1$, $H_1(A_2, B_2) = 2$.

Тогда, $\max(1, 2) = 2$, следовательно, точка (A_2, B_2) является ситуацией 1-го равновесия и $\overline{H}_1 = 2$.

Предположим, что лидером является игрок B . Определим множество Z^1 наилучших ответов игрока A на каждое действие лидера.

Если игрок B выберет стратегию B_1 , то игрок A должен выбрать стратегию A_1 , в противном случае игрок A получит меньший выигрыш. Если игрок B выберет стратегию B_2 , то игрок A должен выбрать стратегию A_2 . Таким образом, множество Z^1 имеет вид

$$Z^1 = \{(A_1, B_1), (A_2, B_2)\}.$$

Определим значение выигрыша лидера в каждой из точек данных множеств: $H_2(A_1, B_1) = 2$, $H_2(A_2, B_2) = 1$.

Тогда, $\max(2, 1) = 2$, следовательно, точка (A_1, B_1) является ситуацией 2-го равновесия и $\overline{H}_2 = 2$.

Найдем ситуацию, для которой в заданной игре будет выполняться условие $\overline{H}_1 \geq 2$, $\overline{H}_2 \geq 2$.

Нет ситуаций, которые обладали бы таким свойством, т. е. $(2, 2)$, следовательно, в данной игре **имеет место борьба** за лидерство.

Задача 3.8. Найти:

1. Решение в чистых стратегиях (равновесие по Нэшу).
2. Оптимальные по Парето решения.
3. Ситуации равновесия по Штакельбергу.

1.

$$\begin{pmatrix} (1;7) & (5;3) & (-1;5) \\ (4;3) & (-7;6) & (4;8) \\ (9;1) & (-8;3) & (1;3) \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} (3;1) & (5;3) & (-1;5) \\ (4;3) & (-7;6) & (-7;1) \\ (9;1) & (-8;3) & (1;3) \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} (5;-1) & (3;-2) & (-1;5) \\ (4;3) & (-1;3) & (-7;1) \\ (2;7) & (-8;3) & (1;-3) \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} (-3;5) & (5;3) & (-1;5) \\ (2;3) & (1;6) & (4;3) \\ (9;1) & (-5;3) & (1;3) \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} (-3;1) & (5;4) & (-1;5) \\ (1;-2) & (-7;6) & (4;8) \\ (4;-1) & (-8;3) & (2;3) \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} (-2;-3) & (2;3) & (1;3) \\ (-4;3) & (-7;-1) & (4;2) \\ (-1;1) & (-8;3) & (1;3) \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} (-5;1) & (5;-3) & (1;4) \\ (3;2) & (1;4) & (6;-7) \\ (-3;6) & (-2;1) & (5;-3) \end{pmatrix}$$

8.

$$\begin{pmatrix} (2;8) & (6;-5) & (4;2) \\ (1;4) & (4;1) & (-1;3) \\ (-6;2) & (-1;3) & (1;-2) \end{pmatrix}$$

9.

$$\begin{pmatrix} (1;2) & (3;-5) & (-1;2) \\ (-3;1) & (6;4) & (3;-1) \\ (4;-1) & (-4;2) & (2;5) \end{pmatrix}$$

10.

11.

12.

$$\begin{pmatrix} (3;-4) & (-1;4) & (-2;4) \\ (1;3) & (2;1) & (3;1) \\ (3;5) & (5;2) & (1;-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3;-4) & (1;-6) & (2;-3) \\ (2;5) & (2;3) & (5;1) \\ (1;3) & (-4;1) & (-6;3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-9;3) & (5;3) & (1;-3) \\ (5;4) & (-6;4) & (4;2) \\ (7;1) & (2;7) & (-3;5) \end{pmatrix}$$

13.

14.

15.

$$\begin{pmatrix} (-4;3) & (7;-8) & (3;2) \\ (2;1) & (1;3) & (4;5) \\ (5;6) & (-3;4) & (-2;7) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1;4) & (6;1) & (-3;4) \\ (5;6) & (-5;4) & (7;-3) \\ (7;3) & (3;-2) & (2;5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (5;-4) & (-4;7) & (-2;5) \\ (3;2) & (-2;1) & (-4;7) \\ (1;3) & (4;3) & (8;3) \end{pmatrix}$$

16.

17.

18.

$$\begin{pmatrix} (1;2) & (5;7) & (-9;1) \\ (-3;4) & (-4;2) & (4;5) \\ (5;-6) & (7;8) & (6;-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1;-2) & (4;2) & (2;4) \\ (3;5) & (1;-7) & (5;4) \\ (6;3) & (3;5) & (-3;1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3;5) & (5;3) & (-1;5) \\ (2;3) & (1;6) & (4;3) \\ (9;1) & (-5;3) & (1;3) \end{pmatrix}$$

19.

20.

21.

$$\begin{pmatrix} (4;3) & (-3;7) & (-2;1) \\ (-5;2) & (1;-2) & (-3;4) \\ (6;1) & (4;5) & (2;-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1;-2) & (5;1) & (3;1) \\ (3;4) & (-2;3) & (2;-1) \\ (5;-6) & (4;1) & (3;5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3;-8) & (-1;3) & (2;-4) \\ (5;2) & (2;-4) & (1;5) \\ (6;7) & (3;5) & (-1;3) \end{pmatrix}$$

22.

23.

24.

$$\begin{pmatrix} (5;-7) & (1;-2) & (-4;7) \\ (-1;4) & (3;5) & (9;6) \\ (4;6) & (2;8) & (7;-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (5;1) & (8;9) & (3;-7) \\ (-7;3) & (9;-1) & (6;2) \\ (2;4) & (-4;5) & (5;3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (7;4) & (-6;2) & (5;-2) \\ (2;5) & (1;6) & (-8;3) \\ (-1;3) & (1;4) & (4;1) \end{pmatrix}$$

25.

26.

27.

$$\begin{pmatrix} (-3;9) & (2;-5) & (3;-9) \\ (8;1) & (-7;2) & (7;1) \\ (3;2) & (-3;8) & (4;6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3;-9) & (6;-2) & (-4;5) \\ (7;1) & (-5;7) & (1;-6) \\ (-1;4) & (-3;1) & (7;2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1;7) & (8;-9) & (4;3) \\ (8;9) & (-7;5) & (7;4) \\ (-3;4) & (-2;3) & (9;-5) \end{pmatrix}$$

28.

29.

30.

$$\begin{pmatrix} (9;7) & (2;1) & (7;8) \\ (3;-4) & (5;4) & (1;9) \\ (6;-3) & (3;-2) & (5;-6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (7;4) & (6;7) & (5;-7) \\ (-8;3) & (-1;3) & (8;1) \\ (5;2) & (2;4) & (-9;6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (7;-3) & (7;3) & (4;2) \\ (4;5) & (8;9) & (3;-9) \\ (9;-8) & (-5;7) & (7;4) \end{pmatrix}$$

4. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Преобразование Лапласа

Функцией-оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t , удовлетворяющая условиям:

1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t (локально интегрируема).

2) Для отрицательных t

$$f(t) = 0.$$

3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные $M > 0$ и $s \geq 0$, что для всех t

$$|f(t)| < Me^{st}.$$

Пример. Показать, что функция

$$f(t) = \begin{cases} e^{3t} \sin 4t, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

является функцией-оригиналом.

Решение.

1) Функция $f(t)$ локально интегрируема:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{3t} \sin 4t \, dt,$$

существует для любых конечных t_1 и t_2 .

Условие 2) выполнено в силу задания функции.

3) Для любых вещественных t

$$|e^{3t} \sin 4t| \leq e^{3t},$$

так что в качестве M в условии 3) можно взять любое число > 1 ; $s = 3$.

Простейшей функцией-оригиналом является единичная функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$f(t)\theta(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, писать $f(t)$ вместо $f(t)\theta(t)$, считая, что рассматриваемые нами функции продолжены нулем для отрицательных t .

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} \, dt.$$

Тот факт, что $F(p)$ есть изображение $f(t)$, будем символически записывать так:

$$f(t) \div F(p).$$

Обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \oint F(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}$$

позволяет найти функцию оригинал по изображению. В дальнейшем предполагается, что контур интегрирования охватывает все особые точки $p = p_k$ подынтегральной функции $F(p)$, поэтому (согласно теореме Коши о вычетах) обратное преобразование Лапласа можно определить так:

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{p=p_k} F(p) e^{pt}.$$

В частности, если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ — правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция

$$f(t) = \sum_k \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} [F(p) e^{pt} (p - p_k)^{n_k}].$$

где p_k — полюсы $F(p)$ кратности n_k и сумма берется по всем полюсам $F(p)$.

Также, если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ — правильная рациональная дробь, то можно ее представить в виде суммы простейших дробей и, используя таблицу преобразования Лапласа и свойства преобразования, найти оригинал для каждой простой дроби.

Пример. Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(t) = e^{3t}.$$

Решение.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{3t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-3)t} dt = \frac{1}{-(p-3)} e^{-(p-3)t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p-3}.$$

Таким образом,

$$F(p) \div \frac{1}{p-3}.$$

Сделаем проверку — найдем оригинал. Функция $F(p) = \frac{1}{p-3}$ имеет особую точку $p = 3$ — полюс 1 порядка. Тогда

$$f(t) = \operatorname{res}_{p=p_k} F(p) e^{pt} = \operatorname{res}_{p=3} \frac{e^{pt}}{p-3} = \lim_{p \rightarrow 3} \left(\frac{e^{pt}}{p-3} (p-3) \right) = \lim_{p \rightarrow 3} e^{pt} = e^{3t}.$$

Пример. Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(t) = \cos t.$$

Решение.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \cos t e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \cos t & du = -\sin t dt \\ dv = e^{-pt} dt & v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = -\frac{1}{p} e^{-pt} \cos t \Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \sin t e^{-pt} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} u = \sin t \quad du = \cos t dt \\ dv = e^{-pt} dt \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = -\frac{1}{p} e^{-pt} \cos t \Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \frac{1}{p} \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \sin t \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \cos t e^{-pt} dt \right) = \\
&= -\frac{1}{p} e^{-pt} \cos t \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{p^2} e^{-pt} \sin t \Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \frac{1}{p^2} \int_0^{+\infty} \cos t e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \cos t e^{-pt} dt \\
&\left(1 + \frac{1}{p^2} \right) \int_0^{+\infty} \cos t e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \cos t \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{p^2} e^{-pt} \sin t \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \left| \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cos t}{e^{pt}} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{e^{pt}} = 0 \end{array} \right| = \frac{1}{p} \\
&\int_0^{+\infty} \cos t e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{p^2}{p^2 + 1} \right) = \frac{p}{p^2 + 1}
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$F(p) \div \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Сделаем проверку — найдем оригинал. Функция

$$F(p) \div \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p}{(p+i)(p-i)}$$

имеет особые точки $p_1 = i$ и $p_2 = -i$ — полюсы 1 порядка.

Тогда

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} F(p) e^{pt} = \operatorname{res}_{p=i} \frac{pe^{pt}}{(p+i)(p-i)} + \operatorname{res}_{p=-i} \frac{pe^{pt}}{(p+i)(p-i)} = \\
&= \lim_{p \rightarrow i} \left(\frac{pe^{pt}}{(p+i)(p-i)} (p-i) \right) + \lim_{p \rightarrow -i} \left(\frac{pe^{pt}}{(p+i)(p-i)} (p+i) \right) = \\
&= \lim_{p \rightarrow i} \left(\frac{pe^{pt}}{p+i} \right) + \lim_{p \rightarrow -i} \left(\frac{pe^{pt}}{p-i} \right) = \frac{ie^{it}}{2i} + \frac{-ie^{-it}}{-2i} = \frac{e^{it}}{2} + \frac{e^{-it}}{2} = \cos t.
\end{aligned}$$

Таблица некоторых изображений (преобразование Лапласа)

$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$	$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$
$\delta(t)$	1	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$t \cdot \sin at$	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$t \cdot \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}$	$t \cdot shat$	$\frac{2pa}{p^2 - a^2}$
$shat$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$t \cdot chat$	$\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$
$chat$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$t \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(p + a)^2}$
$e^{\lambda t} \cdot \sin at$	$\frac{a}{(p - \lambda)^2 + a^2}$	$\sin(t - a)$	$\frac{e^{-ap}}{p^2 + 1}$
$e^{\lambda t} \cdot \cos at$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + a^2}$	$\cos(t - a)$	$\frac{pe^{-ap}}{p^2 + 1}$
$e^{\lambda t} \cdot \cos(at + \varphi)$	$\frac{(p - \lambda) \cos \varphi - a \sin \varphi}{(p - \lambda)^2 + a^2}$	$e^{\lambda t} \cdot \sin(at + \varphi)$	$\frac{a \cos \varphi + (p - \lambda) \sin \varphi}{(p - \lambda)^2 + a^2}$
$t^n \cdot f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
$\theta(t)$	$\frac{1}{p}$	$\theta(t - a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}$

4.2. Свойства преобразования Лапласа

Пусть здесь и в дальнейшем $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$.

1. Теорема единственности. Если две непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то эти функции тождественно равны.

Различные разрывные функции могут иметь одинаковые преобразования Лапласа.

2. Свойство линейности. Для любых комплексных переменных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \div \alpha F(p) + \beta G(p).$$

3. Теорема подобия. Для любого постоянного $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

4. Дифференцирование оригинала. Если функции $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ являются функциями-оригиналами, то

$$f(t) \div F(p),$$

$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

...

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

где под $f^{(k)}(0)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) понимается $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$.

5. Дифференцирование изображения. Дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала

$$F(p) \div f(t),$$

$$F'(p) \div (-t)f(t),$$

$$F''(p) \div (-t)^2 f(t),$$

...,

$$F^{(n)}(p) \div (-t)^n f(t).$$

6. Интегрирование оригинала. Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p , т. е. если $f(t) \div F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}.$$

7. Интегрирование изображения. Если интеграл $\int_p^\infty F(s) ds$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(s) ds.$$

8. Вычисление некоторых несобственных интегралов. Пусть $f(t) \div F(p)$, и пусть сходится несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(p) dp,$$

где интеграл справа можно вычислять по положительной полуоси.

9. Теорема смещения. Если $f(t) \div F(p)$, то для любого комплексного a

$$e^{at} f(t) \div F(p - a).$$

10. Теорема запаздывания. Если $f(t) \div F(p)$, то для любого комплексного a

$$f(t - a) \div e^{-ap} F(p).$$

Теорему запаздывания удобно использовать при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

Пример. Найти изображение функции

$$f(t) = \sin(t - 3)\theta(t - 3).$$

Решение. Пользуясь таблицей и свойством 10 запишем

$$\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1} \Rightarrow \sin(t - 3)\theta(t - 3) \div \frac{e^{-3t}}{p^2 + 1}.$$

Сделаем проверку — найдем оригинал. Функция

$$F(p) \div \frac{e^{-3t}}{p^2 + 1} = \frac{e^{-3t}}{(p + i)(p - i)}$$

имеет особые точки $p_1 = i$ и $p_2 = -i$ — полюсы 1 порядка. Тогда

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} F(p)e^{pt} = \operatorname{res}_{p=i} \frac{e^{-3t} e^{pt}}{(p + i)(p - i)} + \operatorname{res}_{p=-i} \frac{e^{-3t} e^{pt}}{(p + i)(p - i)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow i} \left(\frac{e^{(t-3)p}}{(p + i)(p - i)} (p - i) \right) + \lim_{p \rightarrow -i} \left(\frac{e^{(t-3)p}}{(p + i)(p - i)} (p + i) \right) = \\ &= \lim_{p \rightarrow i} \left(\frac{e^{(t-3)p}}{p + i} \right) + \lim_{p \rightarrow -i} \left(\frac{e^{(t-3)p}}{p - i} \right) = \frac{e^{(t-3)i}}{2i} + \frac{e^{-(t-3)i}}{-2i} = \sin(t - 3). \end{aligned}$$

Пример. Найти изображение функции

$$f(t) = (t^2 + 3t - 5)\theta(t - 2).$$

Решение. Перед тем как использовать теорему запаздывания, необходимо разложить функцию $f(t)$ в ряд по степеням $t - 2$:

$$t^2 = (t - 2 + 2)^2 = (t - 2)^2 + 4(t - 2) + 4,$$

$$3t = 3(t - 2 + 2) = 3(t - 2) + 6.$$

Тогда можем записать

$$t^2 + 3t - 5 = (t - 2)^2 + 7(t - 2) + 5,$$

$$(t^2 + 3t - 5)\theta(t - 2) = (t - 2)^2 \theta(t - 2) + 7(t - 2)\theta(t - 2) + 5\theta(t - 2)$$

Пользуясь таблицей, найдем

$$t^2 \div \frac{2}{p^3} \Rightarrow t^2 \theta(t - 2) \div \frac{2e^{-2p}}{p^3},$$

$$t \div \frac{1}{p^2} \Rightarrow t \theta(t - 2) \div \frac{e^{-2p}}{p^2},$$

$$5 \div \frac{5}{p} \Rightarrow 5\theta(t - 2) \div \frac{5e^{-2p}}{p}.$$

Таким образом,

$$F(p) = \frac{2e^{-2p}}{p^3} + 7\frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{5e^{-2p}}{p}.$$

Проверка. Функция

$$F(p) = \frac{2e^{-2p}}{p^3} + 7\frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{5e^{-2p}}{p}$$

имеет особую точку $p = 0$ (полус третью, второго и первого порядка)

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} [F(p)e^{pt} (p - p_k)^{n_k}] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{2e^{-2p} e^{pt}}{p^3} p^3 \right] + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left[\frac{7e^{-2p} e^{pt}}{p^2} p^2 \right] + \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{5e^{-2p} e^{pt}}{p} p \right] = \\ &= (t-2)^2 + 7(t-2) + 5 = t^2 + 3t - 5. \end{aligned}$$

Пример. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^3, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Решение. Запишем аналитическое выражение для функции $f(t)$.

$$f(t) = t^3 [\theta(t-1) - \theta(t-2)].$$

Перед тем как использовать теорему запаздывания, необходимо разложить функцию $f(t)$ в ряд вблизи точек смещения:

$$\begin{aligned} t^3 \theta(t-1) &= (t-1+1)^3 \theta(t-1) = ((t-1)^3 + 3(t-1)^2 + 3(t-1) + 1) \theta(t-1) = \\ &= (t-1)^3 \theta(t-1) + 3(t-1)^2 \theta(t-1) + 3(t-1) \theta(t-1) + \theta(t-1), \\ t^3 \theta(t-2) &= (t-2+2)^3 \theta(t-2) = ((t-2)^3 + 6(t-2)^2 + 12(t-2) + 8) \theta(t-2) = \\ &= (t-2)^3 \theta(t-2) + 6(t-2)^2 \theta(t-2) + 12(t-2) \theta(t-2) + 8\theta(t-2). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} t^3 [\theta(t-1) - \theta(t-2)] &= (t-1)^3 \theta(t-1) + 3(t-1)^2 \theta(t-1) + 3(t-1) \theta(t-1) + \theta(t-1) - \\ &- (t-2)^3 \theta(t-2) - 6(t-2)^2 \theta(t-2) - 12(t-2) \theta(t-2) - 8\theta(t-2). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\theta(t) \div \frac{1}{p^3}, \quad t\theta(t) \div \frac{1}{p^2}, \quad t^2\theta(t) \div \frac{2}{p^3}, \quad t^3\theta(t) \div \frac{3!}{p^4}, \quad \theta(t-a) \div \frac{e^{-ap}}{p},$$

можем записать

$$F(p) = \frac{3!e^{-p}}{p^4} + 3\frac{2e^{-p}}{p^3} + 3\frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p} - \frac{3!e^{-2p}}{p^4} - 6\frac{2e^{-2p}}{p^3} - 12\frac{e^{-2p}}{p^2} - 8\frac{e^{-2p}}{p}.$$

11. Изображение периодической функции. Пусть функция $f(t)$ периодическая с периодом T , есть функция-оригинал. Тогда ее изображение по Лапласу

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$$

и определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > 0$.

12. Совместная теорема подобия и запаздывания. Пусть a и b — два положительных числа, и пусть $f(t) \div F(p)$, а функция задана в виде

$$g(t) = \begin{cases} f(at - b), & t > \frac{b}{a}, \\ 0, & t < \frac{b}{a}, \end{cases}$$

или

$$g(t) = f(at - b) \theta(at - b),$$

то ее изображение

$$G(p) = \frac{1}{a} e^{-p \frac{b}{a}} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

13. Теорема о свертке. Произведение двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ также является изображением, причем

$$F(p)G(p) \div \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Интеграл в правой части называется **сверткой** функций $f(t)$ и $g(t)$, обозначается символом $f(t) * g(t)$.

14. Формула Дюамеля. Если $f(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$ и $f(t) \div F(s)$, $\varphi(t) \div \Phi(s)$, то

$$f(t) \cdot \varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau) d\tau \div s \cdot F(s) \cdot \Phi(s).$$

4.3. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

4.3.1. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго (для простоты) порядка

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

Пусть $x(t) \div X(p)$, $f(t) \div F(p)$. Применим преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} x(t) &\div X(p), \\ x'(t) &\div pX(p) - x(0), \\ x''(t) &\div p^2 X(p) - px(0) - x'(0), \\ f(t) &\div F(p). \end{aligned}$$

В результате получим операторное уравнение

$$(ap^2 + bp + c)X(p) - (apx_0 + ax_1 + bx_0) = F(p),$$

из которого находим

$$X(p) = \frac{F(p) + apx_0 + ax_1 + bx_0}{ap^2 + bp + c}.$$

Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, получаем решение задачи Коши.

Решение задачи Коши для дифференциального уравнения n -го порядка аналогичен случаю $n = 2$.

В том случае, если начальные условия задачи Коши заданы при $t = t_0 \neq 0$, то необходимо сделать замену переменных $\tau = t - t_0$. Так, для уравнения

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad t_0 \neq 0,$$

положим

$$\tau = t - t_0, \quad t = \tau + t_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\tau + t_0) = \tilde{x}(\tau), \\ x'(t) &= x'(\tau + t_0) = \tilde{x}'(\tau), \\ x''(t) &= x''(\tau + t_0) = \tilde{x}''(\tau), \\ f(t) &= f(\tau + t_0) = \tilde{f}(\tau). \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение примет вид

$$a\tilde{x}'' + b\tilde{x}' + c\tilde{x} = \tilde{f}(\tau), \quad \tilde{x}(0) = x_0, \quad \tilde{x}'(0) = x_1.$$

Пример 4.1. Решить задачу Коши

$$x'' + x = 2 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Решение. Применим преобразование Лапласа к обеим частям исходного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} x(t) &\div X(p), \\ x'(t) &\div pX(p) - x(0) = pX(p), \\ x''(t) &\div p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1, \\ \cos t &\div \frac{p}{p^2 + 1}, \\ p^2 X(p) + 1 + X(p) &= \frac{2p}{p^2 + 1}; \end{aligned}$$

откуда

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Получено решение дифференциального уравнения в пространстве изображений. Применим к нему обратное преобразование Лапласа и получим решение в пространстве оригиналов.

Функция

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{2p}{(p-i)^2(p+i)^2} - \frac{1}{(p-i)(p+i)}$$

имеет два полюса $i, -i$ — второго порядка и два полюса $i, -i$ — первого порядка. Тогда

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_k \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p=p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} [F(p)e^{pt}(p-p_k)^{n_k}] = \\
&= \lim_{p=i} \frac{d}{dp} \left[\frac{2pe^{pt}}{(p-i)^2(p+i)^2} (p-i)^2 \right] + \lim_{p=-i} \frac{d}{dp} \left[\frac{2pe^{pt}}{(p-i)^2(p+i)^2} (p+i)^2 \right] + \\
&+ \lim_{p=i} \left[\frac{e^{pt}}{(p-i)(p+i)} (p-i) \right] + \lim_{p=-i} \left[\frac{e^{pt}}{(p-i)(p+i)} (p+i) \right] = \\
&= \left(\frac{2pe^{pt} + 2pte^{pt}}{(p-i)^2} - \frac{4pe^{pt}}{(p-i)^3} \right) \Big|_{p=i} + \left(\frac{2pe^{pt} + 2pte^{pt}}{(p+i)^2} - \frac{4pe^{pt}}{(p+i)^3} \right) \Big|_{p=-i} + \frac{e^{pt}}{(p+i)} \Big|_{p=i} + \frac{e^{pt}}{(p-i)} \Big|_{p=-i} = \\
&= \frac{ite^{-it}}{2} - \frac{ite^{it}}{2} + \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} = t \sin t - \sin t.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$x(t) = t \sin t - \sin t.$$

Задача 4.1. Операционным методом решить задачу Коши.

1. $x'' + 3x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.	16. $x'' + x = 2 \sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
2. $x'' - 2x' = e^{2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.	17. $x'' - 2x' + x = t - \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
3. $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.	18. $x'' + 4x = 2 \cos t \cos 3t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
4. $x'' + 2x' = t \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.	19. $x'' + x = te^t + 4 \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
5. $x'' + 2x' + x = \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.	20. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
6. $x'' - 2x' + x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.	21. $x'' - 3x' + 2x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
7. $x'' - 2x' + 2x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.	22. $x'' - x' = t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
8. $x'' + x' = \cos t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.	23. $x'' + x = t \cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
9. $x'' + 2x' + x = t^2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.	24. $x'' + 4x = \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
10. $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.	25. $x'' + x' + x = te^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
11. $x'' + 2x' + 2x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.	26. $x'' + x = t \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
12. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.	27. $x'' + x' + x = t^2 + t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -3$.
13. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.	28. $x'' - 2x' = e^t(t^2 - 3)$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 2$.
14. $x'' - x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.	29. $x'' + 4x' + 4x = t^3 e^{2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.
15. $x'' - x = \sin t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.	30. $x'' - 9x = \sin t - \cos t$, $x(0) = -3$, $x'(0) = 1$.

Пример 4.2. Пусть на вход апериодического звена, описываемого уравнением $\frac{dy}{dt} + y(t) = 4 \cdot x(t)$, поступает входной сигнал $x(t) = t \cdot \sin(t)$. Найти отклик системы на входное воздействие при начальных условиях $y(0) = 0$.

Решение. Воспользуемся Mathcad.

1. Для численного решения воспользуемся встроенной функцией **odesolve(t,a,b)**, где t — переменная, a — конечная точка отрезка интегрирования, b — величина шага интегрирования (необязательно).

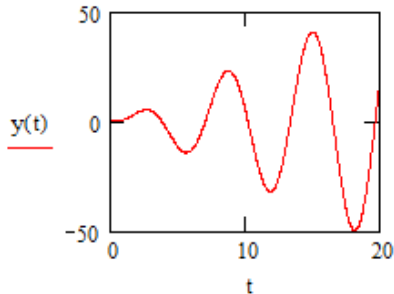
Задание производной уравнения возможно как «штрих» (Ctrl+F7), знака равенства (Ctrl+=) или воспользоваться панелями «Calculus» и «Boolean».

Given

$$y'(t) + y(t) = 4t \cdot \sin(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$y := \text{odesolve}(t, 20)$$



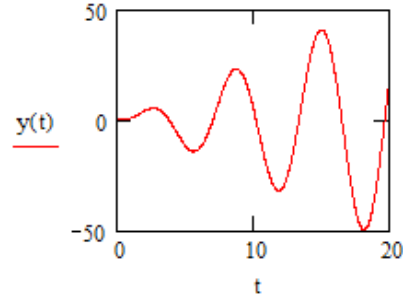
$$y(3) = 4.71$$

Given

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 4t \cdot \sin(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$y := \text{odesolve}(t, 20)$$



$$y(3) = 4.71$$

2. Решим данное уравнение операторным методом с использованием Mathcad.

$$f'(t) \div s \cdot F(s) - f(0).$$

Для нахождения изображения правой части воспользуемся Mathcad (laplace).

$$4t \cdot \sin(t) \text{ laplace, } t \rightarrow \frac{8}{(s^2 + 1)^2} \cdot s$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$s \cdot F(s) - f(0) + F(s) = \frac{8}{(s^2 + 1)^2} \cdot s.$$

Учитывая начальное условие $y(0) = 0$, получим

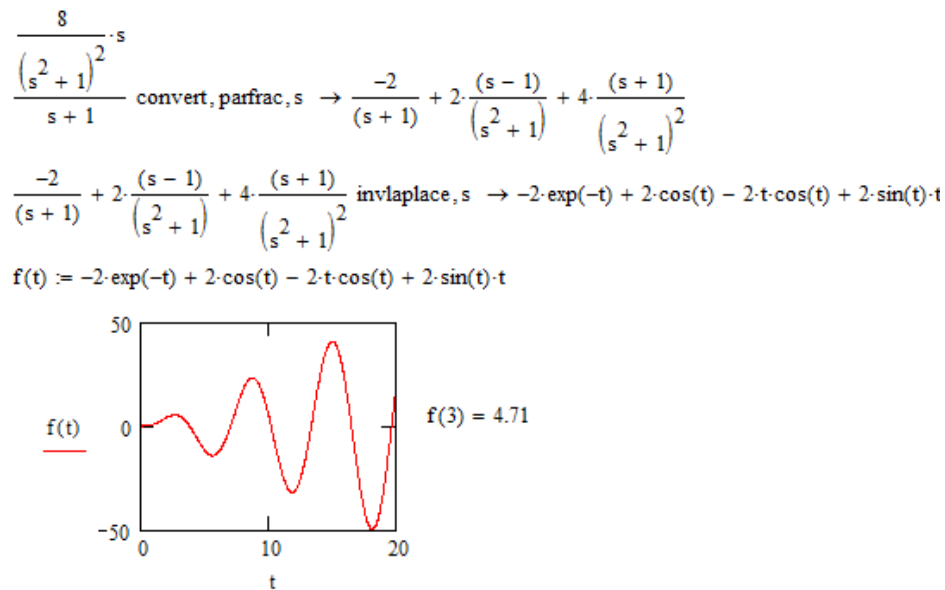
$$s \cdot F(s) + F(s) = \frac{8}{(s^2 + 1)^2} \cdot s.$$

Выразим из последнего равенства $F(s)$

$$F(s) = \frac{\frac{8}{(s^2 + 1)^2} \cdot s}{s + 1}.$$

Упрощать выражение нет необходимости.

Дальнейшее решение: представить полученную дробь в виде суммы простейших дробей (partfrac), которые с помощью обратного преобразования Лапласа (invlaplace) вернуть в действительную плоскость, построить график. Сделаем данные преобразования в Mathcad.

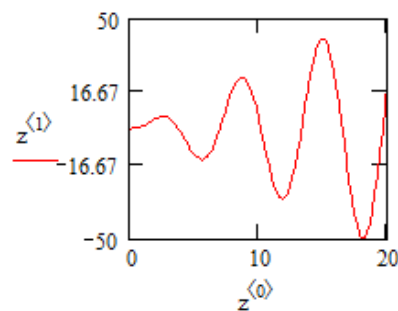


Получили аналогичный результат.

3. Решим данное уравнение численным методом Рунге-Кутты 4-го порядка с фиксированным шагом, используя встроенную функцию **rkfixed(y,a,b,n,F)**, где y — вектор начальных условий; a , b — границы интервала поиска решения; n — количество точек на $[a, b]$, F — вектор функция первых производных.

$$F(t, y) := -y_0 + 4 \sin(t) \cdot t \quad y_0 := 0$$

$$z := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 100, F)$$



	0	1
0	0	0
1	0.2	$1.01 \cdot 10^{-2}$
2	0.4	$7.62 \cdot 10^{-2}$
3	0.6	0.24
4	0.8	0.53
5	1	0.95
6	1.2	1.49
7	1.4	2.13
8	1.6	2.83

В результирующей матрице f первый столбец — значение переменной, второй — значение искомой функции.

Пример 4.3. Пусть на вход колебательного звена 2-го порядка, описываемого уравнением $2 \cdot y''(t) + 3 \cdot y'(t) + y(t) = 12 \cdot x(t)$, поступает входной сигнал $x(t) = \sin(2t)$. Найти отклик системы на входное воздействие при начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Решение. Воспользуемся Mathcad.

1. Для численного решения воспользуемся встроенной функцией **odesolve(t,a,b)**, где t — переменная, a — конечная точка отрезка интегрирования, b — величина шага интегрирования (необязательно).

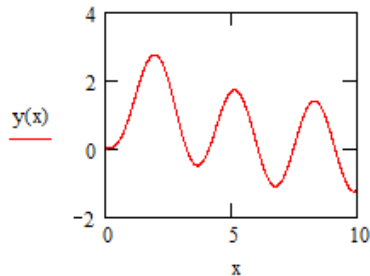
Задание производной уравнения возможно как «штрих» (Ctrl+F7), знака равенства (Ctrl+=) или воспользоваться панелями «Calculus» и «Boolean».

Given

$$2y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 12 \sin(2x)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$y := \text{odesolve}(x, 100)$$



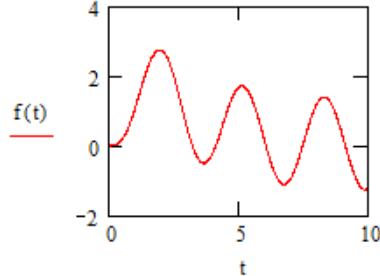
$$y(5) = 1.68$$

Given

$$2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} f(t) + 3 \frac{d}{dt} f(t) + f(t) = 12 \sin(2t)$$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0$$

$$f := \text{odesolve}(t, 100)$$



$$f(5) = 1.68$$

2. Решим данное уравнение операторным методом с использованием Mathcad.

$$f'(t) \div s \cdot F(s) - f(0),$$

$$f''(t) \div s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0).$$

Для нахождения изображения правой части воспользуемся Mathcad (laplace).

$$12 \sin(2x) \text{ laplace}, x \rightarrow \frac{24}{(s^2 + 4)}$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$2 \cdot (s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)) + 3 \cdot (s \cdot F(s) - f(0)) + F(s) = \frac{24}{s^2 + 4}.$$

Учитывая начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, получим

$$2 \cdot s^2 \cdot F(s) + 3 \cdot s \cdot F(s) + F(s) = \frac{24}{s^2 + 4}.$$

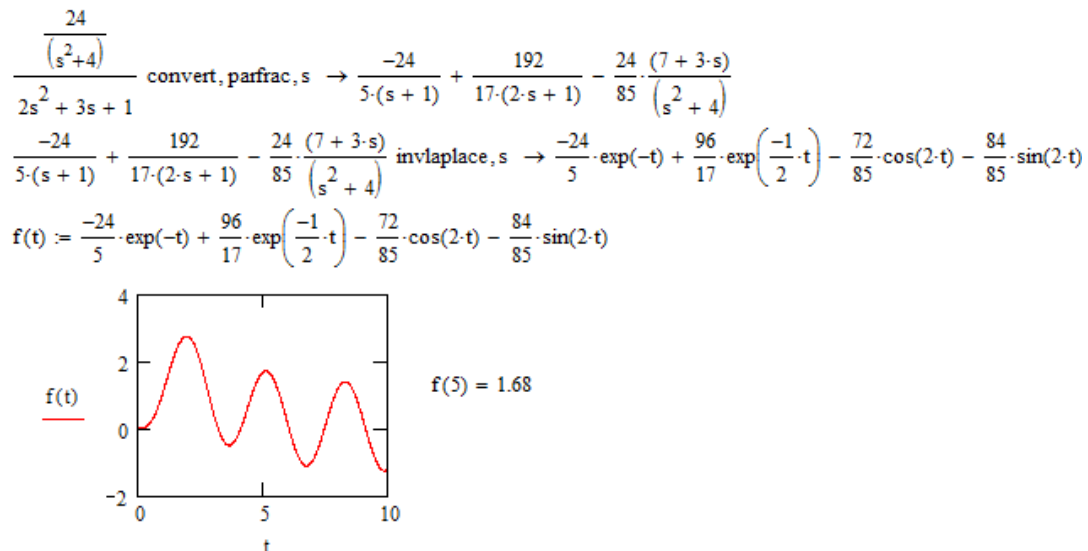
Выразим из последнего равенства $F(s)$

$$F(s) = \frac{\frac{24}{s^2 + 4}}{2 \cdot s^2 + 3 \cdot s + 1}.$$

Упрощать выражение нет необходимости.

Дальнейшее решение: представить полученную дробь в виде суммы простейших дробей (partfrac), которые с помощью обратного преобразования Лапласа (invlaplace) вернуть в действительную плоскость, построить график.

Сделаем данные преобразования в Mathcad.



Получили аналогичный результат.

3. Решим данное уравнение численным методом Рунге-Кутты 4-го порядка с фиксированным шагом, используя встроенную функцию **rkfixed(y,a,b,n,F)**, где y — вектор начальных условий; a , b — границы интервала поиска решения; n — количество точек на $[a, b]$, F — вектор функция первых производных.

Необходимо помнить, что данный метод позволяет решать уравнения первого порядка.

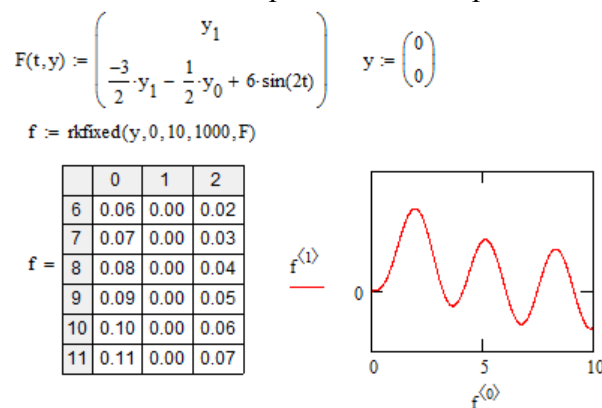
Сделаем замену для перехода в нашем уравнении от второго порядка к первому

$$y(t) = y_0, \quad \frac{d}{dt} y_0 = y_1.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt} y_1 = -\frac{3}{2} \cdot y_1 - \frac{1}{2} \cdot y_0 + 6 \cdot \sin(2t).$$

Дальнейшее решение в Mathcad приведено на скриншоте.



В результирующей матрице f первый столбец — значение переменной, второй — значение искомой функции, третий — значение производной искомой функции. Получен аналогичный результат.

Задача 4.2. Решить задачу Коши двумя методами с использованием Mathcad.

1. $y'' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.
2. $y'' - y' = t^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
3. $y'' + y' = t^2 + 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

4. $y'' - y' = \cos 3t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
5. $y'' + y' + y = 7e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
6. $y'' + y' - 2y = -2(t+1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
7. $y'' - 9y = \sin t - \cos t$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$.
8. $y'' + 2y' = 2 + e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
9. $2y'' - y' = \sin 3t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
10. $y'' + 2y' = \sin t/2$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$.
11. $y'' + y' = \sin t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
12. $y'' + 4y' + 29y = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
13. $y'' - 3y' + 2y = e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
14. $2y'' + 3y' + y = 3e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
15. $y'' - 2y' - 3y = 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
16. $y'' + 4y = \sin 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
17. $2y'' + 5y' = 29 \cos t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.
18. $y'' + y' + y = t^2 + t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.
19. $y'' + 4y = 8 \sin 2t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.
20. $y'' - y' + 6y = 6e^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
21. $y'' + 4y = 4e^{-t} + 4t^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
22. $y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
23. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.
24. $y'' + 4y = 3 \sin t + 10 \cos 3t$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$.
25. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t} \cos 3t$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$.
26. $y'' + 3y' - 10y = -\sin 3t + 47 \cos 3t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.
27. $y'' + y' - 2y = e^t(t^2 + t - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
28. $y'' - 2y' = e^{-t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.
29. $y'' + y = 2 \cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
30. $y'' - y = 4 \sin t + 5 \cos 2t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.

4.3.2. Системы дифференциальных уравнений

Пример 4.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x'' = 3(y - x + z), \\ y'' = x - y, \\ z'' = -z, \end{cases},$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad x'(0) = 0, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = -1, \\ z(0) &= 1, \quad z'(0) = 0. \end{aligned}$$

Решение. Пусть

$$x(t) \div X(p), \quad y(t) \div Y(p), \quad z(t) \div Z(p)$$

Переходя к операторной системе, получим

$$\begin{cases} p^2 X(p) = 3(Y(p) - X(p) + Z(p)), \\ p^2 Y(p) + 1 = X(p) - Y(p), \\ p^2 Z(p) - p = -Z(p). \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$, получим

$$X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}, \quad Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1}, \quad Z(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Обратное преобразование Лапласа дает ответ

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t, \\ y(t) &= \frac{3}{4}(1-t) - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t, \\ z(t) &= \cos t. \end{aligned}$$

Задача 4.3. Решить систему дифференциальных уравнений.

$$1. \begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y, \\ x(0) = -1, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 2y, \\ x(0) = -1, y(0) = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = x - y, \\ x(0) = 1, y(0) = 2. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1, \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x' = -2x + 6y + 2, \\ y' = 2x + 2, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 3x + 1, \\ x(0) = 2, y(0) = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, \\ y' = 4y + 1, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x' = -3x - 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y, \\ x(0) = 0, y(0) = 2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x' = -x + 3y + 2, \\ y' = x + y + 1, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y, \\ x(0) = 2, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -5x - 3y + 2, \\ x(0) = 2, y(0) = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x' = 2y + 1, \\ y' = 2x + 3, \\ x(0) = -1, y(0) = 0. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1, \\ x(0) = 0, y(0) = 2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x' = y + 3, \\ y' = x + 2, \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1, \\ x(0) = 0, y(0) = 2. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = x - 2y + 2, \\ x(0) = 1, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y, \\ x(0) = -1, y(0) = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -4x, \\ x(0) = 3, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x' = x + 3y + 1, \\ y' = 4x - y, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x, \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \\ x(0) = 0, y(0) = 5. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9, \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1, \\ x(0) = 2, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x' = -x + y + e^t, \\ y' = x - y + e, \\ x(0) = 1, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y, \\ x(0) = 1, y(0) = 2. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \\ x(0) = 1, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1, \\ x(0) = -1, y(0) = 2. \end{cases}$$

Пример 4.5. Решить систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = 2 \cdot x(t) + 2 \cdot y(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) = x(t) + 3 \cdot y(t) \end{cases},$$

при начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Решение.

1. Решим данную систему в Mathcad.

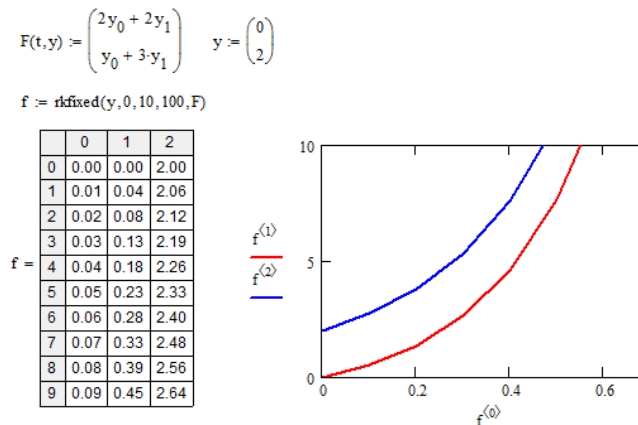
Сделаем замену

$$x(t) = y_0, \quad y(t) = y_1.$$

Тогда исходная система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_0 = 2 \cdot y_0 + 2 \cdot y_1 \\ \frac{d}{dt} y_1 = y_0 + 3 \cdot y_1 \end{cases}.$$

Решение в Mathcad приведено на скриншоте.



В результирующей матрице f первый столбец — значение переменной, второй — значение первой искомой функции, третий — значение второй искомой функции.

Проверим решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость. Для этого найдем собственные числа матрицы, составленной из основных коэффициентов системы уравнений.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 4.00 \end{pmatrix}$$

Так как один (в нашем случае оба) из корней характеристического уравнения матрицы A имеет положительную действительную часть, то согласно теореме об устойчивости решения системы линейных однородных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, решение системы не устойчиво.

2. Решим данную систему операторным методом с использованием Mathcad.

Учитывая, что $x(t) \div X(s)$, $y(t) \div Y(s)$, запишем

$$x'(t) \div s \cdot X(s) - x(0),$$

$$y'(t) \div s \cdot Y(s) - y(0).$$

При начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ исходная система в операторной форме примет вид

$$\begin{cases} s \cdot X(s) = 2 \cdot X(s) + 2 \cdot Y(s) \\ s \cdot Y(s) - 1 = X(s) + 3 \cdot Y(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s-2) \cdot X(s) - 2 \cdot Y(s) = 0 \\ -X(s) + (s-3) \cdot Y(s) = 1 \end{cases}.$$

Для нахождения $X(s)$ и $Y(s)$ можно использовать формулы Крамера.

Найдем решение системы с помощью обратной матрицы.

$$\begin{pmatrix} s-2 & -2 \\ -1 & s-3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{(s^2 - 5s + 4)} \\ \frac{(s-2)}{(s^2 - 5s + 4)} \end{bmatrix}$$

Найдем обратное преобразование Лапласа для $X(s)$.

$$\frac{2}{(s^2 - 5s + 4)} \xrightarrow{\text{convert, parfrac, s}} \frac{-2}{3 \cdot (s-1)} + \frac{2}{3 \cdot (s-4)}$$

$$\frac{-2}{3 \cdot (s-1)} + \frac{2}{3 \cdot (s-4)} \xrightarrow{\text{invlaplace, s}} \frac{-2}{3} \cdot \exp(t) + \frac{2}{3} \cdot \exp(4 \cdot t)$$

$$x(t) := \frac{-2}{3} \cdot \exp(t) + \frac{2}{3} \cdot \exp(4 \cdot t)$$

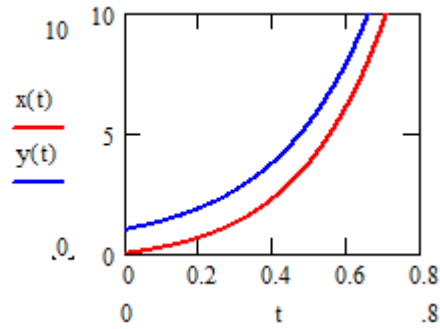
Найдем обратное преобразование Лапласа для $Y(s)$.

$$\frac{(s-2)}{(s^2 - 5s + 4)} \xrightarrow{\text{convert, parfrac, s}} \frac{1}{3 \cdot (s-1)} + \frac{2}{3 \cdot (s-4)}$$

$$\frac{1}{3 \cdot (s-1)} + \frac{2}{3 \cdot (s-4)} \xrightarrow{\text{invlaplace, s}} \frac{1}{3} \cdot \exp(t) + \frac{2}{3} \cdot \exp(4 \cdot t)$$

$$y(t) := \frac{1}{3} \cdot \exp(t) + \frac{2}{3} \cdot \exp(4 \cdot t)$$

В результате строим график и получаем аналогичный с предыдущим результат.



Пример 4.6. Решить систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} x(t) = 2 \cdot y(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -2 \cdot x(t) + 4 \cdot y(t) \end{cases},$$

при начальных условиях $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.

Решение.

1. Решим данную систему в Mathcad.

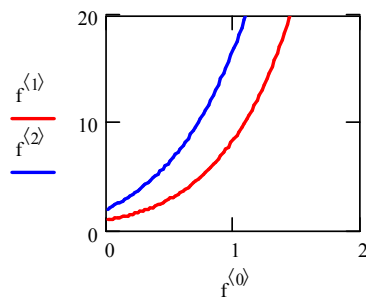
Сделаем замену

$$x(t) = y_0, \quad x'(t) = y_1, \quad y(t) = y_2, \quad y'(t) = y_3.$$

Решение в Mathcad приведено на скриншоте.

$$F(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ 2 \cdot y_2 \\ y_3 \\ -2 \cdot y_0 + 4 \cdot y_2 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f := \text{rkfixed}(y, 0, 2, 100, F)$$



	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	0.02	1.041	2.122	3.082	4.202
2	0.04	1.085	2.247	3.168	4.41
3	0.06	1.131	2.375	3.258	4.623
4	0.08	1.18	2.507	3.353	4.841
5	0.1	1.231	2.643	3.452	5.065
6	0.12	1.286	2.784	3.556	5.295
7	0.14	1.343	2.928	3.664	5.531

В результирующей матрице f первый столбец — значение переменной, второй — значение первой искомой функции, третий — значение первой производной первой функции, четвертый — значение второй искомой функции, пятый — значение первой производной второй функции в точках переменной.

2. Решим данную систему операторным методом с использованием Mathcad.

Учитывая, что $x(t) \div X(s)$, $y(t) \div Y(s)$, запишем

$$x''(t) \div s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - x'(0),$$

$$y''(t) \div s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0).$$

При начальных условиях $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$ исходная система в операторной форме примет вид

$$\begin{cases} s^2 \cdot X(s) - s - 2 = 2 \cdot Y(s) \\ s^2 \cdot Y(s) - 3 \cdot s - 4 = -2 \cdot X(s) + 4 \cdot Y(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2 \cdot X(s) - 2 \cdot Y(s) = s + 2 \\ 2 \cdot X(s) + (s^2 - 4) \cdot Y(s) = 3 \cdot s + 4 \end{cases}$$

Для нахождения $X(s)$ и $Y(s)$ можно использовать формулы Крамера.

Найдем решение системы с помощью обратной матрицы.

$$\begin{pmatrix} s^2 & -2 \\ 2 & s^2 - 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} s + 2 \\ 3s + 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{(s^2 - 4)}{(s^4 - 4s^2 + 4)} \cdot (s + 2) + \frac{2}{(s^4 - 4s^2 + 4)} \cdot (3s + 4) \\ \frac{-2}{(s^4 - 4s^2 + 4)} \cdot (s + 2) + \frac{s^2}{(s^4 - 4s^2 + 4)} \cdot (3s + 4) \end{bmatrix}$$

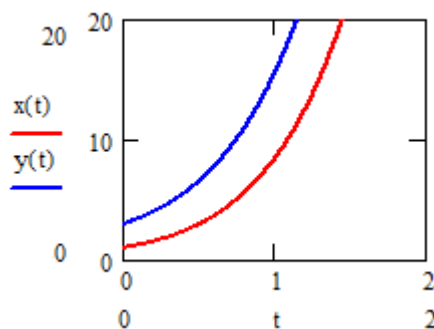
Найдем обратное преобразование Лапласа для $X(s)$.

$$\begin{aligned} & \frac{(s^2 - 4)}{(s^4 - 4s^2 + 4)} \cdot (s + 2) + \frac{2}{(s^4 - 4s^2 + 4)} \cdot (3s + 4) \xrightarrow{\text{convert, parfrac, s}} \frac{(-4 - 2s)}{(s^2 - 2)^2} + \frac{(s + 2)}{(s^2 - 2)} + \frac{(6s + 8)}{(s^2 - 2)^2} \\ & \frac{(-4 - 2s)}{(s^2 - 2)^2} + \frac{(s + 2)}{(s^2 - 2)} + \frac{(6s + 8)}{(s^2 - 2)^2} \xrightarrow{\text{invlaplace, s}} \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sinh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + t \cdot \cosh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + t \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sinh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + \cosh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) \\ & x(t) := \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sinh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + t \cdot \cosh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + t \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sinh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + \cosh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) \end{aligned}$$

Найдем обратное преобразование Лапласа для $Y(s)$.

$$\begin{aligned} & \frac{-2}{(s^4 - 4s^2 + 4)} \cdot (s + 2) + \frac{s^2}{(s^4 - 4s^2 + 4)} \cdot (3s + 4) \xrightarrow{\text{convert, parfrac, s}} \frac{(-4 - 2s)}{(s^2 - 2)^2} + \frac{(6s + 8)}{(s^2 - 2)^2} + \frac{(3s + 4)}{(s^2 - 2)} \\ & \frac{(-4 - 2s)}{(s^2 - 2)^2} + \frac{(6s + 8)}{(s^2 - 2)^2} + \frac{(3s + 4)}{(s^2 - 2)} \xrightarrow{\text{invlaplace, s}} \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sinh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + t \cdot \cosh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + t \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sinh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + 3 \cdot \cosh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) \\ & y(t) := \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sinh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + t \cdot \cosh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + t \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sinh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + 3 \cdot \cosh\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) \end{aligned}$$

В результате строим график и получаем аналогичный с предыдущим результат.



Так же для решения дифференциальных уравнений и систем можно использовать следующие встроенные функции:

rkadapt(y,a,b,n,F) — ищет решение с переменным шагом — если решение меняется медленно, то шаг увеличивается, если функция изменяется быстро, шаг уменьшается.

bulstoer(y,a,b,n,F) — ищет решение методом Bulirsch-Stoer.

Задача 4.4. Решить систему дифференциальных уравнений второго порядка двумя методами с использованием Mathcad.

$$1. \begin{cases} x''(t) = -6 \cdot y(t) \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x''(t) = 5 \cdot y(t) + 3 \cdot x(t) \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) + 4 \cdot y(t) \\ x(0) = 3, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x''(t) = -2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ y''(t) = 8 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 5, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x''(t) = y(t) \\ y''(t) = x(t) \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x''(t) = 2 \cdot x(t) - 4 \cdot y(t) \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) + 3 \cdot y(t) \\ x(0) = 4, \quad x'(0) = 3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x''(t) - 2 \cdot x(t) + 4 \cdot y(t) = 0 \\ y''(t) + 2 \cdot x(t) = 0 \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x''(t) + 7 \cdot x(t) + y(t) = 0 \\ y''(t) + 2 \cdot x(t) = 0 \\ x(0) = 2, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x''(t) + 5 \cdot x(t) - 7 \cdot y(t) = 0 \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) + 4 \cdot y(t) \\ x(0) = 2, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x''(t) = 5 \cdot x(t) + 3 \cdot y(t) \\ y''(t) = x(t) \\ x(0) = 4, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x''(t) + 3 \cdot x(t) + 5 \cdot y(t) = 0 \\ y''(t) - 2 \cdot x(t) = 0 \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x''(t) = y(t) \\ y''(t) = x(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x''(t) = -8 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t) \\ y''(t) = x(t) + 4 \cdot y(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x''(t) - 3 \cdot x(t) - 5 \cdot y(t) = 0 \\ y''(t) - 2 \cdot x(t) = 0 \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x''(t) = -2 \cdot y(t) \\ y''(t) = 2 \cdot x(t) + 4 \cdot y(t) \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x''(t) = 6 \cdot y(t) \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x''(t) = -2 \cdot y(t) - 3 \cdot x(t) \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x''(t) - 6 \cdot x(t) + y(t) = 0 \\ y''(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x''(t) = -2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ y''(t) = 8 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x''(t) = y(t) \\ y''(t) = -x(t) \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x''(t) = -3 \cdot x(t) + 2 \cdot y(t) \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) \\ x(0) = 4, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x''(t) = 6 \cdot y(t) \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x''(t) - 3 \cdot x(t) + y(t) = 0 \\ y''(t) + 7 \cdot x(t) = 0 \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x''(t) = -3 \cdot y(t) + 3 \cdot x(t) \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) + 4 \cdot y(t) \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x''(t) = 2 \cdot x(t) + 3 \cdot y(t) \\ y''(t) = 8 \cdot x(t) + 7 \cdot y(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x''(t) = 2 \cdot y(t) \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x''(t) = 6 \cdot y(t) \\ y''(t) = 2 \cdot x(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x''(t) = 2 \cdot x(t) + 3 \cdot y(t) \\ y''(t) = 8 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x''(t) + 7 \cdot x(t) + y(t) = 0 \\ y''(t) + 2 \cdot x(t) = 0 \\ x(0) = 2, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x''(t) = -y(t) \\ y''(t) = x(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 7, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x''(t) = -4 \cdot y(t) + 3 \cdot x(t) \\ y''(t) = -2 \cdot x(t) + 4 \cdot y(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

5. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

5.1. Марковские процессы. Уравнения Колмогорова-Чепмена для вероятностей состояний

Случайный процесс, протекающий в некоторой системе, называется **марковским** (или «процессом без последствия»), если вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент (t_0) и не зависит от того, когда и при каких обстоятельствах система перешла в это состояние.

Марковский процесс может быть:

- с дискретными состояниями — если состояния системы $S_1, S_2, \dots$ можно перечислить одно за другим, и система переходит из одного состояния в другое скачком (мгновенно);
- с непрерывными состояниями — система плавно переходит из состояния в состояние.

Процесс разряда аккумулятора ноутбука представляет собой непрерывный случайный процесс. Однако, если рассматривать данную систему как работоспособное (батарея заряжена) и нерабочее (батарея разряжена), то имеет место дискретный случайный процесс.

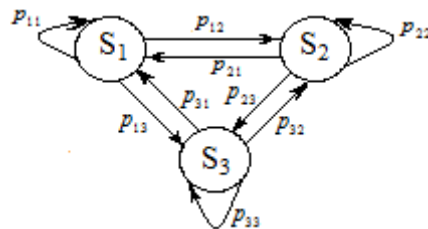
Марковский процесс с дискретными состояниями бывает:

- с дискретным временем — изменение состояний системы происходит в фиксированные (строго определенные) моменты времени;
- с непрерывным временем — переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени.

5.1.1 Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем

Рассмотрим марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем.

Пусть система может находиться в одном из состояний S_1, S_2, S_3 . Переход из состояния в состояние возможен только в моменты $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$. Размеченный граф состояний системы имеет вид



Случайный процесс, происходящий в системе, заключается в том, что система за один шаг может переходить из одного состояния в другое или оставаться в одном и том же состоянии. Например:

$$S_1^0 \rightarrow S_3^1 \rightarrow S_2^2 \rightarrow S_2^3 \rightarrow S_3^4 \text{ или } S_1^0, S_3^1, S_2^2, S_2^3, S_3^4,$$

где S_i^k — i -е состояние системы на k -м шаге.

Данная случайная последовательность событий называется **марковской цепью**.

Пусть $p_i(k)$ — вероятность нахождения системы в i -м состоянии после k шагов (вероятности состояний). Тогда

$p_1(0)$, $p_2(0)$, $p_3(0)$ — вероятности нахождения системы в состояниях S_1 , S_2 , S_3 на нулевом шаге,

$p_1(1)$, $p_2(1)$, $p_3(1)$ — вероятности нахождения системы в состояниях S_1 , S_2 , S_3 после первого шага,
и так далее.

Очевидно, что

$$p_1(k) + p_2(k) + p_3(k) = 1,$$

так как это вероятности несовместных событий, образующих полную группу.

Пусть p_{ij} — вероятность перехода системы из i -ого состояния в j -е.

Матрица вероятностей переходов имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

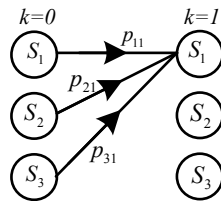
Марковская цепь называется **однородной**, если вероятности переходов p_{ij} не меняются от шага к шагу. В противном случае — **неоднородной**.

Определим вероятности состояний системы.

В начальный момент времени на нулевом шаге ($k=0$) вероятности состояний системы $p_1(0)$, $p_2(0)$ и $p_3(0)$.

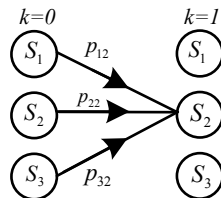
Найдем вероятности нахождения системы в каждом состоянии после первого шага.

В состояние S_1 система может перейти из состояния S_1 с вероятностью p_{11} , из S_2 с вероятностью p_{21} , из S_3 — p_{31} .



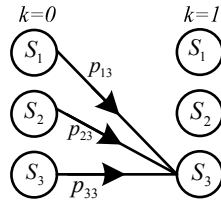
По формуле полной вероятности
 $p_1(1) = p_1(0) \cdot p_{11} + p_2(0) \cdot p_{21} + p_3(0) \cdot p_{31}.$

В состояние S_2 система может перейти из состояния S_1 с вероятностью p_{12} , из S_2 с вероятностью p_{22} , из S_3 — p_{32} .



По формуле полной вероятности
 $p_2(1) = p_1(0) \cdot p_{12} + p_2(0) \cdot p_{22} + p_3(0) \cdot p_{32}.$

В состояние S_3 система может перейти из состояния S_1 с вероятностью p_{13} , из S_2 с вероятностью p_{23} , из S_3 — p_{33} .

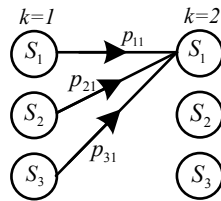


По формуле полной вероятности
 $p_3(1) = p_1(0) \cdot p_{13} + p_2(0) \cdot p_{23} + p_3(0) \cdot p_{33}.$

Таким образом, вероятности нахождения системы в состояниях S_1, S_2, S_3 после первого шага определяются как

$$\begin{cases} p_1(1) = p_1(0) \cdot p_{11} + p_2(0) \cdot p_{21} + p_3(0) \cdot p_{31} \\ p_2(1) = p_1(0) \cdot p_{12} + p_2(0) \cdot p_{22} + p_3(0) \cdot p_{32} \\ p_3(1) = p_1(0) \cdot p_{13} + p_2(0) \cdot p_{23} + p_3(0) \cdot p_{33} \end{cases}$$

На втором шаге в состояние S_1 система может перейти из состояния S_1 с вероятностью p_{11} , из S_2 с вероятностью p_{21} , из S_3 — p_{31} .



По формуле полной вероятности
 $p_1(2) = p_1(1) \cdot p_{11} + p_2(1) \cdot p_{21} + p_3(1) \cdot p_{31}.$

И так далее.

На произвольном шаге k вероятность нахождения системы в i -м состоянии определяется как

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1) \cdot p_{ji}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где n — количество состояний системы.

Рассмотрим неоднородную марковскую цепь, для которой матрицы переходных вероятностей для каждого шага разные.

Пусть $p_{ji}^{(k)}$ — вероятность перехода системы из состояния S_i в состояние S_j после k шагов.

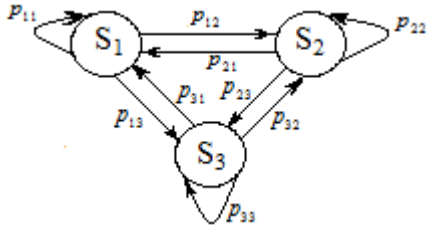
Тогда вероятность нахождения системы в состоянии S_i после k шагов

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1) \cdot p_{ji}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

5.1.2. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

Если система из состояния в состояние переходит не в фиксированные моменты времени, а в случайные, то данная система представляет собой марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем — непрерывная цепь Маркова.

Пусть система может находиться в одном из состояний S_1, S_2, S_3 . Переход из состояния в состояние происходит в случайный момент времени. Размеченный граф состояний системы и матрица переходных вероятностей имеют вид



$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Пусть $p_i(t)$ — вероятность нахождения системы в i -м состоянии.

Рассмотрим $p_1(t)$ — вероятность того, что система находится в состоянии S_1 . Придадим t приращение Δt ($\Delta t \rightarrow 0$) и определим $p_1(t + \Delta t)$ — вероятность того, что в момент времени $t + \Delta t$ система будет находиться в состоянии S_1 . Это может произойти в трех случаях:

1) В момент времени t система находилась в состоянии S_1 и за Δt из него не вышла, т.е. система находилась в состоянии S_1 ($p_1(t)$) и за Δt не перешла в состояния S_2 или S_3 и вероятность данного события ($1 - [p_{12}(\Delta t) + p_{13}(\Delta t)]$).

Тогда вероятность того, что в момент времени t система находилась в состоянии S_1 и за Δt из него не вышла равна

$$p_1(t) \cdot [1 - [p_{12}(\Delta t) + p_{13}(\Delta t)]];$$

2) В момент времени t система находилась в состоянии S_2 ($p_2(t)$) и за Δt перешла в состояние S_1 ($p_{21}(\Delta t)$).

Вероятность данного события: $p_2(t) \cdot p_{21}(\Delta t)$;

3) В момент времени t система находилась в состоянии S_3 ($p_3(t)$) и за Δt перешла в состояние S_1 ($p_{31}(\Delta t)$).

Вероятность данного события: $p_3(t) \cdot p_{31}(\Delta t)$.

Тогда по формуле полной вероятности получим

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) \cdot [1 - [p_{12}(\Delta t) + p_{13}(\Delta t)]] + p_2(t) \cdot p_{21}(\Delta t) + p_3(t) \cdot p_{31}(\Delta t).$$

Введем замену. Если $p_{ij}(\Delta t)$ — вероятность перехода системы из i -го в j -е состояние за время Δt и переход системы из одного состояния в другое может произойти в любой момент времени Δt , то вероятность данного процесса определим как $\frac{p_{ij}}{\Delta t}$ (более подробно введение данной замены будет описано при описании простейшего потока).

Тогда

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$

— интенсивность перехода или плотность вероятности перехода (определяется только для $i \neq j$).

Тогда с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \Delta t.$$

В результате уравнение для вероятности нахождения системы в состоянии S_1 будет иметь вид

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) \cdot [1 - [\lambda_{12} \cdot \Delta t + \lambda_{13} \cdot \Delta t]] + p_2(t) \cdot \lambda_{21} \cdot \Delta t + p_3(t) \cdot \lambda_{31} \cdot \Delta t.$$

После преобразования получим

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12} \cdot p_1(t) - \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{21} \cdot p_2(t) + \lambda_{31} \cdot p_3(t).$$

Предел от данного выражения при $\Delta t \rightarrow 0$ дает производную $p_1(t)$, т. е.

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} \cdot p_1(t) - \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{21} \cdot p_2(t) + \lambda_{31} \cdot p_3(t).$$

Или (для краткости записи опустим t)

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} \cdot p_1 - \lambda_{13} \cdot p_1 + \lambda_{21} \cdot p_2 + \lambda_{31} \cdot p_3 = -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot p_1 + \lambda_{21} \cdot p_2 + \lambda_{31} \cdot p_3.$$

Проведем аналогичные рассуждения для $p_2(t)$ — вероятности нахождения системы в состоянии S_2 . Система может находиться в состоянии S_2 в случаях:

1) В момент времени t система находилась в состоянии S_2 ($p_2(t)$) и за Δt не перешла в состояния S_1 и S_3 ($1 - [p_{21}(\Delta t) + p_{23}(\Delta t)]$).

Вероятность данного события: $p_2(t) \cdot [1 - [p_{21}(\Delta t) + p_{23}(\Delta t)]]$.

2) В момент времени t система находилась в состоянии S_1 ($p_1(t)$) и за Δt перешла в состояние S_2 ($p_{12}(\Delta t)$).

Вероятность данного события: $p_1(t) \cdot p_{12}(\Delta t)$.

3) В момент времени t система находилась в состоянии S_3 ($p_3(t)$) и за Δt перешла в состояние S_2 ($p_{32}(\Delta t)$).

Вероятность данного события: $p_3(t) \cdot p_{32}(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, получим

$$p_2(t + \Delta t) = p_2(t) \cdot [1 - [p_{21}(\Delta t) + p_{23}(\Delta t)]] + p_1(t) \cdot p_{12}(\Delta t) + p_3(t) \cdot p_{32}(\Delta t).$$

После введенной выше замены и преобразований получим

$$p_2(t + \Delta t) = p_2(t) \cdot [1 - [\lambda_{21} \cdot \Delta t + \lambda_{23} \cdot \Delta t]] + p_1(t) \cdot \lambda_{12} \cdot \Delta t + p_3(t) \cdot \lambda_{32} \cdot \Delta t,$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2 + \lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{32} \cdot p_3.$$

Рассуждая аналогично для состояния S_3 , получим

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = -(\lambda_{31} + \lambda_{32}) \cdot p_3 + \lambda_{13} \cdot p_1 + \lambda_{23} \cdot p_2.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний нашей системы имеет вид (**уравнения Колмогорова-Чепмена**):

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot p_1 + \lambda_{21} \cdot p_2 + \lambda_{31} \cdot p_3 \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2 + \lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{32} \cdot p_3 \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = -(\lambda_{31} + \lambda_{32}) \cdot p_3 + \lambda_{13} \cdot p_1 + \lambda_{23} \cdot p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

Заметим, что при решении данной системы можно отбросить любое из первых трех уравнений, так как все три вероятности связаны четвертым уравнением системы.

Для решения данной системы уравнений необходимо задать начальные условия. Эти условия задаются в зависимости от того, в каком состоянии находилась система в начальный момент времени. Для нашей задачи начальные условия могут иметь вид

$$p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0,$$

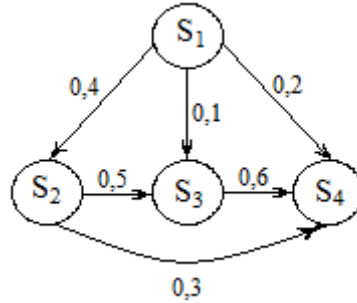
или

$$p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0,$$

или

$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1.$$

Пример 5.1. Система, имеющая 3 степени защиты, подвергается «нападению». Размеченный граф состояний системы имеет вид



Определить вероятности состояний системы после четырех попыток ее взломать.

Решение.

Матрица вероятностей переходов имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В начальный момент система находится в состоянии S_1 — попытки проникнуть в систему нет, значит

$$p_1(0) = 1, p_2(0) = 0, p_3(0) = 0, p_4(0) = 0.$$

После первой попытки взломать систему вероятности состояний будут равны (первая строка матрицы)

$$p_1(1) = 0,3, p_2(1) = 0,4, p_3(1) = 0,1, p_4(1) = 0,2, \text{ так как}$$

$$p_1(1) = p_1(0) \cdot p_{11} + p_2(0) \cdot p_{21} + p_3(0) \cdot p_{31} + p_4(0) \cdot p_{41} = 1 \cdot 0,3 = 0,3;$$

$$p_2(1) = p_1(0) \cdot p_{12} + p_2(0) \cdot p_{22} + p_3(0) \cdot p_{32} + p_4(0) \cdot p_{42} = 1 \cdot 0,4 = 0,4;$$

$$p_3(1) = p_1(0) \cdot p_{13} + p_2(0) \cdot p_{23} + p_3(0) \cdot p_{33} + p_4(0) \cdot p_{43} = 1 \cdot 0,1 = 0,1;$$

$$p_4(1) = p_1(0) \cdot p_{14} + p_2(0) \cdot p_{24} + p_3(0) \cdot p_{34} + p_4(0) \cdot p_{44} = 1 \cdot 0,2 = 0,2.$$

После второй попытки:

$$p_1(2) = p_1(1) \cdot p_{11} + p_2(1) \cdot p_{21} + p_3(1) \cdot p_{31} + p_4(1) \cdot p_{41} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09;$$

$$p_2(2) = p_1(1) \cdot p_{12} + p_2(1) \cdot p_{22} + p_3(1) \cdot p_{32} + p_4(1) \cdot p_{42} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,2;$$

$$p_3(2) = p_1(1) \cdot p_{13} + p_2(1) \cdot p_{23} + p_3(1) \cdot p_{33} + p_4(1) \cdot p_{43} = 0,3 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,27;$$

$$p_4(2) = p_1(1) \cdot p_{14} + p_2(1) \cdot p_{24} + p_3(1) \cdot p_{34} + p_4(1) \cdot p_{44} = \\ = 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 1 = 0,44.$$

После третьей попытки:

$$p_1(3) = p_1(2) \cdot p_{11} + p_2(2) \cdot p_{21} + p_3(2) \cdot p_{31} + p_4(2) \cdot p_{41} = 0,09 \cdot 0,3 = 0,027;$$

$$p_2(3) = p_1(2) \cdot p_{12} + p_2(2) \cdot p_{22} + p_3(2) \cdot p_{32} + p_4(2) \cdot p_{42} = 0,09 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,076;$$

$$p_3(3) = p_1(2) \cdot p_{13} + p_2(2) \cdot p_{23} + p_3(2) \cdot p_{33} + p_4(2) \cdot p_{43} =$$

$$= 0,09 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,27 \cdot 0,4 = 0,217;$$

$$p_4(3) = p_1(2) \cdot p_{14} + p_2(2) \cdot p_{24} + p_3(2) \cdot p_{34} + p_4(2) \cdot p_{44} = \\ = 0,09 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,27 \cdot 0,6 + 0,44 \cdot 1 = 0,68.$$

После четвертой попытки:

$$p_1(4) = p_1(3) \cdot p_{11} + p_2(3) \cdot p_{21} + p_3(3) \cdot p_{31} + p_4(3) \cdot p_{41} = 0,027 \cdot 0,3 = 0,0081;$$

$$p_2(4) = p_1(3) \cdot p_{12} + p_2(3) \cdot p_{22} + p_3(3) \cdot p_{32} + p_4(3) \cdot p_{42} = 0,027 \cdot 0,4 + 0,076 \cdot 0,2 = 0,026;$$

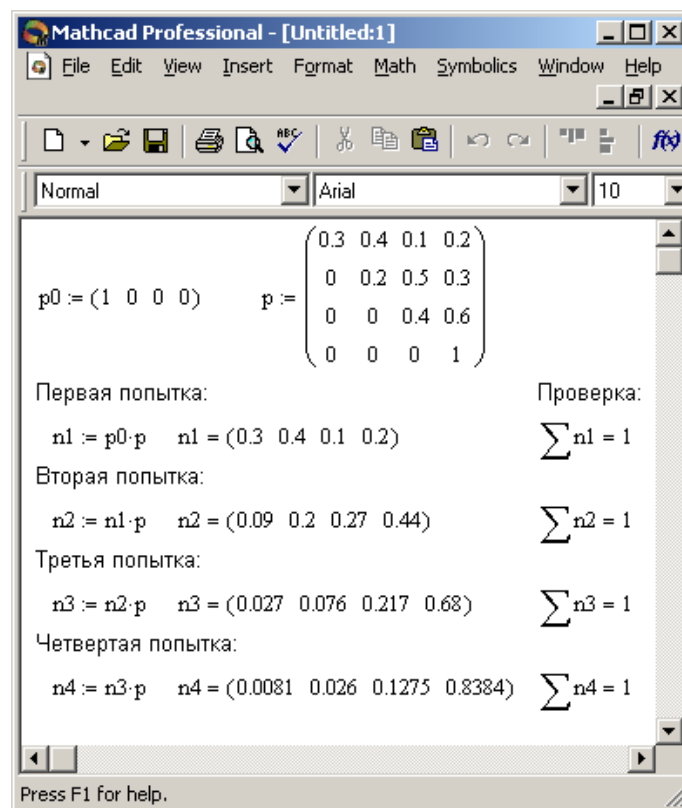
$$p_3(4) = p_1(3) \cdot p_{13} + p_2(3) \cdot p_{23} + p_3(3) \cdot p_{33} + p_4(3) \cdot p_{43} = \\ = 0,0027 \cdot 0,1 + 0,076 \cdot 0,5 + 0,217 \cdot 0,4 = 0,125;$$

$$p_4(4) = p_1(3) \cdot p_{14} + p_2(3) \cdot p_{24} + p_3(3) \cdot p_{34} + p_4(3) \cdot p_{44} = \\ = 0,0027 \cdot 0,2 + 0,076 \cdot 0,3 + 0,217 \cdot 0,6 + 0,68 \cdot 1 = 0,834.$$

Таким образом, после четырех попыток злоумышленника проникнуть в систему вероятности состояний равны:

- система не взломана — $p_1(4) = 0,0081$;
- пройден первый рубеж защиты — $p_2(4) = 0,026$;
- пройден второй рубеж защиты — $p_3(4) = 0,125$;
- система взломана — $p_4(4) = 0,834$.

Решение этой же задачи в матричной форме в среде Mathcad имеет вид:



Пример 5.2. Система может находиться в одном из трех состояний S_1, S_2, S_3 . Матрица вероятностей переходов имеет вид

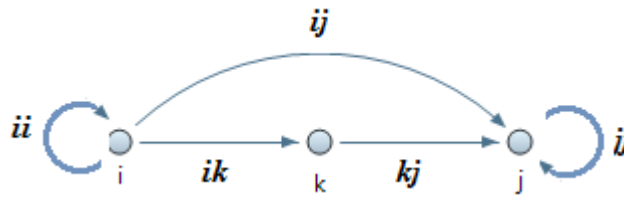
$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Найти вероятность перехода системы из состояния S_1 в состояние S_2 за три шага.

Решение.

Элементы матрицы p_{ij} размера $n \times n$ дают вероятности переходов в системе за один шаг. Переход системы $S_i \rightarrow S_j$ будем рассматривать как переход системы из состояния S_i в некоторое промежуточное состояние S_k за один шаг, а за второй шаг из S_k в S_j . Тогда для перехода $S_i \rightarrow S_j$ за два шага (в результате нужно оказаться в S_j) событие будет заключаться в следующем:

- система может остаться в состоянии S_i и сразу перескочить в состояние S_j — вероятность этого события $p_{ii} p_{ij}$;
- система придет из S_i в S_j и останется в состоянии S_j — $p_{ij} p_{jj}$;
- система из S_i перейдет в S_k и из S_k перейдет в S_j — $p_{ik} p_{kj}$.



Таким образом, вероятность перехода $S_i \rightarrow S_j$ за два шага

$$p_{ij}^{(2)} = p_{ii} p_{ij} + p_{ij} p_{jj} + p_{ik} p_{kj}.$$

Учитывая, что система может находиться или в первом, или во втором, или в третьем состоянии, данное соотношение можно переписать в виде

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n p_{ik} p_{kj}.$$

В общем случае для перехода $S_i \rightarrow S_j$ за m шагов будет справедливо

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^n p_{ik} p_{kj}^{(m-1)} = \sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m-1)} p_{kj},$$

где n — размерность матрицы (возможное число состояний системы).

Найдем $p_{12}^{(3)}$. Полагая $m = 3$, получим

$$p_{12}^{(3)} = \sum_{k=1}^3 p_{1k} p_{k2}^{(3-1)} = p_{11} p_{12}^{(2)} + p_{12} p_{22}^{(2)} + p_{13} p_{32}^{(2)}.$$

Для нашей системы вероятности переходов $S_i \rightarrow S_j$ за 1 шаг заданы матрицей вероятностей переходов.

Найдем $p_{12}^{(2)}$, $p_{22}^{(2)}$, $p_{32}^{(2)}$. Полагая $m = 2$, получим

$$p_{12}^{(2)} = \sum_{k=1}^3 p_{1k} p_{k2} = p_{11} p_{12} + p_{12} p_{22} + p_{13} p_{32} = 0,6 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,7 = 0,14,$$

$$p_{22}^{(2)} = \sum_{k=1}^3 p_{2k} p_{k2} = p_{21} p_{12} + p_{22} p_{22} + p_{23} p_{32} = 0,5 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,39,$$

$$p_{32}^{(2)} = \sum_{k=1}^3 p_{3k} p_{k2} = p_{31} p_{12} + p_{32} p_{22} + p_{33} p_{32} = 0,3 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,7 = 0,13.$$

Таким образом,

$$p_{12}^{(3)} = p_{11} p_{12}^{(2)} + p_{12} p_{22}^{(2)} + p_{13} p_{32}^{(2)} = 0,6 \cdot 0,14 + 0,2 \cdot 0,39 + 0,2 \cdot 0,13 = 0,188.$$

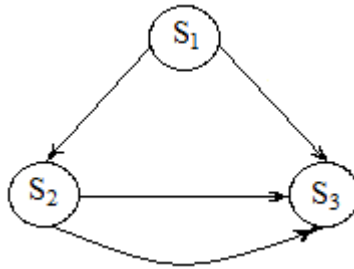
Пример 5.3. Система обеспечения безопасности может находиться в исправном состоянии, иметь незначительные для основной работы поломки и в нерабочем состоянии. С течением времени, что естественно, вероятность перехода в нерабочее состояние увеличивается. Матрицы вероятностей перехода из состояния в состояние после первого и второго года работы имеют вид

$$p_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить вероятности состояний системы после двух лет работы.

Решение.

Пусть S_1 — исправное состояние системы, S_2 — система имеет незначительные повреждения, не мешающие выполнению основных функций, S_3 — нерабочее состояние. Тогда граф работы технического устройства имеет вид



В начальный момент система находится в состоянии S_1 , значит

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0, \quad p_3(0) = 0.$$

После первого года работы вероятности состояний будут равны (первая строка первой матрицы)

$$p_1(1) = 0,7, \quad p_2(1) = 0,2, \quad p_3(1) = 0,1.$$

После второго года работы вероятности состояний системы:

$$p_1(2) = p_1(1) \cdot p_{11}^{(2)} + p_2(1) \cdot p_{21}^{(2)} + p_3(1) \cdot p_{31}^{(2)} = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35;$$

$$p_2(2) = p_1(1) \cdot p_{12}^{(2)} + p_2(1) \cdot p_{22}^{(2)} + p_3(1) \cdot p_{32}^{(2)} = 0,7 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,33;$$

$$p_3(2) = p_1(1) \cdot p_{13}^{(2)} + p_2(1) \cdot p_{23}^{(2)} + p_3(1) \cdot p_{33}^{(2)} = 0,7 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 1 = 0,32.$$

Таким образом, вероятности нахождения устройства в каждом состоянии после двух лет работы при заданных условиях приблизительно одинаковые.

Решение данной задачи в матричной форме в Mathcad имеет вид

$$A := \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{\langle 0 \rangle T} \cdot B = (0.35 \quad 0.33 \quad 0.32)$$

Пример 5.4. Компьютеры отказывают в среднем 0,5 раз в год. Отказавшую ЭВМ отдают в ремонт, который длится в среднем 1 месяц. В 90 % случаев ремонт оказывается успешным, в противном случае ЭВМ списывают. Рассмотрим процесс работы в динамике в предположении, что все ЭВМ в начальный момент времени находились в исправном состоянии.

Решение.

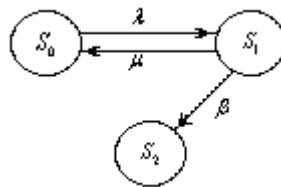
Система может находиться в следующих состояниях:

S_0 — компьютеры исправны;

S_1 — компьютеры в ремонте;

S_2 — компьютер утилизирован.

Размеченный граф состояний работы системы имеет вид



Уравнения Колмогорова-Чепмена для данной системы имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda \cdot p_0(t) - (\mu + \beta) \cdot p_1(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \beta \cdot p_1(t) \end{cases}$$

Здесь $\lambda = 0,5$ — интенсивность перехода из состояния S_0 в S_1 ;

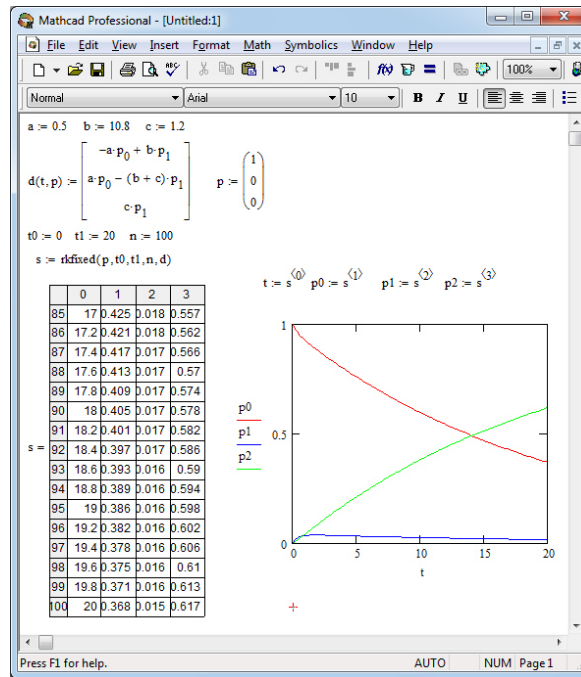
$\mu = \frac{1}{1/12} \cdot 0,9 = 10,8$ — интенсивность перехода из состояния S_1 в S_0 ;

$\beta = \frac{1}{1/12} \cdot 0,1 = 1,2$ — интенсивность перехода из состояния S_1 в S_2 .

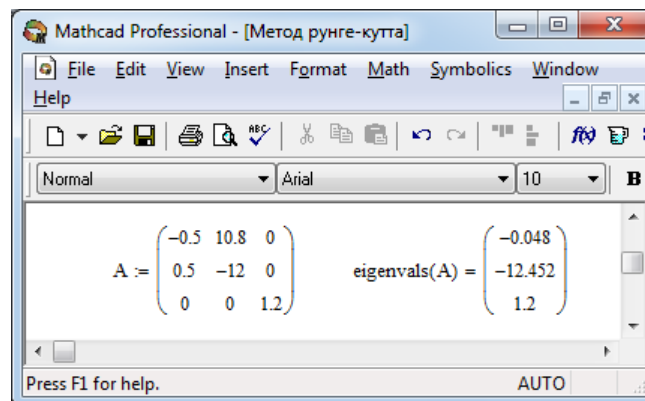
Аналитическое решение данной системы достаточно трудоемкий процесс, поэтому применим численный метод Рунге-Кутты с фиксированным шагом. Решение данной задачи в Mathcad имеет вид

Учитывая, что в начальный момент все компьютеры исправны, то вектор начальных состояний представим как

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Проверим решение системы дифференциальных уравнений на устойчивость. Для этого найдем собственные числа матрицы, составленной из основных коэффициентов системы уравнений.



Так как один из корней характеристического уравнения матрицы A имеет положительную действительную часть, то согласно теореме об устойчивости решения системы линейных однородных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, решение системы не устойчиво.

Таким образом, анализ результатов показывает, что система не выходит в так называемый «стационарный» (установившийся) режим, так как данный процесс не обладает свойством эргодичности, что видно из графа. О данном свойстве марковских цепей будет описано ниже.

Анализ результатов показывает, что через 14 лет ремонтировать ЭВМ не имеет смысла, так как вероятность сдачи компьютеров в утиль превышает вероятность безотказной работы.

Задача 5.1. Компьютер может находиться в одном из состояний: полностью исправен, отказал один из динамиков, вышли из строя несколько микросхем оперативной памяти, поломка микропроцессора, что задано матрицей вероятностей переходов.

Предполагается, что в начальный момент компьютер исправен.

Определить вероятности состояний системы после трех моментов времени.

№ варианта	
1.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

№ варианта	
16.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
17.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
18.	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
19.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
20.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
21.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
22.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
23.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
14.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
26.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
27.	$\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
28.	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
29.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
30.	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 5.2. Система, имеющая 4 степени защиты, подвергается нападению. Заданы матрицы вероятностей переходов после первой, второй, третьей и четвертой попыток проникновения в систему. Определить вероятность проникновения в систему после четвертой попытки.

№ варианта	
1-5	$p_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,05 & 0,05 \\ 0 & 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $p_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,95 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
6-10	$p_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,85 & 0,15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $p_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,05 & 0,05 \\ 0 & 0,45 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
11-15	$p_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,15 & 0,15 \\ 0 & 0,2 & 0,35 & 0,45 \\ 0 & 0 & 0,45 & 0,55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $p_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,35 & 0,55 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
16-20	$p_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,35 & 0,05 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $p_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,35 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

21-25	$p_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,05 & 0,05 \\ 0 & 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $p_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,35 & 0,15 & 0,25 \\ 0 & 0,4 & 0,55 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
25-30	$p_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $p_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача 5.3. Работа системы описывается матрицей интенсивностей переходов при заданных начальных условиях.

Необходимо:

1. построить размеченный граф работы системы;
2. записать уравнения Колмогорова-Чепмена;
3. посмотреть работу системы в динамике, построив модель в Mathcad;
4. сделать вывод о работоспособности системы.

№ варианта	
1.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 5 & 2 \\ 5 & -\lambda_1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -\lambda_2 & 3 \\ 11 & 4 & 7 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
2.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & -\lambda_2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_1(0) = 1,$ $p_0(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$

№ варианта	
16.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 & 7 \\ 12 & 3 & -\lambda_2 & 8 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_1(0) = 1,$ $p_0(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
17.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 & 12 & 1 \\ 11 & 2 & -\lambda_2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$

3.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 10 & 2 & 2 \\ 5 & -\lambda_1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -\lambda_2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$	18.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 4 & 10 & 2 \\ 3 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_3(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_2(0) = 0.$
4.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -\lambda_1 & 20 & 5 \\ 2 & 3 & -\lambda_2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_3(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_2(0) = 0.$	19.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
5.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & -\lambda_1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -\lambda_2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	20.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & -\lambda_1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda_2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_1(0) = 1,$ $p_0(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
6.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & -\lambda_1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	21.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 12 & 5 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 4 \\ 11 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
7.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & -\lambda_1 & 9 & 4 \\ 6 & 1 & -\lambda_2 & 3 \\ 8 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	22.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
8.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & -\lambda_1 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	23.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 21 & 5 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$

9.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & -\lambda_2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	24.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 11 & 12 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 6 \\ 7 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
10.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 6 & 2 & 7 \\ 7 & -\lambda_1 & 5 & 5 \\ 7 & 3 & -\lambda_2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$	25.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & -\lambda_2 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
11.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 7 & 3 & 6 \\ 7 & -\lambda_1 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & -\lambda_2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$	26.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
12.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 4 & 8 & 2 \\ 7 & -\lambda_1 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	27.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
13.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 4 & 7 & 3 \\ 8 & -\lambda_1 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	28.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$
14.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$	29.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda_1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & -\lambda_2 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$

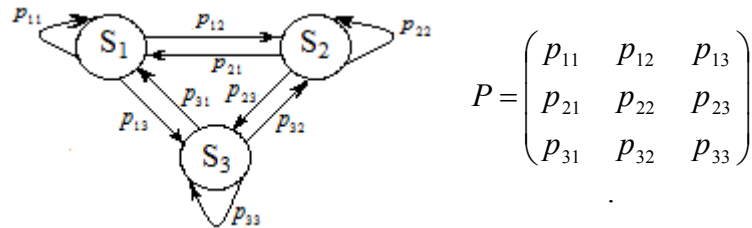
15.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -\lambda_1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda_2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$

30.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & -\lambda_1 & 2 & 5 \\ 10 & 8 & -\lambda_2 & 3 \\ 12 & 11 & 9 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$

5.2. Оценка вероятностей, входящих в состав матриц вероятностей переходов

При анализе реальных систем, которые могут находиться в нескольких альтернативных состояниях $S_1, S_2, \dots$, возникает задача определения значений оценок вероятностей переходов p_{ij} из одного состояния в другое. Указанные вероятности составляют матрицу вероятностей переходов. Определим значения указанных вероятностей с помощью метода анализа иерархий (МАИ) — метода Саати.

Пример 5.5. Пусть система может находиться в одном из состояний S_1, S_2, S_3 . Переход из состояния в состояние происходит в случайный момент времени. Размеченный граф состояний системы и матрица переходных вероятностей имеют вид



Определить значения вероятностей переходов p_{ij} .

Решение.

Поставим в соответствие каждому значению условной вероятности переход (стрелочку) из состояния S_i в состояние S_j ($p_{ij} \rightarrow s_{ij}$). Рассмотрим множество переходов, образующих полную группу для каждого состояния. Для нашего случая таких групп будет три, соответствующие строкам матрицы (стрелочки, выходящие из состояния).

С помощью мнений экспертов проведем анализ: какой из переходов обладает большим приоритетом по сравнению с другими, входящими в выбранную «тройку». Если экспертов несколько, то их мнение усредняется.

Пусть необходимо сравнить три перехода. Результаты мнений экспертов занесем в таблицу.

	S_1	S_2	S_3
S_1			
S_2			
S_3			

Эксперты попарно сравнивают переходы, «образующие полную группу». Пусть сравниваются два перехода S_1 и S_2 ; если:

- S_1 и S_2 одинаково возможны, записываем 1 в позицию (S_1, S_2) : S_1 — строка, S_2 — столбец;
- S_1 незначительно важнее S_2 , записываем 3;
- S_1 значительно важнее S_2 , записываем 5;
- S_1 явно важнее S_2 , записываем 7;
- S_1 по своей значительности абсолютно превосходит S_2 , записываем 9.

Так же можно использовать числа 2, 4, 6, 8 для более «мягкого» сравнения.

Если при сравнении S_1 и S_2 получим обратное суждение, то на пересечении строки S_1 и столбца S_2 запишем обратное значение, введенных выше чисел.

При сравнении перехода с самим собой имеем одинаковую важность, поэтому на главной диагонали таблицы будут стоять единицы. Под главной диагональю будем понимать диагональ из верхнего левого угла в правый нижний угол.

После проведенного анализа полученные числа будут записаны над главной диагональю. В оставшиеся пустые ячейки запишем числа по правилу

если $x_{ij} = \alpha$, то $x_{ji} = 1/\alpha$.

Таким образом, получим таблицу

	S_1	S_2	S_3
S_1	1	α	β
S_2	$1/\alpha$	1	γ
S_3	$1/\beta$	$1/\gamma$	1

Или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1/\alpha & 1 & \gamma \\ 1/\beta & 1/\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть при сравнении экспертами первой тройки переходов состояния S_1 получены следующие результаты

$$\begin{matrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{11} & \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} \\ s_{12} & \\ s_{13} & \end{matrix},$$

т. е. переход s_{12} незначительно важнее перехода s_{11} , переход s_{11} значительно важнее s_{13} , при этом переход s_{12} явно важнее s_{13} . Отсюда, связь $s_{12} \rightarrow s_{11}$ имеет обратное значение связи $s_{11} \rightarrow s_{12}$ и т.д.

Найдем собственные значения полученной матрицы $|A - \lambda E| = 0$, где E — единичная матрица.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/3 & 5 \\ 3 & 1-\lambda & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\left[(1-\lambda)^3 + \frac{15}{7} + \frac{7}{15} \right] - [(1-\lambda) + (1-\lambda) + (1-\lambda)] = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{64}{105} = 0$$

Решение данного уравнения дает три корня, один из которых действительный $\lambda = 3,065$ (из всех корней выбираем только действительные), являющийся собственным значением исследуемой матрицы. Если при нахождении собственных значений матрицы получим несколько действительных корней, то необходимо взять число, имеющее наибольшее значение.

Нахождение собственных значений матрицы в Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \quad n := \text{eigenvals}(A) \quad n = \begin{pmatrix} 3.065 \\ -0.032 + 0.445i \\ -0.032 - 0.445i \end{pmatrix}$$

Матрица A должна быть согласованной. В общем случае, под **согласованностью** подразумевается то, что при наличии массива необработанных данных все другие данные логически могут быть получены из них.

Рассчитаем индекс согласованности

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - m}{m - 1},$$

где m — размерность матрицы парных сравнений.

На основе индекса согласованности рассчитывается показатель отношения согласованности $ОС$

$$ОС = \frac{ИС}{СИ},$$

где $СИ$ — среднее значение показателя случайного индекса.

Средние значения случайного индекса $СИ$ для матриц разного порядка приведены в таблице. Данные значения представляют собой средние индекса согласованности для обратно-симметричных матриц с соответствующими обратными величинами. Данные для матриц были получены путем генерирования случайной величины в диапазоне от 1 до 9.

m	1	2	3	4	5	6	7
$СИ$	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32

m	8	9	10	11	12	13	14	15
$СИ$	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59

Матрица считается хорошо согласованной, если $ОС \leq 0,1$. Для того, чтобы матрица была согласована необходимо на этапе выставления экспертами оценок избегать крайних суждений.

В нашем случае данное условие выполняется. Учитывая, что $\lambda_{\max} = 3,065$ и $m = 3$ имеем

$$ИС = \frac{3,065 - 3}{3 - 1} \approx 0,032, \quad ОС = \frac{0,032}{0,58} \approx 0,055 < 0,1.$$

Под **собственным вектором матрицы** A будем понимать вектор B , при умножении которого на матрицу получим вектор коллинеарный вектору B .

Согласно определению собственного вектора, для нашего случая можно записать

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix} = 3,065 \cdot \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix}$ — собственный вектор исследуемой матрицы;

λ — собственное значение.

Данное соотношение соответствует системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} p_{11} + \frac{1}{3}p_{12} + 5p_{13} = 3,065p_{11} \\ 3p_{11} + p_{12} + 7p_{13} = 3,065p_{12} \\ \frac{1}{5}p_{11} + \frac{1}{7}p_{12} + p_{13} = 3,065p_{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2,065p_{11} + \frac{1}{3}p_{12} + 5p_{13} = 0 \\ 3p_{11} - 2,065p_{12} + 7p_{13} = 0 \\ \frac{1}{5}p_{11} + \frac{1}{7}p_{12} - 2,065p_{13} = 0 \end{cases}.$$

В данной системе уравнений одно уравнение является линейной комбинацией двух других, поэтому вместо последнего уравнения (или любого из трех) запишем нормировочное уравнение

$$\begin{cases} -2,065p_{11} + \frac{1}{3}p_{12} + 5p_{13} = 0 \\ 3p_{11} - 2,065p_{12} + 7p_{13} = 0 \\ p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1 \end{cases}.$$

Решение данного уравнения дает вектор

$$\begin{pmatrix} -2,065 & \frac{1}{3} & 5 \\ 3 & -2,065 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,279 \\ 0,649 \\ 0,072 \end{pmatrix},$$

или

$$(p_{11} \quad p_{12} \quad p_{13}) = (0,279 \quad 0,649 \quad 0,072).$$

Таким образом, получены вероятности переходов для состояния S_1 (первая строка искомой матрицы).

Аналогично найдем вероятности переходов для состояний S_2 и S_3 .

Пусть при сравнении экспертами переходов состояний S_2 и S_3 получены следующие результаты

$$\begin{matrix} s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{21} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \\ s_{22} & \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ s_{23} & \begin{pmatrix} 1/9 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} s_{31} & s_{32} & s_{33} \\ s_{31} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ s_{32} & \begin{pmatrix} 1/5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{33} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Рассуждая аналогично, получим векторы вероятностей переходов для состояний S_2 и S_3

$$\begin{aligned} (p_{21} \quad p_{22} \quad p_{23}) &= (0,727 \quad 0,2 \quad 0,073), \\ (p_{31} \quad p_{32} \quad p_{33}) &= (0,637 \quad 0,258 \quad 0,105). \end{aligned}$$

Окончательно матрица переходных вероятностей будет иметь следующие значения

$$P = \begin{pmatrix} 0,729 & 0,649 & 0,072 \\ 0,727 & 0,2 & 0,073 \\ 0,637 & 0,258 & 0,105 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения вероятностей переходов можно воспользоваться Mathcad. Так для состояния S_1 имеем:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

$n := \text{eigenvals}(A)$ - Определяем собственные значения матрицы A .

$$n = \begin{pmatrix} 3.065 \\ -0.032 + 0.445i \\ -0.032 - 0.445i \end{pmatrix} \quad \text{Выбираем максимальное действительное число.}$$

$v := \text{eigenvecs}(A)$ - Определяем собственные векторы матрицы A .

$$v = \begin{pmatrix} 0.393 & -0.196 + 0.34i & -0.196 - 0.34i \\ 0.914 & 0.914 & 0.914 \\ 0.101 & -0.051 - 0.088i & -0.051 + 0.088i \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Каждому собственному значению из} \\ \text{вектора } n \text{ соответствует собственный вектор} \\ \text{(столбец) матрицы } v. \end{array}$$

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.393 \\ 0.914 \\ 0.101 \end{pmatrix} \quad \sum v^{(0)} = 1.408$$

Пронормируем вектор и получим искомый вектор вероятностей переходов.

$$p := \frac{v^{(0)}}{\sum v^{(0)}} \quad p = \begin{pmatrix} 0.279 \\ 0.649 \\ 0.072 \end{pmatrix}$$

Для проверки полученного результата можно найти сумму элементов полученного вектора, которая должна быть равна единице.

Задача 5.4. Система может находиться в одном из четырех состояний S_1, S_2, S_3 и S_4 . Основываясь на мнения экспертов, были получены матрицы сравнения важности переходов для каждого состояния. Найти матрицу переходных вероятностей.

№ варианта	
1-5	$ \begin{matrix} s_{11} & \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 1 & 3 & 1/4 & 7 \end{pmatrix} & s_{21} & \begin{pmatrix} s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ s_{12} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} & s_{22} & \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 1/7 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{13} & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} & s_{23} & \begin{pmatrix} 1/5 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ s_{14} & \begin{pmatrix} 1/7 & 1/5 & 9 & 1 \end{pmatrix} & s_{24} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 & 1/6 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , \begin{matrix} s_{31} & \begin{pmatrix} s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ 1 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix} & s_{41} & \begin{pmatrix} s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \\ 1 & 1/5 & 1/9 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{32} & \begin{pmatrix} 1/8 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} & s_{42} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1/6 & 1/5 \end{pmatrix} \\ s_{33} & \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1 & 3 \end{pmatrix} & s_{43} & \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} \\ s_{34} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} & s_{44} & \begin{pmatrix} 1/5 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} . $
6-10	$ \begin{matrix} s_{11} & \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 1 & 7 & 1/5 & 3 \end{pmatrix} & s_{21} & \begin{pmatrix} s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ 1 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\ s_{12} & \begin{pmatrix} 17/3 & 1 & 1/2 & 5 \end{pmatrix} & s_{22} & \begin{pmatrix} 1/5 & 1 & 1/6 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{13} & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1/7 \end{pmatrix} & s_{23} & \begin{pmatrix} 1/3 & 6 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} \\ s_{14} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 & 7 & 1 \end{pmatrix} & s_{24} & \begin{pmatrix} 1/7 & 1/5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , \begin{matrix} s_{31} & \begin{pmatrix} s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ 1 & 2 & 1/4 & 7 \end{pmatrix} & s_{41} & \begin{pmatrix} s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \\ s_{32} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} & s_{42} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{33} & \begin{pmatrix} 4 & 1/3 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} & s_{43} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} \\ s_{34} & \begin{pmatrix} 1/7 & 1/5 & 9 & 1 \end{pmatrix} & s_{44} & \begin{pmatrix} 1/7 & 1/5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} . $
11-15	$ \begin{matrix} s_{11} & \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 1 & 1/3 & 1/4 & 7 \end{pmatrix} & s_{21} & \begin{pmatrix} s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ 1 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ s_{12} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} & s_{22} & \begin{pmatrix} 1/7 & 1 & 1/7 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{13} & \begin{pmatrix} 4 & 1/3 & 1 & 1/6 \end{pmatrix} & s_{23} & \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ s_{14} & \begin{pmatrix} 1/7 & 1/5 & 6 & 1 \end{pmatrix} & s_{24} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 & 1/6 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , \begin{matrix} s_{31} & \begin{pmatrix} s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ 1 & 8 & 5 & 0 \end{pmatrix} & s_{41} & \begin{pmatrix} s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \\ 1 & 1/5 & 1/9 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{32} & \begin{pmatrix} 1/8 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} & s_{42} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1/6 & 1/5 \end{pmatrix} \\ s_{33} & \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1 & 3 \end{pmatrix} & s_{43} & \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} \\ s_{34} & \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} & s_{44} & \begin{pmatrix} 1/5 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} . $

16-20	$ \begin{matrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{11} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/4 & 7 \end{pmatrix} \\ s_{12} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{13} & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} \\ s_{14} & \begin{pmatrix} 1/7 & 1/5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , \begin{matrix} s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{21} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\ s_{22} & \begin{pmatrix} 1/5 & 1 & 1/6 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{23} & \begin{pmatrix} 1/3 & 6 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} \\ s_{24} & \begin{pmatrix} 1/7 & 1/5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , $ $ \begin{matrix} s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{31} & \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ s_{32} & \begin{pmatrix} 1/8 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ s_{33} & \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ s_{34} & \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , \begin{matrix} s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \\ s_{41} & \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/9 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{42} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1/6 & 1/5 \end{pmatrix} \\ s_{43} & \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} \\ s_{44} & \begin{pmatrix} 1/5 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} . $
21-25	$ \begin{matrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{11} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 7 \end{pmatrix} \\ s_{12} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{13} & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} \\ s_{14} & \begin{pmatrix} 1/7 & 1/5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , \begin{matrix} s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{21} & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ s_{22} & \begin{pmatrix} 1/7 & 1 & 1/7 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{23} & \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ s_{24} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 & 1/6 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , $ $ \begin{matrix} s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{31} & \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ s_{32} & \begin{pmatrix} 1/8 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ s_{33} & \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ s_{34} & \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , \begin{matrix} s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \\ s_{41} & \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{42} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1/6 & 1/5 \end{pmatrix} \\ s_{43} & \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} \\ s_{44} & \begin{pmatrix} 1/5 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} . $
25-30	$ \begin{matrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{11} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ s_{12} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{13} & \begin{pmatrix} 4 & 1/2 & 1 & 1/9 \end{pmatrix} \\ s_{14} & \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , \begin{matrix} s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{21} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ s_{22} & \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 1/7 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{23} & \begin{pmatrix} 1/5 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ s_{24} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , $ $ \begin{matrix} s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{31} & \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ s_{32} & \begin{pmatrix} 1/8 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ s_{33} & \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ s_{34} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} , \begin{matrix} s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \\ s_{41} & \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/9 & 5 \end{pmatrix} \\ s_{42} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1/8 & 1/5 \end{pmatrix} \\ s_{43} & \begin{pmatrix} 9 & 8 & 1 & 1/7 \end{pmatrix} \\ s_{44} & \begin{pmatrix} 1/5 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} . $

5.3. Простейший поток событий, свойства

Поток событий — последовательность однородных событий, поступающих в случайные моменты времени.

Потоком однородных событий называется конечная или счетная последовательность $\{\tau_n\}$ случайных величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве, при условии, что в любой фиксированный интервал времени с вероятностью единица попадает конечное число этих величин.

Простейшим называется поток однородных событий, обладающий свойствами:

1. **Стационарность** — все вероятностные характеристики не меняются со временем.

Для любой группы из конечного числа непересекающихся отрезков времени вероятность появления в них соответственно $k_1, k_2, \dots, k_n$ событий зависит только от этих чисел и от длин их расположения на оси времени. В частности, вероятность появления k событий в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ не зависит от t и является функцией только переменных k и Δt .

2. **Отсутствие последействия** — независимость появления того или иного числа событий в непересекающихся отрезках времени.

Вероятность наступления k событий в течение промежутка $(t, t + \Delta t)$ не зависит от того, сколько и каким образом события поступали до этого промежутка.

3. **Ординарность** — практическая невозможность появления двух или нескольких событий в один и тот же момент времени.

Примеры: поток требований при обращении к серверу, телефонные звонки, обращение граждан в организацию и т.п.

Необходимо отметить, что в реальности данные свойства не соблюдаются.

1. Так поток требований, обусловленный обращением к серверу, в разное время суток различен, т.е. свойство стационарности нарушается. Однако, если рассматривать ограниченный промежуток времени, то данное предположение о стационарности потока служит достаточным приближением.

2. Обращение к серверу от одного пользователя может повлечь за собой большое количество запросов от других пользователей, т.е. нарушается свойство отсутствия последействия. Но в настоящее время мощности серверов достаточно, чтобы «не замечать» большого количества запросов.

3. Одновременный набор одинакового номера двумя абонентами телефонной сети в настоящее время не редкость, что влечет не соблюдение ординарности входного потока.

Однако, при изучении реальных систем, простейший поток, обладающий указанными свойствами, принимается за отправную точку.

Пусть $p_n(\Delta t)$ — вероятность того, что за время Δt наступит ровно n событий ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Рассмотрим полную группу несовместных событий, для которых по определению

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(\Delta t) = 1. \quad (1)$$

Пусть $p_{>1}(\Delta t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n(t, t + \Delta t)$ — вероятность того, что за время Δt наступило более одного события. Тогда (1) примет вид

$$p_0(\Delta t) + p_1(\Delta t) + p_{>1}(\Delta t) = 1. \quad (2)$$

Формализуя свойство ординарности, можно записать

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{>1}(\Delta t)}{\Delta t} = 0, \quad \text{или} \quad p_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t), \quad (3)$$

где $o(\Delta t)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем наименьшая из вероятностей $p_0(\Delta t)$ и $p_1(\Delta t)$. Отметим, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} p_n(\Delta t)$ бесконечный и при $n \rightarrow \infty$ сумма может и не быть бесконечно малой величиной.

Пусть $M[\xi(\Delta t)]$ — математическое ожидание числа событий, появившихся за время Δt . Тогда, по определению, для дискретной случайной величины можем записать

$$M[\xi(\Delta t)] = 0 \cdot p_0(\Delta t) + 1 \cdot p_1(\Delta t) + 2 \cdot p_2(\Delta t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n(\Delta t).$$

С учетом (3) данное выражение примет вид

$$M[\xi(\Delta t)] = 0 \cdot p_0(\Delta t) + 1 \cdot p_1(\Delta t) + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot o(\Delta t),$$

или учитывая свойство бесконечно малых имеем

$$M[\xi(\Delta t)] = 0 \cdot p_0(\Delta t) + 1 \cdot p_1(\Delta t) + o(\Delta t) = p_1(\Delta t) + o(\Delta t).$$

Разделим полученное равенство на Δt

$$\frac{M[\xi(\Delta t)]}{\Delta t} = \frac{p_1(\Delta t)}{\Delta t} + o(\Delta t).$$

Величина

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_1(\Delta t)}{\Delta t}$$

называется **параметром потока**, а величина

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[\xi(\Delta t)]}{\Delta t}$$

называется **интенсивностью потока** — среднее число событий, произошедших за единицу времени за время Δt .

Очевидно, что для ординарных потоков $\mu(t) = \lambda(t)$ и

$$p_1(\Delta t) = \mu(t) \cdot \Delta t = \lambda(t) \cdot \Delta t.$$

Для неординарных потоков $\mu(t) > \lambda(t)$, так как $M[\xi(\Delta t)] > p_{\geq 1}(\Delta t)$.

Так как $p_0(\Delta t) + p_1(\Delta t) + p_{\geq 1}(\Delta t) = 1$,

то, учитывая определение интенсивности потока и (3), для ординарного потока имеем

$$p_0(\Delta t) = 1 - p_1(\Delta t) - p_{\geq 1}(\Delta t) = 1 - \lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t). \quad (4)$$

Пусть за время Δt произошло n событий ($n = 0, 1, \dots, k$), тогда за время t , предшествующее времени Δt , что естественно, произошло $k - n$ событий. Формализуя свойство отсутствия последствия, можно записать (на интервале $[t, t + \Delta t]$ произошло n и $k - n$ событий)

$$p_k(t, t + \Delta t) = p_{k-n}(t) \cdot p_n(\Delta t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть на интервале $[t, t + \Delta t]$ не произошло ни одного события, т.е. $k = 0$, тогда с учетом (4) можно записать

$$p_0(t, t + \Delta t) = p_0(t) \cdot p_0(\Delta t) = p_0(t) \cdot [1 - \lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t)],$$

преобразовав, получим

$$\frac{p_0(t, t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda(t) \cdot p_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda(t) \cdot p_0(t).$$

Пусть на интервале $[t, t + \Delta t]$ произошло одно событие, т.е. $k = 1$, тогда с учетом (4) можно записать

$$p_1(t, t + \Delta t) = p_1(t) \cdot p_0(\Delta t) + p_0(t) \cdot p_1(\Delta t) =$$

$$= p_1(t) \cdot [1 - \lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t)] + p_0(t) \cdot [1 - (1 - \lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t))]$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda(t) \cdot p_1(t) + \lambda(t) \cdot p_0(t).$$

Аналогично для k событий можно записать

$$p_k(t, t + \Delta t) = p_k(t) \cdot p_0(\Delta t) + p_{k-1}(t) \cdot p_1(\Delta t) + \sum_{n=2}^k p_{k-n}(t) \cdot p_n(\Delta t).$$

Учитывая определение интенсивности потока, (3) и (4), последнее выражение можно переписать в виде

$$p_k(t, t + \Delta t) = p_k(t) \cdot [1 - \lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t)] + p_{k-1}(t) \cdot [\lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t),$$

откуда

$$\frac{p_k(t, t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = p_{k-1}(t) \cdot \lambda(t) - p_k(t) \cdot \lambda(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda(t) \cdot p_k(t) + \lambda(t) \cdot p_{k-1}(t).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda(t) \cdot p_0(t) \\ \frac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda(t) \cdot p_k(t) + \lambda(t) \cdot p_{k-1}(t), \quad k \in N \end{cases}. \quad (5)$$

Для однозначного решения данной системы добавим начальное (граничное) условие

$$p_k(0) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases},$$

т. е. в начальный момент времени с вероятностью 1 не будет ни одного события.

Тогда получим систему рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda(t) \cdot p_0(t) \\ \frac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda(t) \cdot p_k(t) + \lambda(t) \cdot p_{k-1}(t), \quad k \in N \end{cases},$$

$$p_0(0) = 1, \quad p_k(0) = 0.$$

Решим данную систему операционным методом.

Пусть $p_k(t) \rightarrow F_k(s)$. Используя преобразование Лапласа, с учетом изображения производных и свойства линейности, получим

$$s \cdot F_0(s) - 1 = -\lambda \cdot F_0(s), \quad s \cdot F_k(s) - 1 = -\lambda \cdot F_k(s) + \lambda \cdot F_{k-1}(s).$$

Преобразовав, получим

$$F_0(s) = \frac{1}{s + \lambda}, \quad F_k(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} \cdot F_{k-1}(s).$$

Если $F_0(s) = \frac{1}{s + \lambda}$, то

$$F_1(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} \cdot F_0(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} \cdot \frac{1}{s + \lambda} = \frac{\lambda}{(s + \lambda)^2},$$

$$F_2(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} \cdot F_1(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} \cdot \frac{\lambda}{(s + \lambda)^2} = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^3}$$

и т. д.

Таким образом, имеем

$$F_k(s) = \frac{\lambda^k}{(s + \lambda)^{k+1}}.$$

Используя обратное преобразование Лапласа, находим

$$p_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Полученный результат можно представить в виде

$$p_k(t) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}.$$

Последнее выражение является распределением Пуассона. Поэтому поток событий, обладающий свойствами стационарности, отсутствием последствия и ординарности, называется **простейшим (пуассоновским) потоком**.

Если поток не обладает свойством стационарности — нестационарный пуассоновский поток.

Для стационарного потока $\lambda = \text{const}$ и $a = \lambda \cdot t$.

Для нестационарного — $\lambda = \lambda(t)$ и $a = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \lambda(t) dt$. Однако, если интенсивность

изменяется в относительно малых пределах, то можно найти среднее значение интенсивности, принять его за константу, сведя, таким образом, нестационарный поток к стационарному.

Рассмотрим случайную величину — интервал T между соседними событиями в потоке. Функция распределения данной случайной величины (по определению) имеет вид

$$F(t) = P(T < t).$$

Вероятность того, что случайная величина T примет значение, меньшее, чем t , определим как вероятность того, что в этом интервале произошло хотя бы одно событие, т. е.

$$F(t) = P(T < t) = 1 - p_0.$$

В частности, для стационарного пуассоновского потока при $k = 0$ (6) примет вид $p_0(t) = e^{-\lambda \cdot t}$.

Тогда функция распределения имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}, \quad t > 0,$$

и плотность распределения случайной величины T

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Полученное выражение является показательным (экспоненциальным) распределением случайной величины с параметром λ .

Как было показано ранее, математическое ожидание и дисперсия случайной величины T соответственно равны

$$m(t) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \lambda \cdot \int_0^{\infty} t \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = \frac{1}{\lambda},$$

$$D(t) = m(t^2) - m^2(t) = \int_0^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt - m^2(t) = \lambda \cdot \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

а среднее квадратическое отклонение

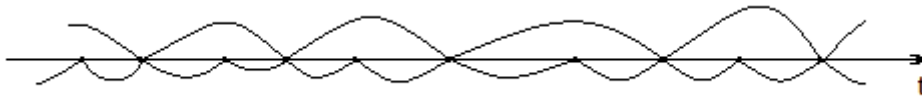
$$\sigma(t) = \sqrt{D(t)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, для простейшего (пуассоновского) потока событий промежуток времени T между соседними событиями распределен по **показательному** закону. Случайная величина T имеет характеристики: $m(t) = \sigma(t) = \frac{1}{\lambda}$, где λ — интенсивность потока.

Простейший (пуассоновский) поток является частным случаем **потока Пальма**. В случае простейшего потока случайная величина T (промежутки времени между соседними событиями) распределена по показательному закону. В потоке Пальма данная случайная величина распределена по произвольному закону.

Разновидностью потока Пальма является **поток Эрланга**.

Рассмотрим простейший поток событий (точки) на оси времени. Оставим на оси только каждую вторую точку (событие). Полученный поток называется потоком Эрланга второго порядка.



Если поток будет состоять из каждого k -го события исходного потока, то получим поток Эрланга k -го порядка.

Распределение Эрланга часто применяется для сведения не-марковских процессов к марковским. Так как распределение Эрланга представляет собой сумму экспоненциально распределенных случайных величин, то некое состояние системы с входным потоком Эрланга заменяют несколькими (согласно порядка распределения) псевдосостояниями с показательными входными потоками.

Пример 5.6. В отдел полиции обращается в среднем 2 человека за 25 минут. Поток событий простейший. Найти вероятность того, что за 1 час в отдел полиции обратятся:

- 1) 3 человека;
- 2) не менее 3-х человек;

Решение.

Интенсивность входного потока заявок равна $\lambda = \frac{2}{25} = 0,08$ (мин^{-1}).

Так как для пуассоновского потока $p_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot t}$, то вероятность того, что в полицию обратятся 3 человека:

$$p_3(t) = \frac{(0,08 \cdot 60)^3}{3!} e^{-0,08 \cdot 60} \approx 0,15.$$

Вероятность того, что в полицию при указанных условиях обратятся не менее 3-х человек, найдем как

$$p_{\geq 3}(t) = 1 - p_{<3}(t) = 1 - [p_0(t) + p_1(t) + p_2(t)] =$$

$$= 1 - \left[e^{-0,08 \cdot 60} + \frac{(0,08 \cdot 60)^1}{1!} e^{-0,08 \cdot 60} + \frac{(0,08 \cdot 60)^2}{2!} e^{-0,08 \cdot 60} \right] \approx 0,86.$$

Пример 5.7. Сервер работает на двух независимых друг от друга процессорах. Среднее время безотказной работы первого процессора составляет два года, 2-го — один год. Время безотказной работы каждого определяется показательным законом. Найти вероятность того, что за 2,5 года:

- 1) не откажет ни один из процессоров;
- 2) откажет только второй процессор;
- 3) откажут оба процессора.

Решение.

Вероятность исправной работы k -го процессора в течение времени t определяется как

$$p^{(k)}(t) = e^{-\lambda_k \cdot t}.$$

Тогда вероятности исправной работы обоих процессоров по истечении времени $t = 2,5$ года соответственно равны

$$p^{(1)}(t = 2,5) = e^{-\frac{1}{2} \cdot 2,5} \approx 0,287, \quad p^{(2)}(t = 2,5) = e^{-\frac{1}{1} \cdot 2,5} \approx 0,082.$$

Вероятности отказов процессоров за время $t = 2,5$ соответственно равны

$$\bar{p}^{(1)}(t = 2,5) = 1 - p^{(1)}(t = 2,5) = 1 - 0,287 = 0,713,$$

$$\bar{p}^{(2)}(t = 2,5) = 1 - p^{(2)}(t = 2,5) = 1 - 0,082 = 0,918.$$

Вероятность того, что за 2,5 года не откажет ни один из независимо работающих процессоров, найдем как вероятность события A , при котором и первый и второй процессоры не отказали, т.е.

$$p(A) = p^{(1)}(t) \cdot p^{(2)}(t) = 0,287 \cdot 0,082 \approx 0,023.$$

Событие B — за контрольное время откажет только второй процессор, это событие, при котором первый процессор работоспособен, а второй отказал. Вероятность этого события

$$p(B) = p^{(1)}(t) \cdot \bar{p}^{(2)}(t) = 0,287 \cdot 0,918 \approx 0,263.$$

Событие C — отказал и первый и второй процессоры. Вероятность этого события

$$p(C) = \bar{p}^{(1)}(t) \cdot \bar{p}^{(2)}(t) = 0,713 \cdot 0,918 \approx 0,654.$$

Задача 5.5. В отдел технического контроля в среднем поступает n заявок каждые t_1 минут. Поток заявок простейший. Найти вероятность того, что за время t_2 минут в техотдел поступит:

- 1) ровно k требований;
- 2) менее k требований;
- 3) более k требований.

№ варианта	n	t_1	t_2	k
1.	1	10	40	5
2.	2	9	55	3
3.	3	11	30	4
4.	4	15	30	5
5.	5	10	50	2
6.	1	12	37	5
7.	2	11	48	3
8.	3	10	55	4
9.	4	10	40	2
10.	5	12	49	5
11.	1	11	34	3
12.	2	9	50	4
13.	3	15	37	2
14.	4	14	51	5
15.	5	9	53	2

№ варианта	n	t_1	t_2	k
16.	5	12	55	3
17.	4	20	34	4
18.	3	14	26	5
19.	2	12	42	4
20.	1	15	54	5
21.	5	15	39	2
22.	4	11	44	3
23.	3	12	39	5
24.	2	9	37	3
25.	1	17	60	4
26.	5	15	51	5
27.	4	11	36	2
28.	3	17	39	4
29.	2	11	58	3
30.	1	17	59	3

Задача 5.6. Работу сегмента ИМТС ОВД (интегрированная мультисервисная телекоммуникационная сеть ОВД) обеспечивают три независимо работающих сервера. Длительность среднего времени безотказной работы каждого сервера распределена по показательному закону и равна t_1 , t_2 , t_3 лет. Найти вероятность того, что в интервале $[0, t_4]$:

- 1) откажет только один сервер;
- 2) откажут не более двух серверов;
- 3) перестанет работать вся сеть.

№ варианта	t_1	t_2	t_3	t_4
1.	2	3	4	3
2.	5	3	5	3
3.	1	2	3	4
4.	4	3	7	5
5.	3	5	7	9
6.	2	5	7	9
7.	4	5	2	12
8.	3	6	4	10
9.	2	4	6	8
10.	1	3	5	6
11.	2	3	4	7
12.	4	5	6	10
13.	1	2	4	3
14.	2	3	4	1
15.	1	2	5	8

№ варианта	t_1	t_2	t_3	t_4
16.	2	5	4	3
17.	2	6	7	2
18.	1	2	3	15
19.	3	4	5	9
20.	1	5	3	10
21.	2	3	1	5
22.	5	6	7	2
23.	8	6	3	5
24.	5	7	8	1
25.	9	10	3	5
26.	1	4	2	5
27.	3	4	5	7
28.	2	3	4	1
29.	4	5	6	2
30.	2	3	6	10

5.4. Предельные вероятности состояний

Рассмотрим непрерывную марковскую цепь (с дискретными состояниями и непрерывным временем).

Пусть $p_i(t)$ — вероятность нахождения системы в i -м состоянии. Вектор $\bar{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)$ характеризует распределение вероятностей состояния системы.

Если существуют предельные вероятности системы

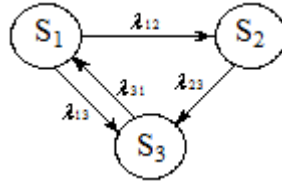
$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, n,$$

которые не зависят от начального состояния, то при $t \rightarrow \infty$ распределение вероятностей сводится к стационарному распределению, а в системе устанавливается стационарный режим.

Система, для которой существуют предельные (финальные) вероятности состояний, называется **эргодической**.

Условие. Для того чтобы система с конечным числом состояний имела единственное предельное распределение вероятностей состояний, необходимо и достаточно, чтобы из каждого состояния существовал путь в любое другое состояние, даже через некоторую последовательность промежуточных состояний.

Пусть задана система, размеченный граф которой и начальные условия имеют вид



$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0, \quad p_3(0) = 0.$$

Запишем уравнения Колмогорова-Чепмена для данной системы.

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot p_1(t) + \lambda_{31} \cdot p_3(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_{23} \cdot p_2(t) + \lambda_{12} \cdot p_1(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{31} \cdot p_1(t) + \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{23} \cdot p_2(t) \\ p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1 \end{cases}.$$

Рассмотрим поведение системы при $t \rightarrow \infty$.

Так как данная система обладает свойством эргодичности, т. е.

— имеет конечное количество состояний,

— из каждого состояния можно перейти в другое состояние,

то существуют предельные (финальные) вероятности состояний и в системе при $t \rightarrow \infty$ установится стационарный режим: $p_1 = \text{const}$, $p_2 = \text{const}$, $p_3 = \text{const}$.

Так как в установившемся режиме $\frac{dp_i(t)}{dt} = 0$ (p_i не меняются, а производная константы равна нулю), то система дифференциальных уравнений Колмогорова-Чепмена вырождается в систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot p_1 + \lambda_{31} \cdot p_3 = 0 \\ -\lambda_{23} \cdot p_2 + \lambda_{12} \cdot p_1 = 0 \\ -\lambda_{31} \cdot p_1 + \lambda_{13} \cdot p_1 + \lambda_{23} \cdot p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Последнее уравнение обязательно. В противном случае, решение данной системы будет иметь тривиальный вид — нулевое решение.

Любое из первых трех уравнений можно отбросить, так как каждое из них является линейной комбинацией двух других, получим систему n уравнений с n неизвестными и далее решать систему любым известным способом.

Пример 5.8. Мобильный телефон сотрудника, отправленного в командировку, поддерживает функцию разговора по двум линиям связи. Данный сотрудник ожидает разговора с другом, который должен позвонить с вероятностью 0,6. Окончание данных разговоров за некоторый промежуток времени происходит с вероятностью 0,3. Как правило, когда работник разговаривает с другом, звонит начальник (необходимо переключиться на вторую линию), что происходит с вероятностью 0,4 и окончание отчета начальнику о проведенных мероприятиях происходит с вероятностью 0,3 в течение некоторого промежутка времени. Предполагается, что все потоки событий пуассоновские. Определить финальные вероятности данного процесса.

Решение.

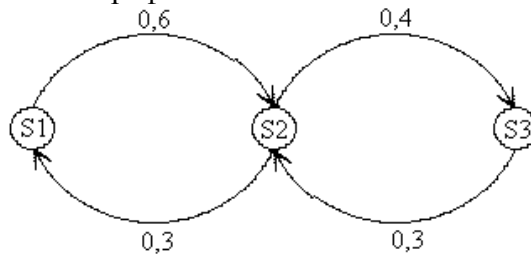
Обозначим состояния изучаемой системы как:

S_1 — телефон командировочного сотрудника свободен;

S_2 — позвонил друг (одна линия занята);

S_3 — позвонил начальник (обе линии заняты).

Построим размеченный граф состояний системы.



Рассмотрим простейший поток на интервале $[t, t + \Delta t]$. В силу свойства ординарности, появлением более одного события в интервале $[t, t + \Delta t]$ можно пренебречь. Тогда

$$p_1(\Delta t) \approx 1 - p_0(\Delta t),$$

где $p_1(\Delta t)$ — вероятность появления на участке Δt одного события;

$p_0(\Delta t)$ — в интервале $[t, t + \Delta t]$ не произойдет ни одного события.

Учитывая, что

$$p_0(\Delta t) = \frac{a^0}{0!} e^{-a} = e^{-\lambda \cdot \Delta t}.$$

Тогда

$$p_1(\Delta t) \approx 1 - e^{-\lambda \cdot \Delta t}.$$

Разлагая экспоненту в ряд по степеням $\lambda \cdot \Delta t$

$$e^{-\lambda \cdot \Delta t} = 1 + \frac{-\lambda \cdot \Delta t}{1!} + \frac{(-\lambda \cdot \Delta t)^2}{2!} + \dots$$

и пренебрегая величинами высшего порядка малости, получим

$$p_1(\Delta t) \approx 1 - [1 - \lambda \cdot \Delta t] = \lambda \cdot \Delta t,$$

т. е. вероятность появления в интервале $[t, t + \Delta t]$ какого-то события простейшего потока приблизительно равна $\lambda \cdot \Delta t$.

Тогда, матрицу заданных вероятностей переходов можно переписать в виде

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4\Delta t & 0,6\Delta t & 0 \\ 0,3\Delta t & 0,3\Delta t & 0,4\Delta t \\ 0 & 0,3\Delta t & 0,7\Delta t \end{pmatrix}.$$

Пусть

$p_1(t)$ — вероятность нахождения системы в состоянии $S1$;

$p_2(t)$ — вероятность нахождения системы в состоянии $S2$;

$p_3(t)$ — вероятность нахождения системы в состоянии $S3$.

Определим вероятности нахождения нашей системы в трех состояниях.

Рассмотрим $p_1(t)$ — вероятность того, что телефон свободен. Придадим t приращение Δt ($\Delta t \rightarrow 0$) и определим $p_1(t + \Delta t)$ — вероятность того, что в момент времени $t + \Delta t$ система находится в состоянии $S1$. Это возможно в двух случаях:

1) в момент времени t система находилась в состоянии $S1$ и за Δt из него не вышла, т.е. система находилась в состоянии $S1$ ($p_1(t)$) и за Δt не перешла в состояние $S2$ ($1 - p_{12}(\Delta t)$). Вероятность данного события определяется как $p_1(t) \cdot [1 - p_{12}(\Delta t)]$.

2) в момент времени t система находилась в состоянии $S2$ ($p_2(t)$) и за Δt перешла в состояние $S1$ ($p_{21}(\Delta t)$). Вероятность данного события — $p_2(t) \cdot p_{21}(\Delta t)$.

Тогда по формуле полной вероятности получим

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) \cdot [1 - p_{12}(\Delta t)] + p_2(t) \cdot p_{21}(\Delta t).$$

Так как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}}{\Delta t} = \lambda_{ij}$ — интенсивность перехода или плотность вероятности перехода. Тогда $p_{ij} \approx \lambda_{ij} \Delta t$. В результате уравнение для вероятности нахождения системы в состоянии $S1$ будет иметь вид

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) \cdot [1 - \lambda_{12} \cdot \Delta t] + p_2(t) \cdot \lambda_{21} \cdot \Delta t.$$

После преобразования получим

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{21} \cdot p_2(t).$$

Предел от данного выражения при $\Delta t \rightarrow 0$ дает производную $p_1(t)$, т. е.

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{21} \cdot p_2(t) = -\lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{21} \cdot p_2.$$

Проведем аналогичные рассуждения для $p_2(t)$ — вероятность нахождения системы в состоянии $S2$ (звонок приятеля). Нахождение системы в состоянии $S2$ возможно в трех случаях:

1) в момент времени t система находилась в состоянии $S2$ и за Δt из него не вышла, т.е. система находилась в состоянии $S2$ ($p_2(t)$) и за Δt не перешла в состояние $S1$ и $S3$ ($1 - [p_{21}(\Delta t) + p_{23}(\Delta t)]$). Тогда вероятность данного события определяется как $p_2(t) \cdot [1 - [p_{21}(\Delta t) + p_{23}(\Delta t)]]$.

2) в момент времени t система находилась в состоянии $S1$ ($p_1(t)$) и за Δt перешла в состояние $S2$ ($p_{12}(\Delta t)$). Вероятность данного события: $p_1(t) \cdot p_{12}(\Delta t)$.

3) в момент времени t система находилась в состоянии $S3$ ($p_3(t)$) и за Δt перешла в состояние $S2$ ($p_{32}(\Delta t)$). Вероятность данного события: $p_3(t) \cdot p_{32}(\Delta t)$.

Тогда по формуле полной вероятности получим

$$p_2(t + \Delta t) = p_2(t) \cdot [1 - [p_{21}(\Delta t) + p_{23}(\Delta t)]] + p_1(t) \cdot p_{12}(\Delta t) + p_3(t) \cdot p_{32}(\Delta t).$$

После введенной выше замены и преобразований получим

$$p_2(t + \Delta t) = p_2(t) \cdot [1 - [\lambda_{21}\Delta t + \lambda_{23}\Delta t]] + p_1(t) \cdot \lambda_{12}\Delta t + p_3(t) \cdot \lambda_{32}\Delta t,$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2 + \lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{32} \cdot p_3.$$

Рассуждая аналогично для состояния S_3 , сделаем аналогичные выкладки, в результате получим

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{32} \cdot p_3 + \lambda_{23} \cdot p_2.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний нашей системы имеет вид (уравнения Колмогорова-Чепмена):

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{21} \cdot p_2 \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2 + \lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{32} \cdot p_3 \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{32} \cdot p_3 + \lambda_{23} \cdot p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

Заметим, что при решении данной системы можно отбросить любое из первых трех уравнений, так как все три вероятности связаны четвертым уравнением системы.

В результате данная система уравнений для наших входных условий примет вид

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -0,6p_1 + 0,3p_2 \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -0,7p_2 + 0,6p_1 + 0,3p_3 \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = -0,3p_3 + 0,4p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

Для решения данной системы необходимо задать начальные условия. Очевидно, что для нашей задачи эти условия будут иметь вид

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = p_3(0) = 0.$$

Для нахождения финальных вероятностей системы, т. е. при $t \rightarrow \infty$ система уравнений примет вид

$$\begin{cases} -0,6p_1 + 0,3p_2 = 0 \\ -0,7p_2 + 0,6p_1 + 0,3p_3 = 0 \\ -0,3p_3 + 0,4p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

В данном случае видно, что отбросить можно второе уравнение, так как оно получено сложением первого и третьего уравнения системы.

Решение данной системы: $p_1 = 0,176$, $p_2 = 0,353$, $p_3 = 0,471$.

Математическая модель нашей системы получена и решена.

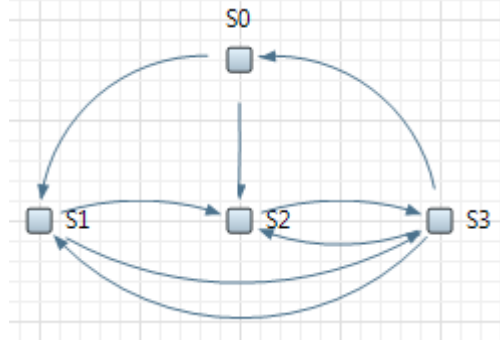
В дальнейшем вместо вероятностей перехода из i -го в j -е состояние ($p_{ij}(\Delta t)$)

будем рассматривать интенсивности переходов λ_{ij} ($\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_{ij}$), что более удобно.

Задача 5.7. Нелинейный локатор «Лорнет» предназначен для поиска полупроводниковых элементов, к которым относятся радиозакладки. Основными поломками данного устройства являются:

- поломка регулятора излучаемой мощности сигнала,
- отказ акустического радиоблока с наушником или световой индикации,
- отказ блока питания, излучателя или приемника сигнала.

В случае «выхода из строя» регулятора излучаемой мощности устройство может продолжать работу, но только на одной частоте. При отказе акустического радиоблока возможно продолжать работу с устройством и контролировать изменение уровня сигнала по световой индикации и наоборот. В этих двух случаях «Лорнет» можно отправить в ремонт, а можно продолжать работу с ним. В случае «выхода из строя» излучателя, приемника сигнала или блока питания устройство не может выполнять свои функции и его необходимо ремонтировать полностью. В результате ремонта локатор становится работоспособным, но существует вероятность, что при ремонте исправят одну неисправность, а про другие забудут. Таким образом, размеченный граф состояний системы работы и ремонта нелинейного локатора «Лорнет» будет иметь вид:



Матрица интенсивностей переходов для данного примера будет иметь вид:

$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_{10} & \lambda_{20} & \lambda_{30} \\ \lambda_{01} & -\lambda_1 & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ \lambda_{03} & \lambda_{13} & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & \lambda_{30} \\ \lambda_{01} & -\lambda_1 & 0 & \lambda_{31} \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ 0 & \lambda_{13} & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{pmatrix},$$

где λ_{ij} — интенсивность перехода из i -го в j -е состояние.

Определить финальные вероятности работы и ремонта нелинейного локатора «Лорнет». Проверить полученные результаты в среде Mathcad.

№	
варианта	

№	
варианта	

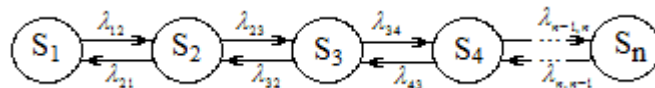
1.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & -\lambda_1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	16.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 & 7 \\ 12 & 3 & -\lambda_2 & 8 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_1(0) = 1,$ $p_0(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
2.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -\lambda_2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_1(0) = 1,$ $p_0(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	17.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 & 1 \\ 11 & 2 & -\lambda_2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$
3.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -\lambda_2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$	18.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -\lambda_2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_3(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_2(0) = 0.$
4.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -\lambda_2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_3(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_2(0) = 0.$	19.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
5.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & -\lambda_1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	20.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -\lambda_1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda_2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_1(0) = 1,$ $p_0(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
6.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & -\lambda_1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	21.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 11 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$

7.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -\lambda_1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -\lambda_2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	22.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
8.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & -\lambda_1 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	23.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 31 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 22 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 31 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$
9.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	24.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
10.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 7 \\ 7 & -\lambda_1 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$	25.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 12 \\ 7 & 3 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
11.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & -\lambda_1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$	26.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 11 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
12.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & -\lambda_1 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	27.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 8 \\ 11 & 5 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$

13.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & -\lambda_1 & 0 & 6 \\ 3 & 7 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 9 & 4 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$	28.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$
14.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$	29.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -\lambda_2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$
15.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -\lambda_1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda_2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_2(0) = 1,$ $p_0(0) = p_1(0) = p_3(0) = 0.$	30.	$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & -\lambda_1 & 2 & 5 \\ 10 & 8 & -\lambda_2 & 3 \\ 0 & 11 & 9 & -\lambda_3 \end{pmatrix},$ $p_0(0) = 1,$ $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0.$

5.5. Процесс «гибели и размножения»

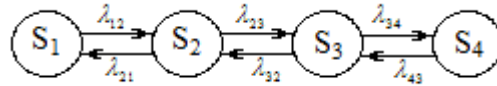
Непрерывная марковская цепь называется процессом «гибели и размножения», если ее размеченный граф состояний имеет вид



Отличие данного графа в том, что все состояния вытянуты в цепочку.

Данное название такие марковские цепи получили в связи с тем, что с их помощью описывается процесс изменения численности популяции в биологии.

Рассмотрим процесс «гибели и размножения», граф которого имеет вид



и найдем предельные вероятности нахождения системы в состояниях S_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Система уравнений Колмогорова-Чепмена для предельных состояний имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{21} \cdot p_2 = 0 \\ -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2 + \lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{32} \cdot p_3 = 0 \\ -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) \cdot p_3 + \lambda_{23} \cdot p_2 + \lambda_{43} \cdot p_4 = 0 \\ -\lambda_{43} \cdot p_4 + \lambda_{34} \cdot p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения получим

$$\lambda_{12} \cdot p_1 = \lambda_{21} \cdot p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot p_1.$$

Из второго уравнения

$$\lambda_{21} \cdot p_2 + \lambda_{23} \cdot p_2 = \lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{32} \cdot p_3,$$

так как $\lambda_{12} \cdot p_1 = \lambda_{21} \cdot p_2$ (видно из первого уравнения системы), то

$$\lambda_{23} \cdot p_2 = \lambda_{32} \cdot p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{32}} \cdot p_2 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \cdot p_1.$$

Из третьего уравнения системы имеем

$$\lambda_{32} \cdot p_3 + \lambda_{34} \cdot p_3 = \lambda_{23} \cdot p_2 + \lambda_{43} \cdot p_4,$$

так как $\lambda_{12} \cdot p_1 = \lambda_{21} \cdot p_2$ (следует из второго уравнения системы), то

$$\lambda_{34} \cdot p_3 = \lambda_{43} \cdot p_4 \Rightarrow p_4 = \frac{\lambda_{34}}{\lambda_{43}} \cdot p_3 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \lambda_{34}}{\lambda_{43} \cdot \lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \cdot p_1.$$

Учитывая последнее уравнение системы, можно записать

$$p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot p_1 + \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \cdot p_1 + \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \lambda_{34}}{\lambda_{43} \cdot \lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \cdot p_1 = 1.$$

Следовательно

$$p_1 = \left[1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \lambda_{34}}{\lambda_{43} \cdot \lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \right]^{-1}.$$

Таким образом, предельные вероятности состояний для нашего примера определяются как:

$$\begin{cases} p_1 = \left[1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \lambda_{34}}{\lambda_{43} \cdot \lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \right]^{-1} \\ p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot p_1 \\ p_3 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \cdot p_1 \\ p_4 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \lambda_{34}}{\lambda_{43} \cdot \lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \cdot p_1 \end{cases}.$$

Если в непрерывной марковской цепи, представляющей собой процесс «гибели и размножения», замкнуть последнее состояние с первым одной дугой, то получим **циклический** марковский процесс.

Пример 5.9. Связь между двумя отделами полиции осуществляется по основной и резервной выделенным линиям. Сбой в каждой линии связи происходит один раз в 20 дней. На восстановление каждой линии связи затрачивается один день.

Одновременный сбой в обеих линиях связи, а также одновременное восстановление считаются маловероятными событиями. Процессы, происходящие в данной системе — марковские.

Определить финальные вероятности данной системы связи.

Решение.

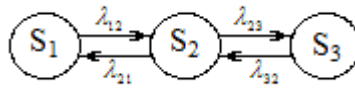
Обозначим состояния изучаемой системы как:

S_1 — обе линии связи исправны;

S_2 — одна линия не работает, работает вторая;

S_3 — обе линии связи не работают.

Размеченный граф состояний системы будет иметь вид:



Так как работа данной системы представляет собой процесс «гибели и размножения», то предельные вероятности системы определим как

$$\begin{cases} p_1 = \left[1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \right]^{-1} \\ p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot p_1 \\ p_3 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \cdot p_1 \end{cases}.$$

Интенсивность отказов каждой линии будет составлять

$$\lambda = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ (1/дн.)},$$

а интенсивность восстановления

$$\mu = \frac{1}{1} = 1 \text{ (1/дн.)}.$$

Из состояния S_1 в состояние S_2 можно перейти, если выйдет из строя или первая, или вторая линии связи и интенсивность данного перехода будет равна

$$\lambda_{12} = 2 \cdot \lambda = 0,1 \text{ (1/дн.)}.$$

В состояние S_3 может перевести поломка только одной, оставшейся работоспособной, линии связи, поэтому

$$\lambda_{23} = \lambda = 0,05 \text{ (1/дн.)}.$$

Переход системы из состояния S_3 в S_2 возможен, если будет отремонтирована или первая, или вторая линия, тогда

$$\lambda_{32} = 2 \cdot \mu = 2 \text{ (1/дн.)}.$$

Аналогично,

$$\lambda_{21} = \mu = 1 \text{ (1/дн.)}.$$

Финальные вероятности состояний системы будут равны:

$$p_1 = \left[1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{0,1}{1} + \frac{0,1 \cdot 0,05}{2 \cdot 1} \right]^{-1} \approx 0,907,$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot p_1 = \frac{0,1}{1} \cdot 0,907 = 0,0907,$$

$$p_3 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} \cdot p_1 = \frac{0,1 \cdot 0,05}{2 \cdot 1} \cdot 0,907 \approx 0,0023.$$

Таким образом, система связи 0,907 % времени будет исправна, 0,0907 % — не работает одна линия, 0,0023% — отделы полиции останутся без связи между собой по данным линиям.

Под доходом от использования каждой линии будем понимать стоимостную оценку угроз, связанных с нарушением данной связи.

Пусть доход от использования первой (основной) линии составляет 10 у.е., от второй (резервной, с меньшей пропускной способностью по сравнению с первой) —

5 у.е. Затраты, связанные с восстановлением первой линии — 20 у.е., второй — 15 у.е. Определим эффективность данной системы связи.

Первая линия исправно работает долю времени, равную $p_1 = 0,907$, вторая — $p_1 + p_2 = 0,9977$. Первая линия восстанавливается — $p_2 + p_3 = 0,093$, вторая — $p_3 = 0,0023$.

Тогда оценить эффективность данной системы можно как разность между доходами и затратами на обслуживание системы связи, т.е.

$$\mathcal{E} = (0,907 \cdot 10 + 0,9977 \cdot 5) - (0,093 \cdot 20 + 0,0023 \cdot 15) = 12,164 \text{ у.е.}$$

При изменении входных данных получим другое значение эффективности от использования данной организации связи.

Задача 5.8. Сегмент локальной сети состоит из n независимо работающих блоков. Поломка в каждом блоке происходит 1 раз в n_1 дней. Ремонт блоков занимает n_2 часов. Блоки выходят из строя последовательно. Одновременное восстановление всех поломанных блоков невозможно. В работоспособном состоянии каждый блок приносит c_1 у.е., а на ремонт затрачивается c_2 у.е. Обратить внимание на размерность.

Необходимо:

1. Построить модель работы системы с позиции процесса «гибели и размножения».
2. Рассчитать финальные вероятности работы системы.
3. Оценить экономическую эффективность работы сегмента сети.

№ варианта	n	n_1	n_2	c_1	c_2
1.	7	2	5	5	7
2.	8	3	6	6	8
3.	9	2	4	7	9
4.	10	3	5	8	10
5.	9	2	6	3	5
6.	8	2	7	4	6
7.	7	3	6	5	7
8.	8	3	5	6	8
9.	9	2	6	7	9
10.	10	2	4	8	10
11.	9	3	5	9	11
12.	8	2	6	3	7
13.	7	3	5	4	8
14.	8	2	4	5	7
15.	9	2	7	6	8

№ варианта	n	n_1	n_2	c_1	c_2
16.	10	3	5	4	7
17.	9	2	6	5	8
18.	8	2	4	6	9
19.	7	2	5	7	9
20.	8	3	6	3	5
21.	9	2	7	4	7
22.	10	3	5	5	8
23.	9	2	5	6	10
24.	8	3	3	7	9
25.	7	2	5	8	10
26.	8	3	6	3	7
27.	9	3	8	4	6
28.	10	2	8	5	9
29.	9	2	6	6	8
30.	8	2	5	7	9

6. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

6.1. Одноканальная СМО с отказами

Рассмотрим систему, состоящую из одного канала (обслуживающего прибора), на которую поступает поток заявок. Если канал занят, то вновь пришедшая заявка получает отказ и покидает систему, т. е. теряется.

Пусть на вход системы поступает стационарный пуассоновский поток (простейший), т. е. интервал времени между входящими заявками есть случайная величина, распределенная по показательному закону

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad (t > 0), \quad \lambda = \frac{1}{m_x},$$

где λ — интенсивность входного потока,

$m_x = \bar{t}_{\text{вх}}$ — математическое ожидание случайной величины, в нашем случае — среднее время между входящими в систему заявками.

Пусть случайное время обслуживания входящих заявок распределено по показательному закону

$$f(t) = \mu \cdot e^{-\mu t} \quad (t > 0), \quad \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}},$$

где μ — интенсивность выходного потока (интенсивность обслуживания);

$\bar{t}_{\text{об}}$ — среднее время обслуживания одной заявки.

Очевидно, что интенсивность входного $\lambda(t)$ и выходного $\mu(t)$ потоков зависят от времени t . Так как мы рассматриваем простейший поток, то в дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$.

Определим характеристики данной системы:

1. вероятность отказа обслуживания запросов $p_{\text{отк}}$;
2. относительную пропускную способность q ;
3. абсолютную пропускную способность A (среднее количество обслуженных заявок за единицу времени).

Система может находиться в следующих состояниях:

S_0 — канал обслуживания свободен;

S_1 — канал обслуживания занят.

Размеченный граф состояний системы будет иметь вид:

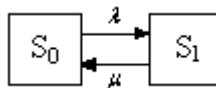


Рис. Одноканальная СМО с отказами

Очевидно, что систему из состояния S_0 в состояние S_1 будет переводить входной поток с интенсивностью λ , а освобождать систему, т. е. переводить систему из «занятого» состояния S_1 в «свободное» состояние S_0 — выходной поток с интенсивностью μ .

Пусть $p_0(t)$ — вероятность нахождения системы в состоянии S_0 , а $p_1(t)$ — в состоянии S_1 . Для простоты записи переменную t в дальнейшем будем опускать.

Работа данной системы представляет собой простейший случай процесса гибели и размножения. Пользуясь приведенными ранее рассуждениями, составим уравнения Колмогорова-Чепмена для вероятностей состояний системы

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} = -\mu \cdot p_1 + \lambda \cdot p_0 \end{cases}.$$

Очевидно, что события нахождения системы в состояниях S_0 и S_1 образуют полную группу, тогда вероятности p_0 и p_1 связаны соотношением $p_0 + p_1 = 1$.

Решение данной системы будем искать при следующих начальных условиях

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0.$$

Так как $p_1 = 1 - p_0$, то

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot (1 - p_0) \Leftrightarrow \frac{dp_0}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot p_0 + \mu \Leftrightarrow p'_0 + (\lambda + \mu) \cdot p_0 = \mu.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, которое при $n = 0$ является частным случаем уравнения Бернулли $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$.

Решим полученное уравнение методом Бернулли.

Решение будем искать в виде

$$p_0(t) = u(t) \cdot v(t) = u \cdot v,$$

тогда

$$p'_0 = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Подставляя введенную замену в уравнение, получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' + (\lambda + \mu) \cdot u \cdot v = \mu \Leftrightarrow u' \cdot v + u \cdot (v' + (\lambda + \mu) \cdot v) = \mu.$$

Подберем v таким образом, чтобы

$$v' + (\lambda + \mu) \cdot v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + (\lambda + \mu) \cdot v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -(\lambda + \mu) dt.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными, откуда

$$\ln(v) = -(\lambda + \mu) \cdot t \Leftrightarrow e^{\ln(v)} = e^{-(\lambda + \mu)t} \Leftrightarrow v = e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$u' \cdot e^{-(\lambda + \mu)t} = \mu \Leftrightarrow \frac{du}{dt} \cdot e^{-(\lambda + \mu)t} = \mu.$$

Разделяя переменные, получим

$$du = \mu \cdot e^{(\lambda + \mu)t} \cdot dt.$$

Решение последнего уравнения примет вид

$$u = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \int e^{(\lambda + \mu)t} d[(\lambda + \mu) \cdot t] = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot e^{(\lambda + \mu)t} + C.$$

Таким образом, решение исходного уравнения

$$p_0(t) = u(t) \cdot v(t) = \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot e^{(\lambda + \mu)t} + C \right] \cdot e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

Так как $p_0(0) = 1$, то

$$1 = \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot e^{(\lambda + \mu) \cdot 0} + C \right] \cdot e^{-(\lambda + \mu) \cdot 0} \Leftrightarrow 1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + C \Leftrightarrow C = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Окончательно получаем

$$p_0(t) = \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot e^{(\lambda + \mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right] \cdot e^{-(\lambda + \mu)t} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t},$$

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

Аналогично разрешим систему относительно p_1 , в результате получим

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

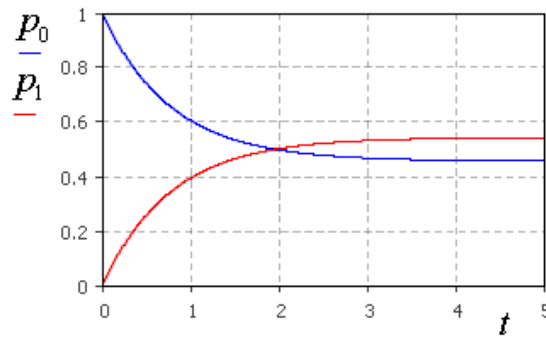
Такой же результат можно получить используя уравнение связи $p_1 = 1 - p_0$.

Предельные значения p_0 и p_1 при $t \rightarrow \infty$ будут равны

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right) = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Зависимости $p_0(t)$ и $p_1(t)$ приведены на графике.



Найдем другим способом финальные вероятности состояний p_0 и p_1 , характеризующие установившейся режим работы СМО, т. е. при $t \rightarrow \infty$. В данном случае все производные будут равны нулю, и решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 = 0 \\ -\mu \cdot p_1 + \lambda \cdot p_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = \frac{\mu}{\lambda} p_1 \\ p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = \frac{\mu}{\lambda} (1 - p_0) \\ p_1 = \frac{\lambda}{\mu} (1 - p_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \\ p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{cases}.$$

Определим характеристики эффективности одноканальной СМО отказами.

Предельное значений относительной (фактической) пропускной способности, т. е. вероятности того, что вновь прибывшая заявка будет обслужена, определяется как

$$q = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Тогда, вероятность того, что вновь прибывшая заявка получит отказ, равна

$$p_{отк} = 1 - p_0 = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Абсолютная пропускная способность A , т. е. среднее количество обслуженных заявок за единицу времени, найдем как произведение интенсивности входного потока μ на вероятность обслуживания

$$A = \lambda \cdot q = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu}.$$

Необходимо обратить внимание на еще одну характеристику, как номинальная пропускная способность канала

$$A_{\text{ном}} = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = \mu,$$

которая характеризует пропускную способность, если бы обслуживание длилось ровно $\bar{t}_{\text{об}}$, и заявки следовали одна за другой без перерыва.

Пример 6.1. На одноканальный телефон отдела полиции поступают звонки с интенсивностью $\lambda = 0,7$ (звонков в минуту). Если человек, позвонивший в отдел полиции, застаёт линию занятой, то он пытается позвонить снова или прекращает попытки дозвониться. Среднее время разговора составляет $\bar{t}_{\text{об}} = 1,7$ минуты. Предполагается, что входящий поток простейший, а время обслуживания подчинено экспоненциальному закону.

Необходимо:

1. рассчитать характеристики эффективности работы указанного канала связи: вероятность отказа — $p_{\text{отк}}$, относительную пропускную способность — q , абсолютную пропускную способность — A , номинальную пропускную способность канала связи — $A_{\text{ном}}$;

2. построить модель работы телефонной связи отдела полиции в среде GPSS;

3. сравнить полученные результаты.

Решение.

1. Рассчитаем интенсивность обслуживания (интенсивность выходного потока)

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{1,7} \approx 0,588.$$

Вероятность того, что вновь позвонивший человек застанет линию занятой

$$p_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{0,7}{0,7 + 0,588} \approx 0,543.$$

Относительная пропускная способность

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,588}{0,7 + 0,588} \approx 0,457.$$

Таким образом, только 45 % сообщений от граждан, при данной организации связи будут зарегистрированы, а остальные будут «потеряны».

Среднее количество обслуженных заявок за единицу времени (абсолютная пропускная способность A)

$$A = \lambda \cdot q \approx 0,319,$$

а номинальная пропускная способность канала связи

$$A_{\text{ном}} = \mu \approx 0,588,$$

что почти вдвое больше реальной пропускной способности. Такое расхождение обусловлено случайностью входного потока.

2. Создадим модель, имитирующую работу телефонной линии связи отдела полиции, в среде GPSS.

Введем следующие обозначения:

T1 — среднее время между входящими звонками;

T2 — среднее время разговора сотрудника полиции с гражданином с использованием телефонной линии связи;

POBSL — вероятность обслуживания, т.е. вероятность того, что заявление от гражданина будет принято;

NVSEGO — общее количество звонков от граждан, поступивших за отчетный период;

NOBSL — количество сообщений принятых от граждан сотрудником полиции;

NPOTERI — количество запросов от граждан, которые не смогли дозвониться в силу занятости линии связи.

Назначение и описание блоков, распределений и функций GPSS приведены в приложении.

Запустим программу GPSS и создадим новую модель: «File» — «New» — «Model».

Запишем текст программы и запустим модель: «Command» — «Create Simulation» или Ctrl+Alt+S. Компилятор проверит программу и выдаст отчет о работе модели.

Время работы модели равно 480 мин., что соответствует 8-ми часовому рабочему дню.

The screenshot shows the GPSS World interface with a single-file window titled "Одноканальная СМО с отказами.gps2". The menu bar includes File, Edit, Search, View, Command, Window, and Help. The toolbar contains icons for file operations and simulation. The main text area displays the following GPSS commands:

```

SIMULATE

*
*   Входные данные
*
T1      EQU      1.428          ; Среднее время между входящими звонками
T2      EQU      1.7           ; Среднее время разговора
POBSL   VARIABLE N$OBSL/N$VSEGO ; Вероятность обслуживания заявки от гражданина
PPOTERI VARIABLE N$POTERI/N$VSEGO ; Вероятность потери заявки от гражданина
NVSEGO  VARIABLE INT(N$VSEGO)   ; Общее количество сгенерированных заявок
NOBSL   VARIABLE INT(N$OBSL)   ; Количество обслуженных заявок
NPOTERI VARIABLE INT(N$POTERI)  ; Количество потерянных заявок
*
*   Обработка запросов
*
GENERATE (Exponential(1,0,T1)) ; Моделируем входной поток
VSEGO   TEST L F$A,1,POTERI    ; Условие: если тел. занят (L<1), то теряем заявку
SEIZE   A                      ; Занять устройство A (телефон)
ADVANCE (Exponential(1,0,T2)) ; Моделируем разговор по телефону
RELEASE A                      ; Освободить устройство A (телефон)
OBSL    TERMINATE              ; Удаляем обслуженные заявки
POTERI  TERMINATE              ; Удаляем потерянные заявки
*
*   Расчет характеристик
*
GENERATE 480                   ; Моделируем время работы системы
SAVEVALUE POBSL,V$POBSL        ; Сохраняем значение вероятности обслуживания
SAVEVALUE PPOTERI,V$PPOTERI    ; Сохраняем значение вероятности потери
SAVEVALUE NOBSL,V$NOBSL        ; Сохраняем значение колич. обл. заявок
SAVEVALUE NPOTERI,V$NPOTERI    ; Сохраняем значение колич. потер. заявок
SAVEVALUE NVSEGO,V$NVSEGO      ; Сохраняем общее кол. сгенерированных заявок
TERMINATE 1                     ; Завершаем работу модели

*
*
*
START      1                   ; Количество прогонов модели

```

At the bottom of the window, there are status bars: "For Help, press F1" on the left, "Halted." in the center, and "Clock" on the right.

Подробная расшифровка отчета приведена в приложении 11.

GPSS World - Одноканальная СМО с отказами.58.1 - REPORT2

File Edit Search View Command Window Help

Одноканальная СМО с отказами.58.1 - REPORT

Monday, July 18, 2016 12:18:34

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	480.000	14	1	0

NAME	VALUE
A	10007.000
NOBSL	10005.000
NPOTERI	10006.000
NVSEGO	10004.000
OBSL	6.000
POBSL	10002.000
POTERI	7.000
PPOTERI	10003.000
T1	1.428
T2	1.700
VSEGO	2.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
VSEGO	1	GENERATE	338	0	0
	2	TEST	338	0	0
	3	SEIZE	151	0	0
	4	ADVANCE	151	0	0
	5	RELEASE	151	0	0
OBSL	6	TERMINATE	151	0	0
	7	TERMINATE	187	0	0
POTERI	8	GENERATE	1	0	0
	9	SAVEVALUE	1	0	0
	10	SAVEVALUE	1	0	0
	11	SAVEVALUE	1	0	0
	12	SAVEVALUE	1	0	0
	13	SAVEVALUE	1	0	0
	14	TERMINATE	1	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
A	151	0.551	1.751	1	0	0	0	0

SAVEVALUE	RETRY	VALUE
POBSL	0	0.447
PPOTERI	0	0.553
NVSEGO	0	304.000
NOBSL	0	151.000
NPOTERI	0	187.000

FEC	XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
340	0		482.210	340	0	1		
341	0		960.000	341	0	8		

For Help, press F1

Report is Complete.

Clock

Рассчитаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятностных характеристик с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.99$.

Прогоним модель 50 раз. Для этого в последней строчке программы «1» заменим на «50». Запустим модель (Ctrl+Alt+S): вероятность обслуживания — 0,453.

Тогда, количество прогонов при указанных выше условиях

$$N = \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \frac{0.453 \cdot (1-0.453)}{0.01^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{0.99}{2} \right) \right]^2 =$$

$$= \frac{0.453 \cdot (1-0.453)}{0.01^2} \cdot 2.58^2 \approx 16493.96.$$

Округляем полученное значение в большую сторону и получаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятностных характеристик при заданных входных значениях: $N = 16494$.

Делаем необходимые изменения в последней команде программы и запускаем модель (Ctrl+Alt+S).

Одноканальная СМО с отказами.60.1 - REPORT

GPSS World Simulation Report - Одноканальная СМО с отказами.60.1

Monday, July 18, 2016 13:20:32

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	7917120.000	14	1	0

NAME	VALUE
A	10007.000
NOBSL	10005.000
NPOTERI	10006.000
NVSEGO	10004.000
OBSL	6.000
POBSL	10002.000
POTERI	7.000
PPOTERI	10003.000
T1	1.428
T2	1.700
VSEGO	2.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
VSEGO	1	GENERATE	5544884	0	0
	2	TEST	5544884	0	0
	3	SEIZE	2530386	0	0
	4	ADVANCE	2530386	1	0
	5	RELEASE	2530385	0	0
OBSL	6	TERMINATE	2530385	0	0
	7	TERMINATE	3014498	0	0
POTERI	8	GENERATE	16494	0	0
	9	SAVEVALUE	16494	0	0
	10	SAVEVALUE	16494	0	0
	11	SAVEVALUE	16494	0	0
	12	SAVEVALUE	16494	0	0
	13	SAVEVALUE	16494	0	0
	14	TERMINATE	16494	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
A	2530386	0.544	1.701	1	5561378	0	0	0

SAVEVALUE	RETRY	VALUE
POBSL	0	0.456
PPOTERI	0	0.544
NVSEGO	0	5544884.000
NOBSL	0	2530385.000
NPOTERI	0	3014498.000

FEC XM	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
5561379	0	7917120.932	5561379	0	1		
5561378	0	7917122.758	5561378	4	5		
5561380	0	7917600.000	5561380	0	8		

Если установлено модельное время работы достаточно большое (например, 50000000 единиц для нашей модели), то можно проследить за работой модели: Window — Simulation Window — Blocks Window.

3. Результаты, полученные расчетным путем, а также при моделировании в GPSS, отражены в таблице.

	Расчетное значение	GPSS	
		Один прогон в течении 8 часов	16494 прогона
Относительная пропускная способность q	0,457	0,447	0,456
Среднее время разговора, мин.		1,751	1,701
Коэффициент использования оборудования		0,551	0,544

Значения характеристик системы, полученные при моделировании, совпадают с расчетными значениями, что говорит об адекватности построенной модели.

Задача 6.1. На сервер с одним процессором и без блока памяти поступают запросы от рабочих станций с интенсивностью λ (запросов в час). Процессор может обрабатывать одно сообщение, а потом начинает обрабатывать другое и т. д. В случае если процессор занят, то входящее сообщение теряется. Среднее время обработки запроса процессором составляет $\bar{t}_{об}$ минуты. Предполагается, что входящий поток простейший, а время обслуживания подчинено экспоненциальному закону. Обратить внимание на размерность.

Необходимо:

1. рассчитать характеристики эффективности работы указанного канала связи: вероятность отказа — $p_{отк}$, относительную пропускную способность — q , абсолютную пропускную способность — A , номинальную пропускную способность канала связи — $A_{ном}$;

2. построить модель работы телефонной связи отдела полиции в среде GPSS с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.95$;

3. сравнить полученные результаты.

№ варианта	λ , запросов в час	$\bar{t}_{об}$, мин
1.	30	2
2.	55	1,2
3.	60	1,5
4.	65	1,7
5.	50	1,9
6.	55	2,1
7.	50	1,2
8.	45	1,8
9.	55	1,5
10.	50	1,7
11.	63	1,6
12.	52	2,0
13.	43	1,9
14.	57	1,4
15.	62	1,8

№ варианта	λ , запросов в час	$\bar{t}_{об}$, мин
16.	42	1,9
17.	51	1,9
18.	46	2,0
19.	53	1,7
20.	39	1,8
21.	47	2,1
22.	55	1,7
23.	33	1,9
24.	44	1,8
25.	40	2,1
26.	39	1,5
27.	67	2,2
28.	45	1,7
29.	65	2,1
30.	48	2,0

6.2. Многоканальная СМО с отказами

Рассмотрим n -канальную СМО отказами (задача Эрланга). Система может находиться в следующих состояниях:

S_0 — все каналы свободны;

S_1 — один канал занят, остальные свободны;

S_2 — два канала заняты, остальные свободны;

...

S_k — k каналов заняты, остальные свободны;

...

 S_n — все каналы заняты.

Определим характеристики данной системы:

1. вероятность отказа обслуживания запросов $p_{отк}$;
2. относительную пропускную способность q ;
3. абсолютную пропускную способность A ;
4. среднее число занятых каналов $\bar{k}$;
5. коэффициент занятости одного обслуживающего прибора $k_{зан}$.

Систему из состояния S_0 в состояние S_1 и т. д. до состояния S_n переводит один и тот же входящий поток заявок с интенсивностью λ .

Пусть μ — интенсивность потока, переводящего систему из состояния S_1 в состояние S_0 . Если в системе две заявки, то для перехода из состояния S_2 в состояние S_1 систему должна покинуть или первая, или вторая заявка — интенсивность потока событий, в этом случае будет равна 2μ . Если в системе $k+1$ заявок (занят $k+1$ канал), то для перехода системы из состояния S_{k+1} в состояние S_k систему должны покинуть или первая, или вторая, ..., или k -ая заявка — интенсивность потока событий, переводящая систему в предыдущее состояние будет равна $(k+1)\mu$.

Размеченный граф состояний системы приведен на рис.

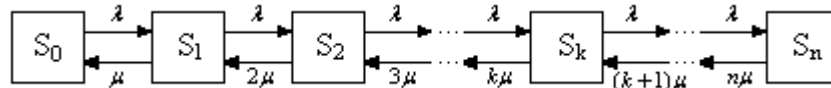


Рис. n -канальная СМО отказами

Работа n -канальной СМО отказами представляет собой частный случай процесса гибели и размножения. Тогда уравнения Колмогорова для вероятностей состояний будут иметь вид (уравнения Эрланга)

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot p_1 + \lambda \cdot p_0 + 2\mu \cdot p_2 \\ \dots \\ \frac{dp_k}{dt} = -(\lambda + k\mu) \cdot p_k + \lambda \cdot p_{k-1} + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1} \\ \dots \\ \frac{dp_n}{dt} = \lambda \cdot p_{n-1} - n\mu \cdot p_n \end{cases}$$

Начальные условия для данной системы при $t = 0$

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = p_2(0) = \dots p_n(0) = 0.$$

То есть предполагается, что в начальный момент времени СМО свободна — в ней нет ни одной заявки.

Найдем предельные вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_n$, характеризующие установившейся режим работы СМО, т. е. при $t \rightarrow \infty$. В этом случае все производные будут равны нулю и решение системы уравнений Эрланга имеет вид

$$\begin{cases} p_k = \frac{\lambda^k}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdot \dots \cdot k\mu} p_0 = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} p_0 \\ p_0 = \frac{1}{1 + \frac{(\lambda/\mu)}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}} = \left(\sum_i^n \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} \right)^{-1} \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ — приведенная интенсивность входного потока — среднее число

заявок, приходящих в СМО за среднее время обслуживания или $\rho = \frac{\bar{t}_{об}}{\bar{t}_{ex}}$.

Тогда решение системы примет вид (формулы Эрланга)

$$\begin{cases} p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \\ p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}} = \left(\sum_i^n \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Определим характеристики эффективности n -канальной СМО отказами.

Если в момент прихода очередной новой заявки все n каналов системы будут заняты, то она получит отказ с вероятностью

$$p_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Относительная пропускная способность системы (вероятность обслуживания вновь пришедшей заявки) определяется как

$$q = 1 - p_{отк} = 1 - p_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени)

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

Так как один канал обслуживает в среднем за единицу времени μ заявок, то среднее число занятых каналов (для n -канальной СМО отказами это значение совпадает со средним числом заявок в системе) определяется как

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda \cdot (1 - p_n)}{\mu} = \rho \cdot (1 - p_n).$$

Коэффициент занятости одного обслуживающего прибора $k_{зан}$ определим как отношение среднего числа занятых каналов к общему числу каналов

$$k_{зан} = \frac{\bar{k}}{n}.$$

Пример 6.2. В систему с n приборами обслуживания поступают заявки с интенсивностью $\lambda = 0,8$. Средняя продолжительность обслуживания заявки $\bar{t}_{об} = 1,5$ мин. Если в момент поступления новой заявки все каналы заняты, то она получает отказ в обслуживании (теряется). Предполагается, что входящий поток простейший, а время обслуживания подчинено экспоненциальному закону.

1. Определить абсолютную и относительную пропускную способность, вероятность отказа и среднее число занятых каналов для 2-х и 3-х канальной системы.

2. Построить модель в GPSS, определить характеристики модели и сравнить полученные результаты с расчетными для 2-х и 3-х канальной системы.

Решение.

1.

2 обслуживающих прибора	3 обслуживающих прибора
Приведенная интенсивность потока $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}}$	
$\mu = \frac{1}{1,5} \approx 0,667$, $\rho = \frac{0,8}{0,667} \approx 1,2$	
Предельные вероятности состояний	
$p_0 = (1 + 1,2 + 0,72)^{-1} = 0,342$	$p_0 = (1 + 1,2 + 0,72 + 0,288)^{-1} = 0,312$
$p_1 = \frac{1,2}{1!} \cdot 0,34 \approx 0,408$	$p_1 = \frac{1,2}{1!} \cdot 0,312 = 0,374$
$p_2 = \frac{1,2^2}{2!} \cdot 0,34 = 0,245$	$p_2 = \frac{1,2^2}{2!} \cdot 0,312 = 0,225$
	$p_3 = \frac{1,2^3}{3!} \cdot 0,312 = 0,09$
Вероятность отказа $p_{отк} = p_n$	
$p_{отк} = p_2 = 0,245$	$p_{отк} = p_3 = 0,09$
Относительная пропускная способность $q = 1 - p_{отк}$	
$q = 1 - 0,245 = 0,755$	$q = 1 - 0,09 = 0,91$
Абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot q$	
$A = 0,8 \cdot 0,75 = 0,6$	$A = 0,8 \cdot 0,91 = 0,728$
Среднее число занятых каналов $\bar{k} = \frac{A}{\mu}$	
$\bar{k} = \frac{0,6}{0,667} \approx 0,899$	$\bar{k} = \frac{0,728}{0,667} \approx 1,09$
Коэффициент занятости одного обслуживающего прибора $k_{зан} = \frac{\bar{k}}{n}$	
$k_{зан} = \frac{0,899}{2} \approx 0,45$	$k_{зан} = \frac{1,09}{3} \approx 0,36$

Сравнение результатов показывает, что при данных входных условиях и дисциплине обслуживания вероятность потери заявки при 2-х канальной организации обслуживания входного потока составляет 0,25, т. е. четвертую часть от всех поступающих, а при наличии 3-х приборов обслуживания — 0,09. При этом в первом случае один канал

всегда свободен, но теряем заявки, а во втором — два канала свободны, но вероятность потери заявки минимальна.

2. Построим модель в среде GPSS для двух и трех приборов обслуживания.

Запишем текст программы и запустим модель: «Command» — «Create Simulation» или Ctrl+Alt+S. Компилятор проверит программу и выдаст отчет о работе модели. Расшифровка отчета приведена в приложении 11.

Текст программы для двух приборов обслуживания приведен на скриншоте.

Время работы модели равно 480 мин., что соответствует 8-ми часовому рабочему дню.

```

SIMULATE
*
*   Входные данные
*
A      STORAGE 2           ; Одно двухканальное устройство
T1     EQU 1.25           ; Среднее время между входящими заявками
T2     EQU 1.5            ; Среднее время обслуживания
POBSL  VARIABLE N$OBSL/N$VSEGO ; Вероятность обслуживания заявки
PPOTERI VARIABLE N$POTERI/N$VSEGO ; Вероятность потери
NVSEGO VARIABLE INT(N$VSEGO) ; Общее количество сгенерированных заявок
NOBSL  VARIABLE INT(N$OBSL) ; Количество обслуженных заявок
NPOTERI VARIABLE INT(N$POTERI) ; Количество потерянных заявок
*
*   Обработка запросов
*
GENERATE (Exponential(1,0,T1)) ; Моделируем входной поток
VSEGO GATE SNF A,POTERI ; Условие: если A занято, то теряем заявку
ENTER A ; Занять устройство A
ADVANCE (Exponential(1,0,T2)) ; Моделируем обслуживание
LEAVE A ; Освободить устройство A
OBSL TERMINATE ; Удаляем обслуженные заявки
POTERI TERMINATE ; Удаляем потерянные заявки
*
*   Расчет характеристик
*
GENERATE 480 ; Моделируем время работы системы
SAVEVALUE POBSL,V$POBSL ; Сохраняем значение вероятности обслуживания
SAVEVALUE PPOTERI,V$PPOTERI ; Сохраняем значение вероятности потери
SAVEVALUE NOBSL,V$NOBSL ; Сохраняем значение колич. обл. заявок
SAVEVALUE NPOTERI,V$NPOTERI ; Сохраняем значение колич. потер. заявок
SAVEVALUE NVSEGO,V$NVSEGO ; Сохраняем общее кол. сгенерированных заявок
TERMINATE 1 ; Завершаем работу модели
*
*
*
START 1 ; Количество прогонов модели

```

Рассчитаем необходимое количество прогонов модели при $n = 2$ для определения вероятностных характеристик с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.99$.

Прогоним модель 50 раз. Для этого в последней строчке программы «1» заменим на «50». Запустим модель (Ctrl+Alt+S): вероятность обслуживания — 0,75.

Тогда, количество прогонов при указанных выше условиях

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \frac{0.75 \cdot (1-0.75)}{0.01^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{0.99}{2} \right) \right]^2 = \\
 &= \frac{0.75 \cdot (1-0.75)}{0.01^2} \cdot 2.58^2 \approx 12480.75.
 \end{aligned}$$

Округляем полученное значение в большую сторону и получаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятностных характеристик при заданных входных значениях: $N = 12481$.

Делаем необходимые изменения в последней строчке программы и запускаем модель (Ctrl+Alt+S), получаем искомые результаты.

Для $n = 3$ (A STORAGE 3) сделаем аналогичные расчеты и изменения в программе.

Полученные результаты сведем в таблицу.

Если установлено модельное время работы достаточно большое (например, 50000000 единиц для нашей модели), то можно проследить за работой модели: Window — Simulation Window — Blocks Window.

$n = 2$	Расчетное значение	GPSS	
		Один прогон в течении 8 часов	12481 прогон
Относительная пропускная способность q	0,755	0,769	0,754
Среднее число занятых каналов $\bar{k}$	0,899	0,868	0,904
Коэффициент занятости одного обслуживающего прибора k_{cai}	0,45	0,434	0,452

$n = 3$	Расчетное значение	GPSS	
		Один прогон в течении 8 часов	5397 прогонов
Относительная пропускная способность q	0,91	0,887	0,91
Среднее число занятых каналов $\bar{k}$	1,09	1,069	1,093
Коэффициент занятости одного обслуживающего прибора k_{cai}	0,36	0,356	0,364

Значения характеристик системы, полученные при моделировании, совпадают с расчетными значениями, что говорит об адекватности построенной модели.

Задача 6.2. На сервер, имеющий n процессоров, поступают запросы от рабочих компьютеров с интервалом в среднем t_1 мин., которые обрабатываются в среднем в течение t_2 мин. Каждый процессор может обрабатывать одно сообщение, а потом начинать обрабатывать другое и т. д. В случае если все процессоры заняты, то входящее сообщение теряется. Предполагается, что входящий поток простейший, а время обслуживания подчинено экспоненциальному закону. Время работы сервера составляет 24 часа.

1. Рассчитать абсолютную и относительную пропускную способность, вероятность отказа и среднее число занятых каналов.

2. Построить модель в GPSS, определить основные характеристики системы с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.95$ и сравнить полученные результаты с расчетными.

4. Определить необходимое количество процессоров для обслуживания не менее 95 % запросов.

№ варианта	n	t_1	t_2
1.	5	2	3
2.	6	3	4
3.	7	4	5
4.	8	3	5
5.	7	2	4
6.	8	5	7
7.	6	4	5
8.	8	3	8
9.	7	2	7
10.	5	5	9
11.	5	3	4
12.	6	3	6
13.	7	2	9
14.	4	3	7
15.	7	4	9

№ варианта	n	t_1	t_2
16.	6	3	5
17.	7	3	5
18.	8	3	6
19.	7	3	6
20.	6	3	5
21.	7	2	7
22.	5	5	7
23.	8	2	9
24.	4	2	7
25.	3	5	9
26.	2	2	5
27.	6	3	9
28.	5	8	9
29.	3	5	7
30.	3	4	8

6.3. Одноканальная СМО с ожиданием

6.3.1. Одноканальная СМО с очередью длиной n

Рассмотрим одноканальную СМО с ограниченным количеством мест в очереди. Система может находиться в следующих состояниях:

S_0 — канал свободен;

S_1 — канал занят, очереди нет;

S_2 — канал занят, одна заявка в очереди;

...

S_k — канал занят, $k-1$ заявок стоят в очереди;

...

S_{n+1} — канал занят, n заявок стоят в очереди.

Определим характеристики данной системы:

1. вероятность отказа обслуживания запросов $p_{отк}$;

2. относительную пропускную способность q ;

3. абсолютную пропускную способность A ;

4. среднюю длину очереди $\bar{r}$;

5. среднее число заявок, связанных с системой $\bar{k}$;

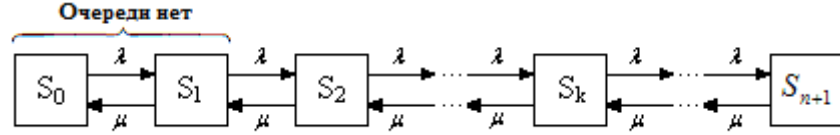
6. среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$;

7. среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$.

Систему из состояния S_0 в состояние S_1 и т. д. до состояния S_{n+1} переводит один и тот же входящий поток заявок с интенсивностью λ .

Систему из состояний справа на лево переводит поток с интенсивностью μ , действительно, как только будет обслужена очередная заявка канал либо освободится, либо уменьшится количество заявок.

Размеченный граф состояний системы приведен на рис.

Рис. Одноканальная СМО с очередью длиной n

Работа одноканальной СМО с очередью длиной n представляет собой частный случай процесса гибели и размножения. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot p_1 + \lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_2 \\ \dots \\ \frac{dp_k}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot p_k + \lambda \cdot p_{k-1} + \mu \cdot p_{k+1} \\ \dots \\ \frac{dp_{n+1}}{dt} = \lambda \cdot p_n - \mu \cdot p_{n+1} \end{cases}$$

Найдем предельные вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_n$, характеризующие установившейся режим работы СМО, т. е. при $t \rightarrow \infty$. Учитывая, что в этом случае все производные будут равны нулю и $\sum_{i=0}^{n+1} p_i = 1$, то решение системы будет имеет вид

$$\begin{cases} p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0 \\ p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \\ \dots \\ p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \\ p_{n+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} p_0 \\ p_0 = \frac{1}{1 + (\lambda/\mu) + (\lambda/\mu)^2 + \dots + (\lambda/\mu)^{n+1}} = \left(\sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right)^{-1} \end{cases}$$

Пусть $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ — приведенная интенсивность входного потока. Тогда решение

системы

$$\begin{cases} p_1 = \rho \cdot p_0 \\ p_2 = \rho^2 \cdot p_0 \\ \dots \\ p_k = \rho^k \cdot p_0 \\ \dots \\ p_{n+1} = \rho^{n+1} \cdot p_0 \\ p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{n+1}} = \left(\sum_{i=0}^{n+1} \rho^i \right)^{-1} \end{cases}.$$

Знаменатель последнего уравнения системы представляет собой геометрическую прогрессию. Вспомним, что сумма n первых членов геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ при $q \neq 1$ равна $\frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ и $b_1 \cdot n$ — если $q = 1$ (при ограниченном n , в противном случае при $n \rightarrow \infty$ ряд расходящийся). Тогда, выражения для p_0 можно переписать в виде

$$p_0 = \frac{1}{(1 - \rho^{n+2})/1 - \rho} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+2}} \quad (b_1 = 1 \text{ и } n+2 - n+1 \text{ член ряда})$$

и система уравнений примет вид

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+2}} \\ p_1 = \rho \cdot p_0 \\ p_2 = \rho^2 \cdot p_0 \\ \dots \\ p_k = \rho^k \cdot p_0 \\ \dots \\ p_{n+1} = \rho^{n+1} \cdot p_0 \end{cases}.$$

Определим характеристики эффективности одноканальной СМО с очередью длиной n .

Заявка получит отказ в обслуживании, если канал занят и свободных мест в очереди нет, т. е.

$$p_{\text{отк}} = 1 - p_0 = \rho^{n+1} p_0 = \frac{\rho^{n+1} \cdot (1 - \rho)}{1 - \rho^{n+2}}.$$

Относительная пропускная способность:

$$q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+1} \cdot (1 - \rho)}{1 - \rho^{n+2}}.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot q.$$

Среднюю длину очереди $\bar{r}$ определим как математическое ожидание дискретной случайной величины X — количество заявок в очереди. Когда в очереди одна заявка, то вероятность этого события p_2 , две — p_3 , ..., $k-1$ заявок — p_k и n заявок — p_{n+1} . Тогда, используя формулу для нахождения первого начального момента (математического ожидания) дискретной случайной величины, получим

$$\bar{r} = M(X) = \sum x_i p_i = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \dots + (k-1) \cdot p_k + n \cdot p_{n+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \cdot \rho^2 p_0 + 2 \cdot \rho^3 p_0 + \dots (k-1) \cdot \rho^k p_0 + n \cdot \rho^{n+1} p_0 = \\
&= \rho^2 \cdot p_0 \cdot (1 + 2 \cdot \rho + \dots (k-1) \cdot \rho^{k-2} + n \cdot \rho^{n-1}).
\end{aligned}$$

Вспомним, что при $|\rho| < 1$

$$1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^n = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho}.$$

Тогда

$$\rho \cdot (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^n) = \rho \cdot \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} = \frac{\rho - \rho^{n+1}}{1 - \rho}.$$

Продифференцируем правую и левую части данного равенства.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho} (\rho + \rho^2 + \dots + \rho^{k-1} + \rho^n) &= 1 + 2 \cdot \rho + \dots (k-1) \cdot \rho^{k-2} + n \cdot \rho^{n-1}, \\
\frac{d}{d\rho} \frac{\rho - \rho^{n+1}}{1 - \rho} &= \frac{(1 - (n+1)\rho^n) \cdot (1 - \rho) - (\rho - \rho^{n+1}) \cdot (-1)}{(1 - \rho)^2} = \\
&= \frac{1 - (n+1) \cdot \rho^n - \rho + (n+1) \cdot \rho^{n+1} + \rho - \rho^{n+1}}{(1 - \rho)^2} = \frac{1 - (n+1) \cdot \rho^n + (n+1) \cdot \rho^{n+1} - \rho^{n+1}}{(1 - \rho)^2} = \\
&= \frac{1 - \rho^n \cdot (n+1 - n\rho)}{(1 - \rho)^2},
\end{aligned}$$

таким образом

$$1 + 2 \cdot \rho + \dots (k-1) \cdot \rho^{k-2} + n \cdot \rho^{n-1} = \frac{1 - \rho^n \cdot (n+1 - n\rho)}{(1 - \rho)^2}.$$

Учитывая полученное равенство, выражение для средней длины очереди $\bar{r}$ будет иметь вид

$$\bar{r} = \rho^2 p_0 \frac{1 - \rho^n \cdot (n+1 - n\rho)}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho^2 \cdot (1 - \rho) \cdot (1 - \rho^n \cdot (n+1 - n\rho))}{(1 - \rho^{n+2}) \cdot (1 - \rho)^2}.$$

Таким образом, средняя длина очереди $\bar{r}$ одноканальной СМО с очередью длиной n определяется как

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 \cdot (1 - \rho^n \cdot (n+1 - n\rho))}{(1 - \rho^{n+2}) \cdot (1 - \rho)}.$$

Найдем среднее количество заявок под обслуживанием $\bar{w}$. Так как канал один, то в обслуживании может не быть заявок с вероятностью p_0 или находиться одна заявка с вероятностью $1 - p_0$. Тогда, математическое ожидание числа заявок, находящихся под обслуживанием

$$\bar{w} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+2}} = \frac{\rho - \rho^{n+2}}{1 - \rho^{n+2}}.$$

Определим среднее число заявок, связанных с системой $\bar{k}$, т. е. заявок стоящих в очереди и заявок, находящихся в обслуживании. Для этого рассмотрим случайную дискретную случайную величину Z — среднее количество заявок, связанных с системой

$$Z = X + Y,$$

где X — количество заявок в очереди, Y — количество заявок под обслуживанием.

По теореме сложения имеем

$$M(Z) = M(X) + M(Y) = \bar{r} + \bar{w},$$

где $\bar{r}$ — среднее количество заявок в очереди,

$\bar{w}$ — среднее количество заявок под обслуживанием.

Тогда, среднее число заявок, связанных с системой $\bar{k}$

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{w} = \frac{\rho^2 \cdot (1 - \rho^n \cdot (n + 1 + n \cdot \rho))}{(1 - \rho^{n+2}) \cdot (1 - \rho)} + \frac{\rho - \rho^{n+2}}{1 - \rho^{n+2}}.$$

Найдем выражение для нахождения среднего времени ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$. Пусть вновь пришедшая заявка застает канал обслуживания не занятым, вероятность этого события p_0 и время ожидания в этом случае будет равно нулю. Следующая заявка застает канал занятым с вероятностью p_1 , встает первой в очередь и ожидает обслуживания в течение времени $\bar{t}_{обс} = \frac{1}{\mu}$. Очередная заявка, заставшая занятыми канал обслуживания и первое место в очереди, занимает второе место в очереди и ждет обслуживания в течение времени $\frac{2}{\mu}$ (пока не будет обслужена первая заявка и заявка, стоящая в очереди первой). k -ая заявка прибывает с вероятностью p_k и ждет обслуживания $\frac{k}{\mu}$ единиц времени. $m+1$ -ая заявка застает все места в очереди занятыми и время ожидания также равно нулю, так как заявка покидает систему. Тогда, математическое ожидание среднего времени ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$

$$\bar{t}_{ож} = 0 \cdot p_0 + \frac{1}{\mu} \cdot p_1 + \frac{2}{\mu} \cdot p_2 + \dots + \frac{k}{\mu} \cdot p_k + \dots + \frac{n}{\mu} \cdot p_n$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ож} &= \frac{1}{\mu} \cdot \rho \cdot p_0 + \frac{2}{\mu} \cdot \rho^2 \cdot p_0 + \dots + \frac{k}{\mu} \cdot \rho^k \cdot p_0 + \dots + \frac{n}{\mu} \cdot \rho^n \cdot p_0 = \\ &= \frac{\rho \cdot p_0}{\mu} (1 + 2\rho + \dots + k\rho^{k-1} + \dots + n\rho^{n-1}). \end{aligned}$$

Выражение в скобках является производной от геометрической прогрессии, поэтому, воспользовавшись выражением, полученным выше, имеем

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho \cdot p_0}{\mu} \cdot \frac{1 - \rho^n \cdot (n + 1 - n \cdot \rho)}{(1 - \rho)^2}.$$

Учитывая, что $p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+2}}$, полученное выражение для $\bar{t}_{ож}$ примет вид

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+2}} \cdot \frac{1 - \rho^n \cdot (n + 1 - n \cdot \rho)}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho \cdot (1 - \rho^n \cdot (n + 1 - n \cdot \rho))}{\mu \cdot (1 - \rho^{n+2}) \cdot (1 - \rho)}.$$

Так как $\bar{r} = \frac{\rho^2 \cdot (1 - \rho^n \cdot (n + 1 - n \cdot \rho))}{(1 - \rho^{n+2}) \cdot (1 - \rho)}$, то после замены, среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$ определим как

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\rho \cdot \mu} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

Найдем среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$. Рассмотрим случайную величину $T_{сист}$ — время пребывания заявки в системе, как сумму двух других слу-

чайных величин: $T_{ож}$ — время ожидания заявки в очереди и $T_{об}$ — время обслуживания в очереди.

По теореме сложения математических ожиданий

$$\bar{t}_{сист} = M(T_{сист}) = M(T_{ож}) + M(T_{об}),$$

где $M(T_{ож}) = \bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$, $M(T_{об}) = q \cdot \bar{t}_{об} = \frac{q}{\mu}$ (если загрузка системы менее 100 %, в противном случае $M(T_{об}) = q \cdot \bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu}$).

Тогда среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{r}}{\lambda} + \frac{q}{\mu}.$$

6.3.2. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим одноканальную СМО с неограниченным количеством мест в очереди. Система может находиться в следующих состояниях (число состояний бесконечно):

S_0 — канал свободен;

S_1 — канал занят, очереди нет;

S_2 — канал занят, одна заявка в очереди;

...

S_k — канал занят, $k-1$ заявок стоят в очереди;

...

Определим характеристики данной системы:

1. вероятность отказа обслуживания запросов $p_{отк}$;
2. относительную пропускную способность q ;
3. абсолютную пропускную способность A ;
4. среднюю длину очереди $\bar{r}$;
5. среднее число заявок, связанных с системой $\bar{k}$;
6. среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$;
7. среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$.

Размеченный граф состояний системы приведен на рис.

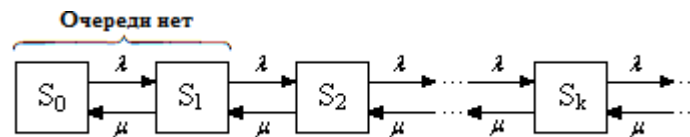


Рис. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Характеристики работы данной системы найдем из выражений, полученных для одноканальной СМО с очередью длиной n , путем предельного перехода, устремив n к бесконечности.

В данном случае важной характеристикой будет приведенная плотность потока

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\bar{t}_{об}}{\bar{t}_{вх}}$, характеризующая среднее количество прибывших заявок за среднее время

обслуживания одной заявки. Очевидно, что если $\bar{t}_{об}$ будет меньше $\bar{t}_{вх}$, то $\rho < 1$ и в системе будет существовать предельный режим; в противном случае ($\rho \geq 1$) – при $t \rightarrow \infty$ очередь будет расти до бесконечности.

Так же необходимо отметить, что при $\rho < 1$ и $n \rightarrow \infty$ знаменатель дроби p_0 (СМО с ограниченным количеством мест в очереди) является бесконечной убывающей геометрической прогрессией — этот ряд сходится, а значит, имеет сумму.

Пусть $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ и $n \rightarrow \infty$.

Предельные вероятности состояний системы

$$\begin{cases} p_0 = 1 - \rho \\ p_1 = \rho \cdot (1 - \rho) \\ p_2 = \rho^2 \cdot (1 - \rho) \\ \dots \\ p_k = \rho^k \cdot (1 - \rho) \\ \dots \end{cases}.$$

Определим характеристики эффективности одноканальной СМО с неограниченной очередью.

Заявка, ставшая в очередь, все равно будет обслужена, поэтому $p_{отк} = 0$, а относительная пропускная способность $q = 1$.

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot q = \lambda.$$

Средняя длина очереди $\bar{r}$:

$$\bar{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho^2 \cdot (1 - \rho) \cdot (1 - \rho^n \cdot (n + 1 - n \cdot \rho))}{(1 - \rho^{n+2}) \cdot (1 - \rho)^2} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Среднее количество заявок под обслуживанием $\bar{w}$:

$$\bar{w} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho - \rho^{n+2}}{1 - \rho^{n+2}} = \rho = 1 - p_0.$$

Среднее число заявок в системе $\bar{k}$:

$$\bar{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\rho^2 \cdot (1 - \rho^n \cdot (n + 1 - n \cdot \rho))}{(1 - \rho^{n+2}) \cdot (1 - \rho)} + \frac{\rho - \rho^{n+2}}{1 - \rho^{n+2}} \right) = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$:

$$\bar{t}_{ож} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho \cdot (1 - \rho^n \cdot (n + 1 - n \cdot \rho))}{\mu \cdot (1 - \rho^{n+2}) \cdot (1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$ ($\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu}$, если загрузка системы равна 100 %, в противном случае $\bar{t}_{об} = \frac{q}{\mu}$):

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu \cdot (1 - \rho)}.$$

Пример 6.3. Рассмотрим «поведение» одноканальной СМО с ожиданием в разных режимах.

1. Одноканальная СМО с неограниченной очередью ($\rho > 1$).

Пусть $\rho > 1$, т. е. очередь будет расти без ограничений и пусть $\lambda = 30$, $\mu = 10$.

Примером такой системы может быть однопроцессорная ЭВМ, обрабатывающая в оперативном режиме запросы пользователя. Память, выделенная для буферизации запросов, настолько велика, что влиянием ее размера на характеристики системы можно пренебречь.

Определим характеристики данной системы без ограничений по очереди.

Рассчитывать характеристики по полученным выше формулам не имеет смысла, так как получим отрицательные значения вероятностей ($\rho > 1$), а как следствие и других характеристик.

Текст программы в среде GPSS будет иметь вид, представленный на скриншоте. В данном случае блоки (QUEUE – DEPART), собирающие статистику по очереди могут отсутствовать — необходимые характеристики могут быть получены без них.

Запишем текст программы и запустим модель: «Command» — «Create Simulation» или Ctrl+Alt+S. Компилятор проверит программу и выдаст отчет о работе модели. Расшифровка отчета приведена в приложении 11.

```

SIMULATE
*
*   Входные данные
*
T1      EQU      0.033          ; Среднее время между входящими заявками
T2      EQU      0.1            ; Среднее время обслуживания
POBSL   VARIABLE  N$OBSL/N$VSEGO ; Вероятность обслуживания заявки
*
*   Обработка запросов
*
VSEGO   GENERATE  (Exponential(1,0,T1)) ; Моделируем входной поток
        QUEUE    A              ; Собираем статистику по очереди
        SEIZE    A              ; Занять очередь к устройству A
        DEPART   A              ; Вывести транзакт из очереди
        ADVANCE  (Exponential(1,0,T2)) ; Моделируем обслуживание
        RELEASE  A              ; Освободить устройство A
OBSL     TERMINATE ; Удаляем обслуженные заявки
*
*   Расчет характеристик
*
        GENERATE  480           ; Моделируем время работы системы
        SAVEVALUE POBSL,V$POBSL ; Сохраняем значение вероятности обслуживания
        TERMINATE 1             ; Завершаем работу модели
*
*
*
START    1                    ; Количество прогонов модели
  
```

Оценка относительной пропускной способности без ограничения по времени.

Для нашей задачи очередь растет без ограничений и в определенный момент времени в системе может (должен) произойти «взрыв». Если в среде GPSS время моделирования установить достаточно большим, то память «не справится» с задачей и произойдет сбой.

Рассчитаем необходимое количество прогонов модели для GPSS World для определения вероятностных характеристик с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.99$.

Прогоним модель 50 раз. Для этого в последней строчке программы «1» заменим на «50». Запустим модель (Ctrl+Alt+S): вероятность обслуживания — 0,33.

Тогда, количество прогонов при указанных выше условиях

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \frac{0.33 \cdot (1-0.33)}{0.01^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{0.99}{2} \right) \right]^2 = \\
 &= \frac{0.33 \cdot (1-0.33)}{0.01^2} \cdot 2.58^2 \approx 14717.30.
 \end{aligned}$$

Округляем полученное значение в большую сторону и получаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятностных характеристик при заданных входных значениях: $N = 14718$.

При полученном значении количества прогонов модели ожидание окончания моделирования занимает существенное время. Поэтому ограничимся $N = 100$.

Делаем необходимые изменения в последней строчке программы и запускаем модель (Ctrl+Alt+S), получаем искомые результаты.

Полученные при моделировании значения относительной пропускной способности (вероятности обслуживания) сведены в таблицу.

	Расчетное значение	GPSS	
		В течение 8 часов	Без ограничения
Относительная пропускная способность q	1	0,335	0,33
Коэффициент занятости одного обслуживающего прибора $k_{зан}$	Естественно 1	1	1

Вероятность обслуживания заявки составляет 0,334 и 0,33 соответственно, хотя данное значение должно быть равно 1. Такое отличие обусловлено тем, что входной поток не имеет ограничений, а интенсивность входного потока в 3 раза выше потока обслуживания. Если же количество входных заявок ограничить, и все они войдут в систему в установленное модельное время, то вероятность обслуживания станет равной 1.

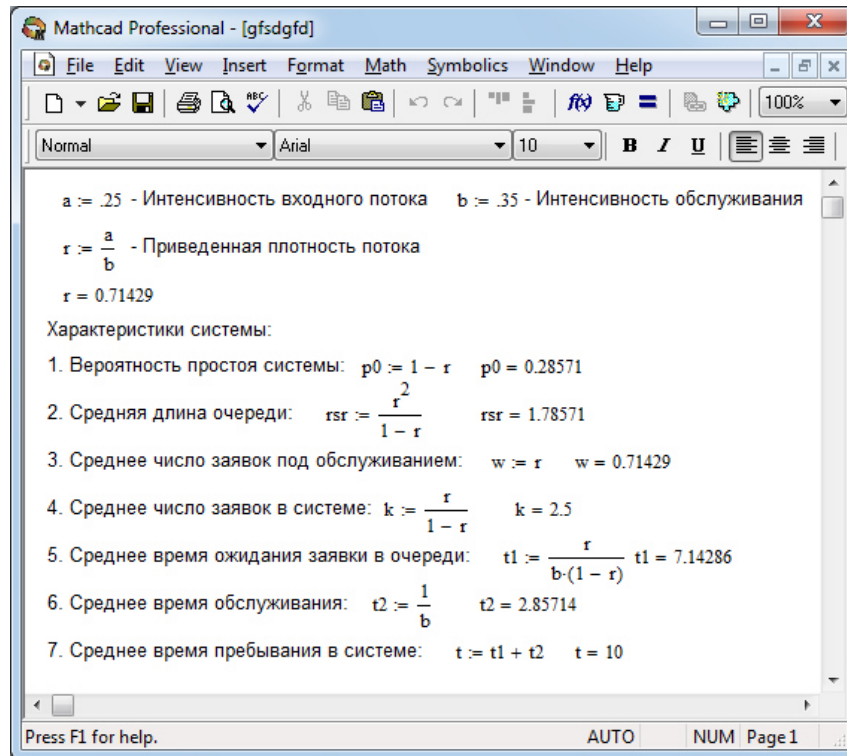
Если в моделях установить $\lambda = \mu$, т. е. $\rho = 1$, то вероятность обслуживания будет стремиться к 1, что очевидно.

2. Одноканальная СМО с неограниченной очередью ($\rho < 1$).

Пусть $\rho < 1$, т. е. система справляется с потоком поступающих заявок и пусть $\lambda = 0,25$, $\mu = 0,35$.

Заявка, ставшая в очередь, все равно будет обслужена, поэтому $p_{отк} = 0$, а относительная пропускная способность $q = 1$.

Рассчитаем характеристики системы в среде Mathcad.

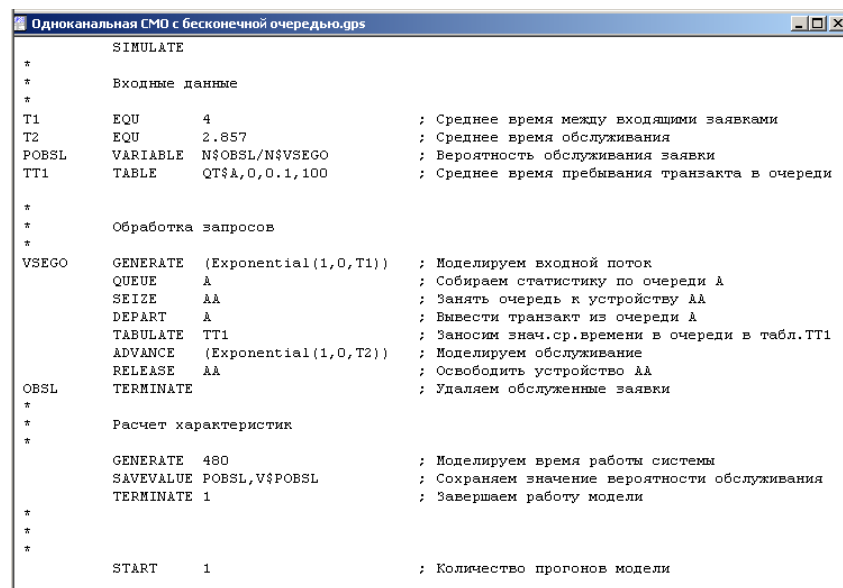


Текс программы в GPSS аналогичен предыдущему (за исключением входных данных).

Оператором «TT1 TABLE QT\$A,0,0.1,100» собираем статистику о среднем времени пребывания транзакта в очереди.

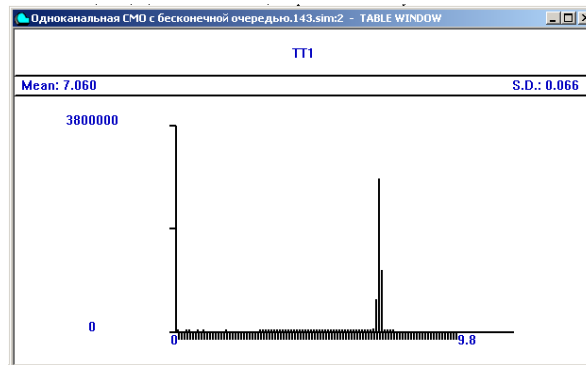
Блок «TABULATE TT1» должен стоять сразу после операторов, задающих очередь (или тех блоков, после которых необходимо записать искомые данные в таблицу).

Остальные результаты возьмем из стандартного отчета.



Так же можно просмотреть результаты табулирования изучаемой величины графически после прогона модели.

Window — Simulation Window — Table Window, в появившемся окне необходимо ввести наименование таблицы (ТТ1).



Определим необходимое количество прогонов модели. Использование формулы количества прогонов при определении вероятности появления события не даст положительного результата, т. к. $p \rightarrow 1$.

Учитывая, что искомым результатом является среднее время пребывания транзакта в очереди, определим необходимое количество прогонов.

Прогоним модель 50 раз. Для этого в последней строчке программы заменим «1» на «50». В полученном отчете из таблицы ТТ1 определяем среднее квадратическое отклонение — 0,76.

Одноканальная СМО с бесконечной очередью.134.1 - REPORT										
		11	TERMINATE	50	0	0				
FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY	
AA	5899	0.712	2.898	1	5949	0	0	0	0	
QUEUE	MAX CONT.	ENTRY	ENTRY(O)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-O)	RETRY			
A	19	0	5899	1703	1.706	6.942	9.759	0		
TABLE	MEAN	STD.DEV.	RANGE	RETRY FREQUENCY CUM.%						
TT1	6.335	0.760		0.000	0.100	0.200	0	0.05		

Пусть достоверность $Q = 0,99$ и точность $\varepsilon = 0,01$. Тогда

$$N = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^2 \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \left(\frac{0.76}{0.01} \right)^2 \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{99}{2} \right) \right]^2 = \left(\frac{0.76}{0.01} \right)^2 \cdot 2.58^2 \approx 38447.37.$$

Округляем до целого вверх. Окончательно имеем $N = 38448$.

Запускаем модель (Ctrl+Alt+S), результаты заносим в таблицу.

Одноканальная СМО с бесконечной очередью.115.1 - REPORT										
FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY	
A	3600302	0.714	2.856	1	3630302	0	0	0	1	
QUEUE	MAX CONT.	ENTRY	ENTRY(O)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-O)	RETRY			
A	38	1	3600303	1028623	1.777	7.106	9.948	0		
SAVEVALUE	RETRY	VALUE								
POBSL	0	1.000								

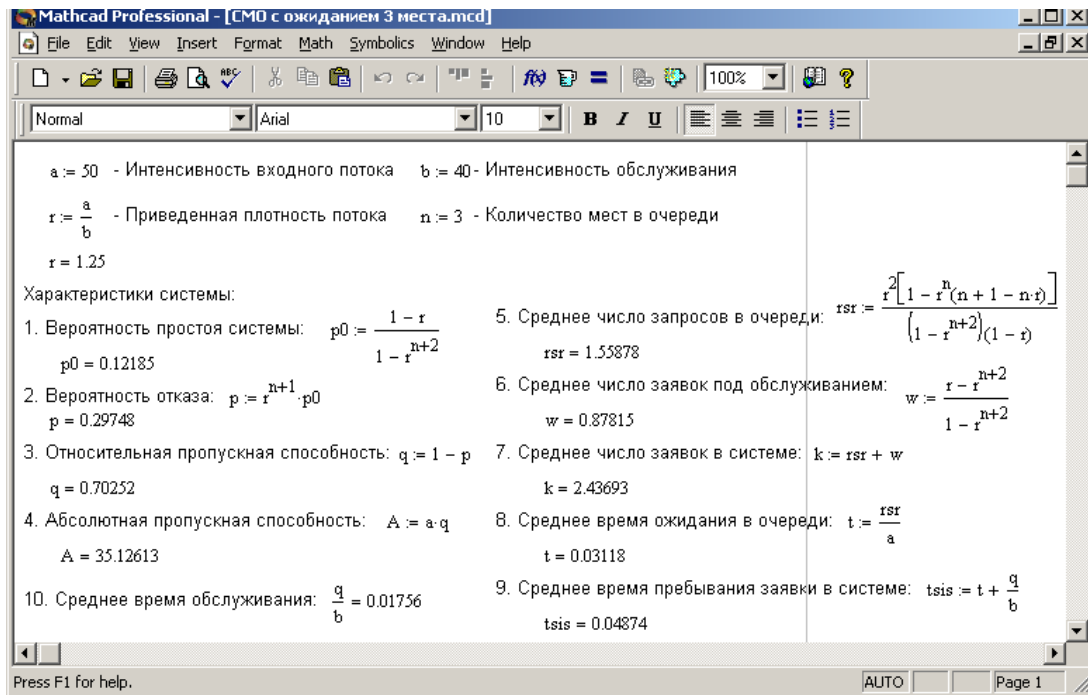
	Расчетное значение	GPSS	
		В течение 8 часов	$N = 38448$
Относительная пропускная способность q	1	0,973	1
Средняя длина очереди	1,786	0,995	1,777
Количество заявок под обслуживанием (коэффициент использования оборудования)	0,714	0,627	0,714
Среднее количество заявок в системе	2,5	—	—
Среднее время в очереди	7,143	3,239	7,060
Среднее время обслуживания	2,857	2,712	2,856
Среднее время в системе	10,0	5,951	9,916

Значительное расхождение исследуемых параметров, полученных при моделировании в течение 8 часов, с расчетными обусловлено ограниченностью времени моделирования — модель системы не успевает выйти в стационарный (установившийся) режим. Поэтому делать выводы о работе систем данного вида в ограниченный промежуток времени не верно, это приводит к неправильной интерпретации результатов.

3. Одноканальная СМО с очередью длиной n ($\rho > 1$).

Пусть $\rho > 1$, мест в очереди ограничено ($n = 3$) и пусть $\lambda = 50$, $\mu = 40$. В этом случае заявка, заставшая все места в очереди занятыми, покидает систему.

Определим характеристики системы.



При построении модели в среде GPSS можно при вводе входных данных добавить команду для построения таблицы распределения частот разных характеристик, например – занятых мест в очереди:

TABL QTABLE A,0,0.01,50,

здесь параметры распределения подбираются экспериментально.

После прогона модели в отчете появится данная таблица.

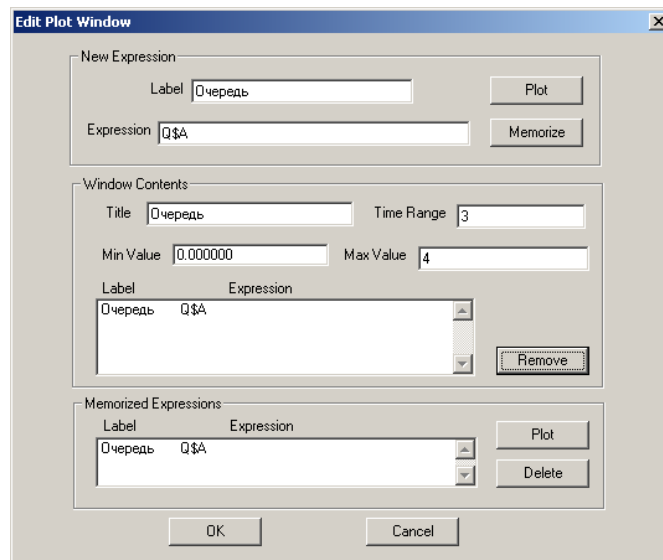
Для просмотра гистограммы необходимо выбрать «Window — Simulation Window — Table Window», в появившемся окне написать имя таблицы (в нашем случае TABL) и нажать «OK». На гистограмме отображается среднее значение изучаемой величины (Mean), а также среднее квадратическое отклонение (S.D.).

```

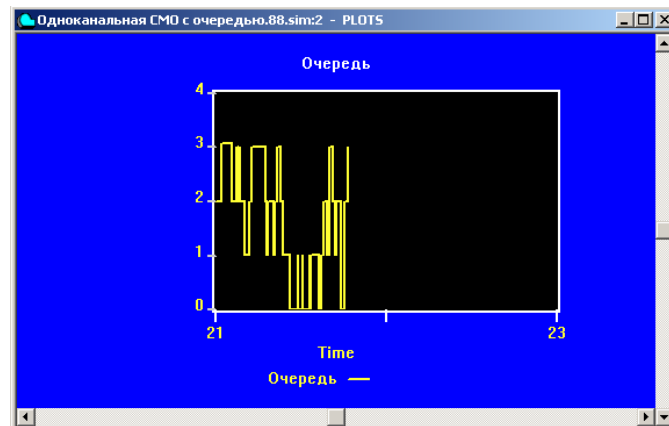
Одноканальная СМО с очередью.gps
SIMULATE
*
*   Входные данные
*
T1      EQU      0.02      ; Среднее время между входящими заявками
T2      EQU      0.025     ; Среднее время обслуживания
N1      EQU      3         ; Количество мест в очереди
POBSL   VARIABLE  N$OBSL/N$VSEGO ; Вероятность обслуживания
NVSEGO  VARIABLE  INT(N$VSEGO) ; Общее количество сгенерированных заявок
NOBSL   VARIABLE  INT(N$OBSL) ; Количество обслуженных заявок
NPOTERI VARIABLE  INT(N$POTERI) ; Количество потерянных заявок
TABL    QTABLE    A,0,0.01,50 ; Собираем данные для построения гистограммы очереди
*
*   Обработка запросов
*
VSEGO   GENERATE  (Exponential(1,0,T1)) ; Моделируем входной поток
        TEST L    Q$A,N1_,POTERI ; Условие: если места в оч. заняты (L<N1_), то теряем заявку
        QUEUE    A ; Собираем статистику по очереди A
        SEIZE    AA ; Занять очередь к устройству AA
        DEPART   A ; Вывести транзакт из очереди A
        SEIZE    AA ; Занять устройство AA
*
        ADVANCE  (Exponential(1,0,T2)) ; Моделируем обслуживание заявки
        RELEASE  AA ; Освободить устройство AA
OBSL    TERMINATE ; Удаляем обслуженные заявки
POTERI  TERMINATE ; Удаляем потерянные заявки
*
*   Расчет характеристик
*
        GENERATE 480 ; Моделируем время работы системы
        SAVEVALUE POBSL,V$POBSL ; Сохраняем значение вероятности обслуживания
        SAVEVALUE NOBSL,V$NOBSL ; Сохраняем значение колич. обслуж. заявок
        SAVEVALUE NPOTERI,V$NPOTERI ; Сохраняем значение колич. потер. заявок
        SAVEVALUE NVSEGO,V$NVSEGO ; Сохраняем общее кол. сгенерированных заявок
        TERMINATE 1 ; Завершаем работу модели
*
*
*
START    1 ; Количество прогонов модели

```

Также можно построить график, характеризующий количество занятых мест в очереди. Для этого в тексте программы перед блоком START поставим звездочку. Запустим компилятор: Command — Create Simulation или Ctrl+Alt+S. После успешной компиляции выбираем Window — Simulation Window — Plot Window... Поля таблицы заполняем согласно скриншота и нажимаем «OK».



Далее запускаем модель: Command — START. В появившемся окне появляется надпись «START1» (можно вместо 1 вбить любое нужное количество прогонов модели) и нажимаем «OK».



Рассчитаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятностных характеристик с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.99$.

Прогоним модель 50 раз. Для этого в последней строчке программы «1» заменим на «50». Запустим модель (Ctrl+Alt+S): вероятность обслуживания — 0,702.

Тогда, количество прогонов при указанных выше условиях

$$N = \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \frac{0.702 \cdot (1-0.702)}{0.01^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{0.99}{2} \right) \right]^2 =$$

$$= \frac{0.702 \cdot (1-0.702)}{0.01^2} \cdot 2.58^2 \approx 13924.92.$$

Округляем полученное значение в большую сторону и получаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятностных характеристик при заданных входных значениях: $N = 13925$.

Делаем необходимые изменения в последней команде программы и запускаем модель (Ctrl+Alt+S).

Для сравнения результатов моделирования составим таблицу.

	Расчетное значение	GPSS	
		В течение 8 часов	$N = 13925$
Относительная пропускная способность q	0,702	0,694	0,702
Среднее количество заявок в очереди	1,558	1,584	1,552
Количество заявок под обслуживанием (коэффициент использования оборудования)	0,878	0,884	0,878
Среднее время в очереди	0,031	0,045	0,044
Среднее время обслуживания	0,017	0,025	0,025

Результаты моделирования совпадают с расчетными. Отличие во времени пребывания заявки в очереди, а также по времени обслуживания связаны со случайностью входного потока.

Говорить об оптимальном количестве мест в очереди для данной задачи нет смысла. Так как $\lambda > \mu$, то $\rho > 1$, следовательно, очередь будет расти до бесконечности при любом конечном количестве мест в очереди. Для таких условий оптимальным будет одно место в очереди. Последующее увеличение мест в очереди приведет к неоправданным затратам, а очередь от этого не уменьшится.

4. Одноканальная СМО с ожиданием и очередью длиной n ($\rho < 1$).

Пусть $\rho < 1$, мест в очереди ограничено ($n = 3$) и пусть $\lambda = 0,25$, $\mu = 0,35$. Заявка, заставшая все места в очереди занятыми, покидает систему.

Модели работы данной системы аналогичны описанным выше моделям (за исключением входных данных).

Опустим уже известные нам вычисления и рассуждения по определению необходимого количества прогонов модели для выхода системы в стационарный режим и получения достоверных результатов.

Результаты моделирования в стационарном (установившемся) режиме и расчетов сведем в таблицу, предполагая, что количество мест в очереди $n = 3$.

	Расчетное значение	GPSS
Относительная пропускная способность q	0,908	0,908
Среднее количество заявок в очереди	0,709	0,709
Количество заявок под обслуживанием (коэффициент использования оборудования)	0,649	0,649
Среднее время в очереди	2,835	3,123
Среднее время обслуживания	2,596	2,858

Значения характеристик системы, полученные при моделировании, совпадают с расчетными значениями, что говорит об адекватности построенной модели. Некоторые отличия значений обусловлены случайностью входного потока.

Поставим перед собой задачу. Пусть доход, получаемый от обслуживания одной заявки, составляет $c1 = 55$ единиц, а затраты на одно место очереди составляют $c2 = 0,2$ единицы. Определим необходимое количество мест в очереди для получения максимальной прибыли.

Совокупный доход определим как

$$r1(n) = c1 \cdot A(n),$$

где $A(n)$ — абсолютная пропускная способность (количество обслуженных заявок за единицу времени),

затраты на содержание n мест очереди —

$$r2(n) = c2 \cdot n,$$

тогда прибыль нашей организации $t(n)$:

$$t(n) = r1(n) - r2(n).$$

Таким образом, задача сводится к нахождению максимума целевой функции $t(n)$:

$$t[r1(n), r2(n)] \rightarrow \max.$$

Решение поставленной задачи в Mathcad имеет вид:

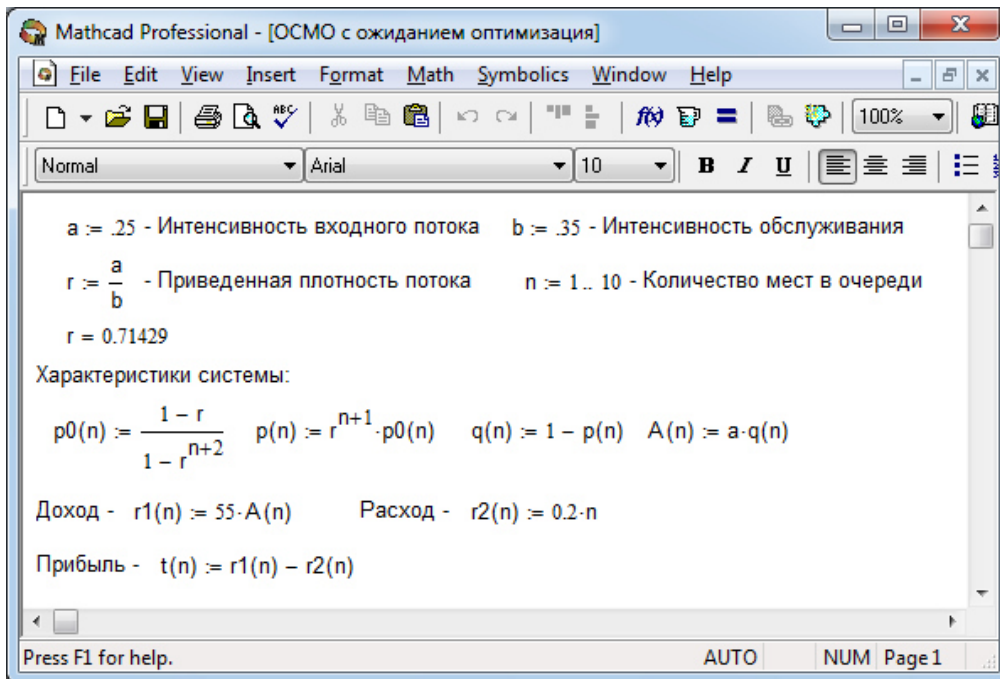


График зависимости $t(n)$ имеет вид:



Из графика видно, что максимальное значение функции $t(n) = 12,173$ достигается при $n = 5$. Т. е. при заданных входных условиях можно получить максимальную прибыль, ограничив очередь 5, содержание большего количества мест в очереди становится невыгодным.

Вывод: чтобы повысить прибыль нашей организации с 12,181 у.е. до 13,125 у.е. сократим количество мест в очереди с 5 до 2, и при этом сократим время на обслуживание одной заявки с 2,85 с до 1,11 с. В данном решении по получению наибольшей выгоды есть одна тонкость: главное, что бы это не привело к ухудшению качества обслуживания входящих заявок.

Можно продолжить оптимизацию параметров модели для нахождения максимума функционала, сделав доступными для изменения остальные параметры модели.

Пример 6.4. Технические устройства (радиостанции) могут время от времени выходить из строя (отказывать). Поток отказов — простейший с интенсивностью 1,93 отказов в сутки. Время восстановления радиостанций мастером технического отдела имеет экспоненциальное распределение. Математическое ожидание времени обслуживания 0,45 суток. Ремонт производит один мастер. В мастерской на полках, кроме ремонтируемой, может одновременно находиться не более трех вышедших из строя радиостанций, остальные нерабочие радиостанции хранятся на складе, размеры которого несоизмеримо превышают размеры самой радиостанции.

Найти:

– вероятность того, что вновь вышедшая из строя радиостанция будет храниться на складе;

– среднее количество радиостанций, хранящихся на складе;

– среднее время ожидания ремонта радиостанций, хранящихся на складе.

Решение.

По условию задачи $\lambda = 1,93$, $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ia}} = \frac{1}{0,45} \approx 2,22$, $\rho = \frac{1,93}{2,22} \approx 0,869 < 1$.

Вероятность того, что вновь вышедшая из строя радиостанция будет храниться на складе, определим как сумму вероятностей событий:

S_5 — мастер занят, три радиостанции в мастерской, одна на складе;

S_6 — мастер занят, три радиостанции в мастерской, две на складе;

S_7 — мастер занят, три радиостанции в мастерской, три на складе;

...

т. е.

$$\begin{aligned} p_5 + p_6 + p_7 + \dots &= (1 - \rho) \cdot \rho^5 + (1 - \rho) \cdot \rho^6 + (1 - \rho) \cdot \rho^7 + \dots = \\ &= (1 - \rho) \cdot \rho^5 \cdot [1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots] = \rho^5 \approx 0,496. \end{aligned}$$

Выражение в скобках представляет собой бесконечную убывающую прогрессию со знаменателем меньше единицы, сумма которой равна $\frac{1}{1 - \rho}$.

Среднее количество радиостанций, хранящихся на складе, определим как математическое ожидание дискретной случайной величины. На складе хранится одна радиостанция – вероятность этого события p_5 , две — p_6 и т. д. Тогда

$$\begin{aligned} 1 \cdot p_5 + 2 \cdot p_6 + 3 \cdot p_7 + \dots &= 1 \cdot (1 - \rho) \cdot \rho^5 + 2 \cdot (1 - \rho) \cdot \rho^6 + 3 \cdot (1 - \rho) \cdot \rho^7 + \dots = \\ &= (1 - \rho) \cdot \rho^5 \cdot [1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Учитывая полученные выше выкладки, т. е.

$$1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 + \dots = \frac{1}{(1 - \rho)^2},$$

окончательно получим

$$(1 - \rho) \cdot \rho^5 \cdot \frac{1}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho^5}{1 - \rho} \approx 3,802.$$

Таким образом, среднее количество радиостанций, хранящихся на складе, составляет 4 штуки.

Среднее время ожидания ремонта радиостанций, хранящихся на складе, определим аналогично. Среднее время ремонта одной радиостанции — $1/\mu$. Для того, чтобы начался ремонт второй радиостанции пройдет $2/\mu$ времени и т. д. Но как только осво-

бождается место в ремонтной мастерской, доля ожидания ремонта для каждой радиостанции на складе составляет $4/\mu$, т. е.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\mu} p_1 + \frac{2}{\mu} p_2 + \frac{3}{\mu} p_3 + \frac{4}{\mu} p_4 + \frac{4}{\mu} p_5 + \frac{4}{\mu} p_6 + \dots = \\
 & = \frac{1}{\mu} p_1 + \frac{2}{\mu} p_2 + \frac{3}{\mu} p_3 + \frac{4}{\mu} (p_4 + p_5 + p_6 + \dots) = \\
 & = \frac{1}{\mu} [\rho \cdot (1 - \rho) + 2 \cdot \rho^2 \cdot (1 - \rho) + 3 \cdot \rho^3 \cdot (1 - \rho) + 4 \cdot (\rho^4 \cdot (1 - \rho) + \rho^5 \cdot (1 - \rho) + \dots)] = \\
 & = \frac{1}{\mu} [\rho - \rho^2 + 2 \cdot \rho^2 - 2 \cdot \rho^3 + 3 \cdot \rho^3 - 3 \cdot \rho^4 + 4 \cdot (\rho^4 - \rho^5 + \rho^5 - \rho^6 + \dots)] = \\
 & = \frac{1}{\mu} \cdot [\rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho \cdot (1 - \rho^3)}{1 - \rho} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho - \rho^4}{1 - \rho} = \frac{1}{2,22} \cdot \frac{0,869 - 0,869^4}{1 - 0,869} \approx 32,97.
 \end{aligned}$$

Радиостанция ожидает своего времени ремонта на складе почти месяц.

Задача 6.3. Однопроцессорная ЭВМ, обрабатывает в оперативном режиме запросы пользователя. В памяти может храниться 5 запросов. Если память занята, то очередной запрос теряется. Запросы поступают с интенсивностью λ запросов в секунду, интенсивность обслуживания — μ запросов в секунду. Предполагается, что входящий поток простейший, а время обслуживания подчинено экспоненциальному закону.

1. Определить характеристики системы.

2. Построить модель работы системы в GPSS, сравнить полученные в результате моделирования результаты с расчетными.

2. Провести оптимизацию количества мест в очереди для получения максимальной прибыли, если стоимость обслуживания одного места очереди составляет c_2 единицы, а доход от обслуживания одной заявки — c_1 единица.

№ варианта	λ	μ	c_1	c_2
1.	0,35	0,9	50	0,3
2.	0,7	1,0	50	0,3
3.	2	4	50	0,3
4.	12	45	50	0,3
5.	120	230	5	3
6.	50	200	5	3
7.	75	155	5	3
8.	34	88	5	3
9.	25	55	5	3
10.	33	50	5	3
11.	50	100	3	5
12.	37	50	3	5
13.	44	55	3	5
14.	78	80	3	5
15.	95	96	3	5

№ варианта	λ	μ	c_1	c_2
16.	35	38	7	10
17.	110	220	7	10
18.	73	100	7	10
19.	75	120	7	10
20.	95	96	7	10
21.	195	296	10	15
22.	33	40	10	15
23.	44	65	10	15
24.	70	71	10	15
25.	75	120	10	15
26.	0,7	1,1	30	0,25
27.	70	480	30	0,25
28.	32	250	30	0,25
29.	0,44	2,0	30	0,25
30.	0,19	0,33	30	0,25

6.4. Многоканальная СМО с ожиданием

6.4.1. Многоканальная СМО очередью длиной m

Рассмотрим многоканальную СМО с ограниченным количеством мест в очереди. Система может находиться в следующих состояниях:

- S_0 — все каналы свободны;
- S_1 — занят один канал, остальные свободны, очереди нет;
- S_2 — заняты два канала, остальные свободны, очереди нет;
- ...
- S_k — заняты k каналов, остальные свободны, очереди нет;
- ...
- S_n — заняты все n каналов, очереди нет;
- S_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;
- ...
- S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди;
- ...
- S_{n+m} — заняты все n каналов, m заявок стоит в очереди.

Определим характеристики данной системы:

1. вероятность отказа обслуживания запросов $p_{отк}$;
2. относительную пропускную способность q ;
3. абсолютную пропускную способность A ;
4. среднее число занятых каналов $\bar{n}$;
5. среднюю длину очереди $\bar{r}$;
6. среднее число заявок, связанных с системой $\bar{k}$;
7. среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$;
8. среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$.

Систему из состояния S_0 в состояние S_1 и т. д. переводит один и тот же входящий поток заявок с интенсивностью λ .

Пусть μ — интенсивность потока, переводящего систему из состояния S_1 в состояние S_0 . Если в системе две заявки, то для перехода из состояния S_2 в состояние S_1 систему должна покинуть или первая, или вторая заявка — интенсивность потока событий, в этом случае будет равна 2μ . Если в системе $k+1$ заявок (занят $k+1$ канал), то для перехода системы из состояния S_{k+1} в состояние S_k систему должны покинуть или первая, или вторая, ..., или k -ая заявка — интенсивность потока событий, переводящая систему в предыдущее состояние будет равна $(k+1)\mu$. Если в системе n заявок, то из S_n в S_{n-1} — поток с $n \cdot \mu$. В случае с очередью переход системы из состояний справа на лево будет переводить поток с интенсивностью $n \cdot \mu$, т. е. пока не освободиться любой из n каналов.

Размеченный граф состояний системы приведен на рис.

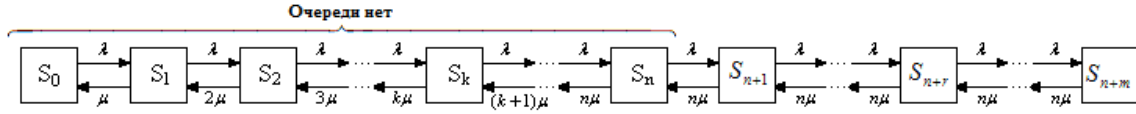


Рис. Многоканальная СМО с очередью длиной m

Работа одноканальной СМО с очередью длиной n представляет собой частный случай процесса гибели и размножения. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot p_1 + \lambda \cdot p_0 + 2\mu \cdot p_2 \\ \dots \\ \frac{dp_n}{dt} = -(\lambda + n \cdot \mu) \cdot p_n + \lambda \cdot p_{n-1} + n \cdot \mu \cdot p_{n+1} \\ \dots \\ \frac{dp_{n+m}}{dt} = -n \cdot \mu \cdot p_{n+m} + \lambda \cdot p_{n+m-1} \end{cases}$$

Найдем предельные вероятности состояний, учитывая, что $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\rho}{1!} p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \quad p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0, \quad \dots, \quad p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0, \\ p_0 &= \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Данные соотношения можно переписать в виде удобном для вычислений:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, n, \quad \text{где } n \text{ — количество обслуживающих приборов;} \\ p_k &= \frac{\rho^k}{n^{k-n} \cdot n!} p_0, \quad \text{при } k = n+1, \dots, n+m, \quad \text{где } m \text{ — максимальная длина очереди;} \\ p_0 &= \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{\rho^i}{n^{i-n} \cdot n!} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Определим характеристики данной системы:

Вероятность отказа обслуживания запросов $p_{отк}$:

$$p_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.$$

Относительную пропускную способность q :

$$q = 1 - p_{отк} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.$$

Абсолютную пропускную способность A :

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right).$$

Определим среднее число занятых каналов $\bar{n}$. Каждый канал обслуживает в среднем μ заявок, а вся система — A заявок, тогда

$$\bar{n} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right) = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right).$$

Среднюю длину очереди $\bar{r}$ определим как математическое ожидание дискретной случайной величины — количество заявок в очереди:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + m \cdot p_{n+m} = 1 \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 + 2 \cdot \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0 + \dots + m \cdot \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 \cdot \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right) + 3 \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right)^2 + \dots + m \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right)^{m-1} \right). \end{aligned}$$

Пусть $\frac{\rho}{n} = \chi$, тогда последнее выражение перепишем в виде:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 \cdot (1 + 2 \cdot \chi + 3 \cdot \chi^2 + \dots + m \cdot \chi^{m-1}).$$

Выражение в скобках представляет собой производную геометрической прогрессии, содержащей m членов со знаменателем χ . Учитывая полученные выше выкладки, можем записать выражение для нахождения средней длины очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \chi^m \cdot (m + 1 - m \cdot \chi)}{(1 - \chi)^2}.$$

Среднее число заявок, связанных с системой $\bar{k}$, складывается из числа каналов занятых обслуживанием заявок и числа заявок, стоящих в очереди:

$$\bar{k} = \bar{n} + \bar{r}.$$

Определим среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$ как математическое ожидание дискретной случайной величины. Заявка, заставшая все каналы занятыми, встает в очередь и ждет «своего времени» обслуживания $\frac{1}{n \cdot \mu}$ — вероятность этого со-

бытия p_n . Следующая заявка ждет $\frac{2}{n \cdot \mu}$ с вероятностью p_{n+1} . И так далее. Отметим,

что заявка, пришедшая в момент, когда не все каналы заняты, встает на обслуживание и время ожидания равно 0, а также, если все каналы заняты и мест в очереди нет — заявка покидает систему и в этом случае и время ожидания и вероятность данного события равны нулю. Первый начальный момент случайной величины времени нахождения в очереди:

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ож} &= \frac{1}{n \cdot \mu} p_n + \frac{2}{n \cdot \mu} p_{n+1} + \dots + \frac{m}{n \cdot \mu} p_{n+m+1} = \\ &= \frac{1}{n \cdot \mu} \cdot \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 + \frac{2}{n \cdot \mu} \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 + \dots + \frac{m}{n \cdot \mu} \frac{\rho^{n+m+1}}{n^{m-1} \cdot n!} \cdot p_0 = \\ &= \frac{\rho^n}{n \cdot n! \cdot \mu} \cdot p_0 \cdot \left[1 + \frac{2\rho}{n} + \dots + \frac{m \cdot \rho^{m-1}}{n^{m-1}} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\rho \cdot \mu} \left[\frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0 \cdot \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right) + \dots + m \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right)^{m-1} \right) \right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, соответствует значению средней длины очереди, поэтому среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$ будет определяться как:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\rho \cdot \mu} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{\frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \chi^m \cdot (m + 1 - m \cdot \chi)}{(1 - \chi)^2}}{\rho \cdot \mu} = \frac{\rho^n p_0}{n \cdot n! \cdot \mu} \cdot \frac{1 - \chi^m \cdot (m + 1 - m \cdot \chi)}{(1 - \chi)^2}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$:

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об} = \bar{t}_{ож} + \frac{q}{\mu}, \quad (\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu}, \text{ если загрузка системы равна } 100 \%, \text{ в противном случае } \bar{t}_{об} = \frac{q}{\mu}).$$

6.4.2. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим многоканальную СМО с неограниченным количеством мест в очереди. Система может находиться в следующих состояниях (число состояний бесконечно):

S_0 — все каналы свободны;

S_1 — занят один канал, остальные свободны, очереди нет;

S_2 — заняты два канала, остальные свободны, очереди нет;

...

S_k — заняты k каналов, остальные свободны, очереди нет;

...

S_n — заняты все n каналов, очереди нет;

S_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;

...

S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди;

...

Определим характеристики данной системы:

1. вероятность отказа обслуживания запросов $p_{отк}$;
2. относительную пропускную способность q ;
3. абсолютную пропускную способность A ;
4. среднее число занятых каналов $\bar{n}$;
5. среднюю длину очереди $\bar{r}$;
6. среднее число заявок, связанных с системой $\bar{k}$;
7. среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$;
8. среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$.

Размеченный граф состояний системы приведен на рис.

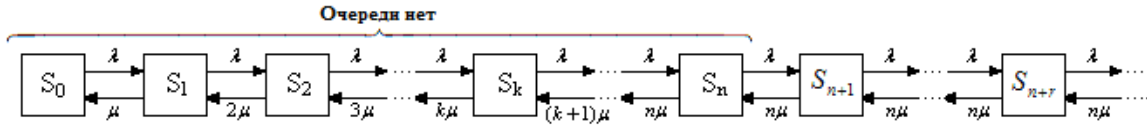


Рис. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Характеристики работы данной системы найдем из выражений, полученных для многоканальной СМО с очередью, путем предельного перехода, устремив m к бесконечности.

Пусть $\chi = \frac{\rho}{n} = \frac{\lambda}{n \cdot \mu} < 1$ и $m \rightarrow \infty$.

Предельные вероятности состояний

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0, \dots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \dots,$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots \right]^{-1}.$$

Данные соотношения можно переписать в виде, удобном для вычислений:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \text{ при } k = 1, 2, \dots, n, \text{ где } n \text{ — количество обслуживающих приборов;}$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{n^{k-n} \cdot n!} p_0, \text{ при } k = n+1, \dots, n+m, n+\infty, \text{ где } m \text{ — длина очереди;}$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{\rho^i}{n^{i-n} \cdot n!} \right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{(n-\rho) \cdot n!} \right]^{-1}.$$

Определим характеристики данной системы:

При неограниченной очереди любая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена, поэтому вероятность отказа обслуживания запросов $p_{отк} = 0$, относительная пропускная способность $q = 1$, абсолютная пропускная способность $A = \lambda$.

Средняя длина очереди $\bar{r}$:

$$\bar{r} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \chi^m \cdot (m+1 - m \cdot \chi)}{(1 - \chi)^2} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n! \cdot (1 - \chi)^2}.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$:

$$\bar{t}_{ож} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho^n p_0}{n \cdot n! \cdot \mu} \cdot \frac{1 - \chi^m \cdot (m+1 - m \cdot \chi)}{(1 - \chi)^2} = \frac{\rho^n \cdot p_0}{n \cdot n! \cdot \mu \cdot (1 - \chi)^2}.$$

Среднее число занятых каналов $\bar{n}$:

$$\bar{n} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Среднее число заявок, связанных с системой $\bar{k}$, складывается из числа каналов занятых обслуживанием заявок и числа заявок, стоящих в очереди:

$$\bar{k} = \bar{n} + \bar{r}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$:

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об} = \bar{t}_{ож} + \frac{1}{\mu}, \quad (\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu}, \text{ если загрузка системы равна } 100\%, \text{ в про-}$$

 тивном случае $\bar{t}_{об} = \frac{q}{\mu}$).

В предыдущих пунктах, мы рассматривали СМО, у которых $\rho < 1$, т. е. $\lambda < \mu$. В противном случае, очередь для данных систем будет расти неограниченно (хотя в действительности такого не может быть — в реальной жизни очередь всегда чем-то или кем-то ограничена).

Для многоканальных СМО была введена характеристика $\chi = \frac{\rho}{n} = \frac{\lambda}{n \cdot \mu}$, которая также должна быть меньше единицы, иначе в системе может произойти «взрыв». Но в данном случае уже должно выполняться условие $\lambda < n \cdot \mu$, или

$$\chi = \frac{\rho}{n} = \frac{\lambda}{n \cdot \mu} < 1 \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} < n.$$

Даже если $\lambda > \mu$, то можно подобрать такое n , которое будет удовлетворять выдвинутому условию, и система справится с поступающими заявками.

Пример 6.5. Рассмотрим «поведение» многоканальной СМО с ожиданием в разных режимах.

1. Многоканальная СМО с неограниченной очередью ($\rho > 1$).

Пусть $\rho > 1$, т. е. очередь будет расти без ограничений и пусть $\lambda = 30$, $\mu = 10$.

Примером такой системы может быть однопроцессорная ЭВМ, обрабатывающая в оперативном режиме запросы пользователя. Память, выделенная для буферизации запросов, настолько велика, что влиянием ее размера на характеристики системы можно пренебречь.

Определим характеристики данной системы без ограничений по очереди.

Рассчитывать характеристики по полученным выше формулам не имеет смысла, так как получим отрицательные значения вероятностей ($\rho > 1$), а как следствие и других характеристик.

Текст программы в среде GPSS будет иметь вид, представленный на скриншоте. В данном случае блоки (QUEUE — DEPART), собирающие статистику по очереди могут отсутствовать — необходимые характеристики могут быть получены без них.

Запишем текст программы и запустим модель: «Command» — «Create Simulation» или Ctrl+Alt+S. Компилятор проверит программу и выдаст отчет о работе модели. Расшифровка отчета приведена в приложении 11.

```

SIMULATE
*
*   Входные данные
*
T1      EQU      0.033          ; Среднее время между входящими заявками
T2      EQU      0.1           ; Среднее время обслуживания
POBSL   VARIABLE N$OBSL/N$VSEGO ; Вероятность обслуживания заявки
*
*   Обработка запросов
*
VSEGO   GENERATE (Exponential(1,0,T1)) ; Моделируем входной поток
        QUEUE    A              ; Собираем статистику по очереди
        SEIZE    A              ; Занять очередь к устройству A
        DEPART   A              ; Вывести транзакт из очереди
        ADVANCE  (Exponential(1,0,T2)) ; Моделируем обслуживание
        RELEASE  A              ; Освободить устройство A
OBSL    TERMINATE ; Удаляем обслуженные заявки
*
*   Расчет характеристик
*
        GENERATE 480            ; Моделируем время работы системы
        SAVEVALUE POBSL,V$POBSL ; Сохраняем значение вероятности обслуживания
        TERMINATE 1             ; Завершаем работу модели
*
*
*
START   1                      ; Количество прогонов модели

```

Оценка относительной пропускной способности без ограничения по времени.

Для нашей задачи очередь растет без ограничений и в определенный момент времени в системе может (должен) произойти «взрыв». Если в среде GPSS время моделирования установить достаточно большим, то память «не справится» с задачей и произойдет сбой.

Рассчитаем необходимое количество прогонов модели для GPSS World для определения вероятностных характеристик с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.99$.

Прогоним модель 50 раз. Для этого в последней строчке программы «1» заменим на «50». Запустим модель (Ctrl+Alt+S): вероятность обслуживания— 0,33.

Тогда, количество прогонов при указанных выше условиях

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \frac{0.33 \cdot (1-0.33)}{0.01^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{0.99}{2} \right) \right]^2 = \\
 &= \frac{0.33 \cdot (1-0.33)}{0.01^2} \cdot 2.58^2 \approx 14717.30.
 \end{aligned}$$

Округляем полученное значение в большую сторону и получаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятностных характеристик при заданных входных значениях: $N = 14718$.

При полученном значении количества прогонов модели ожидание окончания моделирования занимает существенное время. Поэтому ограничимся $N = 100$.

Делаем необходимые изменения в последней строчке программы и запускаем модель (Ctrl+Alt+S), получаем искомые результаты.

Полученные при моделировании значения относительной пропускной способности (вероятности обслуживания) сведены в таблицу.

	Расчетное значение	GPSS	
		В течение 8 часов	Без ограничения
Относительная пропускная способность q	1	0,335	0,33
Коэффициент занятости одного обслуживающего прибора $k_{зан}$	Естественно 1	1	1

Вероятность обслуживания заявки составляет 0,334 и 0,33 соответственно, хотя данное значение должно быть равно 1. Такое отличие обусловлено тем, что входной поток не имеет ограничений, а интенсивность входного потока в 3 раза выше потока обслуживания. Если же количество входных заявок ограничить, и все они войдут в систему в установленное модельное время, то вероятность обслуживания станет равной 1.

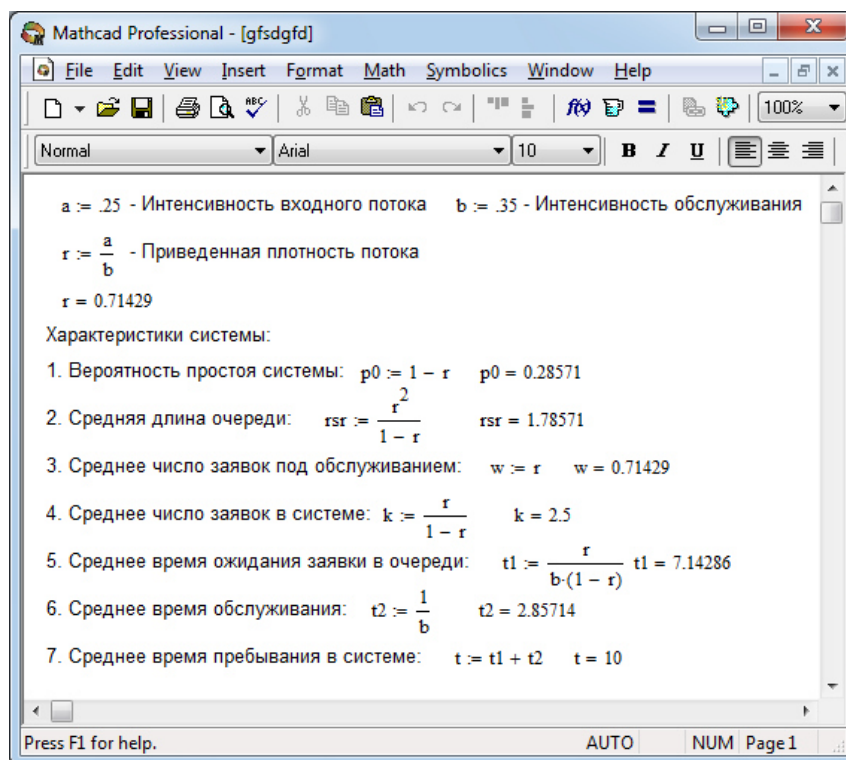
Если в модели установить $\lambda = \mu$, т. е. $\rho = 1$, то вероятность обслуживания будет стремиться к 1, что очевидно.

2. Одноканальная СМО с неограниченной очередью ($\rho < 1$).

Пусть $\rho < 1$, т. е. система справляется с потоком поступающих заявок и пусть $\lambda = 0,25$, $\mu = 0,35$.

Заявка, ставшая в очередь, все равно будет обслужена, поэтому $p_{отк} = 0$, а относительная пропускная способность $q = 1$.

Рассчитаем характеристики системы в среде Mathcad.



Текс программы в GPSS аналогичен предыдущему (за исключением входных данных).

Оператором «TT1 TABLE QT\$A,0,0.1,100» собираем статистику о среднем времени пребывания транзакта в очереди.

Блок «TABULATE TT1» должен стоять сразу после операторов, задающих очередь (или тех блоков, после которых необходимо записать искомые данные в таблицу).

Остальные результаты возьмем из стандартного отчета.

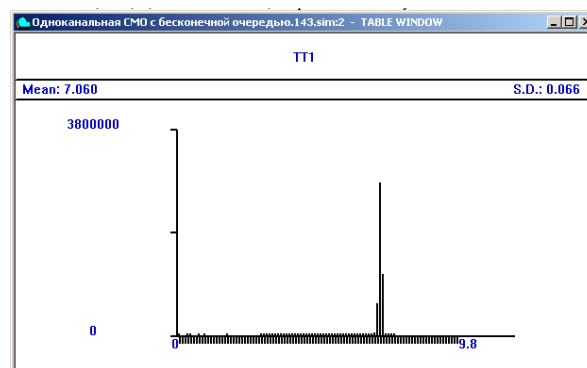
```

Одноканальная СМО с бесконечной очередью.gps
SIMULATE
*
*   Входные данные
*
T1    EQU    4                ; Среднее время между входящими заявками
T2    EQU    2.857            ; Среднее время обслуживания
POBSL VARIABLE N$OBSL/N$VSEGO ; Вероятность обслуживания заявки
TT1   TABLE QT$A,0,0.1,100  ; Среднее время пребывания транзакта в очереди
*
*   Обработка запросов
*
VSEGO GENERATE (Exponential(1,0,T1)) ; Моделируем входной поток
      QUEUE    A                ; Собираем статистику по очереди A
      SEIZE    AA               ; Занять очередь к устройству AA
      DEPART   A                ; Вывести транзакт из очереди A
      TABULATE TT1              ; Вносим знач. ср. времени в очередь в табл. TT1
      ADVANCE  (Exponential(1,0,T2)) ; Моделируем обслуживание
      RELEASE  AA               ; Освободить устройство AA
OBSL  TERMINATE ; Удаляем обслуженные заявки
*
*   Расчет характеристик
*
GENERATE 480                ; Моделируем время работы системы
SAVEVALUE POBSL,V$POBSL    ; Сохраняем значение вероятности обслуживания
TERMINATE 1                 ; Завершаем работу модели
*
*
*   START    1                ; Количество прогонов модели

```

Так же можно просмотреть результаты табулирования изучаемой величины графически после прогона модели.

Window — Simulation Window — Table Window, в появившемся окне необходимо ввести наименование таблицы (TT1).



Определим необходимое количество прогонов модели. Использование формулы количества прогонов при определении вероятности появления события не даст положительного результата, т. к. $p \rightarrow 1$.

Учитывая, что искомым результатом является среднее время пребывания транзакта в очереди, определим необходимое количество прогонов.

Прогоним модель 50 раз. Для этого в последней строчке программы заменим «1» на «50». В полученном отчете из таблицы TT1 определяем среднее квадратическое отклонение — 0,76.

3. Одноканальная СМО с очередью длиной n ($\rho > 1$).

Пусть $\rho > 1$, мест в очереди ограничено ($n = 3$) и пусть $\lambda = 50$, $\mu = 40$. В этом случае заявка, заставшая все места в очереди занятыми, покидает систему.

Определим характеристики системы.

Mathcad Professional - [СМО с ожиданием 3 места.mcd]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

$a := 50$ - Интенсивность входного потока $b := 40$ - Интенсивность обслуживания
 $r := \frac{a}{b}$ - Приведенная плотность потока $n := 3$ - Количество мест в очереди
 $r = 1.25$

Характеристики системы:

1. Вероятность простоя системы: $p_0 := \frac{1-r}{1-r^{n+2}}$ $p_0 = 0.12185$	5. Среднее число запросов в очереди: $r_{sr} := \frac{r^2 [1-r^n (n+1-nr)]}{(1-r^{n+2})(1-r)}$ $r_{sr} = 1.55878$
2. Вероятность отказа: $p := r^{n+1} \cdot p_0$ $p = 0.29748$	6. Среднее число заявок под обслуживанием: $w := \frac{r-r^{n+2}}{1-r^{n+2}}$ $w = 0.87815$
3. Относительная пропускная способность: $q := 1-p$ $q = 0.70252$	7. Среднее число заявок в системе: $k := r_{sr} + w$ $k = 2.43693$
4. Абсолютная пропускная способность: $A := a \cdot q$ $A = 35.12613$	8. Среднее время ожидания в очереди: $t := \frac{r_{sr}}{a}$ $t = 0.03118$
10. Среднее время обслуживания: $\frac{q}{b} = 0.01756$	9. Среднее время пребывания заявки в системе: $tsis := t + \frac{q}{b}$ $tsis = 0.04874$

Press F1 for help. AUTO Page 1

При построении модели в среде GPSS можно при вводе входных данных добавить команду для построения таблицы распределения частот разных характеристик, например – занятых мест в очереди:

TABL QTABLE A,0,0.01,50,

здесь параметры распределения подбираются экспериментально.

После прогона модели в отчете появится данная таблица.

Для просмотра гистограммы необходимо выбрать «Window — Simulation Window — Table Window», в появившемся окне написать имя таблицы (в нашем случае TABL) и нажать «OK». На гистограмме отображается среднее значение изучаемой величины (Mean), а также среднеквадратическое отклонение (S.D.).

```

Одноканальная СМО с очередью.gps
SIMULATE
*
*   Входные данные
*
T1      EQU      0.02      ; Среднее время между входящими заявками
T2      EQU      0.025     ; Среднее время обслуживания
N1      EQU      3         ; Количество мест в очереди
POBSL   VARIABLE  N$OBSL/N$VSEGO ; Вероятность обслуживания
NVSEGO  VARIABLE  INT(N$VSEGO) ; Общее количество сгенерированных заявок
NOBSL   VARIABLE  INT(N$OBSL) ; Количество обслуженных заявок
NPOTERI  VARIABLE  INT(N$POTERI) ; Количество потерянных заявок
TABL    QTABLE    A,0,0.01,50 ; Собираем данные для построения гистограммы очереди
*
*   Обработка запросов
*
VSEGO   GENERATE  (Exponential(1,0,T1)) ; Моделируем входной поток
        TEST L    Q$A,N1_,POTERI      ; Условие: если места в оч. заняты (L<N1_), то теряем заявку
        QUEUE    A                     ; Собираем статистику по очереди A
        SEIZE    AA                     ; Занять очередь к устройству AA
        DEPART   A                     ; Вывести транзакт из очереди A
        SEIZE    AA                     ; Занять устройство AA
*
        ADVANCE  (Exponential(1,0,T2)) ; Моделируем обслуживание заявки
        RELEASE  AA                     ; Освободить устройство AA
OBSL    TERMINATE ; Удаляем обслуженные заявки
POTERI  TERMINATE ; Удаляем потерянные заявки
*
*   Расчет характеристик
*
GENERATE 480 ; Моделируем время работы системы
SAVEVALUE POBSL,V$POBSL ; Сохраняем значение вероятности обслуживания
SAVEVALUE NOBSL,V$NOBSL ; Сохраняем значение колич. обслуж. заявок
SAVEVALUE NPOTERI,V$NPOTERI ; Сохраняем значение колич. потер. заявок
SAVEVALUE NVSEGO,V$NVSEGO ; Сохраняем общее кол. сгенерированных заявок
TERMINATE 1 ; Завершаем работу модели
*
*
*
START 1 ; Количество прогонов модели

```

Также можно построить график, характеризующий количество занятых мест в очереди. Для этого в тексте программы перед блоком START поставим звездочку. Запустим компилятор: Command — Create Simulation или Ctrl+Alt+S. После успешной компиляции выбираем Window — Simulation Window — Plot Window... Поля таблицы заполняем согласно скриншота и нажимаем «OK».

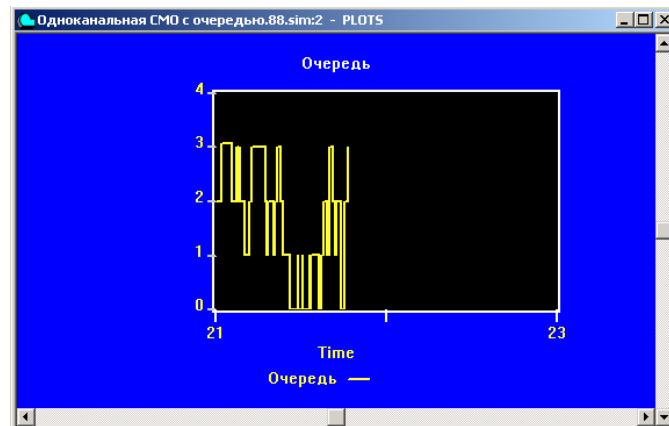
The 'Edit Plot Window' dialog box is shown with the following details:

- New Expression:**
 - Label:
 - Expression:
 - Buttons: Plot, Memorize
- Window Contents:**
 - Title:
 - Time Range:
 - Min Value:
 - Max Value:
 - Table:

Label	Expression
Очередь	Q\$A
 - Buttons: Remove
- Memorized Expressions:**
 - Table:

Label	Expression
Очередь	Q\$A
 - Buttons: Plot, Delete
- Bottom Buttons:** OK, Cancel

Далее запускаем модель: Command — START. В появившемся окне появляется надпись «START1» (можно вместо 1 вбить любое нужное количество прогонов модели) и нажимаем «OK».



Рассчитаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятностных характеристик с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.99$.

Прогоним модель 50 раз. Для этого в последней строчке программы «1» заменим на «50». Запустим модель (Ctrl+Alt+S): вероятность обслуживания — 0,702.

Тогда, количество прогонов при указанных выше условиях

$$N = \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \frac{0.702 \cdot (1-0.702)}{0.01^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{0.99}{2} \right) \right]^2 =$$

$$= \frac{0.702 \cdot (1-0.702)}{0.01^2} \cdot 2.58^2 \approx 13924.92.$$

Округляем полученное значение в большую сторону и получаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятностных характеристик при заданных входных значениях: $N = 13925$.

Делаем необходимые изменения в последней команде программы и запускаем модель (Ctrl+Alt+S).

Для сравнения результатов моделирования составим таблицу.

	Расчетное значение	GPSS	
		В течение 8 часов	$N = 13925$
Относительная пропускная способность q	0,702	0,694	0,702
Среднее количество заявок в очереди	1,558	1,584	1,552
Количество заявок под обслуживанием (коэффициент использования оборудования)	0,878	0,884	0,878
Среднее время в очереди	0,031	0,045	0,044
Среднее время обслуживания	0,017	0,025	0,025

Результаты моделирования совпадают с расчетными. Отличие во времени пребывания заявки в очереди, а также по времени обслуживания связаны со случайностью входного потока.

Говорить об оптимальном количестве мест в очереди для данной задачи нет смысла. Так как $\lambda > \mu$, то $\rho > 1$, следовательно, очередь будет расти до бесконечности

при любом конечном количестве мест в очереди. Для таких условий оптимальным будет одно место в очереди. Последующее увеличение мест в очереди приведет к неоправданным затратам, а очередь от этого не уменьшится.

4. Одноканальная СМО с ожиданием и очередью длиной n ($\rho < 1$).

Пусть $\rho < 1$, мест в очереди ограничено ($n = 3$) и пусть $\lambda = 0,25$, $\mu = 0,35$. Заявка, заставшая все места в очереди занятыми, покидает систему.

Модели работы данной системы аналогичны описанным выше моделям (за исключением входных данных).

Опустим уже известные нам вычисления и рассуждения по определению необходимого количества прогонов модели для выхода системы в стационарный режим и получения достоверных результатов.

Результаты моделирования в стационарном (установившемся) режиме и расчетов сведем в таблицу, предполагая, что количество мест в очереди $n = 3$.

	Расчетное значение	GPSS
Относительная пропускная способность q	0,908	0,908
Среднее количество заявок в очереди	0,709	0,709
Количество заявок под обслуживанием (коэффициент использования оборудования)	0,649	0,649
Среднее время в очереди	2,835	3,123
Среднее время обслуживания	2,596	2,858

Значения характеристик системы, полученные при моделировании, совпадают с расчетными значениями, что говорит об адекватности построенной модели. Некоторые отличия значений обусловлены случайностью входного потока.

Поставим перед собой задачу. Пусть доход, получаемый от обслуживания одной заявки, составляет $c1 = 55$ единиц, а затраты на одно место очереди составляют $c2 = 0,2$ единицы. Определим необходимое количество мест в очереди для получения максимальной прибыли.

Совокупный доход определим как

$$r1(n) = c1 \cdot A(n),$$

где $A(n)$ — абсолютная пропускная способность (количество обслуженных заявок за единицу времени),

затраты на содержание n мест очереди

$$r2(n) = c2 \cdot n,$$

тогда прибыль нашей организации $t(n)$:

$$t(n) = r1(n) - r2(n).$$

Таким образом, задача сводится к нахождению максимума целевой функции $t(n)$:

$$t[r1(n), r2(n)] \rightarrow \max.$$

Решение поставленной задачи в Mathcad имеет вид:

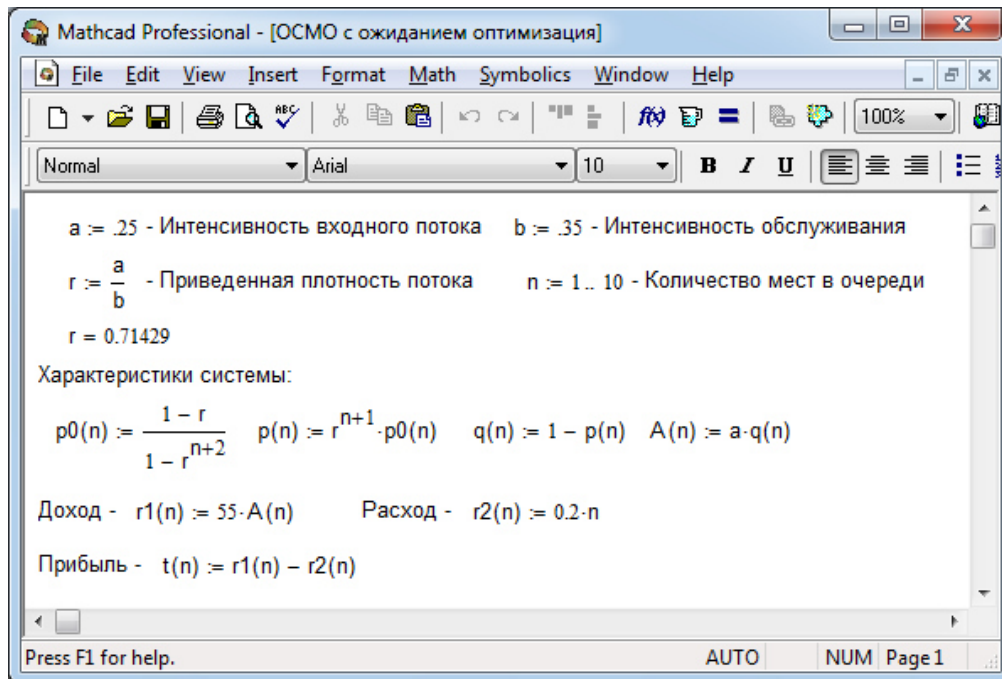


График зависимости $t(n)$ имеет вид:



Из графика видно, что максимальное значение функции $t(n) = 12,173$ достигается при $n = 5$. Т. е. при заданных входных условиях можно получить максимальную прибыль, ограничив очередь 5, содержание большего количества мест в очереди становится невыгодным.

Вывод: чтобы повысить прибыль нашей организации с 12,181 у.е. до 13,125 у.е. сократим количество мест в очереди с 5 до 2, и при этом сократим время на обслуживание одной заявки с 2,85 с до 1,11 с. В данном решении по получению наибольшей выгоды есть одна тонкость: главное, что бы это не привело к ухудшению качества обслуживания входящих заявок.

Можно продолжить оптимизацию параметров модели для нахождения максимума функционала, сделав доступными для изменения остальные параметры модели.

Задача 6.4. На сервер, имеющий n процессоров, поступают запросы от рабочих компьютеров с интервалом в среднем t_1 мин., которые обрабатываются в среднем в течение t_2 мин. Каждый процессор может обрабатывать одно сообщение, а потом начинать обрабатывать другое и т. д. В случае если все процессоры заняты, то входящее сообщение теряется. Предполагается, что входящий поток простейший, а время обслуживания подчинено экспоненциальному закону. Время работы сервера составляет 24 часа.

1. подобрать, чтобы p было 0.02.
2. Рассчитать абсолютную и относительную пропускную способность, вероятность отказа и среднее число занятых каналов.
3. Построить модель в GPSS, определить основные характеристики системы с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.95$ и сравнить полученные результаты с расчетными.
4. Определить необходимое количество процессоров для обслуживания не менее 95 % запросов.

№ варианта	n	t_1	t_2
1.	5	2	3
2.	6	3	4
3.	7	4	5
4.	8	3	5
5.	7	2	4
6.	8	5	7
7.	6	4	5
8.	8	3	8
9.	7	2	7
10.	5	5	9
11.	5	3	4
12.	6	3	6
13.	7	2	9
14.	4	3	7
15.	7	4	9

№ варианта	n	t_1	t_2
16.	6	3	5
17.	7	3	5
18.	8	3	6
19.	7	3	6
20.	6	3	5
21.	7	2	7
22.	5	5	7
23.	8	2	9
24.	4	2	7
25.	3	5	9
26.	2	2	5
27.	6	3	9
28.	5	8	9
29.	3	5	7
30.	3	4	8

6.5. Формула Литтла

Первое доказательство теоремы было представлено Джоном Литтлом (John Dutton Conant Little) в 1961г.

Рассмотрим любую СМО (марковскую, немарковскую, с любым количеством обслуживающих устройств, с любой очередью, с любой дисциплиной обслуживания, с любыми распределениями и т. п.) в установившемся (предельном, стационарном) режиме.

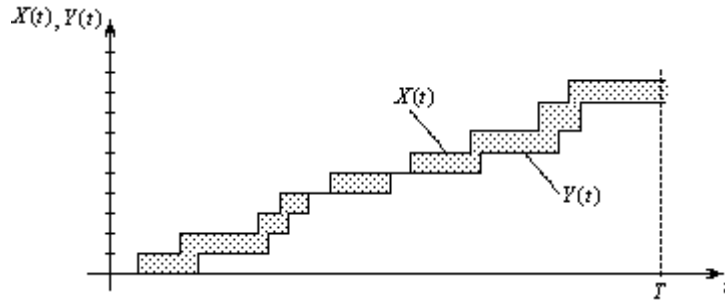
Как уже было показано, в стационарном режиме, среднее количество пришедших заявок за единицу времени равно среднему числу заявок, покинувших систему, т. е. и входной и выходной потоки имеют одну и ту же интенсивность λ .

Пусть $X(t)$ — число заявок прибывающих в систему;

$Y(t)$ — число заявок покинувших систему.

Обе функции меняются скачком на единицу.

Тогда, $Z(t) = X(t) - Y(t)$ — число заявок, находящихся в системе.



Рассмотрим систему на достаточно большом промежутке времени T ($T \rightarrow \infty$). Тогда среднее число заявок, находящихся в системе

$$L_{\text{сист}} = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt.$$

Из математического анализа известно, что определенный интеграл представляет собой интегральную сумму произведений основания прямоугольников на их высоту. В нашем случае, длиной оснований служит временной интервал нахождения заявки в системе t_i , а высота всех прямоугольников равна единице. Тогда

$$\int_0^T Z(t) dt = \sum_i 1 \cdot t_i = \sum_i t_i,$$

где $\sum_i t_i$ — суммарное время пребывания всех заявок в системе.

Разделим правую и левую части равенства на T

$$\frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt = \frac{1}{T} \sum_i t_i = L_{\text{сист}}.$$

Или

$$L_{\text{сист}} = \frac{1}{T} \sum_i t_i.$$

Разделим и умножим правую часть равенства на λ

$$L_{\text{сист}} = \frac{\lambda}{T \cdot \lambda} \sum_i t_i = \lambda \frac{\sum_i t_i}{T \cdot \lambda}.$$

Так как λ — среднее количество заявок за единицу времени, то $T\lambda$ — среднее количество заявок, прибывших за время T . Тогда $\frac{\sum_i t_i}{T \cdot \lambda} = W_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания одной заявки в системе.

Таким образом, получим формулу Литтла, связывающую среднее время пребывания заявки в системе и среднее число заявок в СМО.

$$L_{\text{сист}} = \lambda \cdot W_{\text{сист}}$$

или

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Аналогично выводится формула Литтла, связывающая среднее время пребывания заявки в очереди и среднее число заявок в очереди на обслуживание

$$W_{оч} = \frac{1}{\mu} L_{оч}.$$

Необходимо отметить, что полученные соотношения никак не зависят от распределения вероятности прибытия заявок и, соответственно, не требуют никаких знаний или предположений о том по каким законам они будут появляться и обслуживаться в системе.

6.6. СМО с ограниченным временем ожидания

Примером такой системы может служить передача SMS — если после определенного количества попыток доставки его адресату сообщение не доходит, то оно аннулируется.

Рассмотрим многоканальную СМО с неограниченным количеством мест в очереди, но с ограниченным временем ожидания со средним значением $\bar{t}_{оч}$. Т. е. вновь пришедшая заявка, застав все обслуживающие каналы занятыми, встает в очередь и ожидает некоторое время, по истечении которого, она покидает систему, так называемые «нетерпеливые» заявки.

В данном случае, наравне с входящим потоком и потоком обслуживания, можно говорить и о потоке «уходов» из очереди с интенсивностью

$$\nu = \frac{1}{\bar{t}_{оч}}.$$

Будем предполагать, что данный поток пуассоновский, а в совокупности с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным обслуживанием считаем, что процесс, протекающий в СМО — марковский.

Система может находиться в следующих состояниях:

S_0 — все каналы свободны;

S_1 — занят один канал, остальные свободны, очереди нет;

S_2 — заняты два канала, остальные свободны, очереди нет;

...

S_n — заняты все n каналов, очереди нет;

S_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;

...

S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди;

...

Определим характеристики данной системы:

1. вероятность отказа обслуживания запросов $p_{отк}$;
2. относительную пропускную способность q ;
3. абсолютную пропускную способность A ;
4. среднее число занятых каналов $\bar{n}$;
5. среднюю длину очереди $\bar{r}$.

Систему из состояния S_0 в состояние S_1 и т. д. переводит один и тот же входящий поток заявок с интенсивностью λ .

Пусть μ — интенсивность потока, переводящего систему из состояния S_1 в состояние S_0 . Если в системе две заявки, то для перехода из состояния S_2 в состояние S_1 систему должна покинуть или первая, или вторая заявка — интенсивность потока со-

бытий, в этом случае будет равна 2μ . Если в системе n заявок, то из S_n в S_{n-1} — поток с $n\mu$. В случае с очередью переход системы из состояний справа на лево будет переводить поток с интенсивностью $n\mu$, т. е. пока не освободиться любой из n каналов, плюс соответствующая интенсивность потока уходов из очереди ν .

Размеченный граф состояний системы приведен на рис.

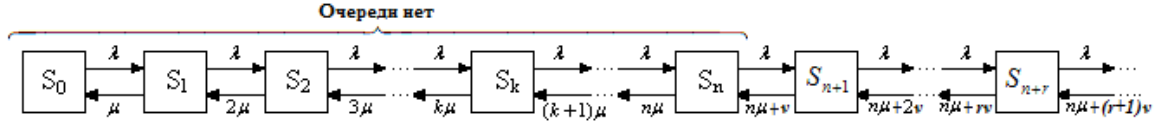


Рис. СМО с ограниченным временем ожидания

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot p_1 + \lambda \cdot p_0 + 2\mu \cdot p_2 \\ \dots \\ \frac{dp_n}{dt} = -(\lambda + n \cdot \mu) \cdot p_n + \lambda \cdot p_{n-1} + (n \cdot \mu + \nu) \cdot p_{n+1} \\ \frac{dp_{n+1}}{dt} = -(\lambda + n \cdot \mu + \nu) \cdot p_{n+1} + \lambda \cdot p_n + (n \cdot \mu + 2\nu) \cdot p_{n+2} \\ \dots \\ \frac{dp_{n+r}}{dt} = -(\lambda + n \cdot \mu + r \cdot \nu) \cdot p_{n+r} + \lambda \cdot p_{n+r-1} + (n \cdot \mu + (r+1) \cdot \nu) \cdot p_{n+r+1} \\ \dots \end{cases}$$

Предельные вероятности состояний будут равны

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda/\mu}{1!} p_0, \quad p_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} &= \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \frac{\lambda}{(n \cdot \mu + \nu)} p_0, \quad p_{n+2} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \frac{\lambda^2}{(n \cdot \mu + \nu) \cdot (n \cdot \mu + 2\nu)} p_0, \quad \dots, \\ p_{n+r} &= \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \frac{(\lambda)^r}{(n \cdot \mu + \nu) \cdot (n \cdot \mu + 2\nu) \dots (n \cdot \mu + r \cdot \nu)} p_0, \quad \dots, \\ p_0 &= \left[1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \left[\frac{\lambda}{(n \cdot \mu + \nu)} + \frac{\lambda^2}{(n \cdot \mu + \nu)(n \cdot \mu + 2\nu)} + \dots + \frac{(\lambda)^r}{(n \cdot \mu + \nu)(n \cdot \mu + 2\nu) \dots (n \cdot \mu + r \cdot \nu)} + \dots \right] \right]^{-1} \end{aligned}$$

Пусть $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $\beta = \frac{\nu}{\mu}$. Тогда уравнения для предельных состояний примут вид:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\rho}{1!} p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} &= \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho}{(n + \beta)} p_0, \quad p_{n+2} = \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho^2}{(n + \beta) \cdot (n + 2\beta)} p_0, \quad \dots, \end{aligned}$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho^r}{(n+\beta) \cdot (n+2\beta) \dots (n+r\beta)} p_0, \dots,$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \right. \\ \left. + \frac{\rho^n}{n!} \left[\frac{\rho}{(n+\beta)} + \frac{\rho^2}{(n+\beta) \cdot (n+2\beta)} + \dots + \frac{\rho^r}{(n+\beta) \cdot (n+2\beta) \dots (n+r\beta)} + \dots \right] \right]^{-1}.$$

Данные формулы можно переписать в виде удобном для вычислений:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \text{ при } k=1, 2, \dots, n \quad (n \text{ — количество обслуживающих приборов}),$$

т. е. без очереди;

$$p_k = \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r (n+i\beta)}, \text{ с очередью размера } r;$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^r}{\prod_{i=1}^r (n+i\beta)} \right]^{-1}.$$

Отметим, что сумма бесконечного ряда при конкретных n вычисляется достаточно просто.

Определим характеристики многоканальной СМО с неограниченным количеством мест в очереди, но с ограниченным временем ожидания в очереди.

При любых $\rho > 0$ и $\beta > 0$ ряд, входящий в выражения для нахождения p_0 , будет сходящимся. Таким образом, в СМО с нетерпеливыми заявками, установивший режим при $t \rightarrow \infty$ наступит всегда.

Вновь прибывшая заявка, ставшая в очередь, может по истечении времени $\bar{t}_{оч}$ покинуть систему «не обслуженной», поэтому говорить о вероятности отказа обслуживания поступивших запросов, в данном случае, не имеет смысла.

Для нахождения абсолютной пропускной способности A определим среднее число заявок в очереди, как математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$\bar{r} = 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \dots + r \cdot p_{n+r} + \dots$$

Тогда, количество нетерпеливых заявок $v\bar{r}$, а абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda - v \cdot \bar{r}.$$

Учитывая, что $A = q \cdot \lambda$, найдем относительную пропускную способность q :

$$q = \frac{A}{\lambda} = \frac{\lambda - v \cdot \bar{r}}{\lambda} = 1 - \frac{v \cdot \bar{r}}{\lambda}.$$

Среднее число занятых каналов $\bar{n}$

$$\bar{n} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda - v \cdot \bar{r}}{\mu} = \rho - \beta \cdot \bar{r}.$$

Из последнего выражения средняя длина очереди $\bar{r}$

$$\bar{r} = \frac{\rho}{\beta} - \frac{\bar{n}}{\beta},$$

а среднее число занятых каналов $\bar{n}$ можно оценить как математическое ожидание дискретной случайной величины

$$\bar{n} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + n \cdot [1 - (p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1})].$$

6.7. Замкнутые СМО

Открытые СМО характеризуются тем, что заявки, поступающие в систему, не связаны с самой системой, т. е. интенсивность входного потока не зависит от состояния СМО. Замкнутые СМО — это системы, у которых заявки генерируются в самой системе и при обслуживании не покидают СМО, а поступают опять на ее вход. Характерным отличием замкнутой СМО служит ограниченное число источников заявок. Примером такой системы может служить обслуживание по наладке и ремонту инженером компьютеров, находящихся в отделе. Так же, сервер, на который поступают запросы с рабочих компьютеров, представляет собой замкнутую систему. Однако, число запросов от рабочих станций настолько велико, что состоянием самой системы, в данном случае, можно пренебречь и рассматривать такую систему как открытую одноканальную СМО с ожиданием (ограниченным ожиданием) или без ожидания.

Замкнутым СМО впервые дал полный анализ Т. Энгсет, поэтому их еще называют системами Энгсета. Тóре Ола́ус Э́нгсет ([норв. Tore Olaus Engset](#)) (1865—1943) — норвежский [математик](#) и инженер, пионер в области [теории телетрафика](#) и [теории массового обслуживания](#). В отличие от моделей Эрланга, где входящий поток считается простейшим, в моделях Энгсета входной поток считается примитивным.

6.7.1. Одноканальная замкнутая СМО

Рассмотрим одноканальную замкнутую СМО с неограниченным временем ожидания, простейшим потоком и n источником заявок. Система может находиться в следующих состояниях:

S_0 — в системе нет заявок, канал обслуживания свободен;

S_1 — в системе одна заявка, канал обслуживания занят;

S_2 — в системе две заявки, обслуживается первая заявка, вторая в очереди;

...

S_n — в системе n заявок, обслуживается одна заявка, $n-1$ находясь в очереди.

Систему из состояния S_0 в состояние S_1 может перевести одно из требований от n источников заявок с интенсивностью $n\lambda$. Далее, из состояния S_1 в состояние S_2 может перевести одно из требований от $(n-1)$ источников — с интенсивностью $(n-1)\lambda$ и т. д.

Систему из состояний справа на лево переводит один и тот же поток с интенсивностью μ , так как систему обслуживает одно устройство.

Размеченный граф состояний системы приведен на рис.

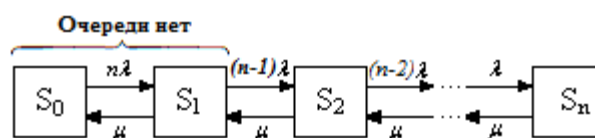


Рис. Одноканальная замкнутая СМО

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -n \cdot \lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} = -[(n-1) \cdot \lambda + \mu] \cdot p_1 + n \cdot \lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} = -[(n-2) \cdot \lambda + \mu] \cdot p_2 + (n-1) \cdot \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_3 \\ \dots \\ \frac{dp_n}{dt} = -\mu \cdot p_n + \lambda \cdot p_{n-1} \end{cases}.$$

Предельные вероятности состояний будут равны (процессы «гибели и размножения»)

$$p_1 = \frac{n \cdot \lambda}{\mu} p_0, \quad p_2 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \lambda^2}{\mu^2} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 1 \cdot \lambda^n}{\mu^n} p_0,$$

$$p_0 = \left[1 + n \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) + n \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 1 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}.$$

Пусть $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Тогда уравнения для предельных состояний примут вид:

$$p_0 = [1 + n \cdot \rho + n \cdot (n-1) \cdot \rho^2 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 1 \cdot \rho^n]^{-1},$$

$$p_1 = n \cdot \rho \cdot p_0, \quad p_2 = n \cdot (n-1) \cdot \rho^2 \cdot p_0, \quad \dots,$$

$$p_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 1 \cdot \rho^n \cdot p_0.$$

Или

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!} \rho^i \right]^{-1},$$

$$p_k = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \rho^k \cdot p_0.$$

Определим характеристики системы.

Под абсолютной пропускной способностью будем понимать среднее количество заявок, обслуживаемых прибором за единицу времени. Вероятность занятости прибора

$$P_{зан} = 1 - p_0.$$

Учитывая, что в единицу времени прибор обслуживает μ заявок, получим

$$A = (1 - p_0) \cdot \mu.$$

Так как рано или поздно любая заявка будет обслужена, то относительная пропускная способность равна 1:

$$q = 1.$$

Вероятность того, что обслуживающий прибор не будет занят

$$P_{своб} = 1 - P_{зан} = p_0.$$

Среднее число заявок, связанных с процессом обслуживания $\bar{k}$.

В среднем в системе находится $(n - \bar{k})$ заявок, тогда входной поток — $(n - \bar{k})\lambda$. Заявки обслуживаются прибором, который образует выходной поток $(1 - p_0)\mu$. Для установившегося режима работы средняя интенсивность требований во входном потоке равна аналогичной характеристике выхода требований обслуживания, тогда

$$(n - \bar{k}) \cdot \lambda = (1 - p_0) \cdot \mu \Rightarrow \bar{k} = n - \frac{1 - p_0}{\rho}.$$

Среднее число заявок находящихся в очереди на обслуживание определим как: разность числа заявок, связанных с процессом обслуживания $\bar{k}$, и числа заявок, обслуживаемых системой в настоящее время.

Число заявок, находящихся под обслуживанием, будет равно единице, если прибор занят, или нулю, если прибор свободен, а среднее число заявок под обслуживанием $\bar{w}$ определяет вероятность того, что прибор занят, т. е.

$$\bar{w} = 1 - p_0.$$

Тогда, среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \bar{k} - \bar{w} = n - \frac{1 - p_0}{\rho} - (1 - p_0).$$

Среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{(n - \bar{k}) \cdot \lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе (ожидание и обслуживание):

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об} = \bar{t}_{ож} + \frac{1}{\mu}.$$

6.7.2. Многоканальная замкнутая СМО

Рассмотрим замкнутую СМО с неограниченным временем ожидания, простейшим потоком, m каналами (приборами) обслуживания на которую могут поступить n заявок (требований) ($m < n$). Например, СМО состоит из n одинаковых приборов, каждый из которых выходит из строя в случайные моменты времени с интенсивностью λ . В случае выхода прибора из строя он попадает в ремонтную мастерскую, где его начинает восстанавливать один из m свободных мастеров с интенсивностью μ . Если все сотрудники ремонтной мастерской заняты, то прибор «встает» в очередь и ждет до тех пор, пока не освободится мастер. Каждый мастер может восстанавливать не более одного прибора одновременно.

Система может находиться в следующих состояниях:

S_0 — в системе нет заявок, обслуживающие приборы свободны;

S_1 — в системе одна заявка, один обслуживающий прибор занят;

S_2 — в системе две заявки, два обслуживающих прибора заняты;

...

S_m — в системе m заявок, все приборы заняты обслуживанием;

S_{m+1} — в системе $m+1$ заявка, все приборы заняты обслуживанием m заявок, одна в очереди;

...

S_n — в системе n заявок (максимальное количество), все приборы заняты обслуживанием m заявок, $(n - m)$ в очереди.

Систему из состояния S_0 в состояние S_1 может перевести одно из требований от n источников заявок с интенсивностью $n\lambda$. Далее, из состояния S_1 в состояние S_2

может перевести одно из требований от $(n-1)$ источников — с интенсивностью $(n-1)\lambda$ и т. д.

Пусть μ — интенсивность потока, переводящего систему из состояния S_1 в состояние S_0 . Если в системе две заявки, то для перехода из состояния S_2 в состояние S_1 систему должна покинуть или первая, или вторая заявка — интенсивность потока событий, в этом случае будет равна 2μ и т. д. Если в системе m заявок (заняты все обслуживающие приборы), то для перехода системы из состояния S_m в состояние S_{m-1} систему должны покинуть или первая, или вторая, ..., или m заявок — интенсивность потока событий, переводящая систему в предыдущее состояние будет равна $m\mu$. Если в системе больше чем m заявок, то так как обслуживающих приборов m , переход системы из состояний справа на лево будет переводить поток с интенсивностью $m\mu$, т. е. пока не освободится любой из m обслуживающих приборов.

Размеченный граф состояний системы приведен на рис.

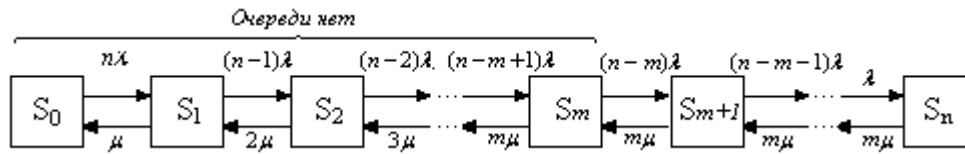


Рис. Многоканальная замкнутая СМО

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -n \cdot \lambda p_0 + \mu \cdot p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} = -[(n-1) \cdot \lambda + \mu] \cdot p_1 + n \cdot \lambda \cdot p_0 + 2\mu \cdot p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} = -[(n-2) \cdot \lambda + 2\mu] \cdot p_2 + (n-1) \cdot \lambda \cdot p_1 + 3\mu \cdot p_3 \\ \dots \\ \frac{dp_m}{dt} = -[(n-m) \cdot \lambda + m \cdot \mu] \cdot p_m + (n-m+1) \cdot \lambda \cdot p_{m-1} + m \cdot \mu \cdot p_{m+1} \\ \dots \\ \frac{dp_n}{dt} = -m \cdot \mu \cdot p_n + \lambda \cdot p_{n-1} \end{cases}.$$

Предельные вероятности состояний будут равны

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{n \cdot \lambda}{1 \cdot \mu} \cdot p_0, \quad p_2 = \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot p_0, \dots, \\ p_m &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \cdot p_0, \\ p_{m+1} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot m} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} \cdot p_0, \\ p_{m+2} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot m^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+2} \cdot p_0, \dots, \\ p_n &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \cdot m^{n-m}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0, \end{aligned}$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{n}{1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + \dots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m + \right. \\ \left. + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot m} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot m^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n \cdot (n-1) \dots 1}{1 \cdot 2 \dots m \cdot m^{n-m}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}.$$

Пусть $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Тогда уравнения для предельных состояний примут вид:

$$p_0 = \left[1 + \frac{n}{1} \cdot \rho + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \rho^2 + \dots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \cdot \rho^m + \right. \\ \left. + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot m} \cdot \rho^{m+1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot m^2} \cdot \rho^{m+2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n \cdot (n-1) \dots 1}{1 \cdot 2 \dots m \cdot m^{n-m}} \cdot \rho^n \right]^{-1},$$

$$p_1 = \frac{n}{1} \cdot \rho \cdot p_0, \dots, p_m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m+1)}{m!} \cdot \rho^m \cdot p_0, \dots,$$

$$p_n = \frac{n \cdot (n-1) \dots 1}{m! \cdot m^{n-m}} \cdot \rho^n \cdot p_0.$$

Или

$$p_0 = \left[n! \cdot \sum_{i=0}^m \frac{1}{i! \cdot (n-i)!} \rho^i + \frac{n!}{m!} \cdot \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{m^{i-m} \cdot (n-i)!} \rho^i \right]^{-1},$$

$$p_k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot \delta_m^k} \cdot \rho^k \cdot p_0, \text{ где } \delta_m^k = \begin{cases} k!, & k \leq m; \\ m! \cdot m^{k-m}, & m < k \leq n. \end{cases}$$

Определим характеристики системы.

Так как заявка рано или поздно будет обслужена, то относительная пропускную способность $q = 1$.

Среднее число приборов, занятых обслуживанием заявок, определим как математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$\bar{n} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + m \cdot (p_m + p_{m+1} + \dots + p_n).$$

Абсолютная пропускная способность A . Так как

$$\bar{n} = \frac{A}{\mu} \Rightarrow A = \bar{n} \cdot \mu.$$

Среднее число заявок под обслуживанием (в очереди и обслуживании)

$$\bar{w} = n - \frac{\bar{n} \cdot \mu}{\lambda} = n - \frac{\bar{n}}{\rho} = \sum_{k=m-1}^n k \cdot p_k.$$

Средняя длина очереди так же определяется как математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$\bar{r} = \sum_{k=m+1}^n (k-m) \cdot p_k.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{(n - \bar{k}) \cdot \lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе (ожидание и обслуживание):

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об} = \bar{t}_{ож} + \frac{1}{\mu}.$$

Пример 6.6. В техническом отделе работают 2 инженера, которые обслуживают 8 радиостанций, эксплуатируемых дежурной частью. В среднем каждые 5 часов радиостанции требуют вмешательства инженеров для их настройки, которое длится в среднем 1,5 часа. Поток отказов радиостанций — пуассоновский, время обслуживания — экспоненциальное.

Возможны два варианта обслуживания техники:

1. оба инженера обслуживают все радиостанции, и при необходимости свободный инженер устраняет неисправности;
2. за каждым инженером закреплено определенное количество обслуживаемой только им техники.

Определить наиболее оптимальный вариант обслуживания техники.

Решение.

Вариант 1.

Оба инженера обслуживают все радиостанции. Имеем многоканальную замкнутую СМО с параметрами $n = 8$, $m = 2$.

Интенсивность входного потока

$$\lambda = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ (заявки в час).}$$

Интенсивность обслуживания

$$\mu = \frac{1}{1,5} = 0,667 \text{ (заявки в час).}$$

Приведенная плотность потока

$$\rho = \frac{0,2}{0,667} \approx 0,3.$$

Определим вероятности состояний системы:

$$p_k = \frac{n!}{(n - k)! \delta_m^k} \cdot \rho^k \cdot p_0, \text{ где } \delta_m^k = \begin{cases} k!, & k \leq m; \\ m! \cdot m^{k-m}, & m < k \leq n. \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{8!}{1!(8-1)!} \cdot 0,3^1 \cdot p_0 = 2,4 \cdot p_0, \quad p_2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} \cdot 0,3^2 \cdot p_0 = 2,52 \cdot p_0,$$

$$p_3 = \frac{8!}{2! \cdot 2^{3-2} \cdot (8-3)!} \cdot 0,3^3 \cdot p_0 \approx 2,268 \cdot p_0,$$

$$p_4 = \frac{8!}{2! \cdot 2^{4-2} \cdot (8-4)!} \cdot 0,3^4 \cdot p_0 \approx 1,701 \cdot p_0,$$

$$p_5 = \frac{8!}{2! \cdot 2^{5-2} \cdot (8-5)!} \cdot 0,3^5 \cdot p_0 \approx 1,021 \cdot p_0,$$

$$p_6 \approx 0,459 \cdot p_0, \quad p_7 \approx 0,138 \cdot p_0, \quad p_8 \approx 0,021 \cdot p_0.$$

Учитывая, что $\sum p_i = 1$, имеем

$$11,528 \cdot p_0 = 1 \Rightarrow p_0 \approx 0,087.$$

Тогда

$$p_1 \approx 0,208, \quad p_2 \approx 0,219, \quad p_3 \approx 0,197, \quad p_4 \approx 0,148, \quad p_5 \approx 0,088, \quad p_6 \approx 0,039, \\ p_7 \approx 0,012, \quad p_8 \approx 0,002.$$

Вероятность того, что оба инженера заняты ремонтом:

$$P_{зан} = 1 - 0,087 = 0,913.$$

Среднее число инженеров, занятых ремонтом станций:

$$\bar{n} = 0 \cdot 0,087 + 1 \cdot 0,208 + 2 \cdot (0,219 + 0,197 + 0,148 + 0,088 + 0,039 + 0,012 + 0,002) = 1,618.$$

Абсолютная пропускная способность A

$$A = 1,618 \cdot 0,667 \approx 1,079.$$

Среднее число радиостанций под обслуживанием

$$\bar{w} = 8 - \frac{1,618}{0,3} \approx 2,61.$$

Средняя длина очереди:

$$\bar{r} = 1 \cdot 0,197 + 2 \cdot 0,148 + 3 \cdot 0,088 + 4 \cdot 0,039 + 5 \cdot 0,012 + 6 \cdot 0,002 = 0,985.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{ож}$:

$$\bar{t}_{ож} \approx 0,912.$$

Среднее время пребывания заявки в системе (ожидание и обслуживание):

$$\bar{t}_{сист} = 0,912 + 1,5 = 2,412.$$

Вариант 2.

За каждым инженером закреплено одинаковое количество обслуживаемой только им техники. Работа каждого инженера представляет собой одноканальную замкнутую СМО с параметром $n = 4$.

Определим вероятности состояний системы:

$$p_k = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \rho^k \cdot p_0.$$

$$p_1 = \frac{4!}{(4-1)!} \cdot 0,3^1 \cdot p_0 \approx 1,2 \cdot p_0, \quad p_2 \approx 1,08 \cdot p_0, \quad p_3 \approx 0,648 \cdot p_0, \quad p_4 \approx 0,194 \cdot p_0.$$

Откуда $p_0 \approx 0,2426$.

Вероятность того, что инженер занят ремонтом:

$$P_{зан} = 1 - 0,2426 = 0,7574.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = (1 - 0,2426) \cdot 0,667 \approx 0,505.$$

Вероятность того, что инженер простаивает:

$$P_{своб} = 0,2426.$$

Среднее число заявок, связанных с процессом обслуживания $\bar{k}$.

$$\bar{k} = 4 - \frac{1 - 0,2426}{0,3} \approx 1,475.$$

Среднее число радиостанций в ремонте $\bar{w}$:

$$\bar{w} = 0,7574.$$

Среднее число радиостанций в очереди:

$$\bar{r} = 1,475 - 0,7574 \approx 0,7176.$$

Среднее время ожидания радиостанцией ремонта в очереди $\bar{t}_{ож}$:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{0,7176}{(4 - 1,475) \cdot 0,2} \approx 1,421.$$

Среднее время пребывания станции в системе (ожидание и обслуживание):

$$\bar{t}_{сист} = 1,421 + 1,5 = 2,921.$$

Основные результаты расчетов сведем в таблицу.

	1 вариант	2 вариант
Вероятность того, что все радиостанции выйдут из строя	0,002	0,047
$P_{зан}$	0,913	0,7574
$\bar{t}_{ож}$	0,912	1,421
$\bar{t}_{сист}$	2,412	2,921

Учитывая, что в первом варианте обслуживаются 8 радиостанций у 2 рабочих, а во втором — каждому инженеру досталось по 4 радиостанции, то сравнение результатов показывает преимущество организации работы в первом случае, чем во втором.

Определим необходимое количество сотрудников технического отдела для получения максимального дохода от эксплуатации радиостанций при заданных входных условиях.

Пусть прибыль от работы одной радиостанции составляет $c1 = 30$ у.е., затраты, связанные с хранением и ремонтом радиостанции $c2 = 45$ у.е., а заработная плата одного инженера в перерасчете на ремонт одной станции составляет $c3 = 15$ у.е.

Целевая функция в данном случае будет иметь вид

$$C(n) = c1 \cdot n1(n) - c2 \cdot n2(n) - c3 \cdot n \rightarrow \max$$

Здесь $n1(n)$ — количество исправно работающих радиостанций;

$n2(n)$ — количество радиостанций, ожидающих ремонта на складе, и непосредственно ремонтируемых;

n — количество сотрудников технического отдела (инженеров).

Расчеты произведены с учетом обслуживания всеми инженерами всех радиостанций отдела и представлены на скриншоте.

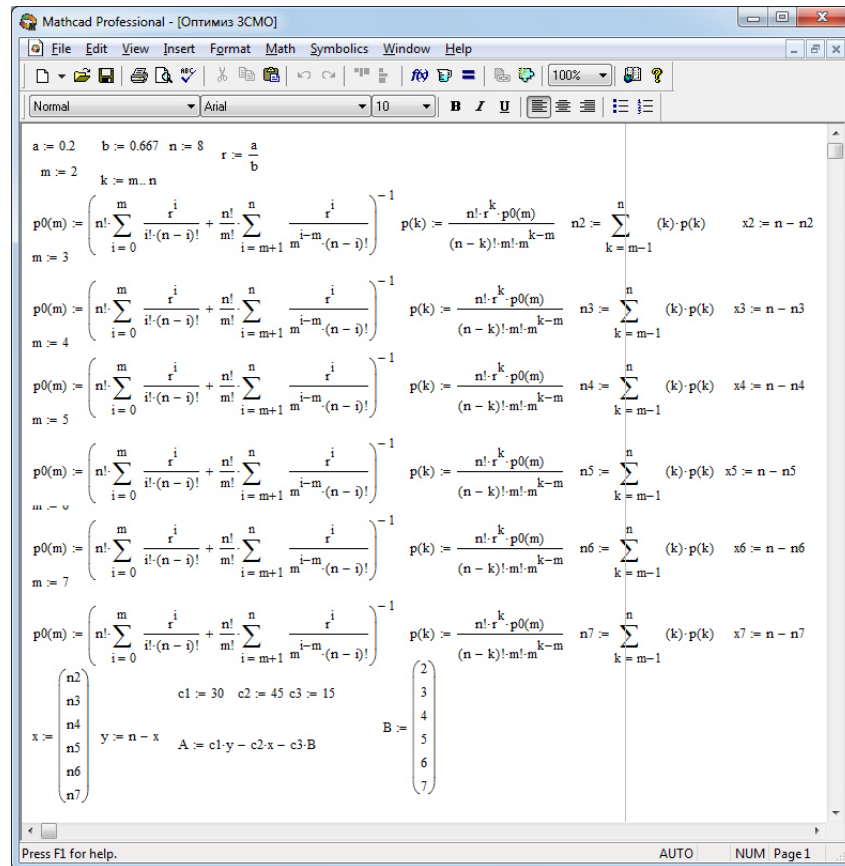
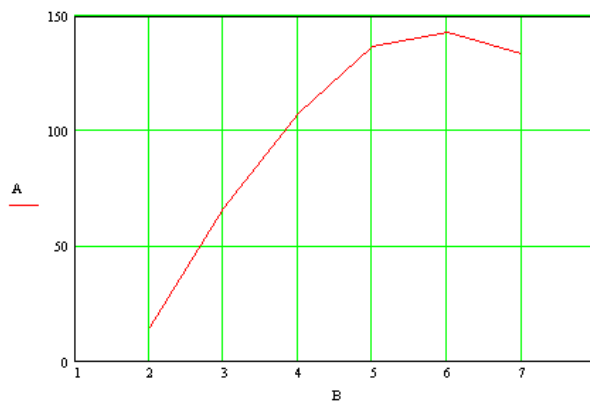


График зависимости целевой функции от количества сотрудников технического отдела приведен на рисунке.



Из графика видно, что максимальная «прибыль» будет при штатной численности технического отдела 6 единиц. Уменьшение или дальнейшее увеличение числа инженерного состава связано с потерей доходности от эксплуатации радиостанций. Очевидно, что при $n = 6$ «очередь» в мастерскую будет минимально необходимой и дальнейшее увеличение n не приводит к ощутимым улучшениям.

n	4	5	6	7
$\bar{k}$	0,96	0,38	0,1	0,01

Задача 6.5. На двухпроцессорный сервер закрытой локальной сети, состоящей из 10 рабочих станций, поступают запросы каждые t_1 с. Среднее время обработки одного сообщения процессором составляет t_2 с. Если оба процессора заняты, то запросы хранятся в памяти, пока один из них не освободится. Каждое обработанное сообщение приносит доход c_1 у.е., затраты, связанные с обслуживанием одной ячейки памяти — c_2 у.е., затраты на содержание одного процессора составляют c_3 у.е. Определить необходимое количество процессоров для получения максимальной прибыли.

Поток заявок — пуассоновский, время обслуживания — экспоненциальное.

№ варианта	t_1	t_2	c_1	c_2	c_3
1.	2	0,5	30	45	15
2.	2,5	0,3	10	20	15
3.	1	0,25	14	10	29
4.	0,14	0,05	2	60	50
5.	0,5	0,1	70	25	30
6.	0,15	0,07	2	40	50
7.	3,33	0,1	20	50	9
8.	4	1,25	15	20	20
9.	1,5	8	70	25	30
10.	2	0,5	70	25	30
11.	0,2	0,125	20	10	22
12.	0,1	0,05	90	50	80
13.	0,14	0,07	50	30	40
14.	0,2	0,08	15	5	15
15.	0,5	0,25	10	15	20

№ варианта	t_1	t_2	c_1	c_2	c_3
16.	0,125	0,02	20	50	5
17.	0,1	0,025	50	20	40
18.	0,05	0,025	20	70	90
19.	0,04	0,02	10	5	10
20.	0,2	0,1	90	5	95
21.	0,125	0,01	50	10	5
22.	0,05	0,025	50	50	55
23.	0,1	0,025	50	50	55
24.	0,05	0,02	50	10	20
25.	0,2	0,02	40	20	25
26.	0,2	0,02	30	10	5
27.	0,02	0,01	50	20	40
28.	0,05	0,02	40	20	45
29.	0,1	0,02	70	30	40
30.	0,05	0,025	50	20	60

6.8. Немарковские СМО

Рассмотрим СМО в которых процессы, протекающие в системе не являются непрерывной марковской цепью, т. е. входящий поток и распределение времени между моментами обслуживания не являются пуассоновскими (простейшими).

6.8.1. n -канальная СМО с отказами, простейшим потоком заявок и произвольным распределением времени обслуживания

Пусть на n -канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ , время обслуживания имеет произвольное распределение $f(t)$ с математическим ожиданием

$$\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt.$$

Тогда, для вероятностей состояний справедливы формулы Эрланга

$$\begin{cases} p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \\ p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}} = \left(\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1}, \\ k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

6.8.2. Одноканальная СМО с неограниченной очередью, простейшим потоком заявок и произвольным распределением времени обслуживания

Пусть на вход одноканальной СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток с интенсивностью λ . Распределение времени обслуживания имеет произвольный закон $f(t)$ с математическим ожиданием $\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu}$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_{t_{об}}$, тогда коэффициент вариации данного распределения

$$v = \frac{\sigma_{t_{об}}}{\bar{t}_{об}}.$$

Для данной системы справедливы **формулы Полячека-Хинчина**:

– среднее число заявок, находящихся в очереди (длина очереди)

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v^2)}{2 \cdot (1 - \rho)};$$

– среднее число заявок в системе

$$\bar{k} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} + \rho;$$

– среднее время ожидания в очереди (используя формулу Литтла)

$$\bar{t}_{об} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v^2)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)};$$

– среднее время пребывания в системе (по формуле Литтла)

$$\bar{t}_{сис} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v^2)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)} + \frac{1}{\mu}.$$

Предположим, что интервалы времени между обслуживанием заявок распределено по показательному закону (имеет место марковская цепь). Так как для экспоненциального закона $\bar{m}(x) = \sigma(x)$, то коэффициент вариации равен единице, тогда формулы Полячека-Хинчина примут полученный ранее вид

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho},$$

$$\bar{t}_{об} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1 - \rho)}.$$

Пусть теперь время обслуживания не случайный процесс, а имеет постоянную величину. Тогда дисперсия равна 0, а следовательно и коэффициент вариации та же равен 0 и формулы Полячека-Хинчина примут вид

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)};$$

$$\bar{t}_{об} = \frac{\rho^2}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)}.$$

Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что и среднее число заявок, находящихся в очереди, и среднее время ожидания в очереди для неслучайного времени обслуживания вдвое меньше, чем при показательном законе распределения.

Время обслуживания, равное постоянной величине, встречается редко. Даже время обращения к одному и тому же файлу на жестком диске непостоянно, так как массивы с данными расположены в разных местах. Примером случая с постоянным временем обслуживания может служить занятие линии связи для передачи сообщения фиксированной длины.

Формулы Полячека-Хинчина используются при проектировании информационных систем с пуассоновским законом распределения входного потока, произвольным законом распределения времени обслуживания заявок и любой дисциплине обслуживания, главное, чтобы выбор очередного сообщения для обслуживания не зависел от времени.

6.8.3. Одноканальная СМО с произвольным потоком заявок и экспоненциальным распределением времени обслуживания

Пусть на вход одноканальной СМО поступает случайный поток заявок произвольного вида с функцией распределения интервалов между заявками $A(\tau)$ с интенсивностью λ , длительность обслуживания заявок распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью $\mu = \frac{1}{b}$.

Среднее время ожидания в очереди определим как

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\xi \cdot b}{1 - \xi},$$

где ξ – корень ($0 < \xi < 1$) уравнения

$$\xi = A(\mu - \mu\xi).$$

$A(s = \mu - \mu\xi)$ – преобразование Лапласа плотности распределения интервалов между входящими заявками $a(\tau)$

$$A^*(s) = \int_0^{\infty} a(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau,$$

где $s = \mu - \mu\xi$ – комплексная переменная ($s > 0$).

При нахождении корня ξ уравнения получить решение в явном виде иногда достаточно сложно, поэтому необходимо прибегнуть к численным методам решения уравнений.

Пример 6.7. На вход одноканальной СМО поступает простейший поток. Распределение времени между интервалами обслуживания — экспоненциальное. Найти среднее время ожидания в очереди.

Решение.

Для простейшего входного потока имеем

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

где λ — интенсивность входного потока.

Преобразование Лапласа для данной функции имеет вид

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \div \frac{\lambda}{\lambda + s} = A(s = \mu - \mu\xi) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu - \mu\xi}.$$

Решаем уравнение

$$\xi = \frac{\lambda}{\lambda + \mu - \mu\xi} \Leftrightarrow \lambda\xi + \mu\xi - \mu\xi^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \mu\xi^2 - (\lambda + \mu)\xi + \lambda = 0 \mid : \mu \Leftrightarrow$$

$$\xi^2 - (1 + \rho)\xi + \rho = 0.$$

Решением данного уравнения будут 1 и ρ . Заданному условию $0 < \xi < 1$ удовлетворяет только корень $\xi = \rho$.

Подставляя полученный корень в выражение для нахождения среднего времени ожидания заявки в очереди, получим уже выведенную формулу для СМО с неограниченным количеством мест в очереди

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho \cdot b}{1 - \rho} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)}.$$

6.8.4. Одноканальная СМО с произвольным потоком заявок и произвольным распределением времени обслуживания

На практике, при исследовании реальных систем, редко бывают известны законы распределений входного и обслуживающего потоков. Как правило, из характеристик о данных потоках, известно только о первых двух начальных моментах — среднем значении и разбросе значений около этого среднего (математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение). Например: в некую систему поступают заявки каждые 5 (± 2) минут, которые обслуживаются 7 (± 1) минут. Таким образом, имеем треугольное распределение (распределение Симпсона) обоих потоков.

Пусть на вход одноканальной СМО поступает поток с произвольным распределением интервалов между заявками со средним значением a . Распределение интервалов между обслуживанием также имеет произвольный закон со средним значением b . Система справляется с входящим потоком.

Среднее время ожидания в очереди для данной СМО определим как

$$\bar{t}_{ож} \approx \frac{\rho \cdot b \cdot (v_a^2 + v_b^2)}{2(1 - \rho)} \cdot f(v_a),$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot b < 1$ — приведенная интенсивность входного потока (загрузка системы);

$\lambda = \frac{1}{a}$ — интенсивность входного потока;

$\mu = \frac{1}{b}$ — интенсивность обслуживания;

$v_a = \frac{\sigma_a}{a}$ — коэффициент вариации закона распределения интервалов между поступающими в систему заявками со средним значением a и среднеквадратическим отклонением σ_a ;

$v_b = \frac{\sigma_b}{b}$ — коэффициент вариации закона распределения длительностей обслуживания заявок со средним значением b и среднеквадратическим отклонением σ_b ;

$f(v_a)$ — корректирующая функция, определяемая как

$$f(v_a) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{2 \cdot (1-\rho) \cdot (1-v_a^2)^2}{3\rho \cdot (v_a^2 + v_b^2)}\right], & v_a < 1 \\ \exp\left[-(1-\rho) \frac{v_a^2 - 1}{v_a^2 + 4v_b^2}\right], & v_a \geq 1 \end{cases}.$$

На практике, как правило, выходной поток одной СМО является входным для другой. Поэтому для второй СМО также необходимо знать коэффициент вариации входного потока.

Для СМО с произвольными законами коэффициент вариации выходного потока можно оценить как

$$v_c \approx v_a^2 + 2\rho \cdot v_b^2 - 2\rho \cdot (1-\rho) \cdot \frac{\bar{t}_{ожс}}{b}.$$

Для грубо приближенной оценки средней длины очереди можно воспользоваться формулой, полученной М.А. Файнбергом

$$\bar{r} = L_{оч} \approx \frac{\rho^2 \cdot (v_a^2 + v_b^2)}{2 \cdot (1-\rho)}.$$

Тогда, учитывая, что ρ — среднее число обслуженных заявок, получим

$$\bar{k} = L_{сист} = L_{оч} + \rho.$$

Остальные характеристики можно получить, используя формулу Литтла.

6.8.5. Многоканальная СМО с произвольным потоком заявок и произвольным распределением времени обслуживания

Аналитических выражений для определения характеристик таких систем получить не удастся. Можно данную СМО представить в виде нескольких одноканальных на которые будет поступать уже поток Эрланга n -го порядка с коэффициентом вариации $1/\sqrt{n}$.

7. СЕТИ ПЕТРИ

7.1. Определения

В 1962 году немецкий математик Карл Адам Петри предложил метод описания динамических дискретных систем, как правило, асинхронных параллельных процессов. Такие модели получили название сети Петри или N -схемы (англ. Net — сеть).

Сети Петри применяют для исследования телекоммуникационных сетей, сетевых протоколов, вычислительных систем и процессов, а также производственных и организационных систем.

Моделирование в сетях Петри происходит на событийном уровне. Задаются состояния системы, переходы (действия) из одного состояния в другое, дуги, связывающие состояния с переходами, а также маркеры (метки), показывающие в каких состояниях, находится система. Работа сети показывает поведение системы, т.е. в каких состояниях система находилась, а какие состояния недостижимы. Анализ результатов работы не дает числовых (вероятностных) характеристик.

Сеть Петри — двудольный ориентированный мультиграф, т. е. граф, множество вершин которого можно разбить на два подмножества таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одного подмножества с какой-то вершиной другого (не существует ребра, соединяющего две вершины из одного и того же подмножества).

Простой сетью Петри называется набор

$$N = (S, P, F),$$

где $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ — множество состояний (позиций) системы;

$P = \{p_1, \dots, p_m\}$ — множество переходов таких, что $S \cap P$ — не пустое множество;

$F \subseteq \mu S \times P \times \mu S$ — отношение инцидентности (показывает для каждого перехода, что предшествовало и что будет потом).

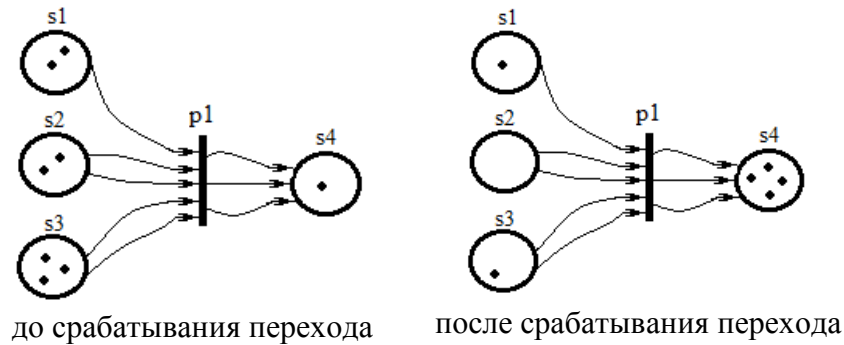
Для работы сети в модель добавляются маркеры, которые перемещаются из позиции в позицию. С помощью маркеров (фишек, токенов) отслеживается поведение и текущее состояние системы. Считается, что события в сети происходят мгновенно.

При совершении какого-либо события в сети Петри происходит срабатывание (возбуждение, запуск) перехода, в результате чего маркеры из входных позиций данного перехода перемещаются в выходные позиции. Однако, если переход добавлен некоторым условием, то он может и не сработать, тогда маркер не перейдет в выходное состояние.

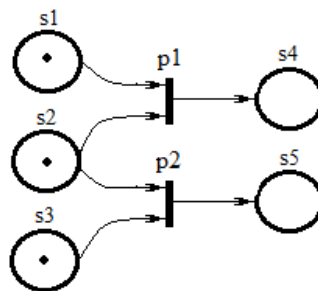
Правила срабатывания переходов:

– количество маркеров во входных позициях k_i должно быть не меньше количества дуг n_j , соединяющих данные позиции с переходом;

– после срабатывания перехода во входных позициях количество маркеров уменьшится на n_j , а в выходной позиции количество фишек увеличится на число, равное количеству дуг, соединяющих переход с данной выходной позицией.



Однако бывают конфликтные ситуации, когда переход, который должен срабатывать, выбирается случайным образом (стохастические цепи).



Основные свойства сети Петри:

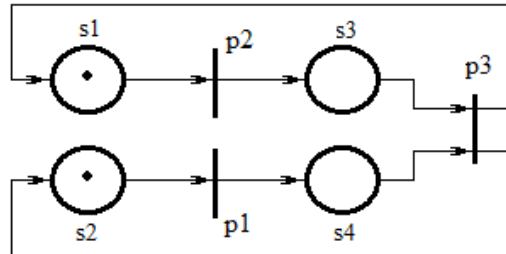
- ограниченность — число меток в любой позиции не может превысить некоторого n (можно определить емкость накопителя при проектировании информационных систем);
 - безопасность — частный случай ограниченности при $n=1$, т.е. состояния не могут иметь более одной метки. Анализ безопасности необходим для исключения условий одновременного использования метки несколькими процессами;
 - сохраняемость — постоянство загрузки ресурсов (маркеров);
 - достижимость — возможность перехода из одного состояния в другое;
 - живость — возможность срабатывания любого перехода при работе модели.
- Отсутствие живости означает избыточность аппаратуры в моделируемой системе или наличие закливаний, тупиков.

Некоторые виды сетей Петри:

- временная — определяется продолжительность срабатывания перехода (задержка), т. е. работа сети привязана к модельному времени;
- стохастическая — задержки являются случайными величинами;
- функциональная — задержки определяются как функции некоторого переменного (с каждым действием (переходом) связывается процесс обработки данных);
- цветная — метки, определяющие состояния системы, могут быть разных типов (цветов), тогда для каждого типа данных вводятся свои алгоритмы поведения в сети;
- ингибиторная — сеть содержит ингибиторные дуги, запрещающие срабатывание перехода, если во входной позиции (состоянии), связанной с переходом такой дугой, находится метка;
- иерархическая — сеть содержит переходы, в которые вложены другие сети;
- WF-сеть — применяются для моделирования потоков операций в Workflow системах (система, координирующая выполнение операций для одного процесса). Данные сети нашли широкое применение для представления бизнес-процессов.

Для задания динамических характеристик сети введем понятие маркировки M_0 , т. е. описание (перечисление) состояний системы в каждый момент времени (на каждом шаге).

Рассмотри сеть Петри.

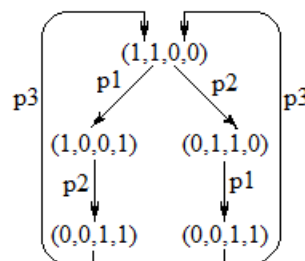


Данная сеть состоит из четырех позиций и трех переходов. В первой и второй позиции находится по одной метке, следовательно, **начальной маркировкой** сети будет $(1, 1, 0, 0)$. Далее последовательно сработают первый или второй переходы.

Если первым сработает переход $p1$, то метка из позиции $s2$ перейдет в позицию $s4$ и маркировка станет $(1, 0, 0, 1)$. Далее сработает переход $p2$ и метка из позиции $s1$ перейдет в $s2$, маркировка $(0, 0, 1, 1)$. Остается сработать третьему переходу, и система вернется в начальное состояние.

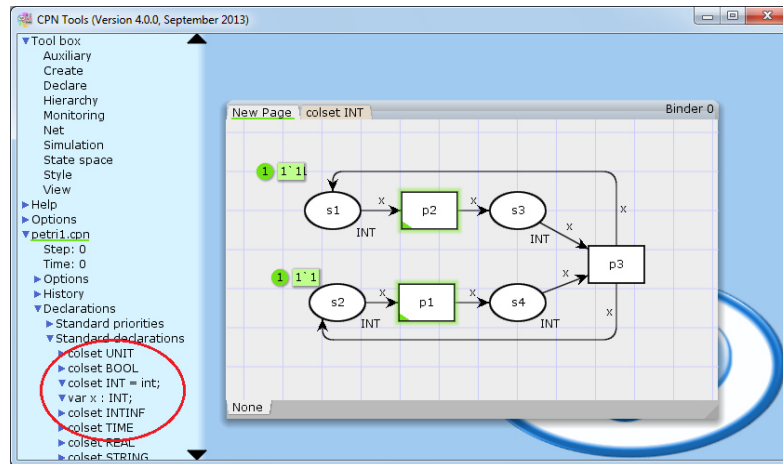
Если первым сработает переход $p2$ — $(0, 1, 1, 0)$, затем сработает $p1$ — $(0, 0, 1, 1)$, третий переход переведет систему в исходное состояние.

Таким образом, граф достижимости данной сети будет иметь вид



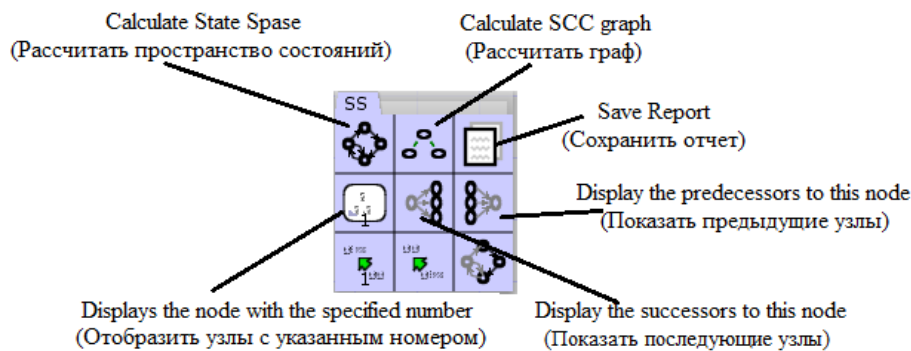
Аналогичный результат получается при построении данной сети в пакете CPN Tools (Color Petri Nets — цветные сети Петри).

Задав необходимое количество шагов, можно проследить за работой модели.

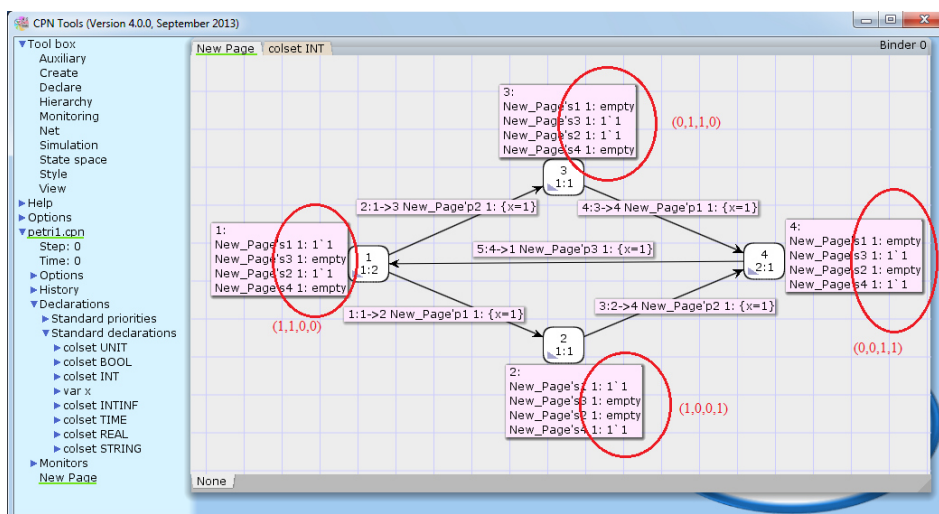


Анализ пространства состояний возможен только для достаточно небольших моделей, так как количество состояний растет как 2^n (n — количество состояний).

Для анализа пространства воспользуемся палитрой State space (пространство состояний): построим пространство (Calculate State Space), рассчитаем граф (Calculate SCC graph), а далее можно результаты или сохранить в отчете или отобразить граф состояний на рабочем листе программы (Display the node with the specified number).



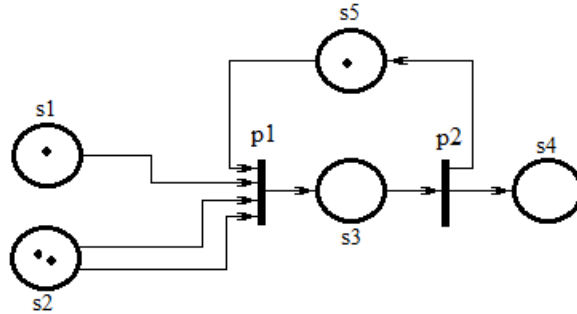
Граф достижимости имеет вид



Рассмотрим временную сеть Петри на следующем примере.

Камера слежения оснащена 2 независимыми датчиками включения, один из которых комбинированный (выдает сигнал, когда срабатывают два внутренних элемента). После включения камеры идет запись информации на жесткий диск в течение 1000 ед. времени. Время включения камеры является случайной величиной и распределено по закону Пуассона со средним значением 5000.

Сеть Петри, описывающая работу данного устройства, имеет вид



Позиции $s1$ и $s2$ моделируют датчики включения и содержат соответствующее количество меток. Переход $p1$ имеет временную задержку, значение которой распределено по закону Пуассона. Состояние $s3$ — запись информации на жесткий диск. Переход $p2$ должен срабатывать по истечении 1000 ед. времени. Для отображения состояния камеры, введена позиция $s5$, которая имеет метку.

При срабатывании датчиков метки из позиций $s1$ и $s2$, а также из позиции $s5$ вызывают срабатывание перехода $p1$. После окончания записи срабатывает переход $p2$, который помещает фишки в позиции $s5$ для разрешения дальнейшего включения камеры и $s4$. Позиция $s4$ служит для вывода итоговой информации, например для подсчета количества включений камеры за определенный период.

Построим модель данной сети в пакете CPN Tools.

Все позиции модели относятся к множеству цветов X :

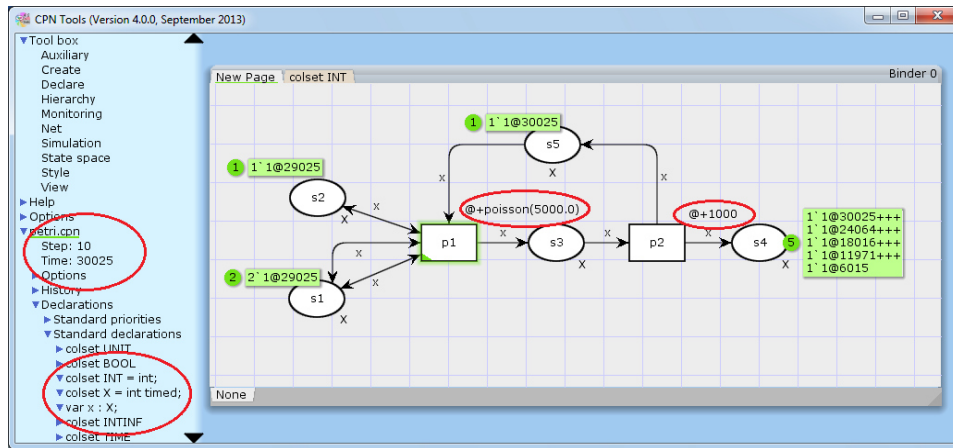
```
colset X = int timed;
var x : X;
```

Для использования временных задержек в сети, при введении множества цветов X , использован оператор `timed`.

Так же задержку по времени можно ввести как условие дуги, для чего к переменной нужно добавить задержку: $x@+$ «закон или конкретное время».

Состояния $s1$ и $s2$ задают входную последовательность, причем в позиции $s2$ две метки 1, а в $s1$ — одна. Переход $p1$ моделирует случайное срабатывание камеры слежения в моменты времени, распределенные по закону Пуассона. Переход $p2$ моделирует время записи информации на жесткий диск. Позиции $s1$ и $s2$ соединены с переходом $p1$ двунаправленными дугами для возвращения фишек назад, что необходимо для безостановочной работы в течение заданного времени.

Результат работы модели после 10 шагов (30025 ед. времени) представлен на рисунке.



Анализ работы модели дает представление о работе заданной технической системы.

Пример 7.1. Построить сеть Петри, моделирующую работу устройства, заданного автоматом Мили.

X	S	
	s_0	s_1
x_0	s_1/y_0	s_0/y_0
x_1	s_0/y_1	s_1/y_1

Решение.

Построим сеть Петри, используя пакет CPN Tools (Color Petri Nets — цветные сети Петри).

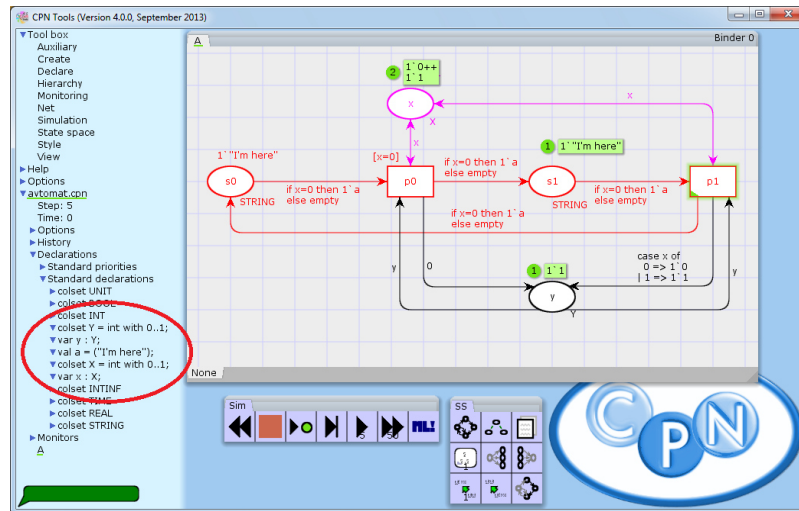
Сеть состоит:

- 1) множество входных сигналов (цветов) X :
colset $X = \text{int with } 0..1$;
var $x : X$;
- 2) множество выходных сигналов (цветов) Y :
colset $Y = \text{int with } 0..1$;
var $y : Y$;
- 3) состояний: s_0 и s_1 и связанных с ними переходов: p_0 и p_1 ;
- 4) параметра $a = \text{I'm here}$ (я тут) типа string.

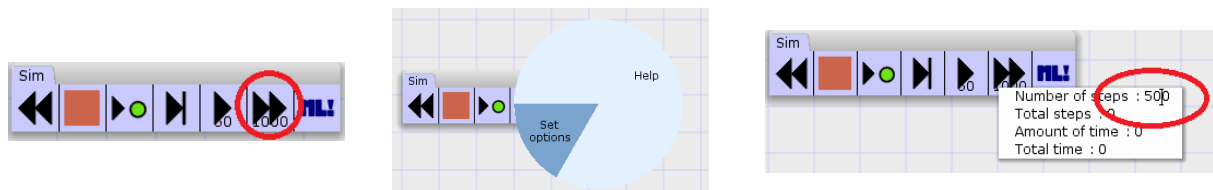
Множество цветов X генерирует входную последовательность автомата (тип INT). Входное множество связано с переходами двунаправленными дугами для возвращения фишек — для безостановочной работы модели. Фишка a показывает в каком состоянии находится автомат в данный момент. Состояния s_0 и s_1 имеют тип позиции (множество цветов) STRING (параметр a является строковой переменной). Каждое состояние связано дугой с соответствующим переходом. Для заданного автомата условие запуска перехода p_0 $x = 0$, тогда автоматически условием срабатывания перехода p_1 будет $x = 1$. Выражения входных дуг переходов являются условиями для выбора соответствующих фишек. Множество цветов Y имеет начальную маркировку $1\ 1$ (для заданного автомата она может быть и $1\ 0$). Выходное множество также связано с переходами входящими и выходящими дугами, однако каждая дуга имеет свое условие.

Для задания начального состояния модели (s_0 или s_1) необходимо поместить $1\ \text{I'm here}$ в поле начальной маркировки соответствующего состояния. Также сеть

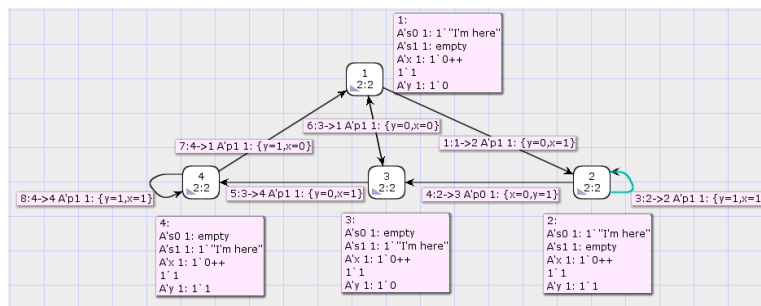
можно раскрасить, пометив одним цветом состояния и переходы, относящиеся к одному типу.



В результате, задав необходимое количество шагов, находим конечное состояние и выходной сигнал. Для этого кликнем правой клавишей по соответствующей кнопке палитры «Simulation» и в свойствах объекта введем нужное число.



Граф пространства состояний для заданного автомата имеет вид:



Пример 7.2. Построить сеть Петри, моделирующую работу устройства, заданного автоматом Мили.

X	S		
	s ₀	s ₁	s ₂
x ₀	s ₂ /y ₁	s ₀ /y ₀	s ₂ /y ₂
x ₁	s ₁ /y ₂	s ₂ /y ₁	s ₁ /y ₀
x ₂	s ₀ /y ₀	s ₁ /y ₂	s ₀ /y ₁

Решение.

Построим сеть Петри, используя пакет CPN Tools (Color Petri Nets — цветные сети Петри).

Сеть состоит:

1) множество входных сигналов (цветов) X :

colset $X = \text{int with } 0..2$;

var $x : X$;

2) множество выходных сигналов (цветов) Y :

colset $Y = \text{int with } 0..2$;

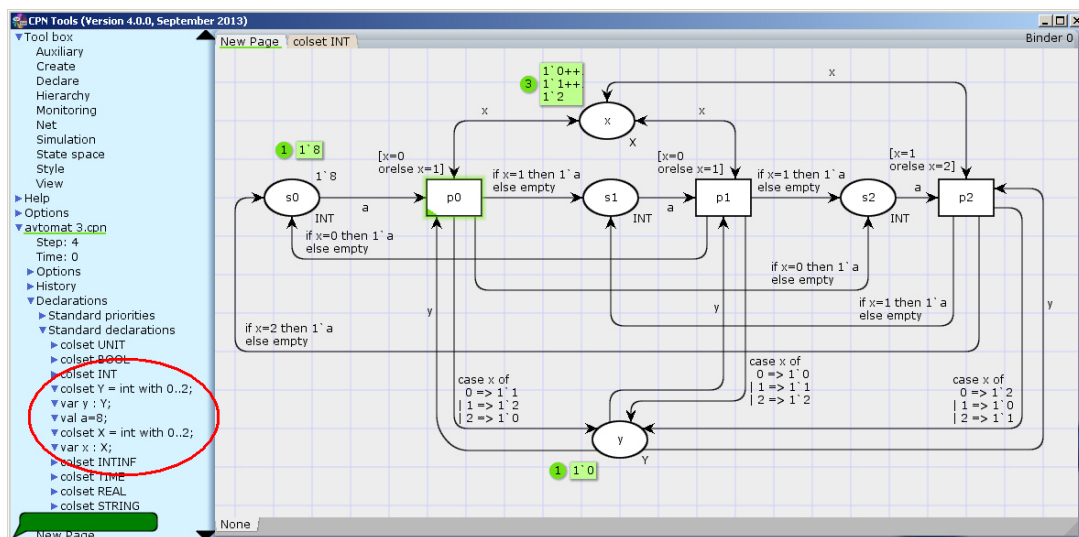
var $y : Y$;

3) состояний: $s0$, $s1$, $s2$ и связанных с ними переходов: $p0$, $p1$, $p2$;

4) параметра $a = 8$.

Множество цветов X генерирует входную последовательность автомата (тип INT). Входное множество связано с переходами двунаправленными дугами для возвращения фишек — для безостановочной работы модели. Фишка a показывает в каком состоянии находится автомат в данный момент. Состояния $s0$, $s1$, $s2$ имеют тип позиции (множество цветов) INT. Каждое состояние связано дугой с соответствующим переходом. Для заданного автомата условием запуска перехода $p0$ является $x = 0$ и $x = 1$ — при поступлении сигнала $x = 0$ и $x = 1$ устройство перейдет из состояния $s0$ в состояния $s2$ и $s1$ соответственно, что следует из таблицы, описывающей работу данного устройства. Условием запуска перехода $p1$ так же будут входные сигналы $x = 0$ и $x = 1$. Условием запуска $p2$ — $x = 1$ и $x = 2$. Далее, в зависимости от входного сигнала фишка a направляется в ту или иную позицию — условия перехода заданы для каждой дуги с помощью оператора if-then-else.

Множество цветов Y имеет начальную маркировку $1'0$ (для заданного автомата она может быть и $1'1$). Переходы связаны с выходным множеством Y входными дугами для возможности срабатывания данных переходов. Также переходы связаны с множеством Y выходными дугами, для которых с помощью оператора case задается выходная последовательность в зависимости от входных сигналов и состояния системы в данный момент времени. В данном примере эти условия указаны полностью в соответствии с таблицей работы автомата, что не обязательно. Так при срабатывании перехода $p0$ выходными сигналами будут только $y1$ и $y2$, т.е. оператор «case» будет иметь вид: case x of $0 \Rightarrow 1'1 \mid 1 \Rightarrow 1'2$.



Задача 7.1. Построить сеть Петри в среде CPN Tools, моделирующую работу устройства, заданного автоматом.

1.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_0/y_0	s_2/y_2	s_1/y_1	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_1/y_1	s_0/y_2	s_1/y_1
x_2	s_3/y_2	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

2.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_0/y_1	s_2/y_2	s_2/y_3	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_0/y_2	s_0/y_2	s_0/y_2
x_2	s_3/y_0	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

3.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_0	s_2	s_1	s_2
x_1	s_1	s_1	s_0	s_1
x_2	s_3	s_1	s_1	s_3

4.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_3/y_2	s_2/y_2	s_2/y_1	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_0/y_2	s_0/y_2	s_0/y_0
x_2	s_0/y_1	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

5.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_0/y_1	s_2/y_2	s_2/y_2	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_0/y_1	s_0/y_2	s_0/y_1
x_2	s_0/y_1	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

6.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_0	s_1	s_1	s_3
x_1	s_2	s_1	s_1	s_1
x_2	s_3	s_1	s_0	s_2

7.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_1	s_2	s_1	s_0
x_1	s_1	s_1	s_2	s_1
x_2	s_3	s_1	s_0	s_3

8.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_0/y_1	s_2/y_2	s_0/y_2	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_0/y_1	s_0/y_2	s_0/y_1
x_2	s_3/y_0	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

9.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_0	s_0	s_1	s_3
x_1	s_3	s_2	s_0	s_2
x_2	s_1	s_1	s_2	s_3

10.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_0/y_1	s_2/y_2	s_2/y_2	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_0/y_2	s_0/y_2	s_0/y_1
x_2	s_2/y_1	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

11.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_2/y_1	s_2/y_2	s_0/y_2	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_0/y_1	s_3/y_0	s_1/y_2
x_2	s_2/y_1	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

12.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_0/y_1	s_3/y_0	s_2/y_2	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_2/y_2	s_0/y_2	s_1/y_2
x_2	s_1/y_2	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

13.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_2/y_2	s_2/y_2	s_2/y_2	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_0/y_1	s_0/y_2	s_0/y_1
x_2	s_0/y_1	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

14.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_1	s_2	s_1	s_0
x_1	s_0	s_1	s_0	s_1
x_2	s_3	s_1	s_2	s_3

15.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_0	s_1	s_1	s_0
x_1	s_1	s_2	s_0	s_1
x_2	s_3	s_1	s_1	s_3

16.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_2/y_2	s_1/y_1	s_3/y_0	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_2/y_2	s_0/y_2	s_3/y_0
x_2	s_0/y_1	s_3/y_0	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

17.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_3/y_0	s_2/y_2	s_1/y_1	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_3/y_0	s_2/y_2	s_0/y_1
x_2	s_0/y_1	s_1/y_1	s_0/y_2	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

18.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_2	s_2	s_1	s_2
x_1	s_1	s_1	s_0	s_1
x_2	s_1	s_3	s_1	s_3

19.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_0	s_2	s_1	s_1
x_1	s_2	s_1	s_2	s_1
x_2	s_3	s_1	s_3	s_3

20.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_0/y_1	s_2/y_2	s_2/y_2	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_2/y_2	s_0/y_2	s_0/y_1
x_2	s_3/y_0	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

21.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_3/y_0	s_2/y_2	s_1/y_1	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_0/y_2	s_2/y_2	s_3/y_0
x_2	s_0/y_1	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

22.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_1	s_2	s_2	s_2
x_1	s_2	s_1	s_1	s_1
x_2	s_3	s_1	s_1	s_3

23.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_0/y_1	s_2/y_2	s_1/y_2	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_2/y_2	s_0/y_2	s_3/y_0
x_2	s_2/y_2	s_1/y_1	s_1/y_1	s_2/y_1
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

24.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_2/y_1	s_2/y_2	s_2/y_2	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_2/y_2	s_0/y_2	s_1/y_2
x_2	s_0/y_1	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

25.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_0	s_2	s_1	s_2
x_1	s_1	s_1	s_0	s_1
x_2	s_3	s_1	s_1	s_3

26.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_1/y_2	s_2/y_2	s_1/y_1	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_0/y_1	s_0/y_2	s_2/y_1
x_2	s_0/y_1	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

27.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_0	s_2	s_1	s_2
x_1	s_1	s_1	s_0	s_1
x_2	s_3	s_1	s_1	s_3

28.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_2	s_2	s_0	s_1
x_1	s_1	s_1	s_1	s_0
x_2	s_1	s_1	s_3	s_1

29.

X	S			
	$\frac{s_0}{y_0}$	$\frac{s_1}{y_1}$	$\frac{s_2}{y_2}$	$\frac{s_3}{y_3}$
x_0	s_0	s_1	s_1	s_2
x_1	s_2	s_1	s_0	s_1
x_2	s_3	s_1	s_1	s_3

30.

X	S			
	s_0	s_1	s_2	s_3
x_0	s_2/y_1	s_2/y_2	s_2/y_2	s_2/y_1
x_1	s_1/y_2	s_3/y_0	s_0/y_2	s_0/y_1
x_2	s_0/y_1	s_1/y_1	s_1/y_1	s_3/y_0
x_3	s_2/y_3	s_3/y_3	s_2/y_2	s_3/y_3

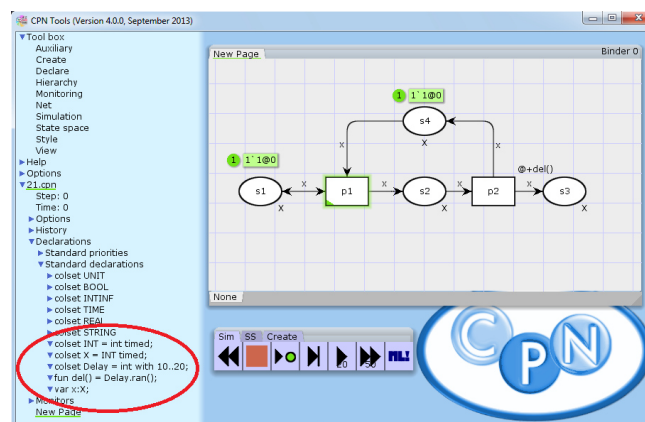
Пример 7.3. Антивирусная программа проверяет каждый файл компьютера в среднем от 10 мкс до 20 мкс. Ядро программы последовательно проверяет каждый файл на наличие вирусов, ошибок и исправляет найденные ошибки. Описать работу проверки компьютерной системы антивирусной программой с позиции временных сетей Петри.

Решение.

Состояние $s1$ генерирует заявки (проверяемые файлы) и соединено с переходом $p1$ двунаправленной дугой для безостановочной работы модели. Этого можно и не делать, но тогда нужно задать необходимое количество проверяемых файлов (фишек) в позиции $s1$. Состояние $s4$ необходимо для имитации работы ядра программы. Переход $p1$ срабатывает, когда есть метки в позициях $s1$ и $s4$. После этого файл начинает проходить проверку в позиции $s2$. Переход $p2$ задает временную задержку, моделирующую работу ядра для проверки файла. После проверки файла из перехода $p2$ попадает опять в состояние $s4$ и программа снова готова для обработки следующего файла. Позиция $s3$ является выходной и показывает время обработки каждого последующего файла с нарастающим итогом.

Использованы следующие множества цветов, функций и переменных:

- colset $X = \text{int timed}$; — временное множество цветов X типа INT;
- colset Delay = int with 10..20; — множество, состоящее из целых чисел от 10 до 20;
- fun del() = Delay.ran(); — функция, генерирующая равномерно распределенную задержку;
- var $x : X$; — переменная множества X .



Задача 7.2. Техническая система сегмента сети состоит из N однотипных блоков, обеспечивающих ее работоспособность, причем в запасе имеется один блок. Блоки периодически выходят из строя, что в целом не влияет на работоспособность сети. После выхода блока из строя мастер ищет неисправный блок. После того как неисправный блок найден, второй мастер производит его замену. Время между отказами блоков t_1 , время поиска неисправности t_2 , а так же время, потраченное на замену блока t_3 . Построить модель возникновения и устранения неисправностей в сегменте сети. Описать работу системы с позиции временных сетей Петри. Определить состояние системы через n шагов.

№	N	t_1	t_2	t_3	n
1.	20	10..20	15..30	25..30	30
2.	30	15..25	10..15	20..25	35
3.	40	10..17	15..22	15..25	40
4.	25	21..35	20..25	10..17	25
5.	35	30..40	55..70	20..40	35
6.	45	21..35	12..35	17..25	40
7.	22	15..45	55..70	35..70	35
8.	33	15..25	10..15	20..25	35
9.	44	30..40	55..70	20..40	40
10.	20	10..17	15..22	15..25	45
11.	25	21..35	20..25	10..17	25
12.	35	30..40	55..70	20..40	35
13.	40	15..25	10..15	20..25	40
14.	25	21..35	12..35	17..25	45
15.	30	15..45	55..70	35..70	35

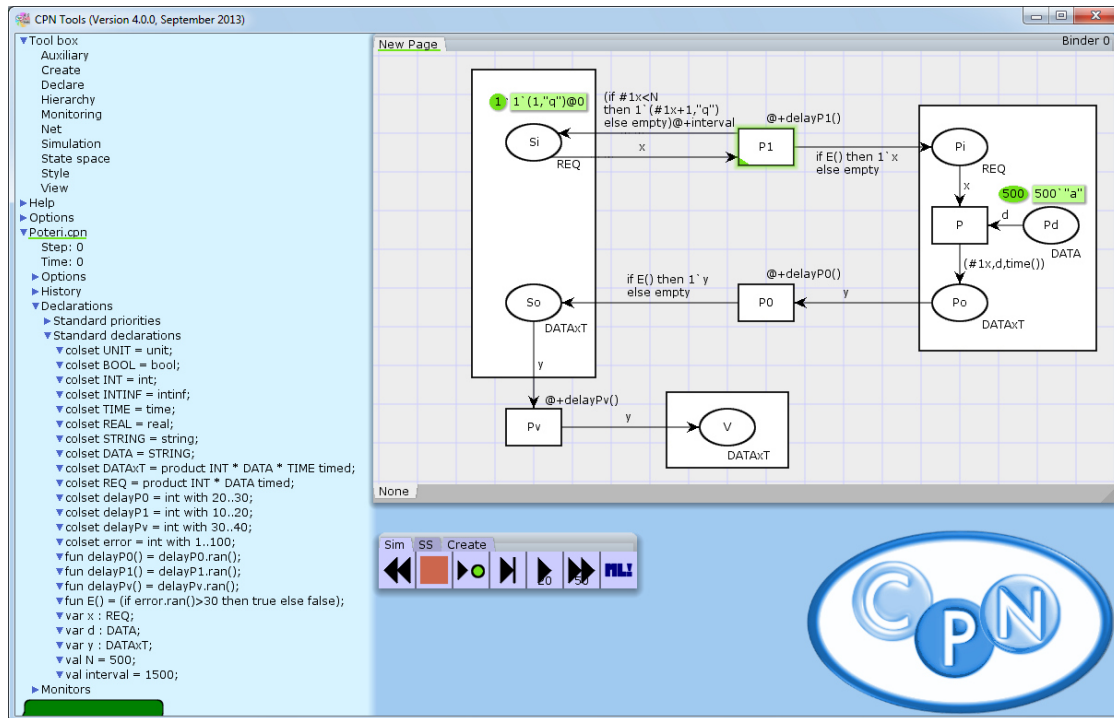
№	N	t_1	t_2	t_3	n
16.	30	10..17	15..22	15..25	40
17.	25	15..45	55..70	35..70	35
18.	20	15..25	10..15	20..25	30
19.	22	21..35	20..25	10..17	25
20.	25	10..17	15..22	15..25	20
21.	30	30..40	55..70	20..40	35
22.	35	15..25	10..15	20..25	40
23.	30	21..35	12..35	17..25	35
24.	30	21..35	20..25	10..17	25
25.	25	15..45	55..70	35..70	20
26.	30	15..25	10..15	20..25	40
27.	40	21..35	12..35	17..25	30
28.	35	10..17	15..22	15..25	35
29.	25	21..35	20..25	10..17	45
30.	20	10..20	15..30	25..30	25

Пример 7.4. Основное устройство опрашивает рабочую станцию каждые 1500 ед. времени по радиоканалу, ответ от которой поступает по выделенной проводной линии связи. Резерв сообщений от рабочей станции составляет 500 штук. Задержка запроса по радиоканалу составляет 10..20 ед. времени, задержка в проводной линии составляет 20..30 ед. времени. Ответы от рабочей станции записываются на жесткий диск в течение 30..40 ед. времени. При передаче сообщения по радиоканалу теряется до 30 % информации. Ответы от рабочей станции представляют интерес для злоумышленников, которые перехватывают до 30 % отчетов. Описать работу системы с позиции временных сетей Петри.

Решение.

Модель работы системы приведена на рисунке. При создании модели, использованы следующие множества цветов, функций и переменных:

- colset REQ = product INT * DATA timed; — пакет запроса, состоящий из данных запроса и порядкового номера, поддерживает задержку по времени;
- colset DATA = STRING; — пакет данных;
- colset DATAxT = product INT * DATA * TIME timed; — пакет отчета, состоящий из порядкового номера, данных и временной метки, поддерживает задержку по времени;
- colset delayP0 = int with 20..30;
- colset delayP1 = int with 10..20;
- colset delayPv = int with 30..40;
- colset error = int with 1..100;
- fun delayP0() = delayP0.ran();
- fun delayP1() = delayP1.ran();
- fun delayPv() = delayPv.ran();
- fun E() = (if error.ran()>30 then true else false); — функция, возвращающая вероятность события;
- var x : REQ;
- var d : DATA;
- var y : DATAxT;
- val N = 500;
- val interval = 1500;



Также использованы условия переходов:

- $(\text{if } \#1x < N \text{ then } 1'(\#1x+1, "q") \text{ else empty})@+\text{interval}$ — сформировать новый запрос со смещением на interval при условии, что количество посланных запросов меньше N;
- $\text{if } E() \text{ then } 1'y \text{ else empty}$ — пакет данных будет передан, если он не был перехвачен злоумышленниками.

Задача 7.3. Рабочая станция на базе планшетного компьютера связана с сервером регионального ОВД по сетям мобильной связи (3G или 4G) и работает в сегменте сети. Сервер осуществляет выход в сеть для связи с серверами хранения и обработки данных по проводной линии. При реализации данной схемы связи утечка информации может происходить:

- по каналам мобильной связи до сервера регионального ОВД;
- по каналам передачи данных между региональными серверами и серверами хранения информации.

Связь рабочей станции с сервером регионального ОВД через передающую антенну осуществляется на частоте f ГГц, при этом задержка при передаче сигнала составляет t сек.

Вероятность утечки информации по мобильной связи к утечке по проводной линии связи соотносится как $n_1 : n_2$.

Описать работу системы с позиции временных сетей Петри.

Осуществить 20 прогонов модели по передаче 50 пакетов данных. Определить:

- среднее количество потерянных пакетов с данными;
- оценить вероятность потери пакета с данными;
- среднее время, потраченное системой для передачи сообщений;
- выдвинуть гипотезу о виде распределения времени между поступлениями ответных пакетов с данными, проверить данную гипотезу.

№ варианта	f	t	n_1	n_2
1.	2	10	2	1
2.	2,1	20	3	1
3.	1,9	30	3	2
4.	1,8	40	2	1
5.	1,95	15	3	1
6.	1,85	25	3	2
7.	2,05	35	2	1
8.	2	10	3	1
9.	2,1	20	3	2
10.	1,9	30	2	1
11.	1,8	40	3	1
12.	1,95	15	3	2
13.	1,85	25	2	1
14.	2,05	10	3	1
15.	2	20	3	2

№ варианта	f	t	n_1	n_2
16.	1,85	10	2	1
17.	2,05	20	3	1
18.	2	30	3	2
19.	2,1	40	2	1
20.	1,9	15	3	1
21.	1,8	25	3	2
22.	1,95	35	2	1
23.	1,85	10	3	1
24.	2,05	20	3	2
25.	1,85	30	2	1
26.	2,05	40	3	1
27.	2	15	3	2
28.	2,1	25	2	1
29.	1,9	35	3	1
30.	1,8	40	3	2

7.2. Моделирование угроз безопасности информации, связанных с сетевыми атаками

Пример 7.5. Запросы от рабочих станций локальной сети поступают на два сервера, причем на первый сервер поступает не более 20 % обращений от общего числа запросов. Построить модель распределения запросов между серверами в среде CPN Tools. Дополнить модель измерительными фрагментами для определения значений частот (вероятности) обращения к каждому серверу.

Решение.

Состояние $s0$ является входным перед распределением запросов по серверам $s1$ и $s2$. При наличии фишки (запроса) в состоянии $s0$ переход $p0$ может сработать. Для распределения запросов по серверам с указанными вероятностями на стрелках, соединяющие переход $p0$ с соответствующими состояниями $s1$ и $s2$, указаны условия, по которым метка перейдет в одно из указанных состояний. Условия переходов должны быть на каждой стрелке. В противном случае, если условия на стрелке нет, то фишка однозначно перейдет по данной стрелке, даже если должно быть выполнено противоположное действие.

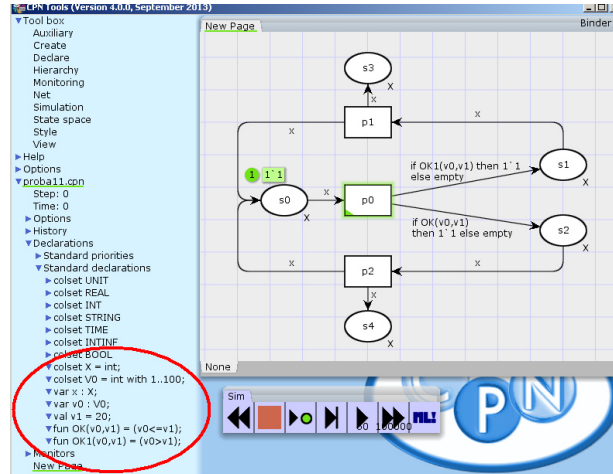
Для подсчета количества запросов (фишек), прошедших через серверы (состояния) $s1$ и $s2$ построены связки $p1 \rightarrow s3$ и $p2 \rightarrow s4$. Безостановочную работу модели обеспечивает цикл, возвращающий метки в состояние $s0$.

При создании модели, использованы следующие множества цветов, функций и переменных:

- colset $X = \text{int}$;
- colset $V0 = \text{int}$ with 1..100;
- var $x : X$;
- var $v0 : V0$;
- val $v1 = 20$;
- fun $OK(v0, v1) = (v0 \leq v1)$;

– fun OK1(v0,v1) = (v0>v1);

Из множества V0 случайным образом выбирается значение. Данное значение определяет вероятность направления запроса к первому или второму серверу. Постоянная v1 характеризует границу распределения запросов по серверам согласно условию. Функции OK(v0,v1) и OK1(v0,v1) сравнивают выбранное значение v0 из множества V0 с константой v1 и направляют запрос (метку) по одной из стрелок.



Проверим полученную модель на адекватность. Сделаем необходимое количество шагов, в результате которых, суммарное количество фишек в состояниях s3 и s4 составит 50: в состояние s3 пришло 11 фишек; в состояние s4 — 39. Тогда, частоту появления фишек в состоянии s3 определим как

$$p = \frac{11}{50} = 0.22.$$

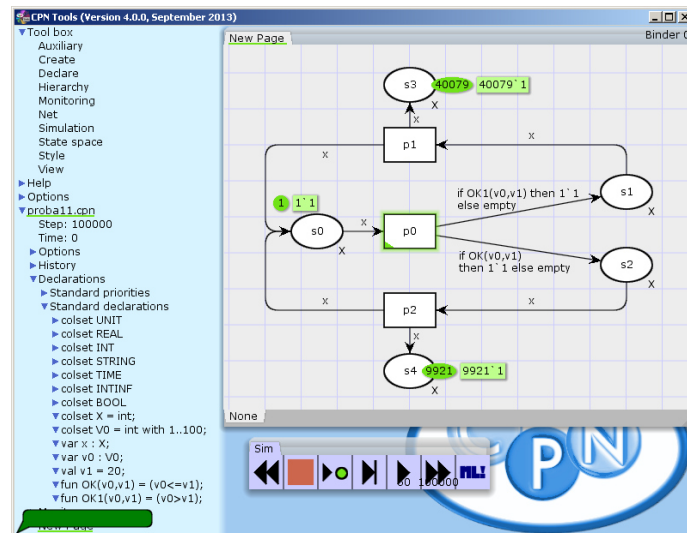
Определим необходимое количество прогонов модели для определения вероятности появления события с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.99$.

$$N = \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \frac{0.22 \cdot (1-0.22)}{0.01^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{0.99}{2} \right) \right]^2 =$$

$$= \frac{0.22 \cdot (1-0.22)}{0.01^2} \cdot 2.58^2 \approx 11422.3824.$$

Округляем полученное значение в большую сторону и получаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятности прихода запросов на серверы: $N = 11423$.

Прогоняем модель таким образом, чтобы суммарное количество фишек в состояниях s3 и s4 было не меньше 11423.



Имеем суммарное количество фишек 50000, причем в состоянии $s4$ — 9921. Тогда искомая вероятность

$$p = \frac{9921}{50000} = 0.19842 \approx 0.2.$$

Таким образом, получили результат, заданный по условию. Следовательно, полученная нами модель адекватна.

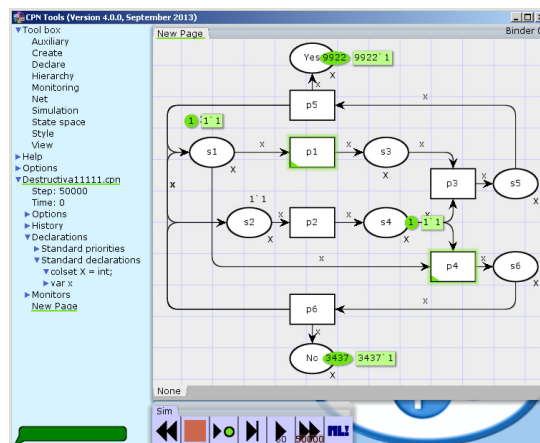
Наряду с функцией, условие перехода по стрелке можно задать как `if (v0<=v1) then 1`1 else empty`.

Пример 7.6. Построить модель реализации угрозы физического проникновения в помещение с компьютером и выполнения деструктивного действия (кражи, уничтожения, разрушения и др.). Определить вероятность выполнения нарушителем деструктивного действия.

Решение.

Предлагается следующая модель динамики реализации заданной угрозы. Графическое представление с использованием сетей Петри имеет вид.

Пусть в помещении, в которое пытается проникнуть злоумышленник, находится персонал ($s1$), который может покинуть помещение ($s3$). Так же нарушитель ($s2$) готов выполнить деструктивное действие ($s4$). Если персонал покинул помещение, а нарушитель проник в данное помещение, то он выполняет деструктивное действие ($s5$). В противном случае происходит срыв попытки выполнить деструктивное действие ($s6$).



При создании модели, использованы следующие множества цветов, функций и переменных:

– colset $X = \text{int}$;

– var $x : X$;

В модели состояния и переходы соответствуют следующим действиям:

– $s1$ — в помещении присутствует персонал;

– $p1$ — персонал покидает помещение;

– $s3$ — персонал покинул помещение;

– $s2$ — нарушитель приготовился проникнуть в помещение;

– $p2$ — нарушитель проникает в помещение;

– $s4$ — нарушитель проник в помещение;

– $p3$ — нарушитель выполняет деструктивное действие;

– $s5$ — нарушитель выполнил деструктивное действие;

– $p4$ — срыв попытки выполнить деструктивное действие из-за того, что персонал не покинул помещение или нарушитель не смог предпринять никаких действий;

– $s6$ — персонал не покинул помещение или нарушитель не смог выполнить деструктивное действие;

– $p5$ и $p6$ — возвращают фишки в исходное состояние;

– Yes и No — накапливают фишки, число которых соответствует количеству выполнения нарушителем деструктивных действий или нет соответственно.

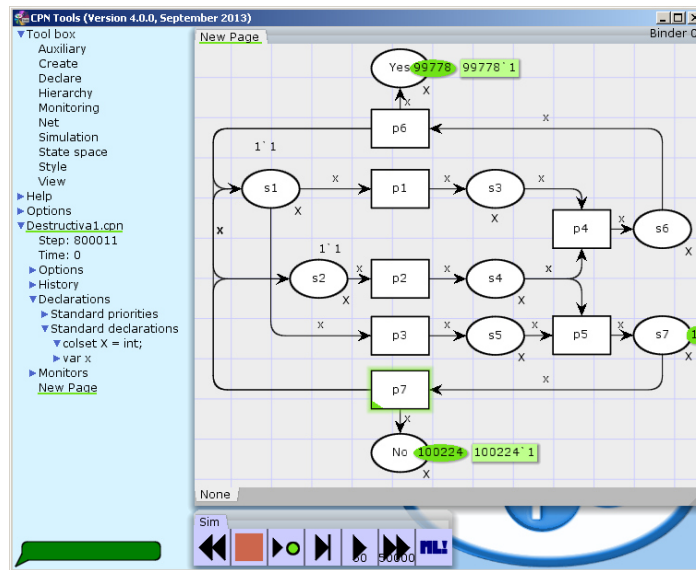
В начальный момент времени фишки находятся в состояниях $s1$ и $s2$.

После 50000 шагов в состояниях «Yes» и «No» находится 9922 и 3437 фишек соответственно. Таким образом, частоту того, что нарушитель не смог выполнить деструктивное действие определим как

$$\frac{3437}{3437 + 9922} \approx 0,257.$$

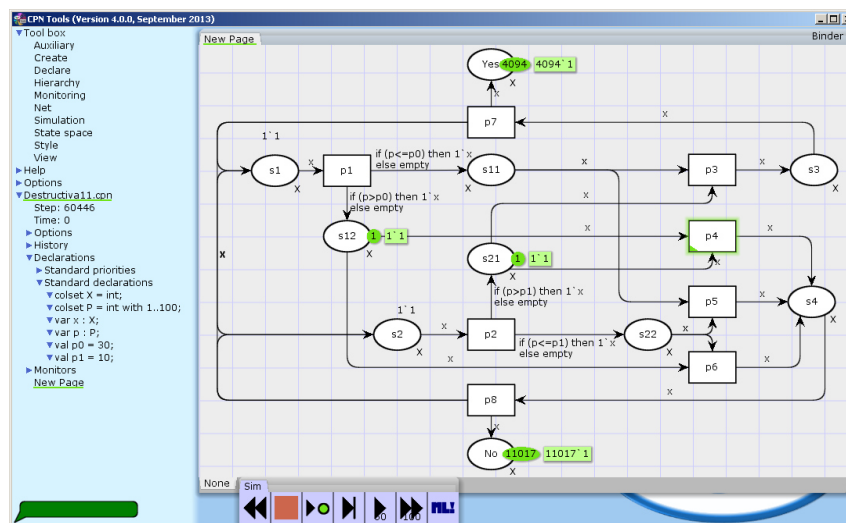
В данной модели сработать первым может как переход $p1$, так и $p2$. Если первым сработает переход $p1$, то после срабатывания перехода $p2$ фишка однозначно переместиться в состояние $s5$. Если первым сработает переход $p2$, то переходы $p1$ и $p4$ могут сработать равновероятно и фишка может переместиться как в состояние $s5$, так и в $s6$. Данный факт объясняет значение полученной вероятности ($\frac{1}{4}$).

Для того чтобы фишки равновероятно попадали в состояния $s5$ и $s6$ модель должна быть дополнена. В данном случае, первым может сработать любой из переходов $p1$, $p2$ и $p3$, при этом фишка из состояния $s1$ может быть направлена как в состояние $s3$, так и в состояние $s4$. Таким образом, получаем одинаковое количество фишек в состояниях «Yes» и «No».



Рассмотрим модель реализации угрозы физического проникновения в помещение с компьютером и выполнения деструктивного действия (кражи, уничтожения, разрушения и др.) при следующих условиях. Пусть персонал может покинуть помещение с вероятностью, не превышающей 0,7, а нарушитель готов выполнить деструктивное действие с вероятностью, большей 0,1.

Модель возможности выполнения нарушителем деструктивных действий при введенных условиях в CPN Tools будет иметь вид.



Пусть в помещении, в которое пытается проникнуть злоумышленник, находится персонал ($s1$), который может покинуть помещение с заданной вероятностью ($s11$ или $s12$). Так же нарушитель ($s2$) готов выполнить деструктивное действие с заданной вероятностью ($s21$ или $s22$). Если персонал покинул помещение, а нарушитель проник в данное помещение, то он выполняет деструктивное действие ($s3$). В противном случае происходит срыв попытки выполнить деструктивное действие ($s4$).

В модели, использованы следующие множества цветов и переменных:

- colset $X = \text{int}$;
- colset $P = \text{int with } 1..100$; — задает значение вероятности в процентах;
- var $x : X$;
- var $p : P$;

– val $p_0 = 30$; — граничное значение вероятности покидания помещения персоналом;

– val $p_1 = 10$; — граничное значение вероятности готовности выполнения нарушителем деструктивных действий;

Для направления фишки к переходам используется условие вида

if ($p \leq p_0$) then 1`x else empty.

При работе модели случайным образом выбирается число из множества значений P , которое сравнивается с константами p_0 или p_1 и в результате фишка направляется к тому или иному переходу.

Состояния «Yes» и «No» — накапливают фишки, число которых соответствует количеству выполнения нарушителем деструктивных действий или нет соответственно.

Определим необходимое количество прогонов модели для определения вероятности появления события с точностью $\varepsilon = 0.01$ и достоверностью $Q = 0.99$.

Сделаем необходимое количество шагов, в результате которых, суммарное количество фишек в состояниях «Yes» и «No» составит 50: в состояние «Yes» пришло 15 фишек; в состояние «No» — 35. Тогда, частоту появления фишек в состоянии «Yes» определим как

$$p = \frac{15}{50} = 0,3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} N &= \frac{p \cdot (1 - p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \frac{0,3 \cdot (1 - 0,3)}{0,01^2} \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{0,99}{2} \right) \right]^2 = \\ &= \frac{0,3 \cdot (1 - 0,3)}{0,01^2} \cdot 2,58^2 = 13978,44. \end{aligned}$$

Округляем полученное значение в большую сторону и получаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятности совершения деструктивных действий нарушителем при заданных входных значениях: $N = 13979$.

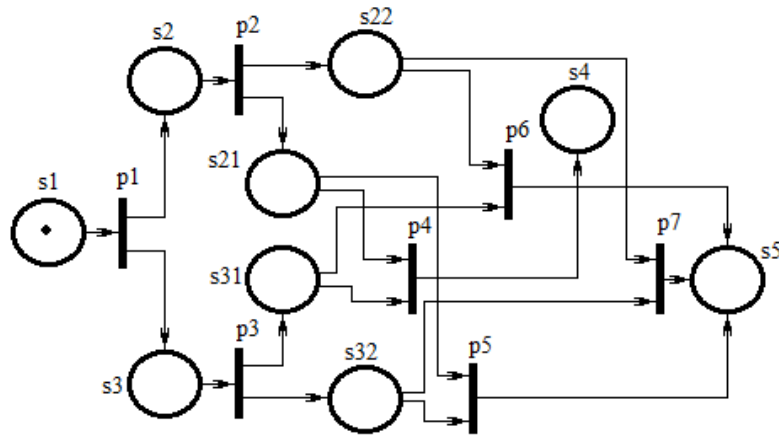
Прогоняем модель таким образом, чтобы суммарное количество фишек в состояниях «Yes» и «No» было не меньше 13979.

Имеем суммарное количество фишек 15111, причем в состоянии «Yes» — 4094. Тогда искомая вероятность

$$p = \frac{4094}{15111} \approx 0.27.$$

Задача 7.4. Построить модель реализации угрозы безопасности информации, связанной с сетевой атакой, с использованием сетей Петри в CPN Tools. Определить вероятность выполнения деструктивного действия.

Анализ сетевого трафика (sniffing). Пусть имеется источник угрозы (s_1) и появляются условия для атаки (p_1). Атакуемый хост включился в сеть общего пользования (s_2) и устанавливает TCP-соединение (p_2). При установлении TCP-соединения может произойти срыв с вероятностью p_1 (s_{21} или s_{22}). Так же злоумышленник включается в сеть общего пользования (s_3) и пытается получить доступ к серверу, через который проходит трафик атакуемого хоста (p_3), что ему удастся с вероятностью p_2 (s_{31} или s_{32}). В результате, злоумышленник получает имя пользователя и пароль (s_4) или атака сорвана (s_5). Если на любом этапе происходит сбой, то это приводит к завершению атаки (p_5 , p_6 , p_7).



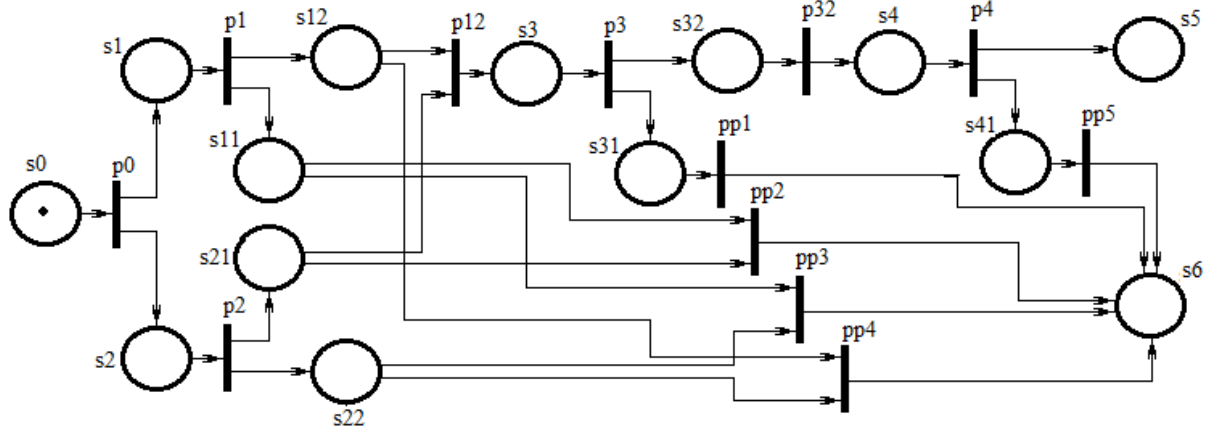
№ варианта	p_1	p_2
1.	0,1	0,4
2.	0,15	0,35
3.	0,12	0,45
4.	0,09	0,37
5.	0,07	0,43
6.	0,1	0,44
7.	0,2	0,35
8.	0,14	0,31
9.	0,16	0,42
10.	0,15	0,4
11.	0,12	0,32
12.	0,1	0,45
13.	0,15	0,35
14.	0,17	0,37
15.	0,14	0,3

№ варианта	p_1	p_2
16.	0,12	0,39
17.	0,14	0,4
18.	0,15	0,35
19.	0,09	0,33
20.	0,2	0,45
21.	0,17	0,4
22.	0,15	0,37
23.	0,19	0,33
24.	0,11	0,3
25.	0,1	0,43
26.	0,2	0,35
27.	0,15	0,45
28.	0,17	0,4
29.	0,2	0,37
30.	0,1	0,3

Задача 7.5. Построить модель реализации угрозы безопасности информации, связанной с сетевой атакой, с использованием сетей Петри в CPN Tools. Определить вероятность выполнения деструктивного действия.

Анализ сетевого трафика (sniffing). Пусть имеется источник угрозы (s_0) и появляются условия для атаки (p_0). Атакуемый хост включился в сеть общего пользования (s_1) и устанавливает TCP-соединение (p_1). При установлении TCP-соединения может произойти срыв с вероятностью p_1 (s_{11} или s_{12}). Так же злоумышленник включается в сеть общего пользования (s_2) и пытается получить доступ к серверу, через который проходит трафик атакуемого хоста (p_2), что ему удастся с вероятностью p_2 (s_{21} или s_{22}). Если атакуемый хост установил TCP-соединение и начал обмен данными (s_{12}), и злоумышленник получил доступ к серверу (хосту), через который проходит трафик атакуемого хоста (s_{21}), то злоумышленник перехватывает зашифрованный трафик (s_3). На данном этапе может произойти срыв атаки с вероятностью p_3 (s_{31} или s_{32}). Если же этого не произошло, то злоумышленник завершает криптоанализ (s_4), что так же может закончиться для него неудачей с вероятностью p_4 (s_{41}). В результате, злоумышленник или расшифрует пакеты сообщений и проведет анализ

трафика атакуемого хоста (s_5) или атака будет сорвана (s_6). Если на любом этапе происходит сбой, то это приводит к завершению атаки ($pp_1, pp_2, pp_3, pp_4, pp_5$).



№ варианта	p_1	p_2	p_3	p_4
1.	0,15	0,3	0,2	0,25
2.	0,1	0,25	0,15	0,2
3.	0,12	0,35	0,25	0,3
4.	0,15	0,27	0,22	0,21
5.	0,11	0,33	0,17	0,29
6.	0,12	0,28	0,21	0,22
7.	0,14	0,35	0,24	0,28
8.	0,11	0,31	0,19	0,27
9.	0,15	0,27	0,17	0,23
10.	0,1	0,29	0,24	0,26
11.	0,14	0,22	0,22	0,24
12.	0,12	0,31	0,25	0,25
13.	0,15	0,3	0,2	0,25
14.	0,1	0,34	0,27	0,21
15.	0,12	0,28	0,33	0,23

№ варианта	p_1	p_2	p_3	p_4
16.	0,14	0,25	0,15	0,2
17.	0,12	0,35	0,25	0,3
18.	0,15	0,27	0,22	0,21
19.	0,1	0,33	0,17	0,29
20.	0,14	0,27	0,22	0,21
21.	0,12	0,33	0,17	0,29
22.	0,14	0,28	0,21	0,22
23.	0,1	0,3	0,2	0,25
24.	0,14	0,34	0,27	0,21
25.	0,11	0,28	0,33	0,23
26.	0,1	0,25	0,15	0,2
27.	0,15	0,35	0,25	0,3
28.	0,11	0,27	0,22	0,21
29.	0,1	0,33	0,17	0,29
30.	0,15	0,28	0,21	0,22

Задача 7.6. Построить модель реализации угрозы безопасности информации, связанной с сетевой атакой, с использованием сетей Петри в CPN Tools. Определить вероятность выполнения деструктивного действия.

Подмена доверенного объекта (IP-spoofing). Пусть злоумышленник включился в сеть общего пользования (s_0) и готовится к проведению атаки (p_0). Для проведения атаки злоумышленнику необходимо:

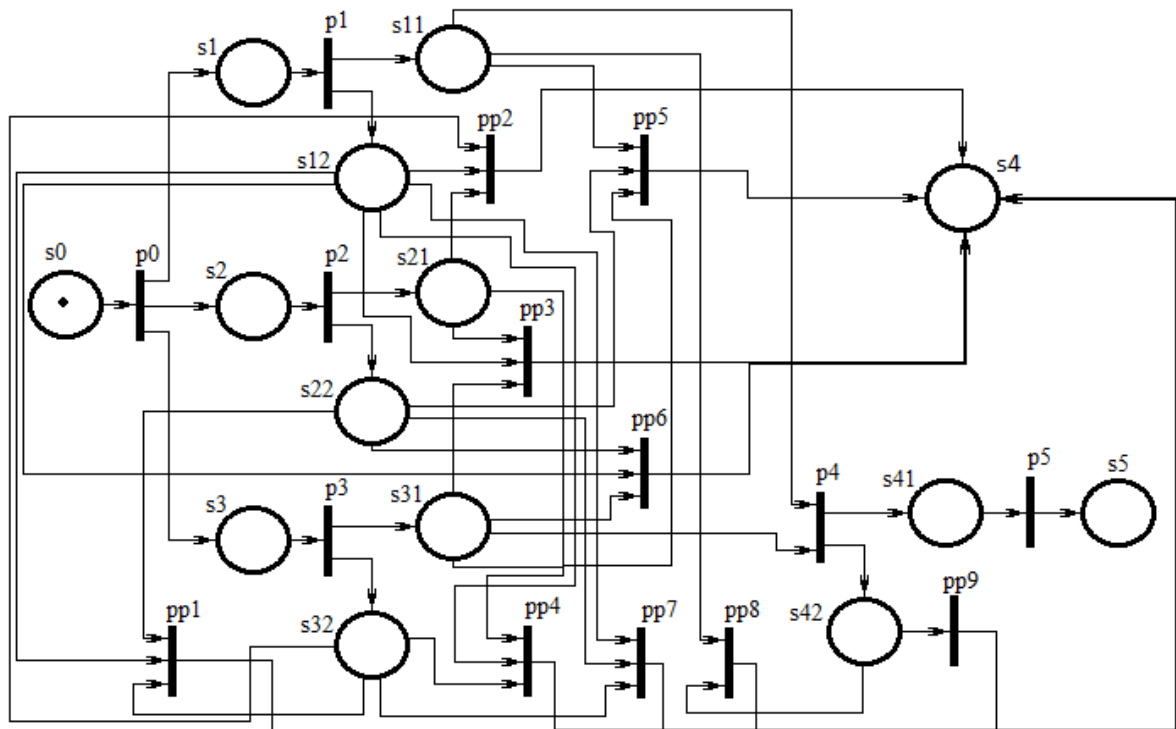
– Подготовиться к проведению «шторма ТСР-запросов» на хост доверенного пользователя (s_1, p_1). Далее, с вероятностью p_1 , хост доверенного пользователя атакован «штормом ТСР-запросов» для подавления доверенного сервера (блокирование хоста доверенного пользователя) (s_{11}) или происходит сбой (s_{12}).

– Подготовиться к подбору номера ответного пакета и порта взаимодействия хоста доверенного пользователя (s_2, p_2). Далее, с вероятностью p_2 , злоумышленник выявляет порт взаимодействия и номер пакета подтверждения соединения (s_{21}) или происходит срыв атаки (s_{22}).

– Подготовиться к организации связи с атакуемым хостом ($s3$, $p3$). Далее, с вероятностью p_3 , атакуемый хост получает TCP-запрос ($s31$) или происходит срыв атаки ($s32$).

Если злоумышленник атаковал хост доверенного пользователя «штормом TCP-запросов» ($s11$) и атакуемый хост получил TCP-запрос ($s31$), то это создает условия для установления соединения с атакуемым хостом ($p4$). Далее, с вероятностью p_4 , происходит установление TCP соединения с атакуемым хостом от имени доверенного объекта ($s41$) или произойдет срыв атаки ($s42$).

В случае если срыва атаки на всех этапах не произошло, злоумышленник получает права доверенного пользователя и осуществляет несанкционированный доступ к защищаемой информации ($p5$), в результате осуществлен несанкционированный доступ (НСД) к атакуемому хосту от имени доверенного пользователя ($s5$). Если на любом этапе происходит сбой, то это приводит к завершению атаки ($s4$) из-за блокировки хоста доверенного пользователя, отправки от имени доверенного объекта на атакуемый хост ответа S-SYN и S-ASK на установку соединения или др. ($pp1$, $pp2$, $pp3$, $pp4$, $pp5$).



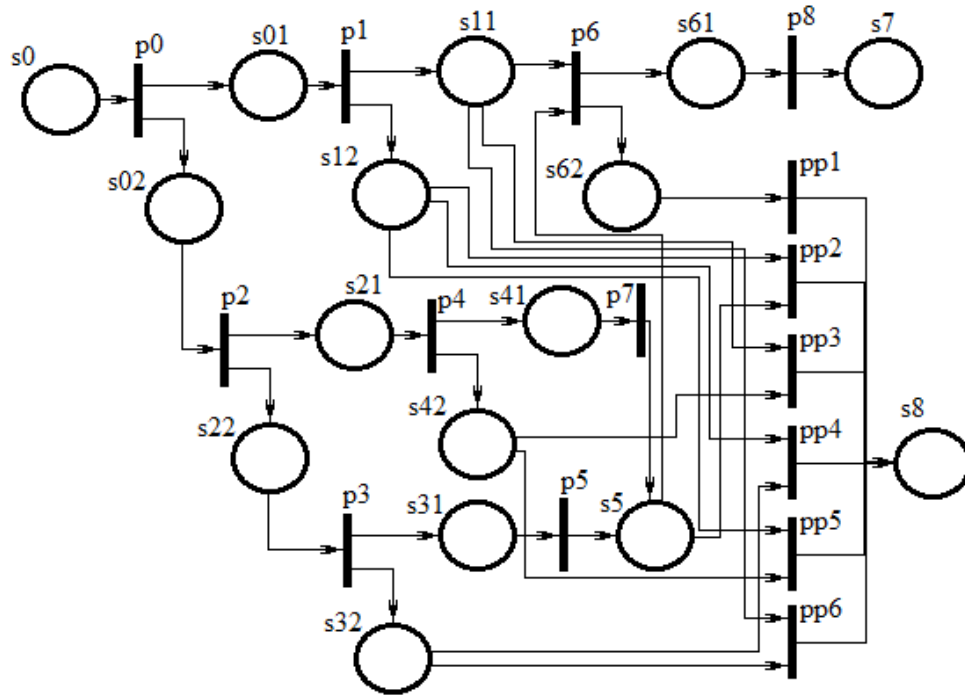
№ варианта	p_1	p_2	p_3	p_4
1.	0,9	0,85	0,8	0,88
2.	0,85	0,8	0,9	0,85
3.	0,95	0,9	0,8	0,95
4.	0,86	0,89	0,82	0,94
5.	0,94	0,81	0,91	0,93
6.	0,87	0,88	0,88	0,89
7.	0,93	0,82	0,85	0,95
8.	0,88	0,87	0,83	0,94
9.	0,92	0,83	0,87	0,9
10.	0,89	0,86	0,92	0,89
11.	0,91	0,82	0,9	0,93
12.	0,9	0,85	0,89	0,95
13.	0,9	0,87	0,94	0,91
14.	0,91	0,83	0,95	0,89
15.	0,87	0,8	0,9	0,9

№ варианта	p_1	p_2	p_3	p_4
16.	0,89	0,9	0,8	0,95
17.	0,88	0,89	0,82	0,94
18.	0,92	0,81	0,91	0,93
19.	0,93	0,82	0,9	0,93
20.	0,85	0,85	0,89	0,95
21.	0,93	0,87	0,94	0,91
22.	0,95	0,82	0,85	0,95
23.	0,9	0,87	0,83	0,94
24.	0,87	0,83	0,87	0,9
25.	0,92	0,86	0,92	0,89
26.	0,91	0,9	0,8	0,95
27.	0,89	0,89	0,82	0,94
28.	0,95	0,81	0,91	0,93
29.	0,87	0,88	0,88	0,89
30.	0,9	0,87	0,86	0,9

Задача 7.7. Построить модель реализации угрозы безопасности информации, связанной с сетевой атакой, с использованием сетей Петри в CPN Tools. Определить вероятность выполнения деструктивного действия.

Парольная атака на хост сети. Пусть злоумышленник включился в сеть общего пользования (s_0) и хост запросил пароль у абонента (p_0). Абонентом произведен ввод пароля (s_{01} , p_1). Неправильный ввод пароля происходит с вероятностью p_1 (s_{12}). Злоумышленник, не зная пароль, решает подобрать его (s_{02} , p_2) по специальному словарю (s_{21} , p_4) или путем прямого набора (s_{22} , p_3), причем выбор варианта подбора пароля по специальному словарю происходит с вероятностью p_2 . Подбор правильного пароля по словарю происходит с вероятностью p_3 (s_{41} , p_7), а путем прямого набора – p_4 (s_{31} , p_5). В случае если пароль подобран правильно (s_5) происходит несанкционированный доступ (НСД) к хосту (p_6), причем на данном этапе может произойти срыв атаки с вероятностью p_5 . В случае удачной атаки НСД к хосту осуществлен (s_7).

Если на любом этапе происходит сбой, то это приводит к завершению атаки (s_8). Состояния pp_1 , pp_2 , pp_3 , pp_4 , pp_5 , pp_6 — вспомогательные.



№ варианта	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1.	0,05	0,7	0,75	0,6	0,05
2.	0,04	0,8	0,85	0,7	0,05
3.	0,03	0,75	0,77	0,65	0,04
4.	0,05	0,77	0,82	0,67	0,03
5.	0,03	0,74	0,83	0,68	0,02
6.	0,04	0,76	0,78	0,69	0,04
7.	0,05	0,78	0,81	0,63	0,03
8.	0,02	0,72	0,79	0,61	0,02
9.	0,03	0,73	0,8	0,62	0,04
10.	0,05	0,75	0,82	0,63	0,05
11.	0,04	0,77	0,73	0,65	0,02
12.	0,02	0,71	0,75	0,69	0,03
13.	0,03	0,72	0,83	0,67	0,04
14.	0,04	0,74	0,82	0,7	0,05
15.	0,03	0,75	0,85	0,6	0,03

№ варианта	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
16.	0,03	0,8	0,85	0,7	0,05
17.	0,04	0,7	0,75	0,6	0,03
18.	0,05	0,75	0,76	0,67	0,04
19.	0,02	0,74	0,77	0,68	0,02
20.	0,03	0,77	0,79	0,69	0,03
21.	0,05	0,73	0,81	0,65	0,04
22.	0,03	0,73	0,82	0,68	0,05
23.	0,04	0,72	0,83	0,69	0,03
24.	0,05	0,75	0,84	0,65	0,02
25.	0,02	0,78	0,85	0,68	0,03
26.	0,03	0,79	0,75	0,69	0,04
27.	0,04	0,8	0,77	0,65	0,05
28.	0,05	0,78	0,79	0,69	0,04
29.	0,02	0,7	0,75	0,63	0,03
30.	0,04	0,71	0,81	0,65	0,02

7.3. Системы множественного доступа

При передаче информации используются различные каналы связи, которые одновременно могут использовать несколько абонентов. Поэтому возникает понятие «множественного доступа» – совместное использование ограниченного канала (ресурса) несколькими пользователями. Канал связи обладает двумя характеристиками: ширина частотного спектра, занимаемого каналом, и время его использования.

Существует четыре вида множественного доступа.

1. Множественный доступ с частотным разделением, FDMA (Frequency Division Multiple-Access). Каждому абоненту выделяется свой частотный канал Δf (полоса частот). Недостаток — недостаточно эффективное использование полосы частот.

2. Множественный доступ с разделением по длине волны, WDM (Wavelength-Division Multiplexing). Данный метод так же называют волновым мультиплексированием или спектральным уплотнением. Передаются одновременно несколько информационных каналов по одному оптическому волокну на разных несущих частотах. Данная технология позволяет увеличить пропускную способность канала, а также организовать двустороннюю многоканальную передачу трафика по одному волокну. Преимущества — возможность передачи высокоскоростного сигнала на сверхдальние расстояния без промежуточных усилителей. Недостаток — недостаточно эффективное использование полосы частот.

3. Множественный доступ с временным разделением, TDMA (Time Division Multiple-Access). В данном методе каждый частотный канал разделяется во времени между несколькими пользователями, т. е. каждый пользователь использует полосу частот определенный промежуток времени (несколько временных слотов). Наиболее широко применяется в компьютерных сетях и мобильных сетях стандарта GSM. Может быть реализован только в цифровой форме.

4. Множественный доступ с кодовым разделением, CDMA (Code Division Multiple-Access). Группа пользователей одновременно использует общую полосу частот, где каждому пользователю присваивается отдельный код, который распространяется по всей ширине полосы. Расширение спектра происходит за счет модуляции псевдослучайной последовательности в сочетании с кодовым разделением физических каналов.

К системам множественного доступа так же можно отнести системы массового обслуживания с конечным числом очередей.

В теории систем массового обслуживания с конечным числом очередей (каналов) выделяют **системы поллинга** (системы упорядоченного опроса). Различают системы поллинга в которых:

- заявки поступают по каналам к нескольким обслуживающим приборам (серверам), причем заявки сами выбирают, на каком приборе они хотят получить обслуживание;
- заявки поступают по каналам к одному (нескольким) обслуживающему прибору (серверу), который по определенному правилу обходит каналы и обслуживает находящиеся в них заявки.

В зависимости от числа каналов системы поллинга бывают дискретными (число каналов счетно) и непрерывными (число каналов более чем счетно). Дискретные системы характеризуются числом каналов, количеством мест в очереди каждого канала, числом обслуживающих приборов, входящим потоком, длительностью переключения между обслуживающими приборами, порядком и дисциплиной обслуживания.

Под порядком обслуживания будем понимать правило, согласно которого прибор (сервер) выбирает следующий канал с очередью для обслуживания. Если правило в течении всего времени работы системы не меняется — статический порядок. Если выбор канала на обслуживание происходит в определенные моменты времени в зависимости от состояния системы — статический порядок.

Виды статистического порядка:

1. Циклический порядок — прибор обращается к каждому каналу по очереди от первого до последнего, при этом каждому каналу присваивается порядковый номер.
2. Периодический порядок — прибор обращается к каждому каналу по некоторому заданному закону, например 1, 3, 2, 1, 1 и т. д.

3. Случайный порядок — обслуживаемый канал выбирается с некоторой вероятностью.

4. Приоритетный порядок — система имеет каналы с разными приоритетами и заявка из очереди будет обслужена, если нет заявок в канале с большим приоритетом.

Под дисциплиной обслуживания канала будем понимать число заявок, обслуживаемых прибором за одно посещение канала (очереди). Внутри канала заявки обслуживаются согласно дисциплиной обслуживания заявок (как правило, в порядке поступления в очередь).

Примеры дисциплин обслуживания канала:

– прибор обслуживает заявки в канале до тех пор, пока очередь в данном канале не опустеет – исчерпывающая дисциплина;

– прибор обслуживает лишь те заявки, которые находились в канале на момент подключения к нему прибора – шлюзовая дисциплина;

– прибор обслуживает количество заявок в канале, ограниченное некоторым числом – l_i -ограниченная дисциплина;

– прибор обслуживает заявки с максимальной очередью, далее он переключается на канал с большей очередью – l_i -уменьшающая дисциплина;

– ограничение по времени обслуживания канала.

При исследовании систем поллинга определяют среднее время нахождения заявки в каждом канале (очереди).

7.4. Маршрутизаторы, концентраторы

Большинство устройств, обслуживающих как локальную, так и глобальную сеть можно описать с позиций теории массового обслуживания. Однако входящий поток и процедура обслуживания могут иметь различные законы распределения отличные от простейшего потока. Поэтому целесообразнее для описания работы устройств сети использовать имитационные модели.

Рассмотрим некоторые устройства, обеспечивающие работу сети.

Сетевой концентратор (хаб) — простейшее устройство, обеспечивающее связь между компьютерами в рамках некоторого сегмента сети Ethernet. Процессор сетевого концентратора обладает большей производительностью по отношению к загруженности его ресурсов, поэтому для описания его работы можно использовать одноканальную модель системы массового обслуживания с одним обслуживающим прибором и бесконечной очередью.

Для параллельной обработки входного потока в одном устройстве применяется локальный коммутатор. В данных устройствах, как правило, происходит переполнение буфера памяти сетевой карты из-за большой загруженности, вследствие чего происходят потери пакетов данных. Работу устройств данного типа можно описать многоканальной системой массового обслуживания с ограничением на длину очереди.

Маршрутизатор (роутер) — специализированный сетевой компьютер, который получает, обрабатывает и пересылает пакеты данных между различными сегментами сети. Маршрутизатор может связывать разнородные сети различных архитектур. Для описания работы данного устройства можно использовать модель с несколькими различными входными потоками, а также с несколькими обслуживающими приборами.

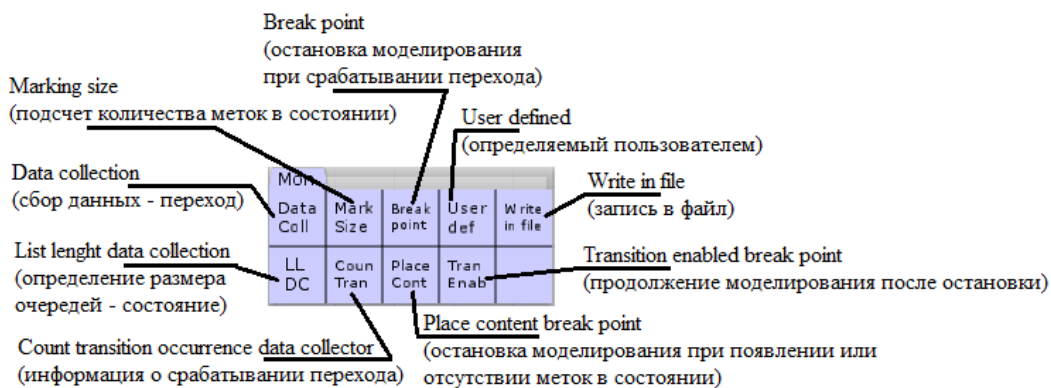
Пример 7.7. На сетевой концентратор поступают пакеты данных, образующих простейший поток с интенсивностью 0,25 пак./ед.вр. Устройство обрабатывает пакеты и передает их в сеть с интенсивностью 0,4 пак./ед.вр., причем время обработки подчинено экспоненциальному закону.

Построить модель работы устройства в CPN Tools и определить основные характеристики:

- 1) среднее время нахождения пакета данных в концентраторе;
- 2) количество пакетов в памяти концентратора;
- 3) коэффициент загрузки процессора (количество пакетов под обслуживанием).

Решение.

Для сбора статистических данных (мониторинга работы модели) воспользуемся палитрой «Monitoring».



Для работы монитора «Place Cont» необходимо установить или снять флажок в меню мониторов: Monitors → Place_content_bp_New Page'(имя состояния)_1 → Type: Place content break point → If is empty. Моделирование будет остановлено, если данный флажок установлен.

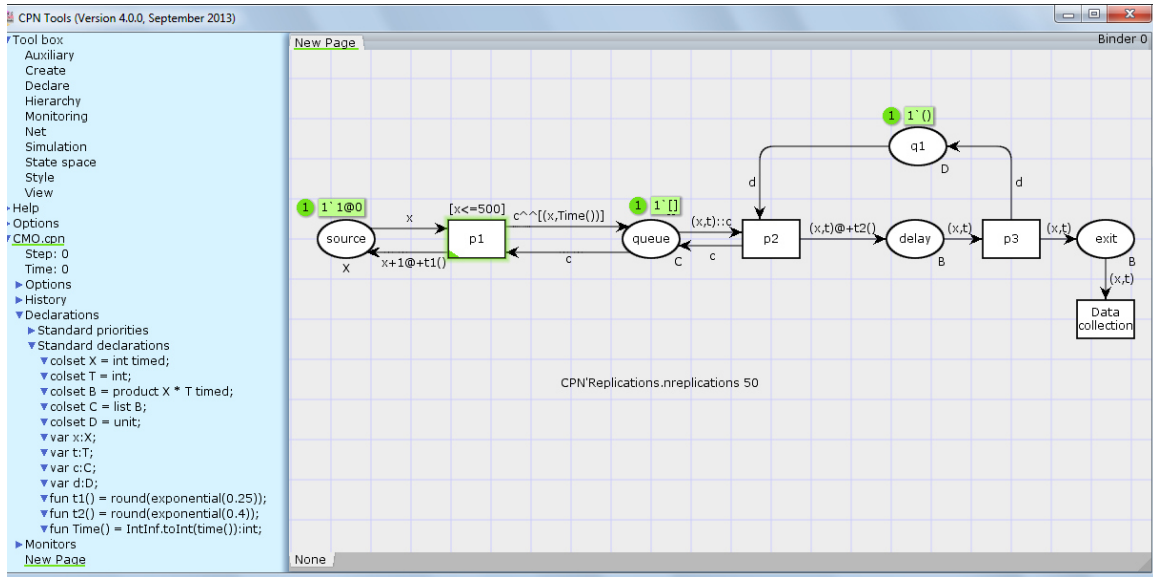
Построим модель работы сетевого концентратора.

При построении модели используем следующие множества, переменные и функции:

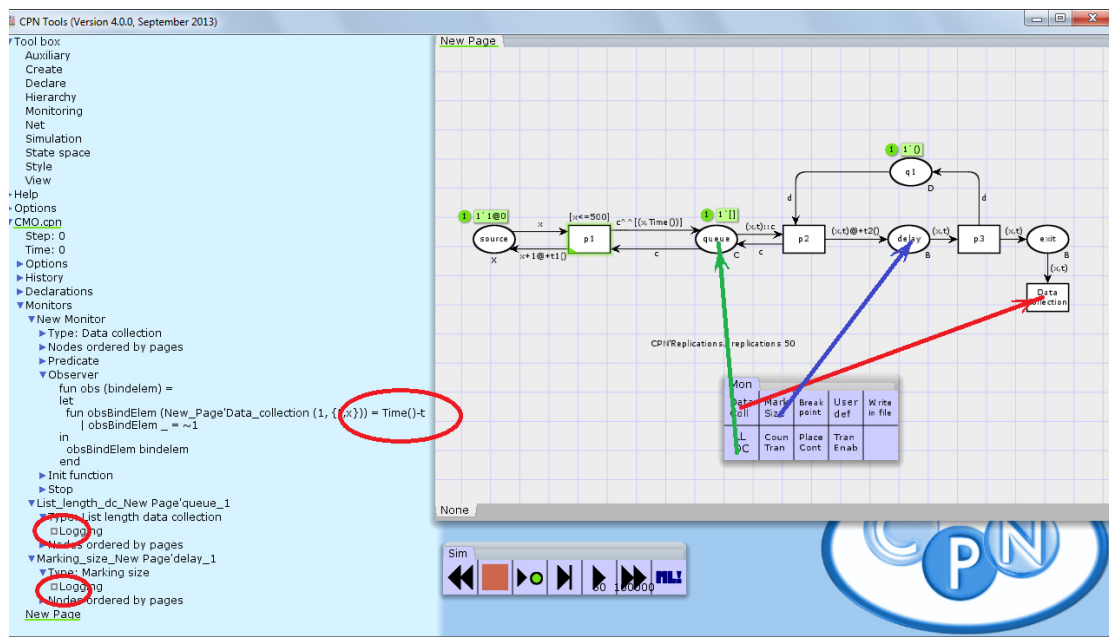
```
colset X = int timed;
colset T = int;
colset B = product X * T timed;
colset C = list B;
colset D = unit;
var x:X;
var t:T;
var c:C;
var d:D;
fun t1() = round(exponential(0.25));
fun t2() = round(exponential(0.4));
fun Time() = IntInf.toInt(time()):int;
```

В данной модели реализуется организация обслуживания FIFO (первым пришел первым обслужен). Для организации обслуживания LIFO (последним пришел первым обслужен) необходимо при формировании множества C заменить $c^{x, Time()}$ на $(x, Time())::c$.

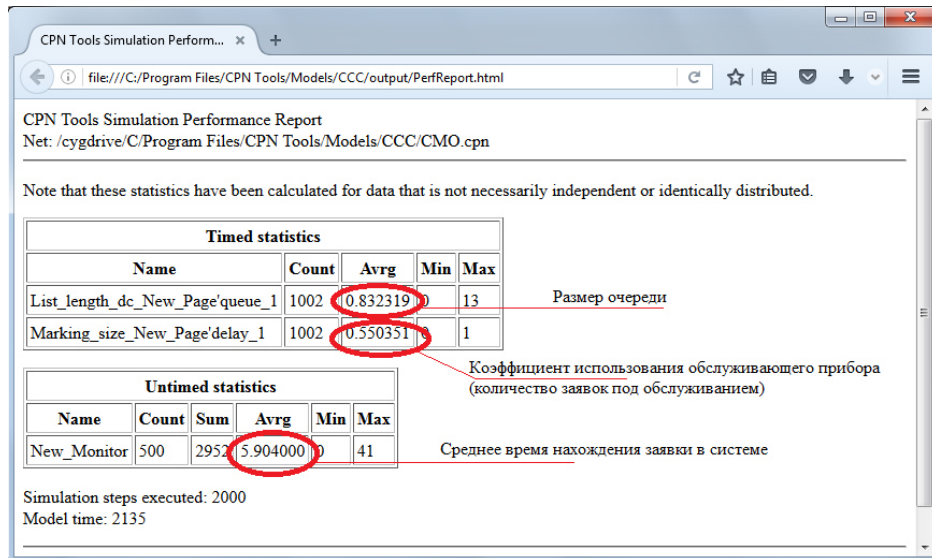
Ограничим количество входных пакетов 500.



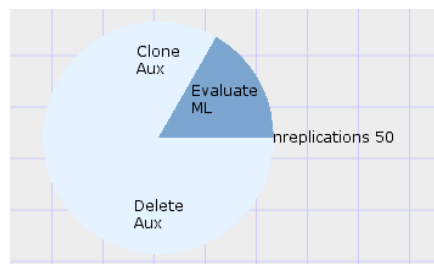
Для сбора статистических данных некоторым объектам модели присвоим необходимые функции, а также внесем изменения в свойствах «Monitors» каждого элемента сбора статистики. Для присоединения объектов сбора статистики к модели, ее (модель) необходимо сохранить.



После одного прогона модели получим файл отчета, который находится в той же папке, где хранится файл с моделью.



Для получения значений исследуемых характеристик после нескольких прогонов модели (например, 50) введем текстовое поле «CPN'Replications.nreplications 50», кликнув правой клавишей мышки в пустом месте страницы и выбрав команду «Create aux text». Запустим модель, кликнув правой клавишей мышки по введенной надписи и выбрав соответствующую команду.



В результате получим значения изучаемых характеристик после необходимого количества прогонов модели.

CPN Tools Simulation Perform... CPN Tools Performance Report

file:///C:/Program Files/CPN Tools/Models/CCC/output/rep8/PerfReportIID.html

CPN Tools Performance Report
Net: /cygdrive/C/Program Files/CPN Tools/Models/CCC/CMO.cpn
Number of replications: 50

Statistics							
Name	Avrg	90% Half Length	95% Half Length	99% Half Length	StD	Min	Max
List_length_dc_New_Page'queue_1							
count_iid	1002.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1002	1002
max_iid	10.500000	0.828139	0.993865	1.329743	3.477332	6	22
min_iid	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0
avrg_iid	1.013581	0.089252	0.107113	0.143312	0.374767	0.532010	2.263621
Marking_size_New_Page'delay_1							
count_iid	1002.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1002	1002
max_iid	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1	1
min_iid	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0
avrg_iid	0.615666	0.010896	0.013076	0.017495	0.045751	0.510849	0.718217
New_Monitor							
count_iid	500.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	500	500
max_iid	32.100000	2.149180	2.579271	3.450939	9.024343	18	56
min_iid	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0
sum_iid	3257.740000	176.119146	211.363892	282.794638	739.519254	2203	5418
avrg_iid	6.515480	0.352238	0.422728	0.565589	1.479039	4.406000	10.836000

Generated: Sun Sep 25 13:41:21 2016

В случае 90 % доверительной вероятности:

- 1) количество пакетов в памяти концентратора — $1,01 \pm 0,089$ шт.;
- 2) коэффициент загрузки процессора (количество пакетов под обслуживанием) — $0,61 \pm 0,01$;
- 3) среднее время нахождения пакета данных в концентраторе — $6,51 \pm 0,35$ ед.вр.

В случае если модель содержит n обслуживающих приборов, то коэффициент использования одной единицы оборудования определим как

$$\frac{k \pm \Delta k}{n}.$$

Так же можно было собрать статистику для простоя оборудования, для состояния q1. Тогда, в случае одного обслуживающего прибора, коэффициент простоя определялся как $1 - (k \pm \Delta k)$, а для n обслуживающих приборов — $\frac{n - (k \pm \Delta k)}{n}$.

Так как оценивается среднее значение случайных величин, то количество прогонов модели рассчитаем по формуле

$$N = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^2 \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{Q}{2} \right) \right]^2,$$

где $\Phi_0^{-1}(x)$ — функция, обратная функции Лапласа.

Рассчитаем необходимое количество прогонов модели для определения вероятностных характеристик с точностью $\varepsilon = 0.001$ и достоверностью $Q = 0.99$.

Учитывая, что $\sigma = 0,01$, получим

Тогда, количество прогонов при указанных выше условиях

$$N = \left(\frac{0,01}{0,001} \right)^2 \cdot \left[\Phi_0^{-1} \left(\frac{0,99}{2} \right) \right]^2 = 100 \cdot 2,58^2 = 665,64.$$

Округляем полученное значение в большую сторону и получаем необходимое количество прогонов модели для средних значений, изучаемых параметров.

Задача 7.8. На локальный коммутатор поступают пакеты данных, через интервалы времени, распределенные по закону A с параметрами $M_1(X)$ и $D_1(X)$, которые могут обрабатываться по n параллельным каналам. Время обработки пакетов данных распределено по закону B с параметрами $M_2(X)$ и $D_2(X)$.

Подобрать параметры распределений $M_1(X)$, $D_1(X)$, $M_2(X)$ и $D_2(X)$ таким образом, чтобы количество пакетов в памяти (в очереди) находилось в пределах (N_1, N_2) . Определить среднее время нахождения пакетов с данными в системе при подобранных значениях распределений.

№ варианта	A	B	n	(N_1, N_2)
1.	Бернулли	Эрланга	5	(10, 12)
2.	Равномерное	Бернулли	6	(12, 14)
3.	Эрланга	Равномерное	7	(11, 14)
4.	Экспоненциальное	Эрланга	5	(10, 14)
5.	Нормальное	Экспоненциальное	8	(15, 17)
6.	Пуассона	Нормальное	6	(14, 17)
7.	Стюдента	Пуассона	7	(12, 15)
8.	Бернулли	Стюдента	9	(11, 14)
9.	Равномерное	Экспоненциальное	7	(17, 19)
10.	Эрланга	Нормальное	8	(12, 15)
11.	Экспоненциальное	Пуассона	5	(16, 17)
12.	Нормальное	Нормальное	6	(15, 17)
13.	Пуассона	Пуассона	8	(11, 14)
14.	Стюдента	Стюдента	9	(5, 8)
15.	Нормальное	Бернулли	5	(11, 14)
16.	Экспоненциальное	Равномерное	7	(17, 19)
17.	Нормальное	Эрланга	9	(12, 15)
18.	Пуассона	Равномерное	8	(16, 17)
19.	Равномерное	Эрланга	7	(15, 17)
20.	Эрланга	Экспоненциальное	9	(11, 14)
21.	Бернулли	Нормальное	7	(5, 8)
22.	Равномерное	Пуассона	5	(11, 14)
23.	Эрланга	Стюдента	8	(17, 19)
24.	Экспоненциальное	Нормальное	6	(12, 15)
25.	Нормальное	Экспоненциальное	7	(16, 17)
26.	Пуассона		9	(15, 17)
27.	Стюдента	Нормальное	9	(11, 14)
28.	Экспоненциальное	Пуассона	5	(5, 8)
29.	Нормальное	Стюдента	8	(11, 14)
30.	Пуассона	Экспоненциальное	7	(17, 19)

8. УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

8.1. Общие сведения о решении дифференциальных уравнений и их систем

8.1.1. Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением n -го порядка называется **линейным**, если оно первой степени относительно совокупности искомой функции x и ее производных x' , ..., $x^{(n-1)}$, $x^{(n)}$, т. е. имеет вид

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t),$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ и $f(t)$ — заданные непрерывные функции от t или постоянные, причем $a_0 \neq 0$ для всех значений t из той области, в которой рассматривается дифференциальное уравнение. В дальнейшем будем предполагать, что $a_0 = 1$, если он не равен 1, то все члены уравнения делим на него. $f(t)$ — правая часть уравнения.

Если $f(t) \neq 0$, то уравнение называется **неоднородным**. Если $f(t) = 0$, уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0$$

называется **однородным** — левая часть уравнения является однородной функцией первой степени относительно $x, x', \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}$ и его решение имеет вид

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t),$$

где C_i — произвольные постоянные; $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ — линейно независимые частные решения.

Система функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ называется **линейно независимой** на отрезке $a \leq t \leq b$, если тождество

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) \equiv 0$$

на отрезке $a \leq t \leq b$ возможно лишь при равенстве нулю всех постоянных α_i . Линейная зависимость означает, что любую функцию $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Признаком линейной независимости решений $x_1, x_2, \dots, x_n$ может служить неравенство нулю **определителя Вронского** (вронскиана):

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dots & \dot{x}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Если $W(x_1, \dots, x_n) = 0$, то решения $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимы.

Замечание. Не существует общих методов для нахождения в конечном виде общего решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Как правило решение приходится искать в виде сумм бесконечных рядов того или иного вида.

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0,$$

где p и q — постоянные действительные числа.

Решение данного уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

Частное решение можно искать в виде $x = e^{kt}$, где $k = \text{const}$;

тогда

$$\dot{x} = ke^{kt}, \quad \ddot{x} = k^2 e^{kt}.$$

Подставляя полученные выражения производных в исходное уравнение, находим

$$e^{kt}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Учитывая, что $e^{kt} \neq 0$, получим уравнение

$$k^2 + pk + q = 0,$$

которое называется **характеристическим уравнением**.

При решении характеристического уравнения возможны три случая.

1) Корни характеристического уравнения действительны и различны: $k_1 \neq k_2$.

В этом случае частными решениями будут функции

$$x_1 = e^{k_1 t}, \quad x_2 = e^{k_2 t}.$$

Общий интеграл будет иметь вид

$$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}.$$

2) Корни характеристического уравнения комплексные: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$.

Частные решения можно записать в виде

$$x_1 = e^{(\alpha + i\beta)t}, \quad x_2 = e^{(\alpha - i\beta)t}$$

или

$$x_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t + ie^{\alpha t} \sin \beta t, \quad x_2 = e^{\alpha t} \cos \beta t - ie^{\alpha t} \sin \beta t$$

Учитывая, что если комплексная функция действительного аргумента $x = u(t) + iv(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$, то ее действительная и мнимая части должны быть равны нулю, можем записать частные решения исходного дифференциального уравнения в виде

$$x_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad x_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Общий интеграл будет иметь вид

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

3) Корни характеристического уравнения действительные и равные: $k_1 = k_2$. В данном случае $x_1 = e^{k_1 t}$, необходимо найти второе частное решение независимое с первым (функция $e^{k_2 t}$ тождественно равна $e^{k_1 t}$). Тогда второе решение будем искать в виде $x_2 = u(t)e^{k_1 t}$. Дифференцируем, подставляем в исходное, преобразуем, решаем, в результате — $x_2 = te^{k_1 t}$.

Общий интеграл будет иметь вид

$$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 x e^{k_1 t} = e^{k_1 t} (C_1 + C_2 t).$$

Нахождение решения однородного уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами аналогично выше изложенному.

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t),$$

общее решение которого имеет вид

$$x(t) = x_{oo} + x_{ch},$$

где x_{oo} — общее решение однородного уравнения (когда $f(t) = 0$); x_{ch} — частное решение неоднородного уравнения.

Для нахождения x_{ch} рассмотрим **метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)**.

Запишем общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$

$$x_{oo} = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t).$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения, заменив константы последнего выражения функциями, т. е.

$$x_{ch} = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$$

Неизвестные функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1 + C_2'(t)x_2 = 0, \\ C_1'(t)x_1' + C_2'(t)x_2' = f(t). \end{cases}$$

Другие методы решения неоднородных дифференциальных уравнений можно найти, например, Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов, т. 2.

8.1.2. Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t), \\ \dots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t), \end{cases}$$

где a_{ij} — постоянные; $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — искомые функции.

Частное решение системы будем искать в виде

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \dots, x_n = \alpha_n e^{kt}.$$

Для нахождения $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и k , найдем производные частных решений и подставим в систему

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kt} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n)e^{kt}, \\ k\alpha_2 e^{kt} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n)e^{kt}, \\ \dots \\ k\alpha_n e^{kt} = (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n)e^{kt}. \end{cases}$$

Сократим на e^{kt} и преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases}$$

Полученная система есть система линейных однородных алгебраических уравнений относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Составим определитель последней системы и приравняем его к нулю. Если полученный определитель будет отличен от нуля, то получим тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, а, следовательно, $x_1(t) = \dots = x_n(t) = 0$.

Тогда получаем уравнение n -го порядка для определения k :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Данное уравнение называется **характеристическим**.

Рассмотрим несколько случаев.

1) Корни характеристического уравнения действительные и различные. Обозначим через $k_1, k_2, \dots, k_n$ корни характеристического уравнения. Для каждого корня k_i составим систему и определим коэффициенты $\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$. Таким образом, получаем

для корня k_1 решение системы

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, \dots, x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$

для корня k_2 решение системы

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \dots, x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

...

для корня k_n решение системы

$$x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \dots, x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

Путем непосредственной подстановки в уравнения можно убедиться, что система функций

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ \dots \\ x_n = C_1 \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}, \end{cases}$$

где $C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, тоже является решением системы дифференциальных уравнений. Это есть общее решение исходной системы дифференциальных уравнений.

2) Если характеристическое уравнение имеет некоторый корень k кратности r , то соответствующее ему решение исходной системы можно искать в виде

$$x_1 = P_1(t) e^{kt}, x_2 = P_2(t) e^{kt}, \dots, x_n = P_n(t) e^{kt},$$

где все $P_i(t)$ — многочлены степени $r-1$ с неопределенными коэффициентами, которые вычисляются путем подстановки решений в исходную систему; при этом ровно r коэффициентов останутся произвольными постоянными, а остальные выразятся через

них. Может случиться, что коэффициенты при старших членах некоторых (или даже всех) многочленов $P_i(t)$ окажутся равными нулю. Тогда степени этих многочленов окажутся ниже, чем $r-1$, и могут даже равняться нулю.

3) Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные. Пусть имеем два комплексных корня $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$.

Этим корням будут соответствовать решения

$$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)t} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha - i\beta)t} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Коэффициенты $\alpha_j^{(1)}$ и $\alpha_j^{(2)}$ определяются из приведенной выше системы уравнений. Таким образом, получаем два частных решения

$$x_j^{(1)} = e^{\alpha t} (\lambda_j^{(1)} \cos \beta t + \lambda_j^{(2)} \sin \beta t),$$

$$x_j^{(2)} = e^{\alpha t} (\bar{\lambda}_j^{(1)} \cos \beta t + \bar{\lambda}_j^{(2)} \sin \beta t),$$

где $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\bar{\lambda}_j^{(1)}$, $\bar{\lambda}_j^{(2)}$ — действительные числа, определяемые через $\alpha_j^{(1)}$ и $\alpha_j^{(2)}$.

Соответствующие комбинации последних функций войдут в общее решение системы.

8.2. Понятие об устойчивости решения дифференциальных уравнений

В практических задачах, сводящихся к интегрированию дифференциальных уравнений, начальные значения обычно являются результатом измерений и, следовательно, содержат некоторую погрешность.

Поэтому естественно возникает вопрос о влиянии малых изменений начальных значений на искомое решение дифференциального уравнения.

Малые изменения начальных значений способны сильно изменить решение и данное решение, определяемое неточными начальными значениями, не будет даже приближенно описывать изучаемое явление.

Таким образом, необходимо найти условия, при которых малые изменения начальных значений вызывает малое изменение определяемого этими условиями решения.

Другая задача, рассматриваемая теорией устойчивости, связана с изучением влияния на решения уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x)$ малого изменения функции $f(t, x)$. При проведении реальных экспериментов функцию $f(t, x)$ приходится упрощать, идеализировать изучаемое явление, отбрасывать малозначимые факторы, что может привести к значительным количественным и качественным изменениям характеристик результата.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x}(t) = f(t, x).$$

Пусть $x = \varphi(t)$ — решение дифференциального уравнения при начальных условиях $\varphi(t_0) = \varphi_0$; $x = x(t)$ — решение, соответствующее измененному начальному условию $x(t_0) = x_0$. Функции $\varphi(t)$ и $x(t)$ определены для всех $t \geq t_0$.

Решение $\varphi(t)$ называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| \leq \delta(\varepsilon)$$

для всех $t \geq t_0$ следует неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon,$$

т. е. близкие по начальным значениям решения остаются близкими при всех $t \geq t_0$.

Другими словами, решение $\varphi(t)$ устойчиво, если достаточно близкое к нему в начальный момент времени $t = t_0$ решение $x(t)$ для всех $t \geq t_0$ содержится в сколь угодно узкой ε -трубке, построенной вокруг решения $\varphi(t)$.

Если решение $\varphi(t)$ не только устойчиво, но и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \varphi(t)] = 0$$

при $|x(t_0) - \varphi(t_0)| \leq \delta(\varepsilon)$, то оно называется **асимптотически устойчивым**.

Решение, не обладающее свойством устойчивости, называется **неустойчивым**.

Исследование на устойчивость некоторого решения $x = \varphi(t)$ может быть заменой переменных

$$y(t) = x - \varphi(t)$$

сведено к исследованию на устойчивость **нулевого (тривиального)** решения $y \equiv 0$, где $y = y(t)$ — новые неизвестные функции, равные отклонениям прежних неизвестных функций x от функций $\varphi(t)$, определяющих исследуемое решение.

Поэтому в дальнейшем будем считать, что на устойчивость исследуется именно нулевое решение $y \equiv 0$, расположенное в начале координат и называемое **точкой покоя**.

Точка покоя $y \equiv 0$ дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x)$ **устойчива по Ляпунову**, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $|y(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ следует $|y(t)| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Дифференциальное уравнение n -го порядка

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

с помощью замены может быть преобразовано к системе n уравнений первого порядка, т. е.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-2} &= x_{n-1}, \\ \dot{x}_{n-1} &= f(t, x, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Аналогично определяются понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для решения системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Пример 8.1. Исследовать на устойчивость решения дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad x(1) = 1.$$

Решение.

Общее решение данного уравнения есть $x(t) = Ce^{-t}$. Учитывая начальные условия $x(1) = 1$, имеем $1 = Ce^{-1}$, откуда $C = e$. Таким образом, частное решение имеет вид $\varphi(t) = e \cdot e^{-t} = e^{1-t}$. Устойчивость данного решения и надо исследовать.

Пусть $\delta = \varepsilon$. Из $|x(t_0) - \varphi(t_0)| \leq \varepsilon$ следует $x(t_0) = \varphi(t_0) + \varepsilon$. Изменим начальное условие: $x(1) = x_0 = 1 + \varepsilon$. Новое частное решение есть $x(t) = (1 + \varepsilon)e^{1-t}$.

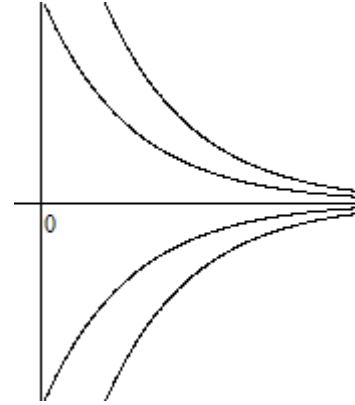
Очевидно выполнение условия $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |(1 + \varepsilon) - 1| \leq \delta$.

Вспомним, что $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$.

Тогда $|x(t) - \varphi(t)| = |(1 + \varepsilon)e^{1-t} - e^{1-t}| = e^{1-t} |(1 + \varepsilon) - 1| = e^{1-t} |\varepsilon| \leq \varepsilon$ для всех $t \geq 1$.

Также $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \varphi(t)] = \varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} e^{1-t} = 0$.

Следовательно, решение исходной задачи Коши асимптотически устойчиво.

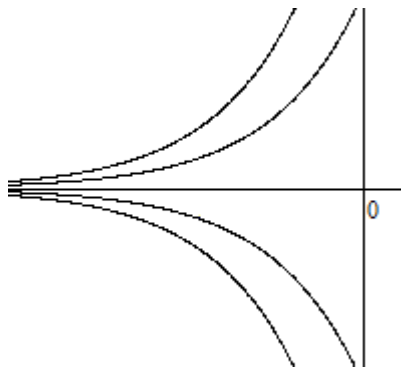


Пример 8.2. Исследовать на устойчивость решения дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = x, \quad x(1) = 1.$$

Решение.

Общее решение данного уравнения есть $x(t) = Ce^t$. Учитывая начальные условия $x(1) = 1$, имеем $1 = Ce$, откуда $C = e^{-1}$. Таким образом, частное решение имеет вид $\varphi(t) = e^{t-1}$. Устойчивость данного решения и надо исследовать.



Пусть $\delta = \varepsilon$. Из $|x(t_0) - \varphi(t_0)| \leq \varepsilon$ следует $x(t_0) = \varphi(t_0) + \varepsilon$. Изменим начальное условие: $x(1) = x_0 = 1 + \varepsilon$. Новое частное решение есть $x(t) = (1 + \varepsilon)e^{t-1}$. Составим разность $|x(t) - \varphi(t)| = |(1 + \varepsilon)e^{t-1} - e^{t-1}| = e^{t-1} |\varepsilon|$. Вспомним, что $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty$. Очевидно, что нельзя подобрать сколь

угодно малое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ следовало бы $|x(t) - \varphi(t)| = |(1 + \varepsilon)e^{t-1} - e^{t-1}| = e^{t-1} |\varepsilon| < \varepsilon$ для всех $t \geq 1$.

Следовательно, решение исходной задачи Коши неустойчиво.

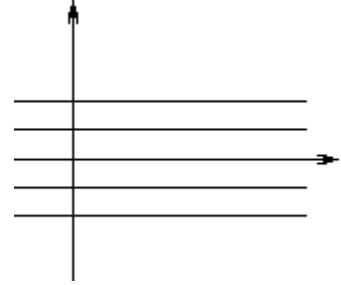
Пример 8.3. Исследовать на устойчивость решения дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = 0, \quad x(1) = 1.$$

Решение.

Общее решение данного уравнения есть $x(t) = C$. Учитывая начальные условия $x(1) = 1$, имеем $C = 1$. Таким образом, частное решение имеет вид $\varphi(t) = 1$. Устойчивость данного решения и надо исследовать.

Пусть $\delta = \varepsilon$. Из $|x(t_0) - \varphi(t_0)| \leq \varepsilon$ следует $x(t_0) = \varphi(t_0) + \varepsilon$. Изменим начальное условие: $x(1) = x_0 = 1 + \varepsilon$. Новое частное решение есть $x(t) = 1 + \varepsilon$. Очевидно выполнение условий $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |(1 + \varepsilon) - 1| \leq \delta$, $|x(t) - \varphi(t)| = |(1 + \varepsilon) - 1| \leq \varepsilon$. При этом $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \varphi(t)] = \varepsilon \neq 0$.



Следовательно, решение исходной задачи Коши устойчиво, но не асимптотически.

Задача 8.1. Пользуясь определением, исследовать на устойчивость решения следующих уравнений.

1. $\dot{x} + x = 1, x(0) = 1$.	11. $\dot{x} - x = t, x(1/2) = -5$.	21. $\dot{x} + tx = 3t, x(0) = 3$.
2. $\dot{x} = -t(x - 1), x(0) = 1$.	12. $\dot{x} = \sin t, x(0) = 0$.	22. $\dot{x} = 2 - x, x(0) = 2$.
3. $\dot{x} - 2x = t, x(1/2) = 1/2$.	13. $\dot{x} = \cos t, x(0) = -1$.	23. $\dot{x} = 2xt, x(0) = 3$.
4. $\dot{x} = 2xt, x(0) = 0$.	14. $\dot{x} = -t(x - 1), x(0) = 2$.	24. $\dot{x} + x = t, x(0) = -1$.
5. $\dot{x} = \cos t, x(0) = 1$.	15. $\dot{x} = 4xt, x(0) = 4$.	25. $\dot{x} = \sin t, x(0) = -2$.
6. $\dot{x} + x = 1, x(0) = 0$.	16. $\dot{x} = 2xt, x(0) = 1$.	26. $\dot{x} = -7xt, x(0) = -7$.
7. $\dot{x} = -t(x - 3), x(0) = 3$.	17. $\dot{x} + x = t, x(0) = 1$.	27. $\dot{x} = 2xt, x(0) = 5$.
8. $\dot{x} + x = 5, x(0) = 5$.	18. $\dot{x} + tx = t, x(0) = 1$.	28. $\dot{x} = -t(x - 1), x(0) = -1$.
9. $\dot{x} = 3xt, x(0) = 3$.	19. $\dot{x} = 1 - x, x(0) = 2$.	29. $\dot{x} = \cos t, x(0) = 4$.
10. $\dot{x} = \sin t, x(0) = 1$.	20. $\dot{x} = -t(x - 1), x(0) = 3$.	30. $\dot{x} - 2x = t, x(1/2) = -6$.

Существуют методы определения устойчивости решения дифференциальных уравнений и их систем без нахождения самого решения. Рассмотрим их.

8.3. Простейшие типы точек покоя

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = P(x, y), \\ \dot{y}(t) = Q(x, y). \end{cases}$$

Точка (x_0, y_0) называется **точкой покоя** или **особой точкой** системы, если $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y}(t) = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

где a_{ij} ($i, j = 1, 2$) — постоянные и $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Очевидно, что точка $(0, 0)$ является точкой покоя. Исследуем расположение траекторий исследуемой системы в окрестности этой точки. Ищем решение в виде

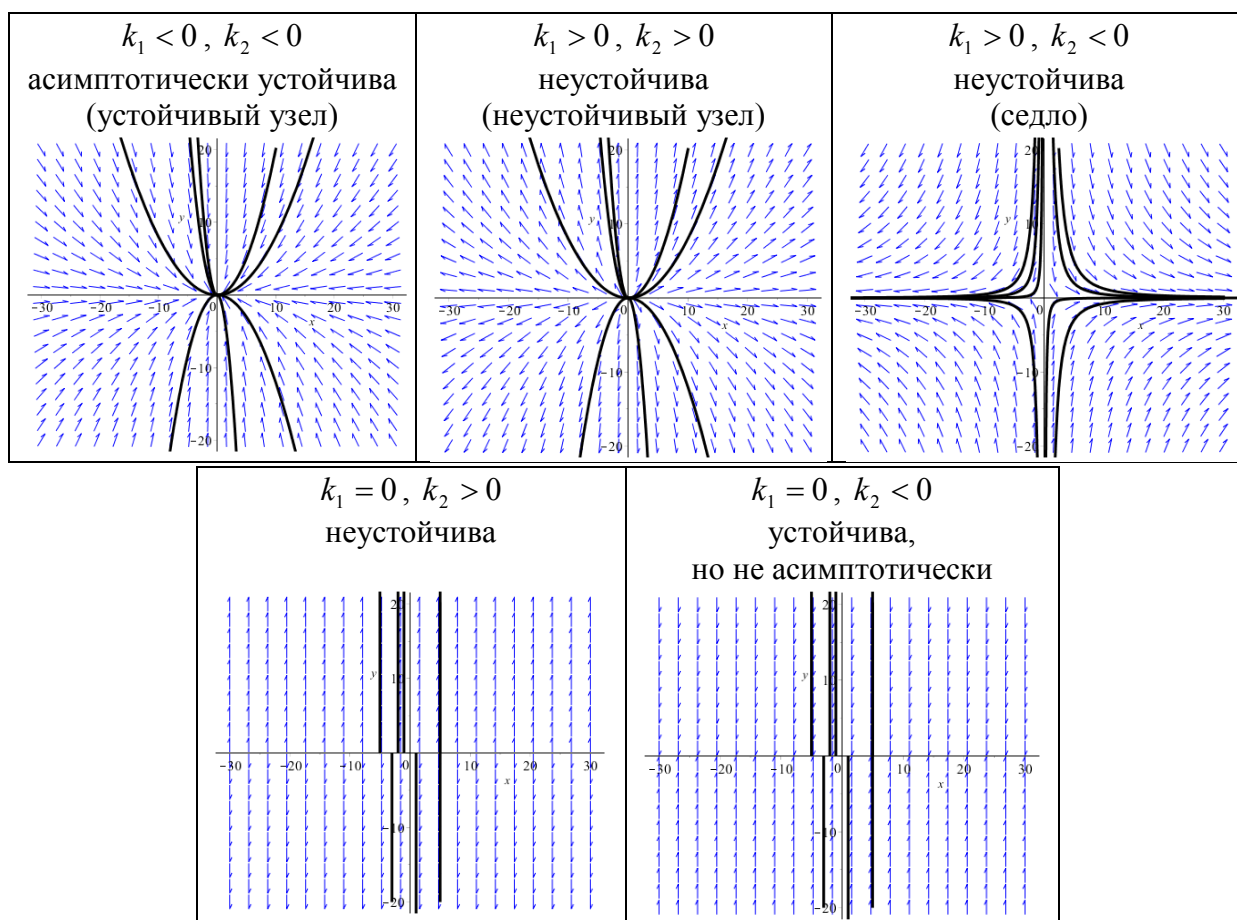
$$x = C_1 e^{kt}, \quad y = C_2 e^{kt}.$$

Для определения k получаем характеристическое уравнение

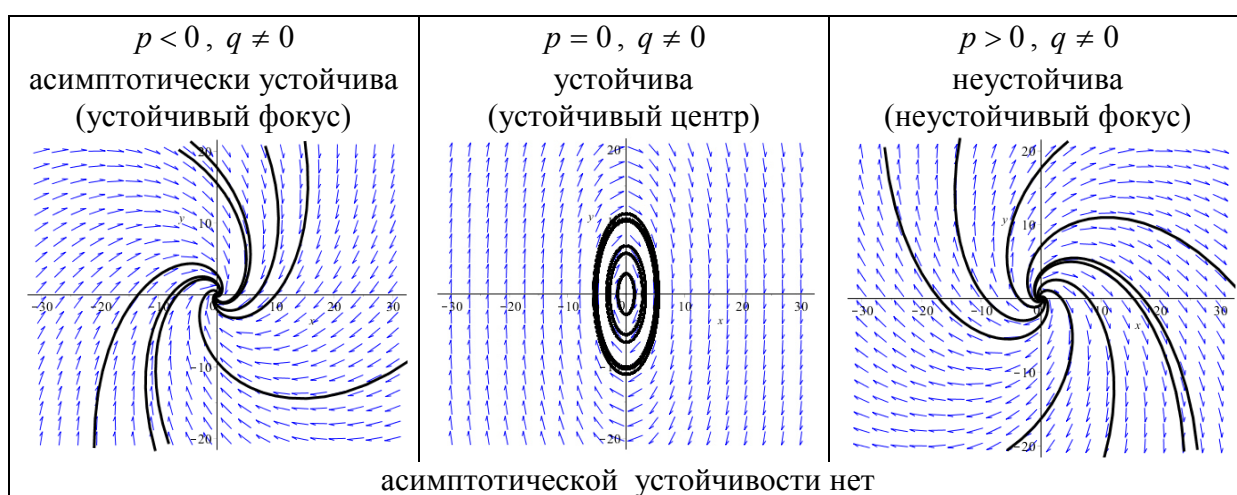
$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим возможные случаи.

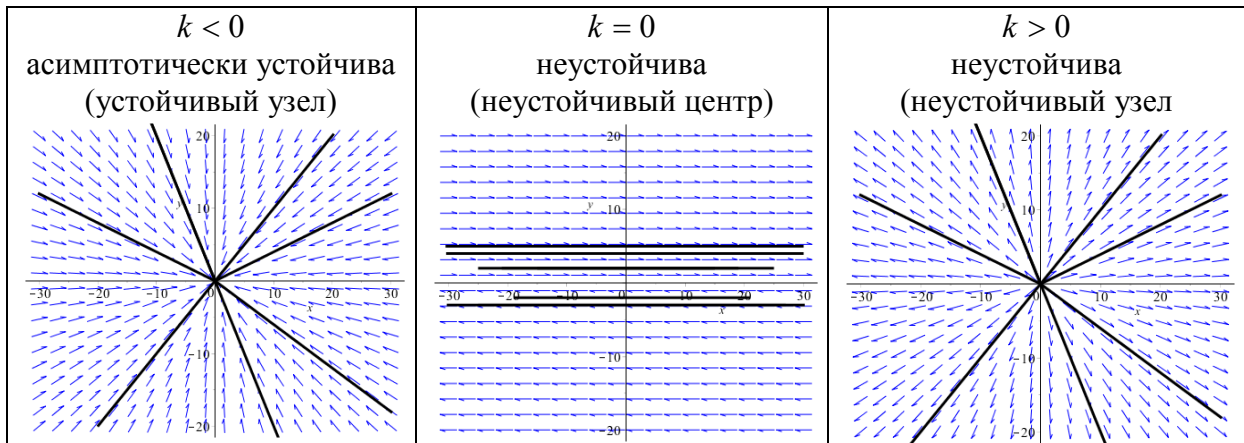
1. Корни характеристического уравнения действительны и различны.



2. Корни характеристического уравнения комплексные: $k_1 = p + iq, k_2 = p - iq$.



3. Корни характеристического уравнения кратные: $k_1 = k_2 = k$.



Представленные рисунки называются фазовыми портретами. По осям отложены решения системы $x(t)$ и $y(t)$. Направление на фазовой кривой указывает направление фазовой точки (x, y) по кривой при возрастании t .

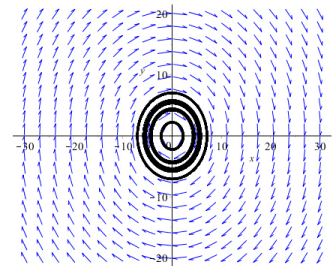
Пример 8.4. Установить характер точки покоя $(0,0)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 0-k & 1 \\ -1 & 0-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \text{ или } k^2 + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i$ — чисто мнимые. Точка покоя — устойчивый центр.



Задача 8.2. Установить характер точки покоя $(0,0)$ системы уравнений.

1. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + 4y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y, \\ \dot{y} = 3x + 5y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 8x + 4y, \\ \dot{y} = 5x + 9y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 5x + 9y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 5y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 4y, \\ \dot{y} = -4x + 2y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 5y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = 4x + 6y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 4x + 2y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 4x + 2y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y, \\ \dot{y} = x + 6y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 5x + 2y. \end{cases}$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 7x - 8y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = 4x + 6y. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + 4y. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \dot{x} = 10x + 4y, \\ \dot{y} = 5x + 2y. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 2x + 6y. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \dot{x} = 8x + 4y, \\ \dot{y} = 4x + 2y. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$$

В данном параграфе мы получили следующие результаты.

1) Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть, то все решения системы асимптотически устойчивы в целом.

2) Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то все решения системы неустойчивы.

3) Если характеристическое уравнение имеет простые корни с нулевой действительной частью (т. е. чисто мнимые или равные нулю корни), а остальные корни, если они есть, имеют отрицательную действительную часть, то все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости нет.

4) Если корни характеристического уравнения кратные с нулевой действительной частью, а остальные корни, если они есть, имеют отрицательную действительную часть или являются простыми корнями с нулевой действительной частью, то все решения обычно неустойчивы, хотя в виде исключения могут появиться случаи устойчивости, но не асимптотической.

Замечание. Для суждения об устойчивости решения дифференциального уравнения достаточно лишь установить, что все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости.

8.4. Точки покоя и инварианты характеристического уравнения

Рассмотрим метод, позволяющий, не решая уравнения, выяснить, будут ли все его корни иметь отрицательную действительную часть или нет.

Теорема. Для того чтобы действительные части всех корней многочлена с действительными коэффициентами были отрицательны, необходимо, чтобы все коэффициенты этого многочлена имели одинаковые знаки.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y}(t) = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

характеристическое уравнение которой приведено к виду

$$k^2 + ak + b = 0.$$

1) Если $a > 0$, $b > 0$, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

2) Если $a > 0$, $b = 0$, то нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

3) Если $a = 0$, $b > 0$, то нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

4) Во всех остальных случаях нулевое решение неустойчиво; однако при $a = b = 0$ возможен исключительный случай, когда нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

Пример 8.5. Определить значения параметра α , при котором устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\alpha - 1)x - \alpha y. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение для данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 - k & 1 \\ \alpha - 1 & -\alpha - k \end{vmatrix} = 0 \text{ или } k^2 + \alpha k + 1 - \alpha = 0.$$

Здесь $a = \alpha$, $b = 1 - \alpha$.

Асимптотическая устойчивость нулевого решения будет иметь место при $\alpha > 0$ и $1 - \alpha > 0$, т. е. при $0 < \alpha < 1$.

Устойчивость, но не асимптотическая, будет в двух случаях:

а) $\alpha > 0$, $1 - \alpha = 0$, т. е. при $\alpha = 1$;

б) $\alpha = 0$, $1 - \alpha > 0$, т. е. при $\alpha = 0$.

При всех остальных значениях α нулевое решение неустойчиво.

Задача 8.3. Определить значения параметра α , при которых нулевые решения следующих систем устойчивы.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 5y, \\ \dot{y} = -\alpha x + \alpha y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha y, \\ \dot{y} = 4x + 6y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x + \alpha y, \\ \dot{y} = 4x + 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \alpha y, \\ \dot{y} = 5x + 2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x + \alpha y, \\ \dot{y} = 4x + 2y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 6y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = \alpha y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - \alpha y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \alpha y, \\ \dot{y} = x + 6y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y, \\ \dot{y} = 3x + \alpha y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = \alpha x + 2y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + \alpha y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y, \\ \dot{y} = 3x + \alpha y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3\alpha y, \\ \dot{y} = 2x + 6y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = -\alpha x + y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 8x + 4y, \\ \dot{y} = \alpha y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = \alpha x + 9y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 5y, \\ \dot{y} = \alpha x + y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 4y, \\ \dot{y} = \alpha y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - 4y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = 8x + \alpha y, \\ \dot{y} = 4x + 2y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + \alpha y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = \alpha y. \end{cases}$

8.5. Второй метод Ляпунова

При исследовании на устойчивость динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = P(x, y), \\ \dot{y}(t) = Q(x, y) \end{cases}$$

иногда удобно пользоваться методом функций Ляпунова. Для этого вводится дополнительная функция, которая удовлетворяет условиям **теоремы Ляпунова** об асимптотической устойчивости

$$H(x, y) \geq 0, \quad H(0, 0) = 0,$$

т. е. $H(x, y)$ определено положительно ($H(x, y) \geq 0$), если она положительна во всех точках окрестности ($x^2 + y^2 \leq H$), за исключением начала координат, где она равна нулю ($H(0, 0) = 0$).

Например,

$$H = ax^2 + by^2$$

не меняется с течением времени, т. е.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 2axP(x, y) + 2byQ(x, y) = 0.$$

Очевидно, что последнее равенство выполняется лишь при

$$P(x, y) = 2by, \quad Q(x, y) = -2ax.$$

В других случаях система либо устойчива при $\frac{dH}{dt} < 0$ (**теорема Ляпунова**) или неустойчива при $\frac{dH}{dt} > 0$ (**теорема Четаева**) в зависимости от конкретных заданий функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Пример 8.6. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x - 2y)(1 - x^2 - 3y^2), \\ \dot{y} = -(2x + y)(1 - x^2 - 3y^2). \end{cases}$$

Решение. Функция $H = ax^2 + by^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости: $H(x, y) \geq 0$, $H(0, 0) = 0$. Пусть $a = b = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 2xP(x, y) + 2yQ(x, y) = \\ &= -2x(x - 2y)(1 - x^2 - 3y^2) - 2y(2x + y)(1 - x^2 - 3y^2) = \\ &= -2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - 3y^2) \leq 0 \end{aligned}$$

при достаточно малых x и y .

Следовательно, тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво.

Пример 8.7. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x^3 - 5y, \\ \dot{y} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Решение. Функция $H = ax^2 + by^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости: $H(x, y) \geq 0$, $H(0, 0) = 0$. Пусть $a = b = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 2xP(x, y) + 2yQ(x, y) = \\ &= 2x(-2x^3 - 5y) + 2y(5x - 3y^3) = \\ &= -(4x^4 + 6y^4) \leq 0,\end{aligned}$$

т. е. $\frac{dH}{dt} = 0$ только при $x = 0$, $y = 0$, значит, $\frac{dH}{dt}$ определено отрицательная функция. Следовательно, тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Пример 8.8. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$$

Решение. Функция $H = ax^2 + by^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости: $H(x, y) \geq 0$, $H(0, 0) = 0$. Пусть $a = b = 1/2$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = xP(x, y) + yQ(x, y) = \\ &= x(x + y) + y(-x + y) = x^2 + y^2 > 0,\end{aligned}$$

т. е. $\frac{dH}{dt} = 0$ только при $x = 0$, $y = 0$, значит, $\frac{dH}{dt}$ определено положительная функция. Следовательно, тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ согласно теореме Четаева неустойчиво.

Пример 8.9. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y, \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases}$$

Решение. Возьмем в качестве H функцию

$$H = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3.$$

$H(x, y) > 0$ при $x > 0$, $y > 0$. Тогда

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2) > 0.$$

Согласно теореме Четаева о неустойчивости решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчиво.

Задача 8.4. Исследовать на устойчивость по Ляпунову тривиальное решение системы.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = xy^4, \\ \dot{y} = x^4y. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - x^6, \\ \dot{y} = y/2 - x^2y - x^4y^3. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = x/3 - y - x^3y - 7y^3. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - x^3/4, \\ \dot{y} = -x/3 - y/2 - 2y^3. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 2y, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = -x^3y^2 + y. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -x^2y/2 - y^3/4. \end{cases}$$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 2xy^2 - x^3/4, \\ \dot{y} = -x/3 - y/3 - 2y^3. \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$
7. $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = -x^2y^3 + y. \end{cases}$
8. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -x^2y/2 - y^3/4. \end{cases}$
9. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - y^3/2. \end{cases}$
10. $\begin{cases} \dot{x} = -3x^2 + y, \\ \dot{y} = -x - 7y^3. \end{cases}$
11. $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 2y, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$
12. $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = x^2y^3 + y. \end{cases}$
13. $\begin{cases} \dot{x} = xy^4, \\ \dot{y} = xy^4. \end{cases}$
14. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - x^6, \\ \dot{y} = y/2 - x^2y - x^4y^3. \end{cases}$
15. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = x/3 - y - x^3y - 7y^3. \end{cases}$
20. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - y^3. \end{cases}$
21. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -x^2y/2 - y^3/4. \end{cases}$
22. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 2x^2y - y^3. \end{cases}$
23. $\begin{cases} \dot{x} = -3x^2 + y, \\ \dot{y} = -x - y^2. \end{cases}$
24. $\begin{cases} \dot{x} = y/3 - x - 7x^3/2, \\ \dot{y} = -x - y/2 - 5y^3/2. \end{cases}$
25. $\begin{cases} \dot{x} = -3x^2 + y^2, \\ \dot{y} = -x^2 - 7y^3. \end{cases}$
26. $\begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$
27. $\begin{cases} \dot{x} = xy^2, \\ \dot{y} = x^2y. \end{cases}$
28. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - x^2, \\ \dot{y} = y/2 - x^2y - x^4y^3. \end{cases}$
29. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = x/3 - y - x^2y - 7y^3. \end{cases}$
30. $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 2y, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$

8.6. Исследование на устойчивость по первому приближению

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = P(x, y), \\ \dot{y}(t) = Q(x, y). \end{cases}$$

Точка (x_0, y_0) называется точкой покоя или особой точкой системы, если

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Исследуем на устойчивость точку покоя системы. Разложим правые части системы по формуле Тейлора в окрестности начала координат. Получим

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x + a_{12}y + \varphi_1(t, x, y), \\ \dot{y}(t) = a_{21}x + a_{22}y + \varphi_2(t, x, y), \end{cases}$$

где $\varphi_1(t, x, y)$, $\varphi_2(t, x, y)$ — бесконечно малые порядка выше первого в окрестности точки $x = y = 0$. Вместо точки покоя исходной системы исследуем на устойчивость точку покоя линейной системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y}(t) = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

называемой **системой уравнений первого приближения** или **линеаризованной системой**.

В общем случае строгой связи между устойчивостью исходной и линеаризованной системами нет. Однако, если коэффициенты a_{ij} постоянны (система стационарна в первом приближении) и все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0$$

имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение $x = y = 0$ исходной системы асимптотически устойчиво, т. е. в этом случае можно исследовать на устойчивость по первому приближению.

Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то точка покоя $x = y = 0$ системы неустойчива, т. е. и в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Пример 8.10. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6, \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4. \end{cases}$$

Решение. Так как функции в правой части разложены по формуле Тейлора, отбросим степени выше первой и исследуем на устойчивость точку покоя $x = y = 0$ системы первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1 - k & 1 \\ 1 & -3 - k \end{vmatrix} = 0$$

имеет отрицательные корни $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Следовательно, точка покоя $x = 0, y = 0$ исходной и линеаризованной систем асимптотически устойчива.

Пример 8.11. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y - y^3, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 - x^2. \end{cases}$$

Решение. По формуле Тейлора

$$\sin y = y + o(y), \quad e^x = 1 + x + o(x).$$

Исследуем на устойчивость точку покоя $x = y = 0$ системы первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7 - k & 2 \\ 1 & -3 - k \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = 2 \pm 3\sqrt{3}$. Так как действительная часть корней положительна, то нулевое решение исходной и линеаризованной систем неустойчиво.

Пример 8.12. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения $\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = 0$.

Решение. Исходному уравнению соответствует система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - b\sin x. \end{cases}$$

Используя разложение $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, запишем систему в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - b\left(x - \frac{x^3}{3!}\right). \end{cases}$$

После отбрасывания нелинейных членов получим линеаризованную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -b & -a-k \end{vmatrix} = k^2 + ak + b = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Если $a > 0$, $b > 0$, то корни уравнения имеют отрицательные действительные части, и, следовательно, точка покоя $x = y = 0$ устойчива по первому приближению.

Задача 8.5. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = x/4 - 2y - y^3/6. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4 + \sin^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = x - 2\sin y - y^3 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2 \sin x, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 2 + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \dot{x} = 10\sin x - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14\sin y + 2y^2. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \dot{x} = e^{2x} - 2y, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \dot{x} = \cos 2x - xy^4, \\ \dot{y} = -x^3 y^2 + y. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - e^{3y}, \\ \dot{y} = x - x^2 y/2 - y^3/4. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^2 x - y^2, \\ \dot{y} = y + \sin y. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \dot{x} = \sin x - y, \\ \dot{y} = -x^2 + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \dot{x} = -5x + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 2x^2 y - y. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = -4x + 7 \sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + -x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - y^3/2. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = -3x^2 + y, \\ \dot{y} = -x - 7y^3. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 2y, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = x - y^4, \\ \dot{y} = y^3 + y. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - x^6, \\ \dot{y} = y/2 - x^2y - x^4y^3. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = y - xy^2, \\ \dot{y} = x^3. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \dot{x} = -3x^2 + y, \\ \dot{y} = -x - y^2. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \dot{x} = \cos x - \sin y + 1, \\ \dot{y} = -x - y/2 - 5y^3/2. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \dot{x} = \cos x + \cos y, \\ \dot{y} = x + y - x^2 - 7y^3. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \dot{x} = x + x^5 + y^3, \\ \dot{y} = \sin y + x^3 + y^5. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \dot{x} = x - xy^2, \\ \dot{y} = y + x^2y. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \dot{x} = e^x + e^y - 2, \\ \dot{y} = y/2 - x^2y - x^4y^3. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = x/3 - y - x^2y - 7y^3. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 2y, \\ \dot{y} = 3x - 4 \sin 2y. \end{cases}$$

8.7. Критерий Рауса-Гурвица

Большое практическое значение имеют необходимые и достаточные условия того, чтобы все корни характеристического уравнения с вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$

$$f(k) = a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \dots + a_{n-1}k + a_n = 0$$

имели отрицательные вещественные части.

Положительность всех коэффициентов — необходимое, но не достаточное условие для того, чтобы все корни уравнения были расположены слева от мнимой оси (в случае уравнений 1-й и 2-й степени это условие и достаточно).

Условие Рауса-Гурвица. Для того, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Многочлен $f(k)$ степени $n \geq 1$ называют **устойчивым многочленом**, если все его корни $k_1, \dots, k_n$ имеют отрицательные действительные части $\operatorname{Re} k_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), т. е. все корни устойчивого многочлена расположены в левой полуплоскости.

Матрица Гурвица строится так. По главной диагонали располагаются коэффициенты характеристического многочлена, начиная с a_1 до a_n . Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, причем в число последних включается коэффициент a_0 . Все остальные элементы заполняются нулями.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, условие Гурвица выглядит так:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Заметим, что так как $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$, то последнее из условий $\Delta_n > 0$ может быть заменено требованием $a_n > 0$.

Пример 8.13. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y^{(V)} + y^{(IV)} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$f(k) = k^5 + k^4 + 7k^3 + 4k^2 + 10k + 3.$$

Здесь $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$, $a_5 = 3$.

Матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выписываем диагональные миноры Гурвица

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \Delta_1 = 1 > 0.$$

Итак, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 > 0$. Следовательно, тривиальное решение $y = 0$ уравнения асимптотически устойчиво.

Задача 8.6. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения.

1. $y^{VI} + 7y^{IV} + 5y^{III} + 7y'' + 4y' + 2y = 0$.
2. $y^{IV} + 2y^{III} + 3y'' + 5y' + 2y = 0$.
3. $y^{VIII} + 7y^{VII} + 6y^{VI} + y^{IV} + 2y^{III} + 3y'' + 4y' + 5y = 0$.
4. $y^{VII} + 7y^{VI} + 5y^{IV} + 3y^{III} + 3y'' + 4y' + 3y = 0$.
5. $y^{VI} + 4y^{IV} + 7y^{III} + 4y'' + 3y' + y = 0$.
6. $y^{IV} + 7y^{III} + 3y'' + 5y' + 7y = 0$.
7. $y^{VIII} + 6y^{VII} + 8y^{VI} + y^{IV} + 2y^{III} + 4y'' + 6y' + 4y = 0$.
8. $y^{VII} + 6y^{VI} + 7y^{IV} + y^{III} + 2y'' + 2y' + y = 0$.
9. $y^{VI} + 6y^{IV} + 7y^{III} + 2y'' + y' + 10y = 0$.
10. $y^{IV} + 4y^{III} + 3y'' + 5y' + 3y = 0$.
11. $y^{VIII} + 4y^{VII} + 6y^{VI} + y^{IV} + y^{III} + 2y'' + 4y' + y = 0$.
12. $y^{VII} + 5y^{VI} + 5y^{IV} + 2y^{III} + 4y'' + 3y' + 1y = 0$.
13. $y^{VI} + 5y^{IV} + 2y^{III} + 4y'' + 5y' + 3y = 0$.
14. $y^{IV} + 2y^{III} + 4y'' + y' + 3y = 0$.
15. $y^{VIII} + 4y^{VII} + 7y^{VI} + y^{IV} + y^{III} + 7y'' + 4y' + 10y = 0$.
16. $y^{VII} + 4y^{VI} + 6y^{IV} + y^{III} + 3y'' + 2y' + 5y = 0$.
17. $y^{VI} + 4y^{IV} + 5y^{III} + 3y'' + 4y' + 2y = 0$.
18. $y^{IV} + y^{III} + 3y'' + 5y' + 4y = 0$.
19. $y^{VIII} + 3y^{VII} + 6y^{VI} + y^{IV} + y^{III} + 3y'' + 4y' + 5y = 0$.
20. $y^{VII} + 3y^{VI} + 5y^{IV} + y^{III} + 3y'' + 5y' + 2y = 0$.
21. $y^{VI} + 3y^{IV} + 4y^{III} + 3y'' + 2y' + 4y = 0$.
22. $y^{IV} + 3y^{III} + 2y'' + 5y' + 4y = 0$.
23. $y^{VIII} + 2y^{VII} + 7y^{VI} + y^{IV} + y^{III} + 2y'' + 3y' + 5y = 0$.
24. $y^{VII} + 2y^{VI} + y^{IV} + 6y^{III} + 2y'' + 4y' + 3y = 0$.
25. $y^{VI} + 2y^{IV} + 2y^{III} + 3y'' + 4y' + 5y = 0$.
26. $y^{IV} + 2y^{III} + 3y'' + 4y' + 5y = 0$.
27. $y^{VI} + 2y^{IV} + 3y^{III} + 2y'' + 3y' + 4y = 0$.
28. $y^{VII} + 2y^{VI} + 4y^{IV} + 5y^{III} + y'' + 2y' + 3y = 0$.
29. $y^{VIII} + 2y^{VII} + 5y^{VI} + y^{IV} + 4y^{III} + 5y'' + y' + 2y = 0$.
30. $y^{IV} + 3y^{III} + 4y'' + 5y' + y = 0$.

8.8. Геометрический критерий устойчивости (критерий Михайлова)

Пусть имеем дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными вещественными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y = 0.$$

Вопрос об устойчивости решения дифференциального уравнения сводится к вопросу расположения корней характеристического уравнения

$$f(k) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

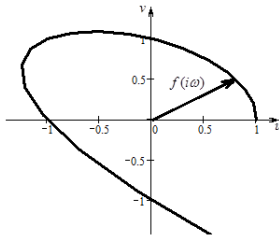
на комплексной плоскости.

Подставим в характеристический многочлен $k = i\omega$, получим

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

где

$$\begin{cases} u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \\ v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{cases}$$



Величину $f(i\omega)$ при заданном параметре ω можно изобразить на комплексной плоскости uOv в виде вектора. Если изменять параметр ω в интервале $(-\infty, +\infty)$, то конец этого вектора опишет некоторую кривую, каждая точка которой соответствует определенному значению ω . Так как функция $u(\omega)$ четная, то данная кривая, называемая **кривой Ми-**

хайлова, симметрична относительно оси Ou , и поэтому достаточно строить часть кривой Михайлова, отвечающую изменению параметра ω от 0 до $+\infty$.

Критерий Михайлова.

Для устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) вектор $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ совершил поворот на угол $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$, т. е. сделал $\frac{n}{4}$ оборотов против часовой стрелки;
- 2) годограф $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ не проходил через нулевую точку.

Другими словами, для устойчивости решения изучаемого дифференциального уравнения необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова проходила поочередно n квадрантов против часовой стрелки, окружая все время начало координат.

Пример 8.14. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$f(k) = k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Подставим в характеристический многочлен $k = i\omega$, получим

$$f(i\omega) = \omega^4 - 2i\omega^3 - 3\omega^2 + 2i\omega + 1 = \omega^4 - 3\omega^2 + 1 + i(-2\omega^3 + 2\omega),$$

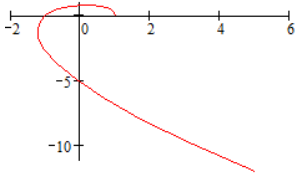
$$\begin{cases} u(\omega) = \omega^4 - 3\omega^2 + 1, \\ v(\omega) = -2\omega^3 + 2\omega. \end{cases}$$

Найдем все корни функций $u(\omega)$ и $v(\omega)$:

$$u(\omega) = \left(\omega - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) \cdot \left(\omega - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right) \cdot \left(\omega - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \cdot \left(\omega - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right),$$

$$v(\omega) = 2\omega(1-\omega)(1+\omega).$$

$f(k) := k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1$
 $w := 0, 0.1, \dots, 2$
 $x(w) := \operatorname{Re}(f(i \cdot w)) \quad y(w) := \operatorname{Im}(f(i \cdot w))$



Изменяя ω от 0 до $+\infty$ построим кривую. Кривая Михайлова проходит поочередно 4 квадранта против часовой стрелки, окружая все время начало координат. Следовательно, тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Задача 8.7. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения.

1. $2y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.
2. $3y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.
3. $y^V + 5y^{IV} + 10y''' + 11y'' + 7y' + 2y = 0$.
4. $y^{IV} + 5y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$.
5. $y^V + 2y^{IV} + 2y''' + 46y'' + 89y' + 260y = 0$.
6. $y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$.
7. $y^{VII} + 7y^{VI} + 23y^V + 37y^{IV} + 56y''' + 36y'' + 12y' + 4y = 0$.
8. $y^{IV} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = 0$.
9. $y^{IV} + 7y''' + 18y'' + 22y' + 12y = 0$.
10. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.
11. $y^{IV} + 11y''' + 59y'' + 107y' + 60y = 0$.
12. $y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 53y' + 60y = 0$.
13. $y^{IV} + 6y''' + 15y'' + 18y' + 10y = 0$.
14. $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$.
15. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$.
16. $y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0$.
17. $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0$.
18. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0$.
19. $y^{IV} + 2y''' + 8y'' + 5y = 0$.
20. $y^V + 4y^{IV} + 5y''' + 2y' + 4y = 0$.
21. $y^V + 5y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 2y' + 1y = 0$.
22. $y^V + 3y^{IV} + 3y''' + 4y'' + 3y' + 1y = 0$.
23. $y^V + 2y^{IV} + 3y''' + 5y'' + 5y' + y = 0$.
24. $y^V + 2y^{IV} + 3y''' + 4y'' + 5y' + 1y = 0$.
25. $y^V + 4y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 3y' + 1y = 0$.
26. $y^V + y^{IV} + 3y''' + 5y'' + 7y' + 1y = 0$.
27. $y^V + y^{IV} + 2y''' + 4y'' + y' + y = 0$.

28. $y^{IV} + y^{III} + 2y'' + 2y' + y = 0$.

29. $y^{IV} + y^{III} + 3y'' + 2y' + 5y = 0$.

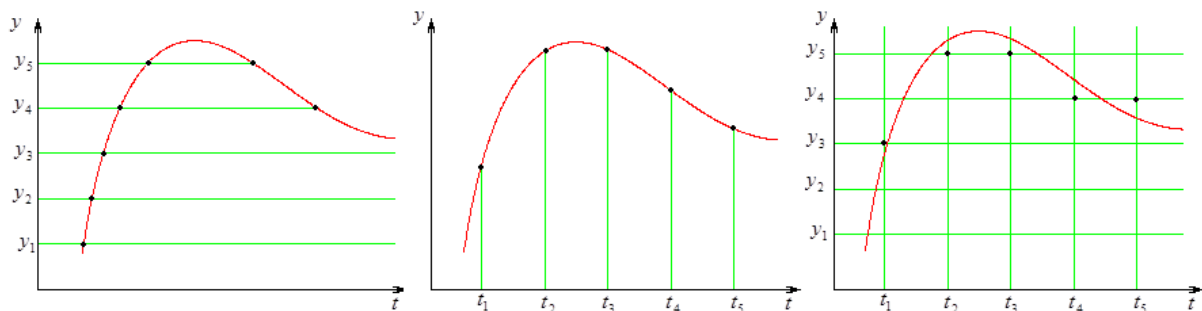
30. $y^{IV} + y^{III} + y'' + y' + y = 0$.

9. ДИСКРЕТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Передача и преобразование сигналов лежат в основе работы систем связи, контроля, регулирования и управления. Известные способы передачи сигналов можно разделить на непрерывные и дискретные.

При непрерывном способе передается и преобразуется каждое мгновенное значение сигнала. В непрерывном способе передачи используется модуляция постоянной или гармонически изменяющейся физической величины по закону, который определяется передаваемым сигналом.

При дискретном способе передается или преобразуется сигнал, квантованный по уровню или по времени. При одновременном квантовании по времени и по уровню непрерывный сигнал заменяется дискретными уровнями, ближайшими к значениям непрерывного сигнала в дискретные моменты времени.

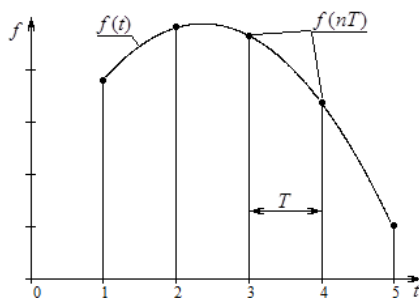


В дискретном способе передачи используются различные виды импульсных модуляций.

Дискретный способ передачи и преобразования отличается большей помехозащищенностью.

9.1. Z-преобразование

Математическое описание и анализ систем, обрабатывающих сигналы, существенно упрощается, если все сигналы в системе (как в импульсной, так и в непрерывной части) рассматривать только в дискретные моменты времени $t = 0T; 1T; 2T; \dots; nT; \dots; \infty$. При этом каждый непрерывный сигнал $f(t)$ удобно представить в виде **решетчатой функции** времени $f(nT)$, значения которой определены только для дискретных моментов времени. Между дискретными значениями функция равна нулю.



Непрерывная функция $f(t)$ является огибающей для решетчатой функции $f(nT)$.

При замене реальных непрерывных сигналов решетчатыми функциями часто удобнее переходить к относительному времени $\bar{t} = t/T$, т. е. измерять время числом периодов квантования. В этом случае относительный период $\bar{T} = 1$, а решетчатая функция обозначается $f(n)$.

Последовательность неединичных импульсов, образующих решетчатую функцию на интервале $0 \leq nT \leq \infty$, можно представить в виде бесконечного ряда

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT),$$

где $\delta(t - nT)$ — смещенная дельта-функция, существующая только в моменты времени $t = nT$ и равная нулю при всех других значениях t .

Применим к последней сумме преобразование Лапласа, учитывая при этом, что изображение суммы оригиналов равно сумме их изображений, а также, что согласно теореме запаздывания изображение смещенной дельта-функции равно e^{-pnT} . Тогда **изображение** по Лапласу решетчатой функции $f(nT)$ является функция $F^*(p)$ комплексного аргумента $p = s + i\sigma$

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT}.$$

Последнее выражение называется **дискретным преобразованием Лапласа** (D-преобразование). Функция $F^*(p)$ есть периодическая с периодом $2\pi i$ и в силу своей периодичности $F^*(p + 2\pi i) = F^*(p)$, рассматривается в основной полосе $-\pi < \text{Im } p \leq \pi$.

Если известно изображение $F^*(p)$, то **оригинал** $f(nT)$ можно найти по формуле обращения

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i} \oint F^*(p) e^{npT} dp.$$

Дискретное преобразование Лапласа содержит трансцендентный множитель e^{-pnT} , из-за которого изображения $F^*(p)$ и соответствующие передаточные функции становятся иррациональными функциями аргумента p , что создает определенные трудности при их использовании. Поэтому, с целью получения передаточных функций импульсных систем в дробно-рациональной форме, свойственной непрерывным системам, введем замену

$$z = e^{pT},$$

тогда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}.$$

Последнее называется **z-преобразованием** решетчатой функции.

Z-преобразование позволяет достаточно просто выполнить прямое и обратное преобразование:

1) чтобы по известной функции времени $f(t)$ найти ее z-изображение, необходимо каждое дискретное значение $f(nT)$ умножить на z^{-n} , а затем свернуть получившийся степенной ряд в конечную сумму;

2) чтобы по известному изображению $F(z)$ найти соответствующий сигнал $f(t)$, необходимо представить изображение $F(z)$ в виде степенного ряда по убывающим степеням z^{-n} , получающиеся при этом числовые коэффициенты ряда и есть дискретные значения $f(nT)$ сигнала $f(t)$.

Пусть здесь и далее $T = 1$. Учитывая, что $e^p = z$, $e^{np} = (e^{np}) = (e^p)^n = z^n$, $d(e^{np}) = d(z^n)$, $ne^{np} dp = nz^{n-1} dz$, $e^{np} dp = z^{n-1} dz$, тогда **прямое и обратное z-преобразование** определяются как

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots,$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint F(z) z^{n-1} dz.$$

В дальнейшем предполагается, что контур интегрирования охватывает все особые точки $z = z_k$ подынтегральной функции $F(z)$, поэтому (согласно теореме Коши о вычетах) обратное z-преобразование:

$$f(n) = \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} F(z) z^{n-1}.$$

В частности, если $F(z) = \frac{Q(z)}{R(z)}$ — правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция

$$f(n) = \sum_k \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}} [F(z) z^{n-1} (z - z_k)^{m_k}],$$

где z_k — полюсы $F(z)$ кратности m_k и сумма берется по всем полюсам.

При описании решетчатой функции была введена δ -функция

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Если данный сигнал сдвинуть на k интервалов, то

$$\delta(n - k) = \begin{cases} 1, & n = k; \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

при этом справедливо

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \delta(n - k) = f(k), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1.$$

Введем дискретную функцию Хевисайда

$$\theta(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \theta(n - m) = \sum_{n=m}^{\infty} f(n).$$

Пример. Найти изображение функции $f(n) = \delta(n)$.

Решение. Согласно определению

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = z^{-0} = 1.$$

Найдем обратное z-преобразование для $F(z) = 1$.

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint F(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint z^{n-1} dz = 0,$$

так как интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции равен 0. Данный факт обусловлен тем, что δ -функция определяется только в классе обобщенных функций (функционалов) и проявляет свои свойства только под знаком интеграла. Поэтому, для обратного z -преобразования постулируем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{n-1} dz = \delta(n).$$

Пример. Найти изображение функции

$$f(n) = \theta(n).$$

Решение. Согласно определению

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-1/z} = \frac{z}{z-1}.$$

Таким образом,

$$\theta(n) = \frac{z}{z-1}.$$

Сделаем проверку — найдем оригинал. Функция $F(z) = \frac{z}{z-1}$ имеет особую точку $z = 1$ — полюс 1 порядка. Тогда

$$f(n) = \operatorname{res}_{z=1} F(z) z^{n-1} = \operatorname{res}_{z=1} \frac{z}{z-1} z^{n-1} = \operatorname{res}_{z=1} \frac{z^n}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z^n}{z-1} (z-1) \right) = \lim_{z \rightarrow 1} z^n = 1.$$

Заметим, что сама θ -функция, по существу, является суммой δ -функций:

$$\theta(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k).$$

Пример. Найти изображение функции

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \leq 0, \\ 1, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & n > 3. \end{cases}$$

Решение. Согласно определению

$$F(z) = \sum_{n=0}^3 f(n) z^{-n} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = \frac{z^2 + z + 1}{z^3}.$$

Сделаем проверку — найдем оригинал. Разложим функцию $F(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^3}$ в ряд по убывающим степеням z^{-n} , где числовые коэффициенты ряда и будут дискретными значениями искомой функции, т. е.

$$F(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^3} = 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3}.$$

Тогда, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$.

Пример. Найти изображение функции $f(n) = e^{-n}$.

Решение. Согласно определению

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ez)^{-n} = \frac{1}{1-1/ez} = \frac{ez}{ez-1}.$$

Сделаем проверку — найдем оригинал. Функция $F(z) = \frac{ez}{ez-1}$ имеет особую точку $z = 1/e$ — полюс 1 порядка. Тогда

$$f(n) = \operatorname{res}_{z=\frac{1}{e}} F(z) z^{n-1} = \operatorname{res}_{z=\frac{1}{e}} \frac{ez}{ez-1} z^{n-1} = \operatorname{res}_{z=\frac{1}{e}} \frac{ez^n}{ez-1} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{e}} \left(\frac{ez^n}{ez-1} (z - \frac{1}{e}) \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{e}} z^n = \frac{1}{e^n} = e^{-n}.$$

Пример. Найти изображение функции $f(n) = n$.

Решение. Согласно определению

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = -z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Сделаем проверку — найдем оригинал. Функция $F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ имеет особую точку $z = 1$ — полюс 2 порядка. Тогда

$$f(n) = \operatorname{res}_{z=1} F(z) z^{n-1} = \operatorname{res}_{z=1} \frac{z}{(z-1)^2} z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^n}{(z-1)^2} (z-1)^2 \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} z^n = n \lim_{z \rightarrow 1} z^{n-1} = n.$$

Пример. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}.$$

Решение. Находим нули знаменателя. Имеем $z^2 - 3z + 2 = 0$, откуда $z = 1$ и $z = 2$ — простые полюсы. Тогда

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}.$$

Найдем вычеты и оригинал.

$$\operatorname{res}_{z=1} F(z) z^{n-1} = \operatorname{res}_{z=1} \frac{z}{(z-1)(z-2)} z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} (z-1) \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n}{z-2} = -1;$$

$$\operatorname{res}_{z=2} F(z) z^{n-1} = \operatorname{res}_{z=2} \frac{z}{(z-1)(z-2)} z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{z z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} (z-2) \right) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^n}{z-1} = 2^n.$$

$$f(n) = -1 + 2^n.$$

Таблица z-преобразования

$f(n)$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$	$f(n)$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$
1	$\frac{z}{z-1}$	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	n^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
e^{an}	$\frac{z}{z-e^a}$	ne^{an}	$\frac{ze^a}{(z-e^a)^2}$
$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$	$\cos \omega n$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$sh \omega n$	$\frac{zsh \omega}{z^2 - 2zch \omega + 1}$	$ch \omega n$	$\frac{z(z - ch \omega)}{z^2 - 2zch \omega + 1}$
$e^{an} \sin \omega n$	$\frac{ze^a \sin \omega}{z^2 - 2ze^a \cos \omega + e^{2a}}$	$e^{an} \cos \omega n$	$\frac{z(z - e^a \cos \omega)}{z^2 - 2ze^a \cos \omega + e^{2a}}$

9.2. Свойства z-преобразования

Пусть здесь и в дальнейшем $f(n) \div F(z)$, $g(n) \div G(z)$.

1. Свойство линейности. Для любых комплексных переменных α и β

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \div \alpha F(z) + \beta G(z).$$

2. Теоремы опережения и запаздывания. Пусть $f(n) \div F(z)$, и k — целое положительное число. Тогда

$$f(n+k) \div z^k \left[F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} z^{-m} f(m) \right].$$

В частности, если $f(0) = f(1) = \dots = f(k-1) = 0$, то

$$f(n+k) \div z^k F(z).$$

Аналогично,

$$f(n-k) \div z^{-k} \left[F(z) + \sum_{m=-k}^{-1} z^{-m} f(m) \right] F(z).$$

3. Теорема смещения. Пусть $F(z) \div f(n)$, то для любого комплексного z_0

$$F(z - z_0) \div z_0^n f(n).$$

4. Дифференцирование изображения. Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-n)$:

$$\frac{d}{dz} F(z) \div -nf(n),$$

или, вообще

$$\left(z \frac{d}{dz}\right)^k F(z) \div (-n)^k f(n).$$

5. Дифференцирование по параметру. Пусть оригинал и изображение содержат параметр ε , не зависящий от n и z , и пусть

$$f(n, \varepsilon) \div F(z, \varepsilon).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(n, \varepsilon) \div \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(z, \varepsilon),$$

т. е. производная по ε от изображения есть изображение производной ε от оригинала.

Предполагаем, что все эти производные существуют и $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(n, \varepsilon)$ есть оригинал.

6. Интегрирование по параметру. Пусть оригинал и изображение содержат параметр ε , не зависящий от n и z , и пусть

$$f(n, \varepsilon) \div F(z, \varepsilon).$$

Тогда

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} f(n, \varepsilon) d\varepsilon \div \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} F(z, \varepsilon) d\varepsilon,$$

т. е. интегрирование по параметру ε оригинала соответствует интегрированию изображения по параметру ε .

7. Изображение суммы. Пусть $f(n)$ — решетчатая функция, имеющая изображение

$$f(n) \div F(z).$$

Тогда

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m) \div \frac{F(z)}{z-1},$$

т. е. суммированию оригиналов отвечает деление изображения на $z-1$.

8. Теорема умножения изображений. Произведению изображений соответствует свертка оригиналов

$$F(z)G(z) \div f(n) * g(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k).$$

9.3. Разность. Изображение разностей

Пусть задана решетчатая функция $f(n)$.

Разностью первого порядка называется выражение

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n).$$

Разность второго порядка определяется как

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(n) &= \Delta \Delta f(n) = \Delta[f(n+1) - f(n)] = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = \\ &= [f(n+2) - f(n+1)] - [f(n+1) - f(n)] = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n). \end{aligned}$$

Разность третьего порядка

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(n) &= \Delta \Delta^2 f(n) = \Delta^2 f(n+1) - \Delta^2 f(n) = \Delta[f(n+2) - f(n+1)] - \Delta[f(n+1) - f(n)] = \\ &= [\Delta f(n+2) - \Delta f(n+1)] - [\Delta f(n+1) - \Delta f(n)] = \Delta f(n+2) - 2\Delta f(n+1) + \Delta f(n) = \\ &= f(n+3) - f(n+2) - 2[f(n+2) - f(n+1)] + f(n+1) - f(n) = \\ &= f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n).\end{aligned}$$

Вообще разность k -го порядка равна

$$\Delta^k f(n) = \Delta \Delta^{k-1} f(n) = \Delta^{k-1} f(n+1) - \Delta^{k-1} f(n).$$

Оператор Δ (дельта) можно рассматривать как оператор, обладающий свойствами:

$$1) \Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y;$$

$$2) \Delta(Cx) = C\Delta x \quad (C = \text{const});$$

3) $\Delta^m(\Delta^k x) = \Delta^{m+k} x$ (m и k — целые неотрицательные числа, причем по определению полагают $\Delta^0 x = x$).

Учитывая, что $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ можем записать

$$f(n+1) = f(n) + \Delta f(n);$$

отсюда, рассматривая Δ как символический множитель, получим:

$$f(n+1) = (1 + \Delta)f(n).$$

Последовательно применяя это соотношение k раз получим

$$f(n+k) = (1 + \Delta)^k f(n).$$

Используя формулу бинома Ньютона, запишем

$$f(n+k) = \sum_{m=0}^k C_k^m \Delta^m f(n),$$

где

$$C_k^m = \frac{k(k-1)\dots[k-(m-1)]}{m!} = \frac{k!}{m!(k-m)!}$$

— число сочетаний из k элементов по m .

Тогда разность k -го порядка будет определяться соотношением

$$\Delta^k f(n) = \sum_{m=0}^k (-1)^k C_k^m \Delta^m f(n+k-m).$$

Пример. Построить конечные разности для функции $f(n) = n^3$.

Решение. По определению первая разность

$$\Delta f(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Вторая разность

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = [3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1] - [3n^2 + 3n + 1] = 6n + 6.$$

Третья разность

$$\Delta^3 f(n) = \Delta^2 f(n+1) - \Delta^2 f(n) = [6(n+1) + 6] - (6n + 6) = 6.$$

Четвертая разность

$$\Delta^4 f(n) = \Delta^3 f(n+1) - \Delta^3 f(n) = 6 - 6 = 0.$$

Очевидно, что все разности более высокого порядка равны нулю аналогично производным функции $f(t) = t^3$.

Изображение разностей. Пусть

$$f(n) \div F(z).$$

Тогда, используя теорему опережения, согласно которой $f(n+1) \div z[F(z) - f(0)]$ можно записать

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \div z[F(z) - f(0)] - F(z) = (z-1)F(z) - zf(0).$$

Далее, аналогично

$$\Delta^2 f(n) \div (z-1)^2 F(z) - z(z-1)f(0) - z\Delta f(0),$$

...

$$\Delta^k f(n) \div (z-1)^k F(z) - z \sum_{v=0}^{k-1} (z-1)^{k-v-1} \Delta^v f(0),$$

где $\Delta^0 f(0) = f(0)$.

Практическая значимость последнего выражения в том, что оно позволяет найти z -изображение функции по ее разностям, т. е. из последнего выражения находим

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^k} \sum_{v=0}^{k-1} \frac{\Delta^v f(0)}{(z-1)^v} + \frac{1}{(z-1)^k} Z\{\Delta^k f(n)\},$$

где $Z\{\Delta^k f(n)\}$ — z -изображение $\Delta^k f(n)$.

Если, в частности, $\Delta^v f(0) = 0$ ($v = 0, 1, \dots, k-1$) или, что эквивалентно, $f(0) = f(1) = \dots = f(k-1) = 0$, то можем записать

$$\Delta^k f(n) \div (z-1)^k F(z),$$

т. е. операции взятия разности k -го порядка от оригинала отвечает умножение изображения на $(z-1)^k$.

Если в анализе обратным действием по отношению к дифференцированию является интегрирование, то при рассмотрении конечных разностей обратным действием образованию первой разности является суммирование.

Суммой решетчатой функции $f(n)$ называется решетчатая функция $g(n)$, определяемая как

$$g(0) = 0, \quad g(n) = \sum_{m=0}^{n-1} f(m) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В частности, $g(1) = f(0)$, $g(2) = f(0) + f(1)$, ...

Ясно, что исходная функция $f(n)$ служит для функции $g(n)$ первой разностью:

$$\Delta g(n) = g(n+1) - g(n) = f(n).$$

Вспомним, что если $f(n) \div F(z)$, то $\sum_{m=0}^{n-1} f(m) \div \frac{F(z)}{z-1}$.

9.4. Разностные уравнения

Уравнение вида

$$F(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)) = 0,$$

где $f(n)$ — искомая решетчатая функция, называется **разностным уравнением** k -го порядка. Данное уравнение сводится к Δ -разностному уравнению вида

$$F(n, f(n), \Delta f(n), \dots, \Delta^k f(n)) = 0,$$

при помощи формулы

$$f(n+k) = f(n) + C_k^1 \Delta f(n) + C_k^2 \Delta^2 f(n) + \dots + \Delta^k f(n),$$

а при помощи формулы

$$\Delta^k f(n) = f(n+k) - C_k^1 f(n+k-1) + C_k^2 f(n+k-2) - \dots + (-1)^k f(n) \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

где $C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$, Δ -разностное уравнение сводится к исходному.

Разностное уравнение, линейное относительно $f(n)$ и ее разностей, называется **линейным разностным уравнением**. Линейное разностное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами имеет вид

$$b_0 \Delta^k f(n) + b_1 \Delta^{k-1} f(n) + \dots + b_k f(n) = \varphi(n),$$

где $\varphi(n)$ — заданная решетчатая функция (если $\varphi(n) = 0$, то уравнение называется однородным), $f(n)$ — искомая решетчатая функция, $b_0, b_1, \dots, b_k$ — постоянные, причем $b_0 \neq 0, b_k \neq 0$.

Заменяя в линейном разностном уравнении разности $\Delta^k f(n)$ по вышеуказанной формуле, получим другую форму разностного уравнения:

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = \varphi(n).$$

Разностное уравнение, содержащее $f(n)$ и $f(n+k)$, называется разностным уравнением k -го порядка ($k > 0$), т. е. a_k и a_0 не должны быть равны нулю (если $a_k = 0$, то положив $n+1 = m$, получим уравнение более низкого порядка).

Порядок Δ -разностного уравнения может не совпадать с порядком наивысшей разности, входящей в него.

Пример 9.1. Определить порядок разностного уравнения

$$\Delta^3 f(n) - 3\Delta f(n) - Cf(n) = 0.$$

Решение. Заменяем разности по формулам

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n),$$

$$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n),$$

$$\Delta^3 f(n) = f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(n) - 3\Delta f(n) - Cf(n) &= f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) - \\ &\quad - 3f(n+1) + 3f(n) - Cf(n) = \\ &= f(n+3) - 3f(n+2) + (2-C)f(n). \end{aligned}$$

При $C \neq 2$ последнее уравнение содержит 3 слагаемых и разность между максимальным и минимальным значениями аргументов равна $(n+3) - n = 3$, следовательно, порядок уравнения равен 3.

При $C = 2$ уравнение примет вид

$$f(n+3) - 3f(n+2) = 0.$$

Здесь $(n+3) - (n+2) = 1$, т. е. порядок уравнения равен 1. Введя замену $k = n+2$, получим

$$f(k+1) - 3f(k) = 0,$$

или, что аналогично

$$f(n+1) - 3f(n) = 0.$$

Пример 9.2. Определить порядок разностного уравнения

$$\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + 2f(n) = 0.$$

Решение. Заменяем разности по формулам

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n),$$

$$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n),$$

$$\Delta^3 f(n) = f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + 2f(n) &= f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) + \\ &+ 4(f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)) + \\ &+ 5(f(n+1) - f(n)) + \\ &+ 2f(n) = \\ &= f(n+3) + f(n+2). \end{aligned}$$

Уравнение $f(n+3) + f(n+2) = 0$ эквивалентно

$$f(n+1) + f(n) = 0,$$

т. е. является разностным уравнением первого порядка.

Задача 9.1. Определить порядок разностного уравнения

$$1. \Delta^4 f(n) + \Delta^3 f(n) + 2\Delta f(n) + 3f(n) = 0.$$

$$2. \Delta^4 f(n) + 2\Delta^3 f(n) - 3\Delta f(n) + 4f(n) = 0.$$

$$3. \Delta^4 f(n) - 3\Delta^3 f(n) + 4\Delta f(n) - 5f(n) = 0.$$

$$4. \Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) - 5\Delta f(n) + 6f(n) = 0.$$

$$5. \Delta^4 f(n) - 5\Delta^3 f(n) + 6\Delta f(n) - 7f(n) = 0.$$

$$6. \Delta^4 f(n) + 6\Delta^3 f(n) - 7\Delta f(n) + 8f(n) = 0.$$

$$7. \Delta^4 f(n) - 7\Delta^3 f(n) + 5\Delta f(n) - 3f(n) = 0.$$

$$8. \Delta^4 f(n) + 3\Delta^3 f(n) - 4\Delta f(n) + 4f(n) = 0.$$

$$9. \Delta^4 f(n) - 5\Delta^3 f(n) + 5\Delta f(n) + 5f(n) = 0.$$

$$10. \Delta^4 f(n) + 3\Delta^3 f(n) - 3\Delta f(n) + 3f(n) = 0.$$

$$11. \Delta^4 f(n) - 7\Delta^3 f(n) + 5\Delta f(n) - 7f(n) = 0.$$

$$12. \Delta^4 f(n) - 3\Delta^3 f(n) - 3\Delta f(n) + 6f(n) = 0.$$

$$13. \Delta^4 f(n) - \Delta^3 f(n) - 2\Delta f(n) - 3f(n) = 0.$$

$$14. \Delta^4 f(n) - 2\Delta^3 f(n) - 3\Delta f(n) - 4f(n) = 0.$$

$$15. \Delta^4 f(n) - 3\Delta^3 f(n) - 4\Delta f(n) - 5f(n) = 0.$$

$$16. \Delta^4 f(n) + 2\Delta^3 f(n) - 3\Delta^2 f(n) + 4f(n) = 0.$$

$$17. 2\Delta^4 f(n) - 3\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) - 5f(n) = 0.$$

$$18. 3\Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) - 5\Delta^2 f(n) + 6f(n) = 0.$$

$$19. 4\Delta^4 f(n) - 5\Delta^3 f(n) + 6\Delta^2 f(n) - 7f(n) = 0.$$

$$20. 5\Delta^4 f(n) + 6\Delta^3 f(n) - 7\Delta^2 f(n) + 8f(n) = 0.$$

$$21. 6\Delta^4 f(n) - 7\Delta^3 f(n) + 8\Delta^2 f(n) - 9f(n) = 0.$$

$$22. 9\Delta^4 f(n) + 8\Delta^3 f(n) + 7\Delta^2 f(n) + 6f(n) = 0.$$

$$23. 8\Delta^4 f(n) - 7\Delta^3 f(n) + 6\Delta^2 f(n) - 5f(n) = 0.$$

24. $7\Delta^4 f(n) + 6\Delta^3 f(n) - 5\Delta^2 f(n) + 4f(n) = 0$.
25. $6\Delta^4 f(n) + 5\Delta^3 f(n) - 4\Delta^2 f(n) - 3f(n) = 0$.
26. $5\Delta^4 f(n) - 4\Delta^3 f(n) - 3\Delta^2 f(n) - 2f(n) = 0$.
27. $4\Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) - 4\Delta^2 f(n) + 3f(n) = 0$.
28. $3\Delta^4 f(n) + 3\Delta^3 f(n) - 3\Delta^2 f(n) + 2f(n) = 0$.
29. $2\Delta^4 f(n) + 7\Delta^3 f(n) - 7\Delta^2 f(n) + 7f(n) = 0$.
30. $\Delta^4 f(n) - \Delta^3 f(n) + \Delta^2 f(n) - 2f(n) = 0$.

Рассмотрим получение разностного уравнения на основе дифференциального.

Вспомним, что

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t};$$

$$x''(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x'(t + \Delta t) - x'(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{x(t + 2\Delta t) - x(t + \Delta t)}{\Delta t} - \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + 2\Delta t) - 2x(t + \Delta t) + x(t)}{(\Delta t)^2}.$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$Ty'(t) + y(t) = kx(t).$$

Используя разностное отношение, получим

$$T \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} + y(t) = kx(t),$$

Заменим непрерывное время t дискретным t_i и учитывая, что Δt интервал между t_i и t_{i+1} , можно записать

$$y(t_i) = y(n), \quad y(t_i + \Delta t) = y(t_{i+1}) = y(n+1), \quad y(t_i + 2\Delta t) = y(t_{i+2}) = y(n+2) \text{ и т.д.}$$

Тогда получим

$$T \frac{y(n+1) - y(n)}{\Delta t} + y(n) = kx(n)$$

или, после упрощения и приведения подобных, имеем

$$\frac{T}{\Delta t} y(n+1) + \left(1 - \frac{T}{\Delta t}\right) y(n) = kx(n).$$

Тогда

$$a_0 y(n+1) + a_1 y(n) = b_0 x(n),$$

где $a_0 = \frac{T}{\Delta t}$, $a_1 = 1 - \frac{T}{\Delta t}$, $b_0 = k$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$Ty'(t) + y(t) = kx(t).$$

Рассмотрим другую разностную схему для первой производной

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t}.$$

Используя разностное отношение, получим

$$T \frac{y(t + \Delta t) - y(t - \Delta t)}{2\Delta t} + y(t) = kx(t),$$

Заменим непрерывное время t дискретным t_i и, учитывая, что Δt интервал между t_i и t_{i+1} , можно записать

$$y(t_i - \Delta t) = y(t_{i-1}) = y(n), \quad y(t_i) = y(n+1), \quad y(t_i + \Delta t) = y(t_{i+1}) = y(n+2).$$

Тогда получим

$$T \frac{y(n+2) - y(n)}{2\Delta t} + y(n+1) = kx(n)$$

или, после упрощения и приведения подобных, имеем

$$\frac{T}{2\Delta t} y(n+2) + y(n+1) - \frac{T}{2\Delta t} y(n) = kx(n).$$

Тогда

$$a_0 y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = b_0 x(n),$$

где $a_0 = \frac{T}{2\Delta t}$, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{T}{2\Delta t}$, $b_0 = k$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y''(t) + Ay'(t) + By(t) = x(t).$$

Используя разностные отношения, получим

$$\frac{y(t+2\Delta t) - 2y(t+\Delta t) + y(t)}{(\Delta t)^2} + A \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} + By(t) = x(t),$$

Заменим непрерывное время t дискретным t_i и учитывая, что Δt интервал между t_i и t_{i+1} , можно записать

$$y(t_i) = y(n), \quad y(t_i + \Delta t) = y(t_{i+1}) = y(n+1), \quad y(t_i + 2\Delta t) = y(t_{i+2}) = y(n+2) \text{ и т.д.}$$

Тогда получим

$$\frac{y(n+2) - 2y(n+1) + y(n)}{(\Delta t)^2} + A \frac{y(n+1) - y(n)}{\Delta t} + By(n) = x(n).$$

Замечание. Данные преобразования (замены) возможны только при малом Δt , т. к. по определению Δt должно стремиться к нулю.

9.5. Решение разностных уравнений

9.5.1. Решение разностных уравнений с помощью характеристического полинома

Решение однородных линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим разностное уравнение порядка k :

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_{k-1} f(n+1) + a_k f(n) = 0,$$

где $a_k \neq 0$; $f(n)$ — искомая функция целочисленного аргумента; $a_1, \dots, a_k$ — действительные постоянные.

Будем искать решение в виде $f(n) = \lambda^n$. Подставим решение в исходное уравнение

$$\begin{aligned}\lambda^{n+k} + a_1 \lambda^{n+k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda^{n+1} + a_k \lambda^n &= 0, \\ \lambda^n \lambda^k + a_1 \lambda^n \lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda^n \lambda^1 + a_k \lambda^n &= 0\end{aligned}$$

и сократим на $\lambda^n \neq 0$

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k = 0.$$

Полученное уравнение называется **характеристическим**.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — корни характеристического уравнения.

При решении характеристического уравнения возможны следующие случаи:

1) Корни характеристического уравнения действительны и различны.

Общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$f(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_k$ — произвольные постоянные, которые могут быть определены, если заданы начальные условия

$$f(0) = f_0, f(1) = f_1, \dots, f(k-1) = f_{k-1}.$$

2) Корни характеристического уравнения действительные и кратные $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda$.

Общее решение исходного разностного уравнения будет иметь вид

$$f(n) = C_1 \lambda^n + C_2 n \lambda^n + \dots + C_k n^{k-1} \lambda^n = \lambda^n (C_1 + C_2 n + \dots + C_k n^{k-1}).$$

3) Среди корней характеристического уравнения имеются комплексные корни $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Частные решения можно записать в виде

$$f_{1,2} = (\alpha \pm i\beta)^n = \left(|\lambda| e^{i \arg \lambda} \right)^n = |\lambda|^n e^{in \arg \lambda}.$$

Тогда учитывая формулу Эйлера общее решение примет вид

$$f(n) = |\lambda|^n (C_1 \cos(n \arg \lambda) + C_2 \sin(n \arg \lambda)).$$

$$|\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \varphi = \arg \lambda = \begin{cases} \arctg \frac{\beta}{\alpha}, & \alpha > 0, \beta \geq 0, \\ \arctg \frac{\beta}{\alpha} + \pi, & \alpha < 0, \beta \geq 0, \\ \arctg \frac{\beta}{\alpha} - \pi, & \alpha < 0, \beta < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \alpha = 0, \beta > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha = 0, \beta < 0. \end{cases}$$

Пример 9.3. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) + 2f(n+1) - 3f(n) = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$$

Корни данного уравнения $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$ различные и действительны, следовательно, общее решение имеет вид

$$f(n) = C_1 (-3)^n + C_2 (1)^n.$$

Пример 9.4. Найти общее решение уравнения

$$f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Корни данного уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, следовательно, общее решение имеет вид

$$f(n) = 1^n (C_1 + C_2 n + C_3 n^2) = C_1 + C_2 n + C_3 n^2.$$

Пример 9.5. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Корни данного уравнения $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$.

Тогда

$$|1 + i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}.$$

Общее решение имеет вид

$$f(n) = 2^{\frac{n}{2}} \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

Пример 9.6. Рассмотрим последовательность чисел, начинающихся с нуля и единицы, в которой каждый последующий член равен сумме двух непосредственно предшествующих ему предыдущих (**числа Фибоначчи**):

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Найти выражение общего члена последовательности.

Решение. Согласно условию задача сводится к решению разностного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n)$$

при начальных условиях $f(0) = 0$, $f(1) = 1$; $f(n)$ обозначает число Фибоначчи номера n .

Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

находим его корни

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

Общее решение имеет вид

$$f(n) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из начальных условий, т. е. из уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ (C_1 + C_2) + \sqrt{5}(C_1 - C_2) = 2, \end{cases}$$

решая которые найдем

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тогда частное решение

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = 0$ (число в скобках меньше 1), то числа Фибоначчи рас-

тут как члены геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение неоднородных линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим неоднородное линейное разностное уравнение порядка k :

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_{k-1} f(n+1) + a_k f(n) = g(n),$$

где $a_k \neq 0$; $f(n)$ — искомая функция целочисленного аргумента; $a_1, \dots, a_k$ — действительные постоянные.

Общее решение данного уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

1) Пусть правая часть исходного уравнения имеет вид

$$g(n) = r^n P(n),$$

где $P(n)$ — многочлен от n степени m ; r — действительное число.

Если r не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид

$$f_{\text{чн}}(n) = r^n Q(n),$$

где $Q(n)$ — многочлен степени m ; если же r является j -кратным корнем характеристического уравнения, то $Q(n)$ — многочлен степени $m+j$.

2) Если правая часть $g(n)$ исходного уравнения имеет вид

$$g(n) = P(n) \sin \alpha n \quad \text{или} \quad g(n) = P(n) \cos \alpha n,$$

то частное решение ищется в виде

$$f_{\text{чн}}(n) = Q(n) \sin \alpha n + R(n) \cos \alpha n.$$

3) Если $g(n) = P(n) \operatorname{sh} \alpha n$ или $g(n) = P(n) \operatorname{ch} \alpha n$, то частное решение ищется в виде

$$f_{\text{чн}}(n) = Q(n) \operatorname{sh} \alpha n + R(n) \operatorname{ch} \alpha n$$

$Q(n)$ и $R(n)$ — многочлены, степень которых определяется по правилу, указанному в пункте 1).

Пример 9.7. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 2^n(n+1).$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$f(n) = C_1 3^n + C_2.$$

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$f_{\text{чн}}(n) = 2^n (An + B),$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Подставляя $f_{\text{чн}}(n)$ в исходное уравнение, получим

$$2^{n+2}(An + 2A + B) - 4 \cdot 2^{n+1}(An + A + B) + 3 \cdot 2^n(An + B) = 2^n(n + 1)$$

или

$$4(An + 2A + B) - 8(An + A + B) + 3(An + B) = n + 1.$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} 4A - 8A + 3A = 1, \\ 8A + 4B - 8A - 8B + 3B = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1, \\ B = -1. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение данного уравнения

$$f_{\text{чп}}(n) = -2^n(n + 1);$$

общее решение

$$f(n) = C_1 3^n + C_2 - 2^n(n + 1).$$

Задача 9.2. Найти решения неоднородных линейных разностных уравнений.

1. $\Delta^2 f(n) + \Delta f(n) + 3f(n) = n$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
2. $\Delta^2 f(n) + 2\Delta f(n) - 3\Delta f(n) = 2^n \cdot 32$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
3. $\Delta^3 f(n) - 3\Delta^2 f(n) + 4\Delta f(n) = 3^n(n + 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
4. $\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) - 5\Delta f(n) = 4^n(n + 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
5. $\Delta^3 f(n) - 5\Delta^2 f(n) + 7\Delta f(n) = 5^n(n + 3)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
6. $\Delta^3 f(n) + 6\Delta^2 f(n) - 7\Delta f(n) = 6^n(n + 4)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
7. $\Delta^3 f(n) - 7\Delta^2 f(n) - 3\Delta f(n) = 7^n(n + 5)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
8. $\Delta^3 f(n) + 3\Delta^2 f(n) - 4\Delta f(n) = 2^n(n + 6)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
9. $\Delta^3 f(n) - 5\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) = 3^n(n + 7)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
10. $\Delta^3 f(n) + 3\Delta^2 f(n) - 3\Delta f(n) = 4^n(n + 8)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
11. $\Delta^3 f(n) - 7\Delta^2 f(n) - 7\Delta f(n) = 2^n(n + 9)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
12. $\Delta^3 f(n) - 3\Delta^2 f(n) - 3\Delta f(n) = 5^n(2n + 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
13. $\Delta^3 f(n) - \Delta^2 f(n) - 3\Delta f(n) = 2^n(3n + 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
14. $\Delta^3 f(n) - 2\Delta^2 f(n) - 3\Delta f(n) = 6^n(4n + 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
15. $\Delta^3 f(n) - 3\Delta^2 f(n) - 5\Delta f(n) = 2^n(5n + 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
16. $\Delta^3 f(n) + 2\Delta^2 f(n) - 3\Delta f(n) = 2^n(6n + 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
17. $2\Delta^3 f(n) - 3\Delta^2 f(n) + 4\Delta f(n) - 5f(n) = 7^n(7n + 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
18. $3\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) - 5\Delta f(n) + 6f(n) = 2^n(8n + 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
19. $4\Delta^3 f(n) - 5\Delta^2 f(n) + 6\Delta f(n) - 7f(n) = 9^n(9n + 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
20. $5\Delta^3 f(n) + 6\Delta^2 f(n) - 7\Delta f(n) + 8f(n) = 2^n(9n - 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
21. $6\Delta^3 f(n) - 7\Delta^2 f(n) + 8\Delta f(n) - 9f(n) = 3^n(8n - 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
22. $9\Delta^3 f(n) + 8\Delta^2 f(n) + 7\Delta f(n) + 6f(n) = 2^n(7n - 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
23. $8\Delta^3 f(n) - 7\Delta^2 f(n) + 6\Delta f(n) - 5f(n) = 4^n(6n - 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
24. $7\Delta^3 f(n) + 6\Delta^2 f(n) - 5\Delta f(n) + 4f(n) = 2^n(5n - 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
25. $6\Delta^3 f(n) + 5\Delta^2 f(n) - 4\Delta f(n) - 3f(n) = 5^n(4n - 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
26. $5\Delta^3 f(n) - 4\Delta^2 f(n) - 3\Delta f(n) - 2f(n) = 2^n(3n - 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
27. $4\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) - 4\Delta f(n) + 3f(n) = 2^n(2n - 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
28. $3\Delta^3 f(n) + 3\Delta^2 f(n) - 3\Delta f(n) + 2f(n) = 7^n(n - 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

$$29. 2\Delta^3 f(n) + 7\Delta^2 f(n) - 7\Delta f(n) + 7f(n) = 3^n(n-2), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 0.$$

$$30. \Delta^3 f(n) - \Delta^2 f(n) + \Delta f(n) - 2f(n) = 4^n(8n-1), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Решение линейных систем разностных уравнений.

Пример 9.8. Решить линейную неоднородную систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} x(n+1) = 2x(n) - y(n) + 2^n, \\ y(n+1) = x(n) - y(n) - 1 - n. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения имеем

$$y(n+2) = x(n+1) - y(n+1) - 2 - n.$$

Заменим $x(n+1)$ первым выражением из системы

$$y(n+2) = 2x(n) - y(n) + 2^n - y(n+1) - 2 - n.$$

Из второго уравнения системы выразим $x(n)$ и подставим в последнее выражение

$$x(n) = y(n+1) + y(n) + 1 + n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y(n+2) &= 2[y(n+1) + y(n) + 1 + n] - y(n) + 2^n - y(n+1) - 2 - n = \\ &= y(n+1) + y(n) + n + 2^n. \end{aligned}$$

Таким образом, получили разностное уравнение

$$y(n+2) - y(n+1) - y(n) = n + 2^n$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y(n) = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Правая часть является суммой двух выражений вида $r^n P(n)$: $1^n n$ и 2^n .

Числа 1 и 2 не являются корнями характеристического уравнения, поэтому:

— для $1^n n$ имеем $r = 1$ и степень многочлена равна 1.

— для 2^n имеем $r = 1$ и степень многочлена равна 0.

Учитывая принцип суперпозиции, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$f_{\text{чн}}(n) = 1^n(An + B) + 2^n C = An + B + 2^n C,$$

где A , B и C — неопределенные коэффициенты. Подставляя $f_{\text{чн}}(n)$ в исходное разностное уравнение, получим

$$\begin{aligned} A(n+2) + B + 2^{n+2}C - A(n+1) - B - 2^{n+1}C - An - B - 2^n C &= n + 2^n, \\ An + 2A + B + 4 \cdot 2^n C - An - A - B - 2 \cdot 2^n C - An - B - 2^n C &= n + 2^n, \\ A - B - An + 2^n C &= n + 2^n. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} A - B = 0, \\ -A = 1, \\ C = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1, \\ A = -1, \\ C = 1. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение данного уравнения

$$f_{\text{ин}}(n) = -n - 1 + 2^n;$$

Общее решение имеет вид

$$y(n) = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + 2^n - 1 - n$$

Учитывая, что $x(n) = y(n+1) + y(n) + 1 + n$, получим

$$\begin{aligned} x(n) &= y(n+1) + y(n) + 1 + n = \\ &= C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + 2^{n+1} - 2 - n + \\ &\quad + C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + 2^n - 1 - n + 1 + n = \\ &= C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 3 \cdot 2^n - 2 - n. \end{aligned}$$

Таким образом, решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x(n) = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 3 \cdot 2^n - 2 - n, \\ y(n) = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + 2^n - 1 - n. \end{cases}$$

Задача 9.3. Решить линейную неоднородную систему разностных уравнений

1. $\begin{cases} x(n+1) = 5x(n) - 2y(n) - 2n - 3, \\ y(n+1) = 2x(n) + 3y(n) + 7 \cdot 2^n. \end{cases}$	16. $\begin{cases} x(n+1) = -5x(n) + 6 - 2y(n) - 1, \\ y(n+1) = 3x(n) - 8y(n) + 3 \cdot 3^n. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x(n+1) = -10x(n) + y(n) - 3n - 15, \\ y(n+1) = -2x(n) - 4y(n) + 7 \cdot 3^n. \end{cases}$	17. $\begin{cases} x(n+1) = -2x(n) - 6y(n) + 7n, \\ y(n+1) = 3x(n) + 4y(n) + 2^n. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x(n+1) = 9x(n) + y(n) + 1, \\ y(n+1) = -x(n) + 9y(n) + 3 \cdot 4^n. \end{cases}$	18. $\begin{cases} x(n+1) = -2x(n) + 7y(n) + 2n + 1, \\ y(n+1) = -x(n) + 2y(n) + 4 \cdot 7^n. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x(n+1) = 4x(n) + 2y(n) + 8n, \\ y(n+1) = 3x(n) + 2y(n) + 4 \cdot 5^n. \end{cases}$	19. $\begin{cases} x(n+1) = 6x(n) - 5y(n) - 2n - 1, \\ y(n+1) = 4x(n) - 2y(n) + 4^n. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x(n+1) = 4x(n) - 13y(n) - n, \\ y(n+1) = 2x(n) - 6y(n) + 14^n. \end{cases}$	20. $\begin{cases} x(n+1) = -8x(n) + 2y(n) + n - 1, \\ y(n+1) = -5x(n) - 2y(n) + 2^n. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x(n+1) = 5x(n) + y(n) + 2n, \\ y(n+1) = -x(n) + 5y(n) + 3^n. \end{cases}$	21. $\begin{cases} x(n+1) = 10x(n) + 5y(n) + 3n - 2, \\ y(n+1) = -x(n) + 8y(n) + 8^n. \end{cases}$
7. $\begin{cases} x(n+1) = -5x(n) + 2y(n) - n, \\ y(n+1) = 4x(n) + 2y(n) + 5 \cdot 11^n. \end{cases}$	22. $\begin{cases} x(n+1) = 5x(n) - 4y(n) + n, \\ y(n+1) = 5x(n) + y(n) + 9^n. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x(n+1) = -2x(n) + 4y(n) - 3n - 5, \\ y(n+1) = -x(n) + 3y(n) + 3^n. \end{cases}$	23. $\begin{cases} x(n+1) = 7x(n) + 4y(n) + 4n, \\ y(n+1) = 6x(n) + 2y(n) + 8^n. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x(n+1) = -10x(n) + y(n) - 1, \\ y(n+1) = -8x(n) - 4y(n) + 7^n. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x(n+1) = -10x(n) - y(n) + 9n, \\ y(n+1) = 2x(n) - 123y(n) + 8 \cdot 2^n. \end{cases}$
11. $\begin{cases} x(n+1) = -2x(n) + y(n) + 6n, \\ y(n+1) = x(n) - 2y(n) + 3 \cdot 7^n. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x(n+1) = 10x(n) - y(n) - 3n, \\ y(n+1) = x(n) + 6y(n) + 4^n. \end{cases}$
13. $\begin{cases} x(n+1) = 10x(n) - y(n) + 3n - 11, \\ y(n+1) = 5x(n) + 4y(n) + 3 \cdot 4^n. \end{cases}$
14. $\begin{cases} x(n+1) = 4x(n) + 2y(n) - 2, \\ y(n+1) = -6x(n) + 2y(n) + 8^n. \end{cases}$
15. $\begin{cases} x(n+1) = 6x(n) - 5y(n) + 3n - 2, \\ y(n+1) = 2x(n) - y(n) + 5^n. \end{cases}$
24. $\begin{cases} x(n+1) = 2x(n) + 3y(n) - 3n, \\ y(n+1) = x(n) + 4y(n) + 6^n. \end{cases}$
25. $\begin{cases} x(n+1) = -6x(n) + 3y(n) - 3, \\ y(n+1) = 4x(n) + 5y(n) + 2 \cdot 4^n. \end{cases}$
26. $\begin{cases} x(n+1) = 2x(n) - 2y(n) + n - 2, \\ y(n+1) = x(n) + 5y(n) + 6^n. \end{cases}$
27. $\begin{cases} x(n+1) = 3x(n) - y(n) - 4n + 3, \\ y(n+1) = 8x(n) - y(n) + 5^n. \end{cases}$
28. $\begin{cases} x(n+1) = 7x(n) - 5y(n) + 3n + 4, \\ y(n+1) = 12x(n) - y(n) + 4^n. \end{cases}$
29. $\begin{cases} x(n+1) = x(n) + y(n) + n - 5, \\ y(n+1) = x(n) + 2y(n) + 12^n. \end{cases}$
30. $\begin{cases} x(n+1) = -5x(n) - y(n) - 2n - 3, \\ y(n+1) = 2x(n) - 3y(n) + 7 \cdot 3^n. \end{cases}$

9.5.2. Решение разностных уравнений методом z-преобразования

Решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами методом z-преобразования производится по той же схеме, что и в случае классического преобразования Лапласа. Применяя z-преобразование к разностным уравнениям и используя теоремы линейности, опережения или изображения разностей, приходим к простому алгебраическому уравнению относительно изображения $F(z)$ искомой функции $f(n)$ (уже с учетом начальных условий). Разрешая это алгебраическое уравнение относительно $F(z)$, получим операторное решение разностного уравнения, оригинал для которого будет искомым решением разностного уравнения, удовлетворяющим начальным условиям.

Пример 9.9. Найти решение уравнения

$$f(n+1) - ef(n) = 1, \quad f(0) = 0.$$

Решение. Пусть $f(n) \div F(z)$. По теореме опережения

$$f(n+1) \div z(F(z) - f(0)) = zF(z).$$

Применяя к обеим частям исходного уравнения z-преобразование, получим операторное уравнение

$$zF(z) - eF(z) = \frac{z}{z-1},$$

откуда

$$F(z) = \frac{z}{(z-e)(z-1)}.$$

Функция $F(z)$ имеет два простых полюса $z=e$, $z=1$. Тогда

$$f(n) = \operatorname{res}_{z=e} F(z) z^{n-1} + \operatorname{res}_{z=1} F(z) z^{n-1} = \operatorname{res}_{z=e} \frac{zz^{n-1}}{(z-e)(z-1)} + \operatorname{res}_{z=1} \frac{zz^{n-1}}{(z-e)(z-1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow e} \left(\frac{zz^{n-1}}{(z-e)(z-1)} (z-e) \right) + \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{zz^{n-1}}{(z-e)(z-1)} (z-1) \right) = \\
&= \lim_{z \rightarrow e} \left(\frac{z^n}{(z-1)} \right) + \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z^n}{(z-e)} \right) = \frac{e^n}{e-1} + \frac{1}{1-e} = \frac{e^n - 1}{e-1}.
\end{aligned}$$

Пример 9.10. Найти решение уравнения

$$f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Решение. Пусть $f(n) \div F(z)$. По теореме опережения

$$f(n+1) \div z(F(z) - f(0)) = zF(z),$$

$$f(n+2) \div z^2(F(z) - f(0) - z^{-1}f(1)) = z^2F(z) - z.$$

Применяя к обеим частям исходного уравнения z -преобразование, получим операторное уравнение

$$z^2F(z) - z - 5zF(z) + 6F(z) = 0,$$

откуда

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z}{(z-2)(z-3)}.$$

Функция $F(z)$ имеет два простых полюса $z = 2$, $z = 3$. Тогда

$$\begin{aligned}
f(n) &= \operatorname{res}_{z=2} F(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_{z=3} F(z)z^{n-1} = \operatorname{res}_{z=2} \frac{z^n}{(z-2)(z-3)} + \operatorname{res}_{z=3} \frac{z^n}{(z-2)(z-3)} = \\
&= \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{z^n}{(z-2)(z-3)} (z-2) \right) + \lim_{z \rightarrow 3} \left(\frac{z^n}{(z-2)(z-3)} (z-3) \right) = \\
&= \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{z^n}{(z-3)} \right) + \lim_{z \rightarrow 3} \left(\frac{z^n}{(z-2)} \right) = \frac{2^n}{-1} + \frac{3^n}{1} = 3^n - 2^n.
\end{aligned}$$

Задача 9.4. Решить линейные разностные уравнения.

1. $y_{n+2} - 9y_{n+1} + 20y_n = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
2. $y_{n+2} - 5y_{n+1} - 4y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
3. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 20y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
4. $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 3y_n = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
5. $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 10y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
6. $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
7. $y_{n+2} - 25y_n = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
8. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
9. $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
10. $y_{n+2} - 9y_{n+1} + 10y_n = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
11. $y_{n+2} + 3y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
12. $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 2y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
13. $y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
14. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
15. $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.

16. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
17. $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
18. $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
19. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 10y_n = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
20. $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 3y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
21. $y_{n+2} - 5y_{n+1} - 4y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
22. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
23. $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
24. $y_{n+2} - 9y_{n+1} + 10y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
25. $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
26. $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 3y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
27. $y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
28. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
29. $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
30. $y_{n+2} + 3y_n = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.

9.5.3. Устойчивость решений разностных уравнений

Решение $f^*(n)$ разностного уравнения порядка k , удовлетворяющее начальным условиям

$$f^*(0) = f_0^*, f^*(1) = f_1^*, \dots, f^*(k-1) = f_{k-1}^*,$$

называется **устойчивым**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $f(n)$ уравнения

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = 0,$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$f(0) = f_0, f(1) = f_1, \dots, f(k-1) = f_{k-1},$$

из совокупности неравенств

$$|f_0 - f_0^*| < \delta, |f_1 - f_1^*| < \delta, \dots, |f_{k-1} - f_{k-1}^*| < \delta$$

следует неравенство $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ при любом $n \geq 0$.

В противном случае решение называется **неустойчивым**.

Если кроме выполнения условия $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ выполняется также условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(n) - f^*(n)| = 0,$$

то решение $f^*(n)$ называется **асимптотически устойчивым**.

Исследование на устойчивость решения $f^*(n)$ неоднородного линейного разностного уравнения

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = g(n)$$

с помощью замены $\varphi(n) = f(n) - f^*(n)$ сводится к исследованию устойчивости **нулевого** (тривиального) решения однородного уравнения

$$\varphi(n+k) + a_1 \varphi(n+k-1) + \dots + a_k \varphi(n) = 0.$$

Для исследования на устойчивость нулевого решения $f(n) \equiv 0$ уравнения $f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = 0$ пользуются следующим правилом:

1) Если все корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы, то решение $f(n) \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

2) Если хотя бы один корень характеристического уравнения по модулю больше единицы, то решение $f(n) \equiv 0$ неустойчиво.

3) Если характеристическое уравнение имеет простые корни с модулями, равными единице, а остальные корни, если они есть, по модулю меньше единицы, то решение $f(n) \equiv 0$ устойчиво, но не асимптотически.

4) Если характеристическое уравнение имеет хотя бы один кратный корень с модулем, равным единице, то решение $f(n) \equiv 0$ неустойчиво.

Пример 9.11. Исследовать на устойчивость нулевое решение $f(n) \equiv 0$ уравнения

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2}.$$

Тогда

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1 \pm i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

следовательно, решение $f(n) \equiv 0$ заданного уравнения асимптотически устойчиво.

Пример 9.12. Исследовать на устойчивость нулевое решение $f(n) \equiv 0$ уравнения

$$f(n+2) - 2f(n+1) + 5f(n) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Тогда

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |1 \pm 2i| = \sqrt{5} > 1.$$

Оба корня по модулю больше единицы, значит, решение $f(n) \equiv 0$ не устойчиво.

Задача 9.5. Исследовать на устойчивость нулевое решение $f(n) \equiv 0$ уравнения.

1. $y_{n+3} - 9y_{n+1} + 20y_n = 0.$

16. $y_{n+3} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0.$

2. $y_{n+3} - 5y_{n+1} - 4y_n = 0.$

17. $y_{n+3} - 6y_{n+1} + 5y_n = 0.$

3. $y_{n+3} - 4y_{n+1} + 20y_n = 0.$

18. $y_{n+3} - y_{n+1} - 2y_n = 0.$

4. $y_{n+3} + 4y_{n+1} + 3y_n = 0.$

19. $y_{n+3} - 2y_{n+1} + 10y_n = 0.$

5. $y_{n+3} + 2y_{n+1} - 10y_n = 0.$

20. $y_{n+3} + 4y_{n+1} + 3y_n = 0.$

6. $y_{n+3} + y_{n+1} - 2y_n = 0.$

21. $y_{n+3} - 5y_{n+1} - 4y_n = 0.$

7. $y_{n+3} - 25y_n = 0$.

8. $y_{n+3} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0$.

9. $y_{n+3} - 7y_{n+1} + 12y_n = 0$.

10. $y_{n+3} - 9y_{n+1} + 10y_n = 0$.

11. $y_{n+3} + 3y_n = 0$.

12. $y_{n+3} - 6y_{n+1} + 2y_n = 0$.

13. $y_{n+3} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0$.

14. $y_{n+3} - 2y_{n+1} + 5y_n = 0$.

15. $y_{n+3} - 7y_{n+1} + 12y_n = 0$.

22. $y_{n+3} - 2y_{n+1} + 5y_n = 0$.

23. $y_{n+3} - 7y_{n+1} + 12y_n = 0$.

24. $y_{n+3} - 9y_{n+1} + 10y_n = 0$.

25. $y_{n+3} - 7y_{n+1} + 12y_n = 0$.

26. $y_{n+3} + 4y_{n+1} + 3y_n = 0$.

27. $y_{n+3} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0$.

28. $y_{n+3} - 2y_{n+1} + 5y_n = 0$.

29. $y_{n+3} - y_{n+1} - 2y_n = 0$.

30. $y_{n+3} + 3y_n = 0$.

Известно, что функция

$$\lambda = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$$

отображает внутренность единичного круга плоскости λ на левую полуплоскость плоскости ω . Корнями характеристического уравнения, лежащими внутри единичного круга $|\lambda| < 1$ (т. е. по модулю меньшим единицы), будут соответствовать корни преобразованного уравнения

$$(\omega + 1)^k + a_1(\omega + 1)^{k-1}(\omega - 1) + \dots + a_k(\omega - 1)^k = 0$$

или

$$b_0\omega^k + b_1\omega^{k-1} + \dots + b_n = 0,$$

лежащей в левой полуплоскости плоскости ω .

Вопрос о расположении корней последнего уравнения может быть решен с помощью критерия Рауса–Гурвица или критерия Михайлова.

Рассмотрим уравнение

$$f(n+2) + a_1f(n+1) + a_2f(n) = 0.$$

Найдем необходимые и достаточные условия того, что корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

находятся в единичном круге $|\lambda| < 1$.

Пусть $\lambda = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$. Тогда уравнение $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ примет вид

$$(\omega + 1)^2 + a_1(\omega + 1)(\omega - 1) + a_2(\omega - 1)^2 = 0$$

или

$$(1 + a_1 + a_2)\omega^2 + (2 - 2a_2)\omega + (1 - a_1 + a_2) = 0.$$

К последнему многочлену применим критерий Рауса–Гурвица.

Вспомним, что для многочлена $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ матрица Гурвица имеет

вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, для нашего случая матрица Гурвица будет

$$\begin{pmatrix} 2-2a_2 & 1+a_1+a_2 \\ 0 & 1-a_1+a_2 \end{pmatrix}.$$

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = 2-2a_2, \quad \Delta_2 = (2-2a_2)(1-a_1+a_2).$$

В силу указанного критерия (чтобы корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры матрицы Гурвица) должно быть

$$1+a_1+a_2 > 0, \quad 1-a_2 > 0, \quad 1-a_1+a_2 > 0.$$

Итак, характеристическое уравнение $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ имеет в круге $|\lambda| < 1$ корни тогда и только тогда, когда выполняются последние условия.

Следствие. Линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$f(n+2) + a_1f(n+1) + a_2f(n) = 0$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение $f(n) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют условиям

$$1+a_1+a_2 > 0, \quad 1-a_2 > 0, \quad 1-a_1+a_2 > 0.$$

Пример 9.13. Исследовать на устойчивость нулевое решение $f(n) \equiv 0$ уравнения

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$f(n+2) - f(n+1) + \frac{1}{2}f(n) = 0.$$

Здесь $a_1 = -1$, $a_2 = 1/2$. Тогда

$$1+a_1+a_2 = \frac{1}{2} > 0,$$

$$1-a_2 = \frac{1}{2} > 0,$$

$$1-a_1+a_2 = \frac{5}{2} > 0.$$

Условия критерия Рауса–Гурвица выполнены, следовательно, решение $f(n) \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Пример 9.14. Исследовать на устойчивость нулевое решение $f(n) \equiv 0$ уравнения

$$f(n+2) + f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

Решение. Здесь $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Тогда

$$1+a_1+a_2 = 4 > 0,$$

$$1-a_2 = -1 < 0.$$

Нулевое решение неустойчиво.

Задача 9.6. Используя критерий Рауса–Гурвица, исследовать на устойчивость нулевое решение разностных уравнений.

$$1. \quad 11f(n+4) - 8f(n+3) + 8f(n+2) - 4f(n+1) + f(n) = 0.$$

$$2. \quad f(n+4) + f(n+3) + f(n) = 0.$$

3. $12f(n+4) - 3f(n+3) + 2f(n+2) + 2f(n+1) - 2f(n) = 0.$

4. $7f(n+4) - 4f(n+3) + 30f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 0.$

5. $f(n+5) - f(n+1) + f(n) = 0.$

6. $f(n+5) - f(n+2) - f(n) = 0.$

5. $f(n+5) + f(n+1) - f(n) = 0.$

10. ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Любая система может рассматриваться как цепь взаимодействующих (физически и информационно) элементов, которая обладает способностью передавать физические воздействия и информационные сигналы в одном, строго определенном направлении. Каждый конструктивный элемент системы рассматривается как преобразователь входного воздействия в выходную реакцию. При этом составляется математическая модель, которая отражает существенные для данной цепи взаимосвязи между входными и выходными элементами.

При дальнейшем изложении материала будем полагать, что

$$i^2 = j^2 = -1.$$

10.1. Характеристики сигналов, элементов и систем

При экспериментальном и теоретическом исследовании автоматических систем и их элементов наибольшее применение находят следующие четыре типовых (эталонных) воздействия: ступенчатое, импульсное, гармоническое и линейное.

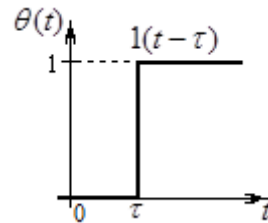
Динамической характеристикой системы называют ее реакцию на специальное входное возмущение (функция Хевисайда, функция Дирака, гармоническое воздействие, линейное воздействие).

Единичное ступенчатое воздействие (единичный скачок, функция Хевисайда) — воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до единицы в момент времени τ и далее остается постоянным.

$$1(t - \tau) = \theta(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau; \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Очевидно,

$$f(t) 1(t - \tau) = \begin{cases} f(t), & t \geq \tau; \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$



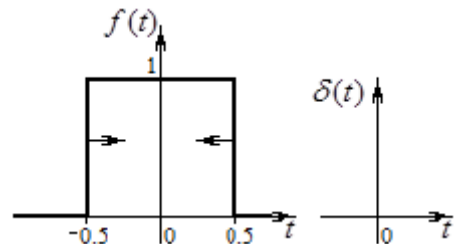
В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, писать $f(t)$ вместо $f(t) 1(t)$ (в случае, если $\tau = 0$), считая, что рассматриваемые нами функции продолжены нулем для отрицательных t .

Ступенчатое воздействие чаще всего используют при испытаниях и расчетах систем стабилизации, т. к. эти воздействия наиболее близки к реальным входным (задающим и возмущающим) воздействиям систем стабилизации.

Импульсное воздействие (δ -функция, функция Дирака) — одиночный импульс прямоугольной формы, имеющий достаточно большую высоту и весьма малую продолжительность (по сравнению с инерционностью испытываемой системой).

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0, \end{cases}$$

причем



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Если данный сигнал сдвинуть на τ , то

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty, & t = \tau; \\ 0, & t \neq \tau. \end{cases}$$

Таким образом, δ -функцию можно рассматривать как импульс, имеющий бесконечно большую высоту, бесконечно малую длительность и единичную площадь.

δ -функция и функция Хевисайда связаны соотношением:

$$\delta(t - \tau) = \frac{d}{dt} 1(t - \tau)$$

или

$$\int_{-\infty}^t \delta(\eta - \tau) d\eta = 1(t - \tau).$$

Основное свойство δ -функции выражается как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \delta(\eta - t) d\eta = f(t)$$

которое означает, что неединичная импульсная функция $f(\eta) \delta(\eta - t)$, полученная как произведение произвольной функции $f(\eta)$ на δ -функцию, существует только в момент $\eta = t$, а площадь ее равна значению функции $f(\eta)$ в точке $\eta = t$. Данное свойство δ -функции называю **фильтрующим** или **«выхватывающим»**.

δ -функция определяется как функция равная нулю всюду, кроме одной точки, где она равна ∞ , причем интеграл от этой функции равен 1, т. е. по факту не является функцией в строгом понимании данного определения. δ -функция относится к классу так называемых **обобщенных функций**. Свойства δ -функции приведены в приложение 9.

Гармоническое воздействие описывается функцией

$$f(t) = A \sin \omega t \quad (-\infty < t < \infty),$$

где A — амплитуда сигнала; $\omega = 2\pi/T$ — круговая частота, рад/с; T — период сигнала, с.

Гармоническое воздействие широко используется при исследовании точности и устойчивости как стабилизирующих, так следящих и автоматических систем, т. к. реальные возмущения часто имеют периодический характер и могут быть представлены в виде суммы гармонических составляющих.

Линейное воздействие:

$$f(t) = kt \quad (-\infty < t < \infty),$$

где k характеризует скорость нарастания воздействия $f(t)$.

Временные характеристики.

Переходная функция $h(t)$ — отклик системы на единичный скачок $1(t)$ при нулевых начальных условиях, т. е. на вход системы подается $x(t) = 1(t)$.

Импульсная переходная функция $\omega(t)$ — отклик системы на дельта функцию $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях.

Основные положения гармонического анализа сигналов.

Гармонический анализ — представление сложных сигналов (периодических и непериодических) в виде совокупности элементарных гармонических составляющих (гармоник).

Любая периодическая функция с периодом $T = 2l$, удовлетворяющая условиям Дирихле (конечное число разрывов на интервале периода T), может быть разложена в бесконечный сходящийся тригонометрический ряд — **ряд Фурье**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t),$$

где $\omega_k = 2\pi k/T$ — круговые частоты основной $k=1$ и k -й гармоник, рад/с; a_0 , a_k , b_k — коэффициенты Фурье, определяемые как:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_k t dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \omega_k t dt \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Постоянная составляющая $a_0/2$ ряда, соответствующая $k=0$, равна среднему за период T значению сигнала.

Ряд Фурье обладает важным свойством: при заданном конечном числе членов дает лучшее приближение (по критерию суммы квадратов отклонений), чем любое другое разложение функции $f(t)$.

Используя формулу Эйлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$$

и ее модификации

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

перепишем тригонометрическую форму записи ряда Фурье.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2} + b_k \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2i} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) e^{i\omega_k t} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) e^{-i\omega_k t} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Тогда

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{i\omega_k t} + c_{-k} e^{-i\omega_k t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}.$$

Коэффициенты c_k определим как

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t) dt = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_k t} dt,$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{i\omega_k t} dt$$

или сокращенно

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Полученный ряд

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t},$$

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

является **комплексной формой ряда Фурье** функции $f(t)$ с комплексными коэффициентами (амплитудами) c_k , где $e^{i\omega_k t}$ — комплексная гармоника.

Связь между коэффициентами рядов выражается как

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad a_k = \operatorname{Re} 2c_k, \quad b_k = -\operatorname{Im} 2c_k, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}.$$

В комплексной форме ряда Фурье суммирование производится как по положительным, так и по отрицательным значениям k . Это означает, что данная форма ряда Фурье допускает существование и положительных, и отрицательных частот ω_k .

Зависимость модуля $|c_k|$ комплексной амплитуды от частоты ω_k называют **амплитудным спектром** сигнала $f(t)$, т. е.

$$|c_k(\omega_k)| = \left| \frac{a_k - ib_k}{2} \right| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}.$$

Фазовый спектр.

$$\varphi = \arg c_k(\omega_k) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}, & a_k > 0, b_k \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} + \pi, & a_k < 0, b_k \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} - \pi, & a_k < 0, b_k < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & a_k = 0, b_k > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a_k = 0, b_k < 0. \end{cases}$$

Определим амплитудный спектр любой последовательности прямоугольных импульсов амплитуды A и длительностью τ

$$\begin{aligned} S(\omega_k) = c_k &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{2l} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-i\omega_k t} dt = \frac{A}{-i\omega_k 2l} e^{-i\omega_k t} \Bigg|_{t=-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\ &= \frac{A}{-i\omega_k 2l} \left(\exp\left(-i\omega_k \frac{\tau}{2}\right) - \exp\left(i\omega_k \frac{\tau}{2}\right) \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{\omega_k l} \cdot \frac{\exp\left(i\omega_k \frac{\tau}{2}\right) - \exp\left(-i\omega_k \frac{\tau}{2}\right)}{2i} = A \frac{\sin \omega_k \frac{\tau}{2}}{\omega_k l}.$$

Таким образом, спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов представляет собой множество гармоник с огибающей вида $S(\omega_k) = A \frac{\sin \omega_k \frac{\tau}{2}}{\omega_k l}$.

Постоянная составляющая огибающей $S(0)$ определим как

$$S(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} A \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega l} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} A \frac{\frac{\tau}{2} \cos \omega \frac{\tau}{2}}{l} = A \frac{\frac{\tau}{2}}{l} = A \frac{\tau}{2l} = A \frac{\tau}{T} = \frac{A}{Q},$$

где $Q = \frac{T}{\tau} > 1$ — **скважность импульсов** и задает отношение периода повторения импульсов к длительности одиночного импульса.

Любой непериодический сигнал в виде импульса конечной длительности можно рассматривать как предельный частный случай соответствующего периодического сигнала, если устремить период T к бесконечности, не заменяя при этом длительности импульса.

Пусть $T \rightarrow \infty$. Комплексную форму ряда Фурье можно преобразовать к виду (**интеграл Фурье**)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t} d\omega,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Подставим c_k в интеграл Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \right) e^{i\omega_k t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \right) e^{i\omega_k t} d\omega.$$

Обозначим

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Функция $F(\omega)$ называется **преобразованием Фурье (спектр)** или **образом Фурье** функции $f(t)$.

Тогда можем записать **обратное преобразование Фурье**

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega_k t} d\omega.$$

Так же записывают, если

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_k t} dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega_k t} d\omega.$$

Функцию $F(\omega)$ также называют **спектральной функцией** функции $f(t)$.

Введем понятия.

$|F(\omega)|$ — **спектральная плотность** — преобразование Фурье ковариационной функции стационарного случайного процесса

$$|F(\omega)| = \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{-i\omega_k t} dt,$$

где $R(t) = S_0 \delta(t)$, S_0 — интенсивность белого шума.

$|F(\omega)|^2$ — **энергетическая спектральная плотность**.

Спектральный анализ на основе быстрого преобразования Фурье (БПФ).

БПФ — алгоритм переноса сведений о сигнале, заданном 2^m (m — целое число) отсчетами из временной области в частотную.

В Mathcad для приближенного спектрального анализа используется функция $\text{fft}(v)$. Обратное преобразование реализует оператор $\text{ifft}(u)$.

Оператор	Назначение	Результат
fft(v)	Прямое БПФ 2^m -мерного вещественного вектора v , где v — вектор, элементы которого хранят отсчеты функции $f(t)$	Вектор A размерности $1+2^{m-1}$ с комплексными элементами — отсчетами в частотной области
ifft(u)	Обратное БПФ для вектора u с $1+2^{m-1}$ комплексными элементами	Вектор A размерности с 2^m действительными элементами

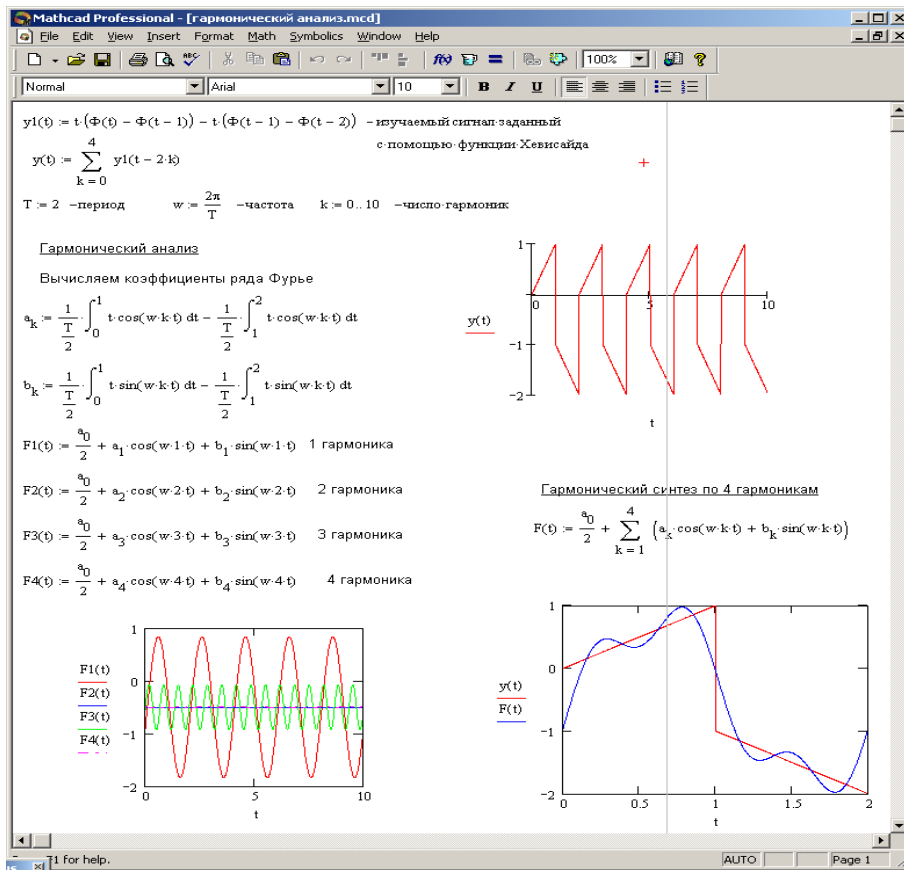
Пример 5.8. Дан периодический сигнал

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ -t, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

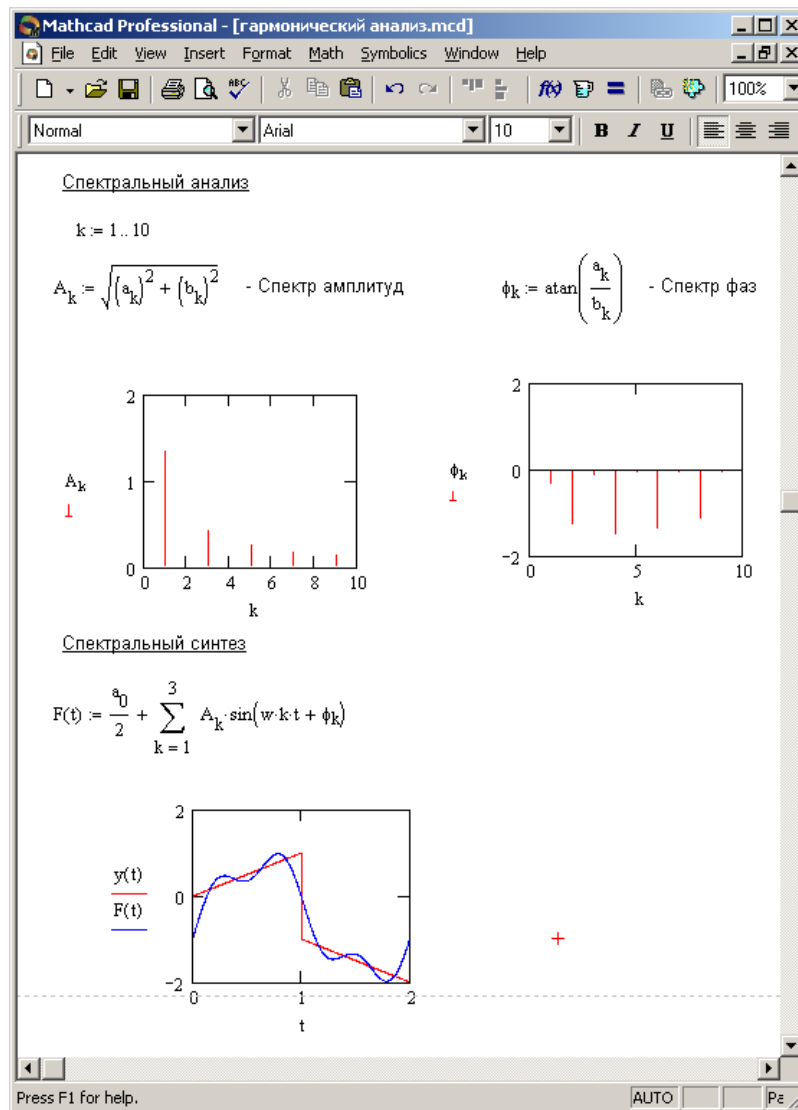
1. Провести гармонический анализ и синтез данного сигнала по трем гармоникам.
2. Провести спектральный анализ и синтез изучаемого сигнала по трем гармоникам
3. Выполнить спектральный анализ и синтез сигнала с помощью быстрого преобразования Фурье, задав исходную функцию дискретно в 128 отсчетах.
4. Выполнить фильтрацию заданного сигнала, предварительно присоединив к сигналу шум.

Решение. Решение данной задачи проведем в среде Mathcad.

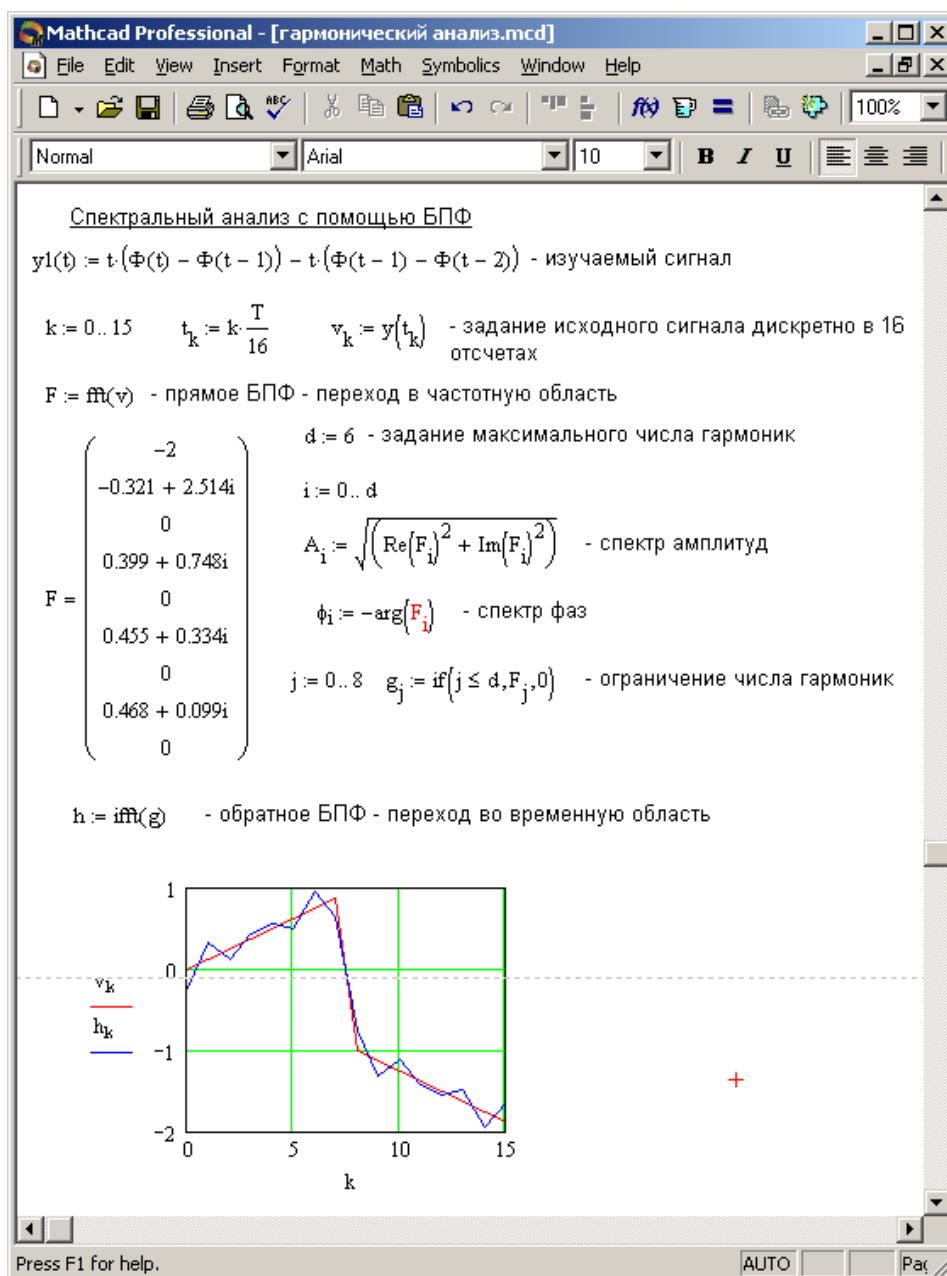
1. Проведем гармонический анализ, заданного сигнала.



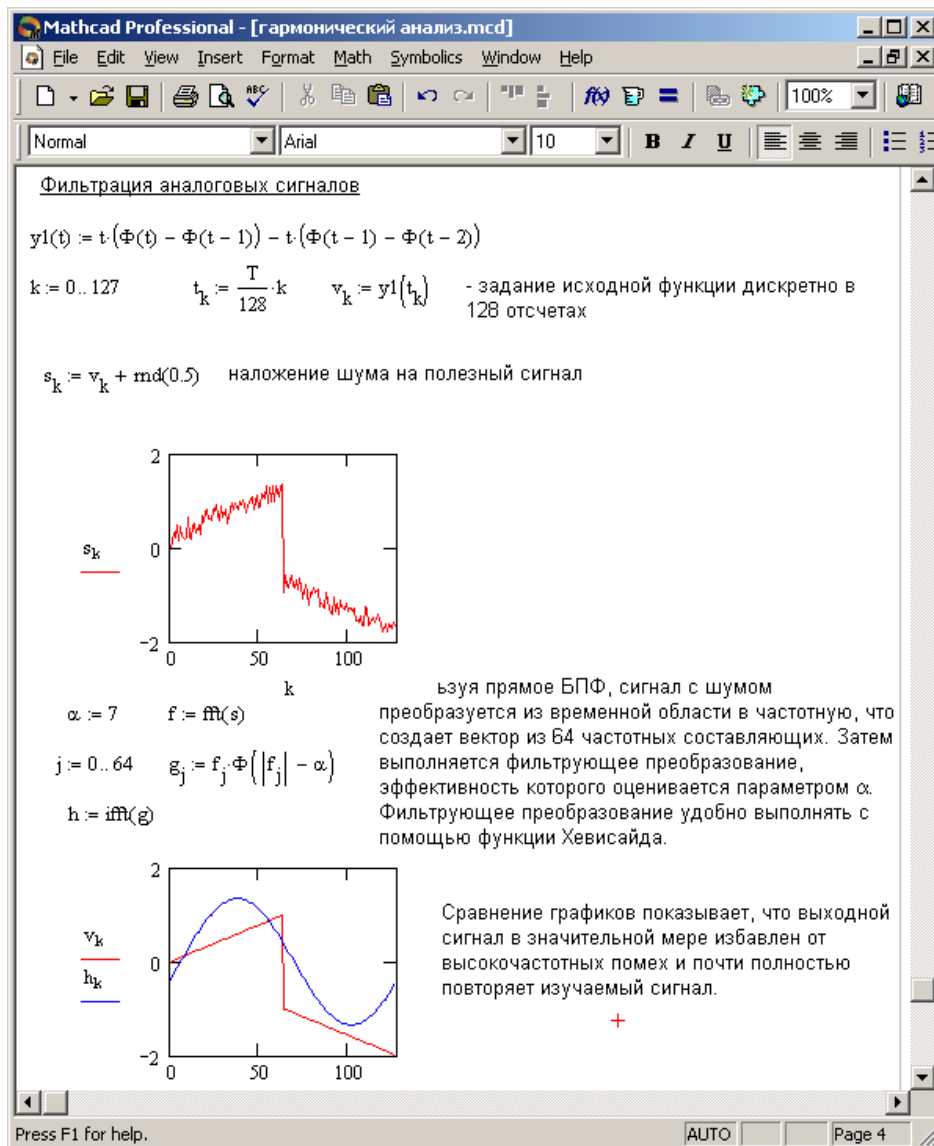
2. Спектральный анализ.



3. Спектральный анализ и синтез сигнала с помощью быстрого преобразования Фурье.



4. Фильтрация заданного сигнала.

**Задача 31.** Для заданного сигнала

1. провести гармонический анализ и синтез данного сигнала по трем гармоникам;
2. провести спектральный анализ и синтез изучаемого сигнала;
3. выполнить спектральный анализ и синтез сигнала с помощью быстрого преобразования Фурье, задав исходную функцию дискретно в 128 отсчетах;
4. выполнить фильтрацию заданного сигнала, предварительно присоединив к сигналу шум.

$$1. f(t) = \begin{cases} 5, & -\pi < t < 0, \\ -3, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

$$3. f(t) = \begin{cases} -7, & -\pi < t < 0, \\ -2, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

$$2. f(t) = \begin{cases} t, & -\pi < t < 0, \\ -3, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

$$4. f(t) = \begin{cases} -2, & -\pi < t < 0, \\ 3, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

5. $f(t) = \begin{cases} -t, & -\pi < t < 0, \\ 0, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
7. $f(t) = \begin{cases} 3, & -\pi < t < 0, \\ -2, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
9. $f(t) = \begin{cases} -t, & -\pi < t < 0, \\ 0, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
11. $f(t) = \begin{cases} 6, & -\pi < t < 0, \\ 23, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
13. $f(t) = \begin{cases} 2t, & -\pi < t < 0, \\ 1, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
15. $f(t) = \begin{cases} t-1, & -\pi < t < 0, \\ 2+t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
17. $f(t) = \begin{cases} 1+\frac{t}{2}, & -\pi < t < 0, \\ 0, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
19. $f(t) = \begin{cases} 1-t, & -\pi < t < 0, \\ t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
21. $f(t) = \begin{cases} 1+t, & -\pi < t < 0, \\ \frac{t}{2}, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
23. $f(t) = \begin{cases} t-1, & -\pi < t < 0, \\ \frac{t}{2}, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
25. $f(t) = \begin{cases} t+2, & -\pi < t < 0, \\ -2t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
27. $f(t) = \begin{cases} t, & -\pi < t < 0, \\ -t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
29. $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}-1, & -\pi < t < 0, \\ -3t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
6. $f(t) = \begin{cases} t+1, & -\pi < t < 0, \\ 1, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
8. $f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t < 0, \\ t+2, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
10. $f(t) = \begin{cases} t+1, & -\pi < t < 0, \\ 4, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
12. $f(t) = \begin{cases} 48t, & -\pi < t < 0, \\ -31, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
14. $f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t < 0, \\ 2t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
16. $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0, \\ t-4, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
18. $f(t) = \begin{cases} 2, & -\pi < t < 0, \\ \frac{t}{3}, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
20. $f(t) = \begin{cases} t+1, & -\pi < t < 0, \\ 1, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
22. $f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t < 0, \\ -2, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
24. $f(t) = \begin{cases} -2, & -\pi < t < 0, \\ 5t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
26. $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & -\pi < t < 0, \\ -3, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
28. $f(t) = \begin{cases} 1-\frac{t}{2}, & -\pi < t < 0, \\ 1-t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$
30. $f(t) = \begin{cases} 2-t, & -\pi < t < 0, \\ \frac{t}{3}, & 0 < t < \pi. \end{cases}$

Линеаризация характеристик.

На практике некую характеристику (воздействие) представляющую собой степенную, логарифмическую и т. д. функции или их сумму (комбинацию) необходимо представить в упрощенном виде — линейном. **Линеаризация по методу касательной** заключается в разложении функции $y(x)$ в интервале вокруг некоторой точки x_0 в ряд Тейлора и в последующем учете первых двух членов ряда

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0),$$

где $y'(x_0)$ — значение производной функции $y(x)$ в заданной рабочей точке с координатами x_0 и y_0 . Геометрически это означает замену кривой $y(x)$ касательной, проведенной в точке (x_0, y_0) . Последнее выражение можно переписать в виде

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Обозначив $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$, $k = y'(x_0)$, запишем

$$\Delta y = k \Delta x \Rightarrow k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Коэффициент пропорциональности между отклонениями входной и выходной величины называют **передаточным коэффициентом**.

Линейные дифференциальные уравнения.

Наиболее общей и наиболее полной формой математического описания передаточных свойств автоматических систем и их элементов является дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 x'(t) + b_0 x(t),$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — входной и выходной сигналы; n и m — порядки старших производных выходного и входного сигналов; $a_0, \dots, a_n$ и $b_0, \dots, b_m$ — постоянные коэффициенты.

Для нахождения частного решения данного уравнения, т. е. для нахождения $y(t)$ при заданном $x(t)$, необходимо знание начальных условий

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Выходной сигнал линейной системы (в силу принципа суперпозиции) представляется в виде суммы свободного и вынужденного движений:

$$y(t) = y_c(t) + y_{\text{вын}}(t).$$

Свободное движение $y_c(t)$ происходит при отсутствии внешнего воздействия ($x(t) = 0$) вследствие ненулевых начальных условий и является решением однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному уравнению. В случае, когда **начальные условия нулевые**, свободное движение в системе отсутствует $y_c(t) = 0$.

Вынужденное движение $y_{\text{вын}}(t)$ происходит вследствие внешнего воздействия $x(t)$ при нулевых начальных условиях и является решением неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях. Вынужденное движение $x(t)$ отлично от нуля только после приложения внешнего воздействия в момент времени t_0 , тогда вынужденное движение системы будем обозначать $y_{\text{вын}}(t) \cdot 1(t - t_0)$.

Пример. Найти реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением $T\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$, $T > 0$, на входной сигнал $x(t) = 1(t)$ при нулевых начальных условиях.

Решение.

1) Найдем свободное движение. Найдем решение уравнения $T\dot{y}(t) + y(t) = 0$ при $y(0) = 0$. Характеристическое уравнение $Tk + 1 = 0$ имеет корень $k = -1/T$. Тогда $y_c(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}$. С учетом начальных условий $C = 0$. Тогда $y_c(t) = 0$.

2) Найдем вынужденное движение как решение уравнения $T\ddot{y}(t) + y(t) = 1$ при $y(0) = 0$.

Общее решение однородного уравнения: $y_{oo}(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}$.

Частное решение неоднородного уравнения: $y_{чн}(t) = 1$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{вын}(t) = y_{oo}(t) + y_{чн}(t) = Ce^{-\frac{t}{T}} + 1.$$

С учетом начальных условий $y(0) = C + 1 = 0$, $C = -1$, запишем

$$y_{вын}(t) = y_{oo}(t) + y_{чн}(t) = -e^{-\frac{t}{T}} + 1.$$

3) Выходной сигнал равен

$$y(t) = y_c(t) + y_{вын}(t) = 0 + (-e^{-\frac{t}{T}} + 1) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}.$$

Здесь и далее $p = s + i\sigma$.

Применим к дифференциальному уравнению преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим операторное уравнение

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)Y(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0)X(p)$$

Для всех реальных систем $m \leq n$. Если в процессе формальных выкладок получается уравнение, у которого $m > n$, то говорят, что это уравнение соответствует **физически нереализуемой** системе.

Введя обозначения

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0,$$

$$K(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0,$$

дифференциальное уравнение в операторной форме можно записать как

$$D(p)Y(p) = K(p)X(p).$$

Вспомним, что **импульсная переходная функция** $\omega(t)$ — отклик системы на дельта функцию $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях.

Передаточной функцией $W(p)$ стационарной линейной системы называется преобразование Лапласа импульсной переходной функции $\omega(t)$:

$$W(p) = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-pt} dp.$$

По дифференциальному уравнению в операторной форме **передаточная функция** определяется как отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях:

$$D(p)Y(p) = K(p)X(p) \Rightarrow \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K(p)}{D(p)},$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \Rightarrow W(p)X(p) = Y(p).$$

$$\frac{X(p)}{\boxed{W(p)}} = Y(p)$$

Частотные характеристики.

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и систем в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием.

Пусть на вход линейного элемента в момент времени $t = 0$ подано гармоническое воздействие определенной частоты ω

$$x(t) = x_m \sin \omega t.$$

Через некоторое время, необходимое для протекания переходного процесса (т. е. для исчезновения свободной составляющей — решение однородного дифференциального уравнения), элемент войдет в режим установившихся вынужденных колебаний, а выходная величина $y(t)$ будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой, но с отличающейся амплитудой y_m и со сдвигом по оси времени:

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Если проводить такой эксперимент при фиксированном x_m для различных значений частоты, то оказалось, что амплитуда y_m и фазовый сдвиг φ зависят от частоты воздействия, а также от типа и параметров элемента. Так же амплитуда выходного сигнала y_m зависит еще от амплитуды входного сигнала x_m .

Зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигналов y_m/x_m от частоты называю **амплитудной частотной характеристикой (АЧХ)** $A(\omega)$. Зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты называю **фазовой частотной характеристикой (ФЧХ)** $\varphi(\omega)$.

АЧХ показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты; имеет размерность, равную отношению размерности выходной величины к размерности входной. ФЧХ — какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент при различных частотах.

Вспомним, что **импульсная переходная функция** $\omega(t)$ — отклик системы на дельта функцию $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях.

Частотной характеристикой $W(i\omega)$ (**амплитудно-фазовой частотной характеристикой**) называется преобразование Фурье импульсной переходной функции:

$$W(i\omega) = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Существует связь между частотной характеристикой и передаточной функцией:

$$W(p) \Big|_{p=i\omega} = W(i\omega).$$

Частотная характеристика является комплекснозначной функцией вещественного аргумента $\omega \in [0, \infty)$, и может быть представлена как

$$W(i\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)} = A(\omega) \cdot [\cos \varphi(\omega) + i \sin \varphi(\omega)] = U(\omega) + iV(\omega),$$

где $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ — **амплитудная и фазовая частотные характеристики**.

$$A(\omega) = |W(i\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg W(i\omega)$$

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \sqrt{U^2 + V^2}; \quad \varphi(\omega) = \arg W(i\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, & U(\omega) > 0, V(\omega) \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} + \pi, & U(\omega) < 0, V(\omega) \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} - \pi, & U(\omega) < 0, V(\omega) < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & U(\omega) = 0, V(\omega) > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & U(\omega) = 0, V(\omega) < 0. \end{cases}$$

Заметим, что в начале координат $\arg W(i\omega)$ не определен.

Частотная характеристика $W(i\omega)$ изображается годографом в координатах U , V или в полярных координатах A , φ .

Также, если работа системы описывается дифференциальным уравнением, можно записать

$$W(i\omega) = \frac{b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + b_1(i\omega) + b_0}{a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + a_1(i\omega) + a_0}.$$

Для экспериментального нахождения частотной характеристики на вход динамической системы при помощи генератора подается гармонический сигнал $x(t) = x_m \sin \omega t$. На выходе измеряется амплитуда и фаза гармонического сигнала $y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi)$, а затем вычисляется отношение амплитуд выходного и входного сигналов $A(\omega) = \frac{y_m}{x_m}$. Повторяя описанную процедуру при различных значениях частоты $\omega \in [0, \infty)$, строят годограф частотной характеристики.

При практических расчетах автоматических систем удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат.

Логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАЧХ) называется функция

$$L(\omega) = 20 \lg |W(i\omega)| = 20 \lg A(\omega).$$

Тогда

$$W(i\omega) = e^{0,05L(\omega) \ln 10 + i\varphi(\omega)}.$$

Пара $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ называется **логарифмической амплитудно-фазовой частотной характеристикой (ЛАФЧХ)** системы.

Говорят, что частоты ω_1 и ω_2 двух гармонических сигналов $x(t) = x_m \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $y(t) = y_m \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ отличаются на декаду, если $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10$ (соответственно $\lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = 1$). Отношение мощностей сигналов измеряется в децибелах (дБ): 1 децибел равен 0,1 бела (1 б = 10 дБ). Один бел соответствует увеличению мощности гармонического сигнала в 10 раз, 2 б — в 100 раз, и т. д. $A(\omega) = \frac{y_m}{x_m}$, а мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды. Поэтому для выражения в белах отноше-

ния мощностей сигналов следует вычислять десятичный логарифм от квадрата амплитудной характеристики:

$$\lg[A(\omega)]^2 = 2 \lg A(\omega).$$

Умножив данную величину на 10, получим ее выражение в децибелах. Поэтому в ЛАЧХ стоит множитель 20.

При построении ЛАФЧХ по оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмическом масштабе, по оси ординат — равномерная шкала децибел. Начало координат помещают в точке $\omega = 1$, т. к. $\lg 1 = 0$. Точка $\omega = 0$ лежит в $-\infty$. Верхняя полуплоскость ЛАЧХ соответствует значениям $A > 1$ (усиление амплитуды), а нижняя полуплоскость — значениям $A < 1$ (ослабление амплитуды).

Пример. Построить частотные характеристики системы, описываемой дифференциальным уравнением при нулевых начальных условиях

$$2\ddot{y} + y = 2x.$$

Решение. Запишем дифференциальное уравнение в операторной форме

$$2pY(p) + Y(p) = 2X(p) \Rightarrow (2p + 1)Y(p) = 2X(p).$$

Тогда передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{2}{2p + 1}.$$

Частотная характеристика

$$W(p)\big|_{p=i\omega} = W(i\omega) = \frac{2}{2i\omega + 1} = \frac{2}{1 + 4\omega^2} - i \frac{4\omega}{1 + 4\omega^2}$$

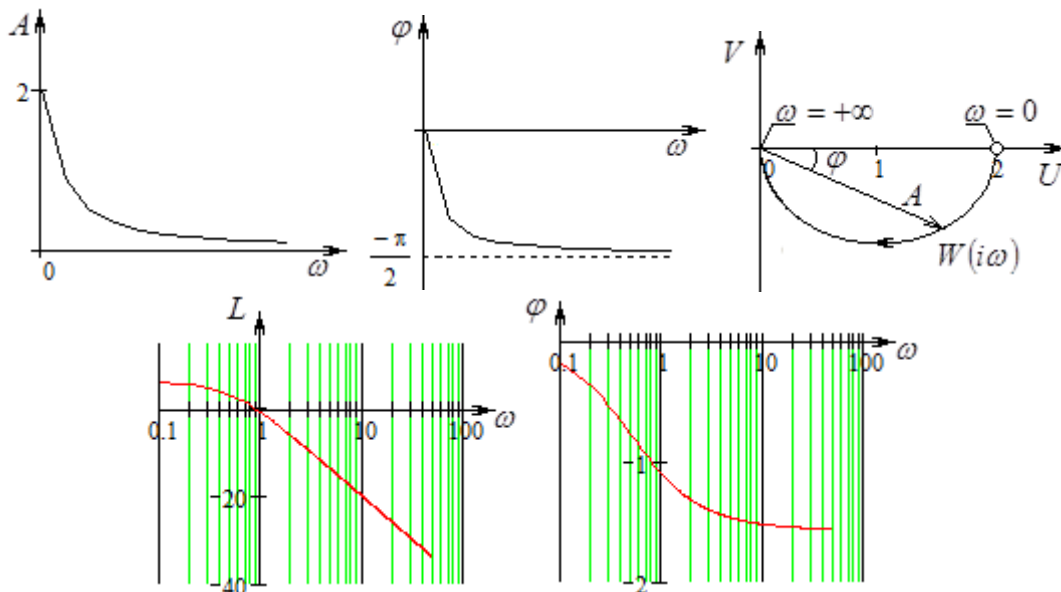
Таким образом

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2}{1 + 4\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{4\omega}{1 + 4\omega^2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4\omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg 2\omega;$$

$$U(\omega) = \frac{2}{1 + 4\omega^2}, \quad V(\omega) = -\frac{4\omega}{1 + 4\omega^2};$$

$$L(\omega) = 20 \lg |W(i\omega)| = 20 \lg \frac{2}{\sqrt{1 + 4\omega^2}}.$$



Задача . Построить частотные характеристики системы, описываемой дифференциальным уравнением при нулевых начальных условиях.

1. $y'' + y = 6e^{-t}$

16. $y'' + 4y = \sin 2t$

2. $y'' - y' = t^2$

17. $2y'' + 5y' = 29 \cos t$

3. $y'' + y' = t^2 + 2t$

18. $y'' + y' + y = t^2 + t$

4. $y'' - y' = \cos 3t$

19. $y'' + 4y = 8 \sin 2t$

5. $y'' + y' + y = 7e^{2t}$

20. $y'' - y' + 6y = 6e^{-t}$

6. $y'' + y' - 2y = -2(t + 1)$

21. $y'' + 4y = 4e^{-t} + 4t^2$

7. $y'' - 9y = \sin t - \cos t$

22. $y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$

8. $y'' + 2y' = 2 + e^t$

23. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$

9. $2y'' - y' = \sin 3t$

24. $y'' + 4y = 3 \sin t + 10 \cos 3t$

10. $y'' + 2y' = \sin t/2$

25. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t} \cos 3t$

11. $y'' + y' = sht$

26. $y'' + 3y' - 10y = -\sin 3t + 47 \cos 3t$

12. $y'' + 4y' + 29y = e^t$

27. $y'' + y' - 2y = e^t(t^2 + t - 3)$

13. $y'' - 3y' + 2y = e^t$

28. $y'' - 2y' = e^{-t}$

14. $2y'' + 3y' + y = 3e^t$

29. $y'' + y = 2 \cos t$

15. $y'' - 2y' - 3y = 2t$

30. $y'' - y = 4 \sin t + 5 \cos 2t$

10.2. Характеристики и модели типовых динамических звеньев

Пусть в результате описания передаточных свойств автоматической системы или ее элементов получено дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t).$$

Запишем данное уравнение в операторном виде

$$(a_2 p^2 + a_1 p + a_0)Y(p) = (b_1 p + b_0)X(p)$$

и разделим правую и левую часть на a_0

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)Y(p) = k(Tp + 1)X(p),$$

где $k = b_0/a_0$, $T = b_1/a_0$, $T_1 = a_1/a_0$, $T_2^2 = a_2/a_0$; T , T_1 и T_2 — постоянные времени, характеризующие динамические свойства системы (элемента).

10.2.1. Идеальное усилительное (безынерционное) звено

Идеальное усилительное (безынерционное) звено описывается алгебраическим уравнением

$$y(t) = kx(t),$$

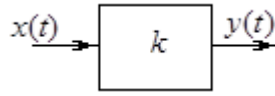
где k — передаточный коэффициент (коэффициент усиления).

Уравнение звена в операторной форме

$$Y(p) = kX(p).$$

Тогда передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = k.$$



Частотная характеристика

$$W(p)|_{p=i\omega} = W(i\omega) = k.$$

Тогда

— амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = k;$$

— фазовая частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg W(i\omega) = \arctg(0/k) = 0;$$

— логарифмическая частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k.$$

Переходная функция

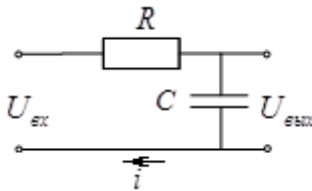
$$h(t) = k \, 1(t).$$

Импульсная переходная функция

$$\omega(t) = k \, \delta(t).$$

10.2.2. Инерционные звенья первого порядка (апериодические 1-го порядка)

Пример. Рассмотрим схему. В начальный момент времени ток в цепи отсутствует, а емкость не заряжена. Составим дифференциальное уравнение, описывающее изменение выходного напряжения при условии подачи на вход постоянного напряжения. Согласно второго закона Кирхгофа (алгебраическая сумма падений напряжений по любому замкнутому контуру цепи равна алгебраической сумме ЭДС, действующих вдоль этого же контура)



$$U_R + U_C = U_{\text{вх}}, \quad U_C = U_{\text{вых}}, \quad U_{\text{вых}}(0) = 0, \quad i(0) = 0,$$

где

$$U_R(t) = Ri(t), \quad i(t) = C \frac{d}{dt} U_C(t) = C \frac{d}{dt} U_{\text{вых}}(t).$$

Сила тока одинакова на всех элементах. Тогда

$$RC \frac{d}{dt} U_{\text{вых}}(t) + U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t).$$

Инерционные звенья первого порядка (апериодические 1-го порядка) описываются дифференциальным уравнением

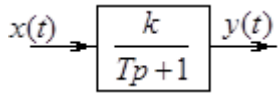
$$T \dot{y}(t) + y(t) = kx(t),$$

где k — передаточный коэффициент, характеризующий свойства звена в статистическом режиме; T — постоянная времени, характеризующая инерционность звена.

Уравнение звена в операторной форме

$$(Tp + 1)Y(p) = kX(p).$$

Тогда передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Tp + 1}.$$


Частотная характеристика

$$W(p)|_{p=i\omega} = W(i\omega) = \frac{k}{Ti\omega + 1} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - i \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Тогда

— амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}};$$

— фазовая частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg W(i\omega) = -\arctg(\omega T);$$

— логарифмическая частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}.$$

Найдем переходную функцию. Пусть $x(t) = 1(t)$, тогда

$$T\dot{y}(t) + y(t) = k1(t)$$

1) Найдем свободное движение. Найдем решение уравнения $T\dot{y}(t) + y(t) = 0$ при $y(0) = 0$. Характеристическое уравнение $Tk + 1 = 0$ имеет корень $k = -1/T$. Тогда $y_c(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}$. С учетом начальных условий $C = 0$. Тогда $y_c(t) = 0$.

2) Найдем вынужденное движение как решение уравнения $T\dot{y}(t) + y(t) = k$ при $y(0) = 0$.

Общее решение однородного уравнения: $y_{oo}(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}$.

Частное решение неоднородного уравнения: $y_{чн}(t) = k$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{вын}(t) = y_{oo}(t) + y_{чн}(t) = Ce^{-\frac{t}{T}} + k.$$

С учетом начальных условий $y(0) = C + k = 0$, $C = -k$, запишем

$$y_{вын}(t) = y_{oo}(t) + y_{чн}(t) = -ke^{-\frac{t}{T}} + k.$$

3) Выходной сигнал равен

$$y(t) = y_c(t) + y_{вын}(t) = 0 + (-ke^{-\frac{t}{T}} + k) = k - ke^{-\frac{t}{T}}.$$

Таким образом, переходная функция

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

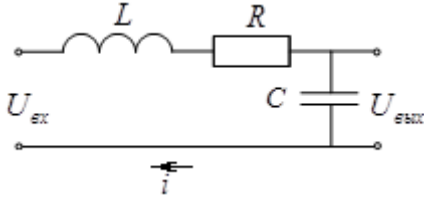
Импульсная характеристика может быть получена, как известно, путем дифференцирования $h(t)$:

$$\omega(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Апериодическое звено первого порядка хорошо пропускает сигналы низкой частоты и плохо — сигналы высокой частоты.

10.2.3. Инерционные звенья второго порядка (апериодические 2-го порядка)

Пример. Рассмотрим схему. В начальный момент времени ток в цепи отсутствует, а емкость не заряжена. Составим дифференциальное уравнение, описывающее изменение выходного напряжения. Согласно второго закона Кирхгофа (алгебраическая сумма падений напряжений по любому замкнутому контуру цепи равна алгебраической сумме ЭДС, действующих вдоль этого же контура)



$$U_L + U_R + U_C = U_{вх}, \quad U_C = U_{вых}, \quad U_{вых}(0) = 0, \quad i(0) = 0,$$

где

$$U_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t), \quad U_R(t) = Ri(t), \quad i(t) = C \frac{d}{dt} U_C(t) = C \frac{d}{dt} U_{вых}(t).$$

Сила тока одинакова на всех элементах. Тогда

$$LC \frac{d^2}{dt^2} U_{вых}(t) + RC \frac{d}{dt} U_{вых}(t) + U_{вых}(t) = U_{вх}(t).$$

Инерционные звенья второго порядка (апериодические 2-го порядка) описываются дифференциальным уравнением

$$T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = kx(t),$$

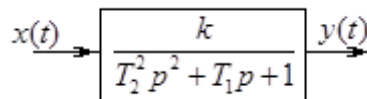
где k — передаточный коэффициент, характеризующий свойства звена в статистическом режиме; T_1 и T_2 — постоянные времени, характеризующие динамические свойства системы (элемента).

Уравнение звена в операторной форме

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)Y(p) = kX(p).$$

Тогда передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)} \quad \text{причем } T_1 \geq 2T_2.$$



Частотная характеристика

$$W(p) \Big|_{p=i\omega} = W(i\omega) = \frac{k}{(T_3 i\omega + 1)(T_4 i\omega + 1)}.$$

Тогда

— амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}};$$

— фазовая частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg W(i\omega) = -\arctg(\omega T_3) - \arctg(\omega T_4);$$

— логарифмическая частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{(1 + T_3^2 \omega^2)(1 + T_4^2 \omega^2)}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2} - 20 \lg \sqrt{1 + T_4^2 \omega^2}.$$

Найдем переходную функцию. Пусть $x(t) = 1(t)$, тогда

$$T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = k 1(t).$$

1) Найдем свободное движение. Найдем решение уравнения $T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = 0$ при $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$. Характеристическое уравнение

$$T_2^2 k^2 + T_1 k + 1 = 0 \text{ имеет два корня } k_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}.$$

а) Если $T_1 \geq 2T_2$, то корни будут вещественными и $y_c(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$. С учетом нулевых начальных условий $C_1 = C_2 = 0$. Тогда $y_c(t) = 0$.

б) Если $T_1 < 2T_2$, то корни комплексные $k_{1,2} = -\alpha \pm i\beta$, где $\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2}$. Решение будет содержать гармонические составляющие — колебательное звено.

в) Если $T_1 = 0$, то оба корня будут мнимыми (переходная функция будет представлять собой незатухающую синусоиду) — идеальное колебательное звено (консервативное).

2) Пусть $T_1 \geq 2T_2$. Найдем вынужденное движение как решение уравнения $T_2 \dot{y}(t) + y(t) = k$ при $y(0) = 0$.

Общее решение однородного уравнения: $y_{oo}(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$.

Частное решение неоднородного уравнения: $y_{чн}(t) = k$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{вын}(t) = y_{oo}(t) + y_{чн}(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + k.$$

Обозначим

$$k_1 = -\frac{1}{T_3}, \quad k_2 = -\frac{1}{T_4}.$$

С учетом начальных условий $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, получим

$$C_1 = \frac{-kT_3}{T_3 - T_4}, \quad C_2 = \frac{kT_4}{T_3 - T_4},$$

$$y_{вын}(t) = y_{oo}(t) + y_{чн}(t) = -\frac{kT_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{kT_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} + k.$$

3) Выходной сигнал равен

$$y(t) = y_c(t) + y_{вын}(t) = 0 + k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right)$$

Таким образом, переходная функция

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right).$$

В данном случае (т. е. при $T_1 \geq 2T_2$) переходная функция имеет монотонный, апериодический характер, следовательно, и название — **апериодическое**.

Импульсная характеристика может быть получена, как известно, путем дифференцирования $h(t)$:

$$\omega(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} - \frac{k}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}}.$$

Апериодическое звено второго порядка хорошо пропускает сигналы низкой частоты и плохо — сигналы высокой частоты.

10.2.4. Колебательные звенья

Колебательные звенья описываются тем же дифференциальным уравнением, что и апериодические звенья второго порядка

$$T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = kx(t),$$

но предполагается, что

$$T_1 < 2T_2,$$

где k — передаточный коэффициент, характеризующий свойства звена в статистическом режиме; T_1 и T_2 — постоянные времени, характеризующие динамические свойства системы (элемента).

Обычно дифференциальное уравнение **колебательного звена** записывают в виде:

$$T^2 \ddot{y}(t) + 2\xi T \dot{y}(t) + y(t) = kx(t),$$

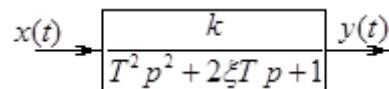
где $T = T_2$ — постоянная времени, характеризующая инерционность звена; $\xi = T_1/2T_2$ — относительный коэффициент демпфирования, характеризующий колебательность звена (параметр затухания), причем $0 < \xi < 1$, так как при $\xi \geq 1$ звено становится апериодическим (второго порядка).

Уравнение звена в операторной форме

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)Y(p) = kX(p).$$

Тогда передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \text{ причем } T_1 < 2T_2.$$



Частотная характеристика

$$W(p) \Big|_{p=i\omega} = W(i\omega) = \frac{k}{T^2 (i\omega)^2 + 2\xi T i\omega + 1}.$$

Тогда

— амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}};$$

— фазовая частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg W(i\omega) = -\arctg\left(\frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}\right);$$

— логарифмическая частотная характеристика

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}} = 20\lg k - 20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}.$$

Найдем переходную функцию. Пусть $x(t) = 1(t)$, тогда

$$T^2 \ddot{y}(t) + 2\xi T \dot{y}(t) + y(t) = k1(t).$$

1) Найдем свободное движение. Учитывая нулевые начальные условия, получим, что $y_c(t) = 0$.

2) Пусть в исходном уравнении $T_1 < 2T_2$. Найдем вынужденное движение как решение уравнения $T^2 \ddot{y}(t) + 2\xi T \dot{y}(t) + y(t) = k$ при $y(0) = 0$.

Учитывая, что $T_1 < 2T_2$, получим корни соответствующего характеристического уравнения

$$k_{1,2} = -\alpha \pm i\beta = -\frac{\xi}{T} \pm i \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T},$$

где $\alpha = \frac{\xi}{T}$ — коэффициент затухания; $\beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ — круговая частота затухающих колебаний, рад/с.

Общее решение однородного уравнения: $y_{oo}(t) = C_1 e^{(-\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha-i\beta)t}$.

Частное решение неоднородного уравнения: $y_{чн}(t) = k$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{вын}(t) = y_{oo}(t) + y_{чн}(t) = C_1 e^{(-\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha-i\beta)t} + k.$$

С помощью формулы Эйлера преобразуем последнее выражение к виду

$$y_{вын}(t) = C_1 e^{(-\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha-i\beta)t} + k = C e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) + k$$

С учетом начальных условий $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, получим

$$C = \frac{-k\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} = \frac{-k}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \arcsin(\beta T) = \arccos \xi,$$

$$y_{вын}(t) = y_{oo}(t) + y_{чн}(t) = k \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left(\cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) \right].$$

3) Выходной сигнал равен

$$y(t) = y_c(t) + y_{вын}(t) = 0 + k \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left(\cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) \right].$$

Таким образом, переходная функция

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left(\cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) \right].$$

Импульсная характеристика может быть получена, как известно, путем дифференцирования $h(t)$:

$$\omega(t) = \frac{k}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t.$$

Частный случай колебательного звена при $\xi = 0$, когда $h(t)$ и $\omega(t)$ становятся незатухающими (периодическими), называется **консервативным звеном**

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}.$$

10.2.5. Идеальное интегрирующее звено

$$\dot{y}(t) = kx(t)$$

Данному уравнению равносильно выражение

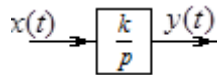
$$y(t) = k \int_0^t x(\eta) d\eta + y(0).$$

Уравнение звена в операторной форме

$$pY(p) = kX(p).$$

Тогда передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{p}.$$



Частотная характеристика

$$W(p) \Big|_{p=i\omega} = W(i\omega) = \frac{k}{i\omega} = -i \frac{k}{\omega}.$$

Тогда

— амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \frac{k}{\omega};$$

— фазовая частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg W(i\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{-k/\omega}{0} \right) = -\frac{\pi}{2};$$

— логарифмическая частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega} = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

Найдем переходную функцию. Подставим $x(t)=1(t)$ в $y(t)=k\int_0^t x(\eta)d\eta+y(0)$, тогда переходная функция

$$h(t)=kt.$$

Импульсная характеристика может быть получена, как известно, путем дифференцирования $h(t)$:

$$\omega(t)=t.$$

10.2.6. Реальное интегрирующее звено

$$T\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=kx(t)$$

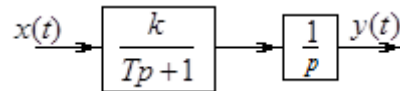
Уравнение звена в операторной форме

$$(Tp^2+p)Y(p)=kX(p).$$

Тогда передаточная функция

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{k}{Tp^2+p}=\frac{k}{(Tp+1)p}.$$

Реальное интегрирующее звено может рассматриваться как последовательное соединение двух элементарных звеньев: идеального интегрирующего и инерционного звена первого порядка.



Частотная характеристика

$$W(p)\big|_{p=i\omega}=W(i\omega)=\frac{k}{(Ti\omega+1)i\omega}=-\frac{kT}{T^2\omega^2+1}-\frac{k}{\omega(T^2\omega^2+1)}.$$

Тогда

— амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega)=|W(i\omega)|=\frac{k}{\omega\sqrt{T^2\omega^2+1}};$$

— фазовая частотная характеристика

$$\varphi(\omega)=\arg W(i\omega)=-\frac{\pi}{2}-\arctg T\omega;$$

— логарифмическая частотная характеристика

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg k-20\lg \omega-20\lg \sqrt{T^2\omega^2+1}.$$

10.2.7. Идеальное дифференцирующее звено

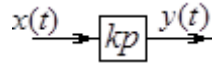
$$y(t)=k\dot{x}(t)$$

Уравнение звена в операторной форме

$$Y(p)=kpX(p).$$

Тогда передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = kp.$$



Частотная характеристика

$$W(p)\big|_{p=i\omega} = W(i\omega) = ki\omega.$$

Тогда

— амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = k\omega;$$

— фазовая частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg W(i\omega) = \frac{\pi}{2};$$

— логарифмическая частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega.$$

Найдем переходную функцию. Подставим $x(t) = 1(t)$ в $y(t) = k\dot{x}(t)$, тогда переходная функция

$$h(t) = k\delta(t).$$

Импульсная характеристика может быть получена, как известно, путем дифференцирования $h(t)$:

$$\omega(t) = k \frac{d}{dt} \delta(t).$$

10.2.8. Реальное дифференцирующее звено

$$T\dot{y}(t) + y(t) = k\dot{x}(t)$$

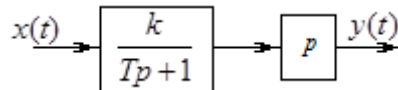
Уравнение звена в операторной форме

$$(Tp + 1)Y(p) = kpX(p).$$

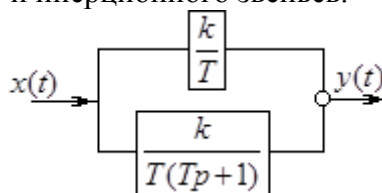
Тогда передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{kp}{Tp + 1}.$$

Реальное дифференцирующее звено представляет собой последовательное соединение идеального дифференцирующего звена и инерционного звена первого порядка.



Реальное дифференцирующее звено может рассматриваться как параллельное соединение безынерционного и инерционного звеньев.



Частотная характеристика

$$W(p)\big|_{p=i\omega} = W(i\omega) = \frac{ki\omega}{Ti\omega + 1}.$$

Тогда

— амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \frac{k\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}};$$

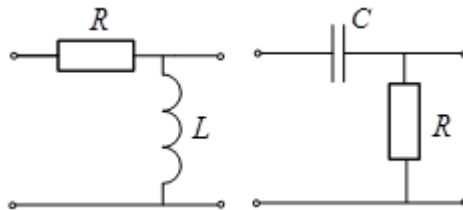
— фазовая частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg W(i\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg T\omega;$$

— логарифмическая частотная характеристика

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k + 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

Пример реальных дифференцирующих звеньев.



10.2.9. Неустойчивое апериодическое звено

$$T\dot{y}(t) - y(t) = kx(t)$$

10.2.10. Неустойчивое колебательное звено.

$$T^2\ddot{y}(t) + 2\xi T\dot{y}(t) - y(t) = kx(t)$$

Тип звена		$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$
Позиционные	Безынерционное	$W(p) = k$
	Апериодическое 1-го порядка	$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$
	Апериодическое 2-го порядка	$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$
	Колебательное	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$
	Консервативное	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$
Интегрирующее	Идеальное интегрирующее	$W(p) = \frac{k}{p}$
	Реальное интегрирующее	$W(p) = \frac{k}{(Tp + 1)p}$
Дифференцирующее	Идеальное дифференцирующее	$W(p) = kp$
	Реальное дифференцирующее	$W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}$
	Неустойчивое апериодическое 1-го порядка	$W(p) = \frac{k}{Tp - 1}$
	Неустойчивое колебательное	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p - 1}$

Задача . Найти амплитудную частотную характеристику, фазовую частотную характеристику, логарифмическую частотную характеристику, переходную функцию, импульсную характеристику объекта, описываемого дифференциальным уравнением с нулевыми начальными условиями.

1. $2y'' - y' + y = 6x(t)$

2. $y'' + 2y' - y = x(t)$

3. $y'' + y' - 4y = x(t)$

4. $2y'' - 3y' + 4y = x(t)$

5. $2y'' + y' + 3y = x(t)$

6. $y'' + y' - 2y = x(t)$

7. $3y'' + 5y' - 9y = x(t)$

8. $y'' + 2y' - 3y = x(t)$

9. $2y'' - y' + 3y = x(t)$

10. $y'' + 2y' - 3y = x(t)$

11. $2y'' + y' - 3y = x(t)$

12. $y'' + 4y' + 29y = x(t)$

13. $y'' - 3y' + 2y = x(t)$

14. $2y'' + 3y' + y = x(t)$

16. $y'' + 4y' - 2y = x(t)$

17. $2y'' + 5y' - y = x(t)$

18. $y'' + y' + y = x(t)$

19. $y'' + 4y = 8x(t)$

20. $y'' - y' + 6y = 6x(t)$

21. $y'' + 4y = 4x(t)$

22. $y'' + 4y' + 4y = x(t)$

23. $y'' - 3y' + 2y = 12x(t)$

24. $y'' - y' + 4y = 3x(t)$

25. $y'' + 2y' + 10y = 2x(t)$

26. $y'' + 3y' - 10y = -x(t)$

27. $y'' + y' - 2y = x(t)$

28. $y'' - 2y' = x(t)$

29. $-2y'' - 4y' + y = 2 \cos t$

15. $y'' - 2y' - 3y = x(t)$

30. $4y'' + 7y' - y = 4x(t)$

Пример. Построить структурную схему системы, описываемую дифференциальным уравнением

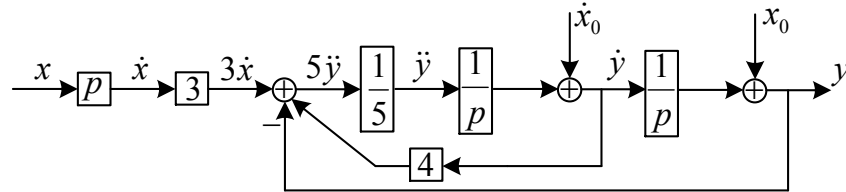
$$5\ddot{y} - 4\dot{y} + 2y = 3\dot{x}$$

с начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Решение. Выразим старшую производную

$$5\ddot{y} = 3\dot{x} + 4\dot{y} - 2y.$$

Схема строится вокруг сумматора, на котором реализовано последнее равенство.



Задача. Построить структурную схему системы, описываемую дифференциальным уравнением с начальными условиями.

1. $y''' + y \cos t = 6e^{-t}x'' + 3x.$

2. $y''' + 5y' - 6y = t^2x'' - x \sin t.$

3. $4y'' + y' \sin t = t^2x' + 2tx.$

4. $5y'' - 2y' = x'' \cos 3t - x.$

5. $8y''' + y'e^t + 7y = 7e^{2t}x''.$

6. $2y'' + 3y' - 2y = -2x'' + 3x' + x.$

7. $y''' - 9y = x' \sin t - x \cos t.$

8. $6y'' + 2'y = 2x' + xe^t.$

9. $2y'' - y' \cos t = x \sin 3t.$

10. $7y'' + 2y' = x' \sin t / 2.$

11. $y''' + y'e^t = x'' \sin t - x'.$

12. $y''' + 4y' + 29y = x''e^t - 7x'.$

13. $y''' - 3y' + 2y = x'e^t - 2x.$

14. $2y'' + 3y' + y = 3x'e^t.$

15. $y''' - 2y' - 3y = 2x''t + x.$

16. $y''' + 4y = x'' \sin 2t.$

17. $2y''' + 5y' = 29x'' \cos t.$

18. $7y''' + y' \cos t + y = x''t^2 + xt.$

19. $y''' + 4y = 8x'' \sin 2t - x'.$

20. $2y''' - y' + 6y = 6x''e^{-t} - 3x.$

21. $y''' + 4y = 4x'e^{-t} + 4xt^2.$

22. $y''' + 4y' + 4y = x't^3e^{2t}.$

23. $4y''' - 3y' + 2y = 12x''e^{3t} - x.$

24. $y''' + 4y = 3x'' \sin t + 10x' \cos 3t.$

25. $y''' + 2y' + 10y = 2x'e^{-t} \cos 3t.$

26. $y''' + 3y' - 10y = -x'' \sin 3t + 47x' \cos 3t.$

.

27. $y''' + y' - 2y = xe^t.$

28. $2y''' - 2y' = x'e^{-t} - x.$

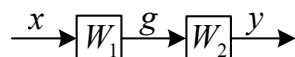
29. $y''' + y = 2x \cos t.$

30. $y''' - y = 4x' \sin t + 5x \cos 2t.$

10.3. Передаточные функции соединений

Системы автоматического управления и регулирования являются замкнутыми системами. Но при их проектировании часто предварительно рассматривается разомкнутая цепь звеньев, которая затем замыкается.

Цепь из последовательно соединенных звеньев.



Так как

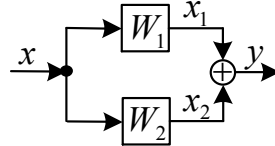
$$xW_1 = g, \quad gW_2 = y,$$

то

$$xW_1W_2 = xW = y \Rightarrow W = W_1W_2,$$

т. е. передаточная функция разомкнутой цепи последовательных соединений равна произведению передаточных функций всех звеньев.

Цепь из параллельно соединенных звеньев.



Так как

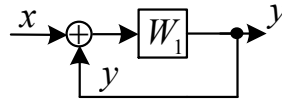
$$xW_1 = x_1, \quad xW_2 = x_2, \quad x_1 + x_2 = y,$$

то

$$xW_1 + xW_2 = x(W_1 + W_2) = xW = y \Rightarrow W = W_1 + W_2,$$

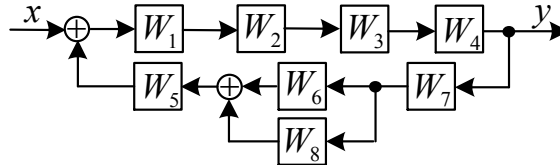
т. е. передаточная функция разомкнутой цепи из параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций всех звеньев.

Цепь с обратной связью.



$$(x + y)W_1 = y \Rightarrow x \frac{W_1}{1 - W_1} = y \Rightarrow W = \frac{W_1}{1 - W_1}.$$

Пример. По передаточным функциям блоков найти передаточную функцию всей структурной схемы.



Решение. Блоки с передаточными функциями W_1, W_2, W_3, W_4 объединим в один с передаточной функцией $W_{1-4} = W_1 W_2 W_3 W_4$.

Объединим блоки W_6, W_8 — $W_{6-8} = W_6 + W_8$.

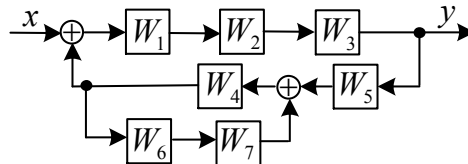
Объединим блоки W_5, W_{6-8}, W_7 — $W_{5-7} = W_5 W_{6-8} W_7 = W_5 (W_6 + W_8) W_7$.

На сумматор (вход блока W_{1-4}) поступает сигнал $x + W_{5-7}y$ и работу всей схемы задается уравнением $(x + W_{5-7}y)W_{1-4} = y$. Тогда

$$y = (x + W_{5-7}y)W_{1-4} \Rightarrow y = \frac{W_{1-4}}{1 - W_{1-4}W_{5-7}} x = \frac{W_1 W_2 W_3 W_4}{1 - W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 (W_6 + W_8) W_7} x,$$

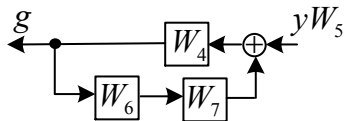
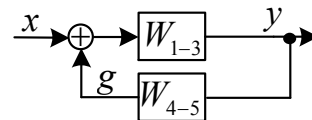
т. е. $W = \frac{W_1 W_2 W_3 W_4}{1 - W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 (W_6 + W_8) W_7}.$

Пример. По передаточным функциям блоков найти передаточную функцию всей структурной схемы.



Решение. Блоки с передаточными функциями W_1, W_2, W_3 объединим в один с передаточной функцией $W_{1-3} = W_1 W_2 W_3$.

Структурная схема имеет две обратные связи, поэтому разобьем ее части. Для первой части на вход блока W_{1-3} подается сигнал $x + g$, таким образом, имеем уравнение $(x + g)W_{1-3} = y$.



Для второй части схемы (второй обратной связи) можем записать:

$$(yW_5 + gW_6W_7)W_4 = g.$$

Таким образом, исходная структурная схема описывается системой уравнений

$$\begin{cases} (x + g)W_{1-3} = y; \\ (yW_5 + gW_6W_7)W_4 = g. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения g , получим

$$g = \frac{W_4W_5}{1 - W_4W_6W_7} y.$$

Полученный результат подставим в первое уравнение

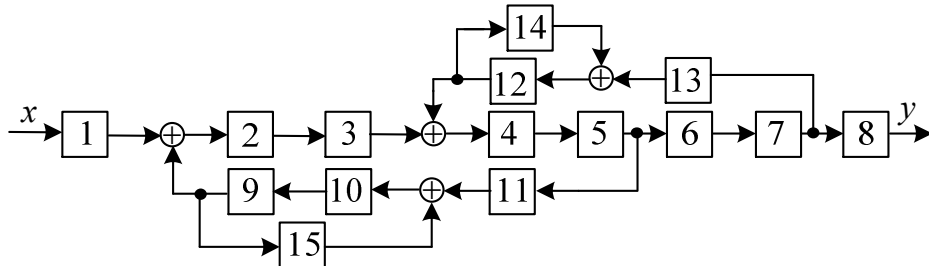
$$\left(x + \frac{W_4W_5}{1 - W_4W_6W_7} y \right) W_{1-3} = y.$$

Тогда

$$\frac{W_{1-3}}{1 - \frac{W_{1-3}W_4W_5}{1 - W_4W_6W_7}} x = \frac{W_1W_2W_3}{1 - \frac{W_1W_2W_3W_4W_5}{1 - W_4W_6W_7}} x = y,$$

$$\text{т. е. } W = \frac{W_1W_2W_3}{1 - \frac{W_1W_2W_3W_4W_5}{1 - W_4W_6W_7}}.$$

Задача . По передаточным функциям блоков найти передаточную функцию всей структурной схемы.

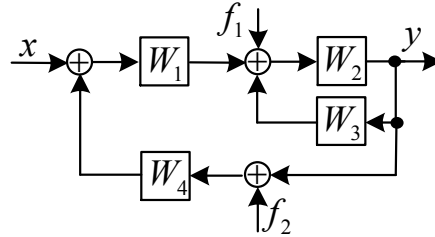


№	Блоки	№	Блоки	№	Блоки
1.	1,2,4,7,12,14,9	11.	1,2,5,6,12,14,9	21.	1,4,6,7,12,9,10,15
2.	2,3,4,7,10,11,15	12.	1,3,4,7,12,14,15	22.	1,5,6,7,8,12,13,14
3.	1,3,5,6,8,12,10	13.	1,2,4,5,7,11,9,10	23.	1,6,7,8,9,10,11,15
4.	1,3,5,7,9,11,13	14.	1,2,4,6,9,10,11,15	24.	1,2,3,4,5,6,7,8,9
5.	2,4,6,8,10,12,14	15.	1,3,5,7,8,12,13,14	25.	2,3,5,8,9,10,11,14
6.	1,3,6,7,8,10,11	16.	1,2,4,7,12,9,10,15	26.	3,5,8,12,13,14,15
7.	1,3,5,7,12,14,15	17.	1,2,4,8,12,13,14	27.	4,5,6,7,8,9,19,11
8.	1,2,4,6,9,10,15	18.	1,3,5,7,9,10,11,15	28.	1,2,6,8,12,14,9,11
9.	1,2,5,8,12,13,14	19.	1,2,4,8,12,13,14	29.	1,2,5,8,12,9,10,15
10.	1,3,4,7,8,11,9,15	20.	1,2,4,6,9,15,12,14	30.	2,4,6,7,8,9,10,11

Передаточные функции систем с несколькими входами.

При исследовании систем с несколькими входами передаточная функция системы строится относительно одного входа, а остальные приравняются к нулю.

Пример . Найти передаточные функции системы относительно сигналов x , f_1 и f_2 .



Решение. Система имеет две обратные связи, следовательно, составим два уравнения. На вход W_1 поступает сумма сигналов $x + (y + f_2)W_4$, на выходе имеем

$$[x + (y + f_2)W_4]W_1 = g.$$

Тогда на вход блока W_2 поступает сумма сигналов $g + f_1 + yW_3$, на выходе имеем

$$[g + f_1 + yW_3]W_2 = y.$$

Подставляя g во второе уравнение, получим

$$[[x + (y + f_2)W_4]W_1 + f_1 + yW_3]W_2 = y$$

или

$$xW_1W_2 + yW_1W_2W_4 + f_2W_1W_2W_4 + f_1W_2 + yW_2W_3 = y.$$

Если исследуется реакция системы на сигнал x , то положив $f_1 = f_2 = 0$, получим

$$x \frac{W_1W_2}{1 - W_2W_3 - W_1W_2W_4} = y,$$

т. е.

$$W_x = \frac{W_1W_2}{1 - W_2W_3 - W_1W_2W_4}$$

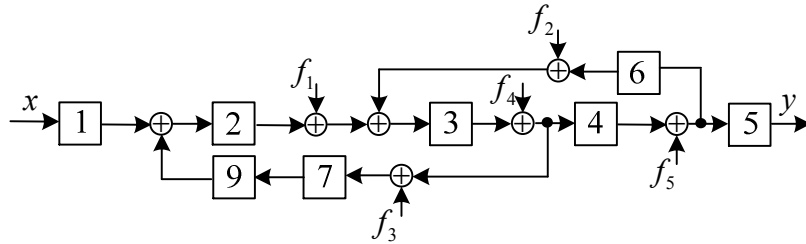
Аналогично, для сигнала f_1 ($x = f_2 = 0$) получаем

$$W_{f_1} = \frac{W_2}{1 - W_2W_3 - W_1W_2W_4},$$

для сигнала f_2 ($x = f_1 = 0$) получаем

$$W_{f_2} = \frac{W_1W_2W_4}{1 - W_2W_3 - W_1W_2W_4}.$$

Задача . По передаточным функциям блоков найти передаточную функцию всей структурной схемы относительно сигнала f_i .



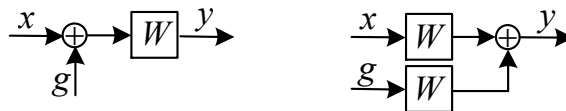
№	Блоки	f_i	№	Блоки	f_i	№	Блоки	f_i
1.	2,6,7,1	1	11.	2,6,7,4	3	21.	2,6,7,1,3	1
2.	2,6,7,3	1	12.	2,6,7,5	3	22.	2,6,7,3,5	1
3.	2,6,7,4	1	13.	2,6,7,1	4	23.	2,6,7,4,1	1
4.	2,6,7,5	1	14.	2,6,7,3	4	24.	2,6,7,5,4	1
5.	2,6,7,1	2	15.	2,6,7,4	4	25.	2,6,7,1,3	2
6.	2,6,7,3	2	16.	2,6,7,5	4	26.	2,6,7,3,5	2
7.	2,6,7,4	2	17.	2,6,7,1	5	27.	2,6,7,4,1	2
8.	2,6,7,5	2	18.	2,6,7,3	5	28.	2,6,7,5,4	2
9.	2,6,7,1	3	19.	2,6,7,4	5	29.	2,6,7,1,3	3
10.	2,6,7,3	3	20.	2,6,7,5	5	30.	2,6,7,3,5	3

Преобразование структурных схем.

Увеличение количества обратных связей приводит к увеличению количества уравнений. В некоторых случаях простыми преобразованиями схемы можно сократить количество уравнений.

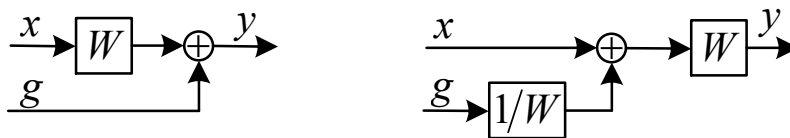
Перенос сумматора через звено вперед

$$(x + g)W = xW + gW = y$$



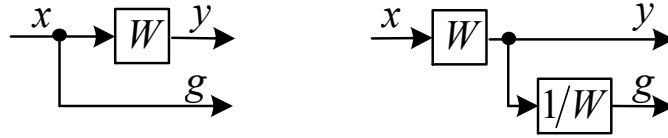
Перенос сумматора через звено назад

$$xW + g = \left(x + \frac{g}{W}\right)W = y$$



Перенос точки ветвления через звено вперед

$$\begin{cases} xW = y \\ x = g \end{cases} \begin{cases} xW = y \\ xW \frac{1}{W} = g \end{cases}$$



Перенос точки ветвления через звено назад

$$\begin{cases} xW = y \\ xW = g \end{cases} \quad \begin{cases} xW = y \\ xW = g \end{cases}$$



10.4. Уравнение системы в нормальной форме

Пусть имеется синусоидально изменяющийся ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$.

Согласно формуле Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, комплексное число z можно представить в виде

$$z = |z| \cos(\omega t + \varphi_i) + i |z| \sin(\omega t + \varphi_i) = |z| e^{i(\omega t + \varphi_i)},$$

также

$$I_m e^{i(\omega t + \varphi_i)} = I_m e^{i\varphi_i} e^{i\omega t} = \left| \begin{matrix} \text{Замена} \\ \dot{I}_m = I_m e^{i\varphi_i} \end{matrix} \right| = \dot{I}_m e^{i\omega t} = \dot{I}_m \cos(\omega t) + i \dot{I}_m \sin(\omega t).$$

Тогда можно ввести соответствие

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \text{Im}(\dot{I}_m e^{i\omega t}) \Rightarrow i(t) \Leftrightarrow \dot{I}_m e^{i\omega t}.$$

Аналогично, для $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, получим

$$u(t) \Leftrightarrow \dot{U}_m e^{i\omega t}.$$

Т. е. синусоидальное напряжение и синусоидальный ток символизируются комплексными функциями $\dot{U}_m e^{i\omega t}$ и $\dot{I}_m e^{i\omega t}$.

Так как действующие синусоидальные токи и напряжения меньше их амплитуд в $\sqrt{2}$ раз, то обычно вместо комплексных амплитуд рассматривают комплексные действующие величины:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = I e^{i\varphi_i}; \quad \dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = U e^{i\varphi_u}.$$

Для анализа электрических цепей синусоидального тока удобнее применять закон Ома в комплексной форме. Цепи синусоидального тока — линейные цепи с установившимся режимом работы, когда после окончания в них переходных процессов, падения напряжений на участках, токи в ветвях и ЭДС источников являются синусоидальными функциями времени.

Сопrotивление реактивных элементов (катушки индуктивности и конденсатора) рассматривается при постоянном токе, т. е. на нулевой частоте и их реактивные свойства не проявляются: сопротивление идеальной катушки индуктивности стремится к нулю, а сопротивление идеального конденсатора — к бесконечности. В случае переменного тока (напряжение на катушке и ток через конденсатор не равны нулю) реак-

тивные элементы ведут себя как элементы с неким «сопротивлением», которое получило название **электрический импеданс**.

Учитывая, что в цепях переменного тока существуют активные и реактивные значения напряжений, токов и сопротивлений, то падение напряжения, ток и ЭДС будут комплексными, а вместо активного сопротивления R , которое используется в основном в цепях постоянного тока, используется полное (комплексное) сопротивление цепи Z .

Закон Ома в комплексном виде имеет вид

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}},$$

здесь

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_m e^{i\omega t}}{\dot{I}_m e^{i\omega t}} = \frac{U e^{i\varphi_u}}{I e^{i\varphi_i}} = \frac{U(i\omega)}{I(i\omega)} = Z(i\omega),$$

где $U(i\omega)$ и $I(i\omega)$ — комплексные амплитуды напряжения и тока на частоте ω .

Величина $Z(i\omega)$ называется **импедансом**, характеризует полное (комплексное) сопротивление электрической цепи для гармонического сигнала и равна отношению комплексной амплитуды напряжения гармонического сигнала к комплексной амплитуде тока.

Если $i\omega = p$, то

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}.$$

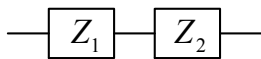
Для резистора импеданс всегда равен его сопротивлению R и не зависит от частоты: $Z_R = R$.

Для конденсатора импеданс равен $Z_C = \frac{1}{pC}$.

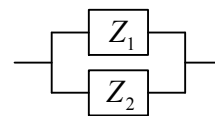
Для катушки индуктивности импеданс равен $Z_L = pL$.

Комплексный импеданс соединений вычисляется как

$$Z = Z_1 + Z_2$$



$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$



Для математического описания динамической системы n -го порядка, т. е. такого описания, которое позволяло бы по заданному начальному состоянию в момент времени $t = t_0$ и воздействиям $u_1(t), \dots, u_m(t)$ определить состояние системы в последующие моменты времени, нужно ввести в рассмотрение n независимых **переменных состояний системы** $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Эти переменные должны быть выбраны так, чтобы для воздействий, определенных на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, и начального состояния $x(t_0)$ можно было бы определить состояние $x(t_1)$ в момент $t = t_1$. При этом математическую модель объекта представляют в виде двух уравнений — уравнения состояния и уравнения выхода.

Уравнение состояния линейного объекта отражает его динамические свойства и записывается в виде векторного дифференциального уравнения в **форме Коши**.

Уравнение выхода (уравнение наблюдения) связывает переменные состояния (промежуточные переменные) и управляющие воздействия с выходными измеряемыми (наблюдаемыми) переменными.

n -мерное пространство, координатами которого служат переменные состояния x_i , называют **пространством состояний**.

В качестве переменных состояния часто принимают токи через индуктивность, напряжение на емкостях, как величины, определяющие накопленную энергию (магнитную, электрическую, потенциальную) и характеризующие инерционные свойства объекта.

Однако в общем случае переменные состояния могут не иметь конкретного физического смысла — они будут формальными, абстрактными переменными, лишь удовлетворяющими уравнениям состояния.

Если вход и выход являются скалярными величинами, то такие системы называют **одномерными**. Если хотя бы одна из указанных переменных является векторной, то такие системы называют **многомерными**.

В общем случае уравнение одномерной управляемой системы описывается дифференциальным уравнением. Преобразуем уравнение таким образом, чтобы коэффициент при старшей производной функции $y(t)$ был равен 1. Получим уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_m u$$

$$(m \leq n).$$

Представим дифференциальное уравнение в виде **нормальной формы Коши**.

Далее

x — фазовый вектор (вектор состояний);

u — вектор управления;

y — выходной вектор.

Рассмотрим три случая: $m = 0$, $m = n$, $0 < m < n$.

1) $m = 0$. Разрешим уравнение относительно старшей производной

$$y^{(n)} = b_0 u - a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_{n-2} y'' - a_{n-1} y' - a_n y.$$

Положив $y = x_1$, $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$, $\ddot{y} = \dot{x}_2 = x_3$, ..., $y^{(n-1)} = x_n$, получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ x_n = b_0 u - a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n \\ y = x_1, \end{cases}$$

или в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = C^T x, \end{cases}$$

здесь первое уравнение — **уравнение состояния**, второе — **уравнение выхода**, где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае A — матрица состояния системы (объекта) размером $n \times n$; B — матрица управления (входа) размером $n \times r$; C — матрица выхода по состоянию размером $m \times n$.

По сопровождающей матрице A (**матрице Фробениуса**) может быть восстановлено дифференциальное уравнение, учитывая, что в последней строке записаны с конца коэффициенты с обратным знаком, а в матрице C — коэффициенты правой части в обратном порядке.

2) $m = n$. Разрешим уравнение относительно старшей производной

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_m u$$

$$(m \leq n).$$

Данное дифференциальное уравнение можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + k_1 u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + k_2 u, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + k_{n-1} u, \\ x_n = k_n u - a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n \\ y = x_1 + k_0 u, \end{cases}$$

где

$$k_0 = b_0, k_i = b_i - \sum_{j=1}^i a_j k_{i-j}, i = 1, 2, \dots, n.$$

В векторной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = C^T x + k_0 u, \end{cases}$$

здесь первое уравнение — **уравнение состояния**, второе — **уравнение выхода**, где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Условие $0 < m < n$ нужно рассматривать как частный случай $m = n$, когда первые $m - n$ коэффициентов при старших производных в правой части равны нулю.

Можно рассмотреть еще один способ.

Пусть управляемая система описывается уравнением

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + a_n} u, \quad 0 < m < n.$$

Запишем это уравнение формально следующим образом:

$$\frac{1}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m} y = \frac{1}{a_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + a_n} u = x_1.$$

Отсюда имеем

$$(a_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x_1 = u, \quad y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x_1.$$

Первое уравнение соответствует случаю $m = 0$, и его можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ x_n = \frac{1}{a_0} (u - a_n x_1 - a_{n-2} x_2 - \dots - a_1 x_n). \end{cases}$$

Второе уравнение принимает вид

$$y = b_0 x_{m+1} + b_1 x_m + \dots + b_m x_1.$$

Последнее уравнение и предыдущая система представляют собой нормальную форму исходного уравнения.

Пример . Представить дифференциальное уравнение в форме Коши.

$$2\ddot{y} + 4\dot{y} - 6y = 8u.$$

Решение. Разрешим уравнение относительно старшей производной

$$\ddot{y} = -2\dot{y} + 3y + 4u.$$

Пусть $y = x_1$, $\dot{y} = x_2$, тогда уравнение в пространстве состояний имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 4u + 3x_1 - 2x_2, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Сделаем проверку.

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow \ddot{y} = \dot{x}_2 \Rightarrow \ddot{y} = 4u + 3x_1 - 2x_2 = 4u + 3y - 2\dot{y}$$

или

$$2\ddot{y} + 4\dot{y} - 6y = 8u.$$

В векторной форме данная система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = C^T x, \end{cases}$$

здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример . Система описывается передаточной функцией

$$W = \frac{0,1p + 0,2}{0,01p^3 + 0,1p^2 + 0,2p + 0,3}.$$

Преобразовать дифференциальное уравнение, соответствующее работе данной системы, в нормальную форму.

Решение. Запишем исходное дифференциальное уравнение системы:

$$0,01\ddot{\ddot{y}} + 0,1\ddot{y} + 0,2\dot{y} + 0,3y = 0,1\dot{u} + 0,2u,$$

и разделим его на 0,01 (коэффициент при старшей производной в левой части должен быть равен 1)

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 20y = 10\dot{u} + 20u \Leftrightarrow \ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\dot{u} + b_1u.$$

Пусть уравнения в нормальной форме имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + k_1u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + k_2u, \\ \dot{x}_3 = -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + k_3u \\ y = x_1 + k_0u. \end{cases}$$

Продифференцируем обе части $y = x_1 + k_0u$ последовательно $n=3$ раза, подставляя вместо производной $\dot{x}_i$ ее выражения из системы.

$$\begin{cases} y = x_1 + k_0u, \\ \dot{y} = \dot{x}_1 + k_0\dot{u} = x_2 + k_1u + k_0\dot{u}, \\ \ddot{y} = \dot{x}_2 + k_1\dot{u} + k_0\ddot{u} = x_3 + k_2u + k_1\dot{u} + k_0\ddot{u}, \\ \ddot{\ddot{y}} = \dot{x}_3 + k_2\dot{u} + k_1\ddot{u} + k_0\ddot{\ddot{u}} = -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + k_3u + k_2\dot{u} + k_1\ddot{u} + k_0\ddot{\ddot{u}}. \end{cases}$$

Выразим из полученной системы переменные x_i :

$$\begin{cases} x_1 = y - k_0u, \\ x_2 = \dot{y} - k_1u - k_0\dot{u}, \\ x_3 = \ddot{y} - k_2u - k_1\dot{u} - k_0\ddot{u}. \end{cases}$$

Подставим полученные выражения в $\ddot{\ddot{y}} = -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + k_3u + k_2\dot{u} + k_1\ddot{u} + k_0\ddot{\ddot{u}}$ (последнее выражение предыдущей системы):

$$\ddot{\ddot{y}} = -a_1(\ddot{y} - k_2u - k_1\dot{u} - k_0\ddot{u}) - a_2(\dot{y} - k_1u - k_0\dot{u}) - a_3(y - k_0u) + k_3u + k_2\dot{u} + k_1\ddot{u} + k_0\ddot{\ddot{u}}.$$

Перенесем слагаемые, содержащие переменную y и ее производные, в левую часть, и в правой части произведем приведение подобных членов. Тогда получим

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{y}} &= -a_1\ddot{y} + a_1k_2u + a_1k_1\dot{u} + a_1k_0\ddot{u} - a_2\dot{y} + a_2k_1u + a_2k_0\dot{u} - a_3y + a_3k_0u + k_3u + k_2\dot{u} + k_1\ddot{u} + k_0\ddot{\ddot{u}}, \\ \ddot{\ddot{y}} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y &= k_0\ddot{\ddot{u}} + (a_1k_0 + k_1)\ddot{u} + (a_1k_1 + a_2k_0 + k_2)\dot{u} + (a_1k_2 + a_2k_1 + a_3k_0 + k_3)u. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых производных в правых частях полученного уравнения и приведенного (исходного) уравнения, получаем

$$k_0 = 0, \quad a_1k_0 + k_1 = 0, \quad a_1k_1 + a_2k_0 + k_2 = b_0, \quad a_1k_2 + a_2k_1 + a_3k_0 + k_3 = b_1,$$

выразим k_i

$$k_0 = 0, \quad k_1 = -a_1k_0, \quad k_2 = b_0 - a_1k_1 - a_2k_0, \quad k_3 = b_1 - a_1k_2 - a_2k_1 - a_3k_0.$$

Учитывая, что $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 30$, $b_0 = 10$, $b_1 = 20$, получим

$$k_0 = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = b_0 = 10, \quad k_3 = b_1 - a_1k_2 = 20 - 10 \cdot 10 = -80$$

Тогда, уравнения в нормальной форме имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + 10u, \\ \dot{x}_3 = -30x_1 - 20x_2 - 10x_3 - 80u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + k_1u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + k_2u, \\ \dot{x}_3 = -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + k_3u \\ y = x_1 + k_0u. \end{cases}$$

Сделаем проверку.

$$\begin{aligned} \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 &\Rightarrow \ddot{y} = \dot{x}_2 \Rightarrow \ddot{\ddot{y}} = \dot{x}_3 + 10\dot{u} \Rightarrow \ddot{\ddot{y}} = -30x_1 - 20x_2 - 10x_3 - 80u + 10\dot{u} \Rightarrow \\ \ddot{\ddot{y}} &= -30y - 20\dot{y} - 10(\ddot{y} - 10u) - 80u + 10\dot{u} = -30y - 20\dot{y} - 10\ddot{y} + 20u - 10\dot{u} \end{aligned}$$

или

$$\ddot{y} + 10\ddot{y} + 20\dot{y} + 30y = 10\dot{u} + 20u.$$

В векторной форме данная система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = C^T x + k_0 u, \end{cases}$$

здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -10 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -80 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача . Представить дифференциальное уравнение в форме Коши.

1. $\ddot{y} + 2\ddot{y} + 4\dot{y} - 6y = 8u.$	11. $4\ddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 2u.$	21. $4\ddot{y} - 2\ddot{y} - 6\dot{y} - y = 2u.$
2. $\ddot{y} + 2\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 5u.$	12. $3\ddot{y} - 2\ddot{y} + 1\dot{y} - 2y = 3u.$	22. $3\ddot{y} - 2\ddot{y} - 7\dot{y} - 2y = 3u.$
3. $2\ddot{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} - 5y = 6u.$	13. $2\ddot{y} - \ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 4u.$	23. $3\ddot{y} - 4\ddot{y} - 2\dot{y} - 8y = 9u.$
4. $3\ddot{y} + 4\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = 7u.$	14. $9\ddot{y} - 8\ddot{y} + 7\dot{y} - 6y = 5u.$	24. $\ddot{y} - 3\ddot{y} - 6\dot{y} - 9y = 2u.$
5. $4\ddot{y} + 5\ddot{y} + 6\dot{y} - 7y = 8u.$	15. $8\ddot{y} - 7\ddot{y} + 6\dot{y} - 5y = 4u.$	25. $2\ddot{y} - 9\ddot{y} - 3\dot{y} - 8y = 2u.$
6. $5\ddot{y} + 6\ddot{y} + 7\dot{y} - 8y = 9u.$	16. $7\ddot{y} - 6\ddot{y} + 5\dot{y} - 4y = 3u.$	26. $3\ddot{y} - 8\ddot{y} - 4\dot{y} - y = 3u.$
7. $8\ddot{y} - 7\ddot{y} - 6\dot{y} + 5y = 4u.$	17. $6\ddot{y} - 5\ddot{y} + 4\dot{y} - 3y = 2u.$	27. $4\ddot{y} - 7\ddot{y} - 5\dot{y} - y = 4u.$
8. $7\ddot{y} - 6\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = 3u.$	18. $5\ddot{y} - 4\ddot{y} + 3\dot{y} - 2y = 1u.$	28. $3\ddot{y} - 6\ddot{y} - 6\dot{y} - 2y = 5u.$
9. $6\ddot{y} - 5\ddot{y} - 4\dot{y} + 3y = 2u.$	19. $7\ddot{y} - 3\ddot{y} + 5\dot{y} - y = 2u.$	29. $2\ddot{y} - 5\ddot{y} - 7\dot{y} - 3y = 6u.$
10. $5\ddot{y} - 4\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 3u.$	20. $3\ddot{y} - 5\ddot{y} + 7\dot{y} - 9y = 2u.$	30. $7\ddot{y} + 2\ddot{y} + 4\dot{y} - 2y = 8u.$

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. — Москва : Сов. энциклопедия, 1988. — 847 с.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — Москва : Наука, 1969. — 576 с.
3. Чернова Н. И. Теория вероятностей : учеб. пособие / Н. И. Чернова. — Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2007. — 160 с.
4. Крушевский А. В. Теория игр / А. В. Крушевский. — Киев : Вища школа, 1977. — 216 с.
5. Краснов М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М : Наука, 1971. — 256 с.
6. Араманович И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. — М : Наука, 1968. — 416 с.
7. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. — М : Наука, 1969. — 424 с.
8. Лукас В. А. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов — 2-е изд., перераб. и доп. / В. А. Лукас. — М. : Недра, 1990. — 416 с.
9. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие для вузов — 2-е изд., перераб. и доп. / Е. П. Попов. — М. : Наука, 1989. — 304 с.
10. Пантелеев А. В. Теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Борताковский. — М. : Высш. шк., 2003. — 583 с.
11. Ким Д. П. Сборник задач по теории автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы / Д. П. Ким. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 328 с.
12. Гельфанд И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. — М : Наука, 1959. — 470 с.
13. Цыпкин Я. З. Теория линейных систем / Я. З. Цыпкин. — М : Наука, 1963. — 968 с.
14. Певзнер Л. Д. Практикум по теории автоматического управления: Учеб. пособие / Л. Д. Певзнер. — М. : Высш. шк., 2006. — 509 с.
15. Годунов С. К. Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. — М : Наука, 1977. — 440 с.
16. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. — М. : Наука, 1959. — 400 с.
17. Самарский А. А. Теория разностных схем: Учебное пособие / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 657 с.

11. ПРИЛОЖЕНИЯ

11.1. Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

11.2. Таблица значений функции Лапласа

1. Значения функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ для $x \in [0; 3,99]$.

2. $\Phi_0(-x) = \Phi_0(x)$; $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$, $\Phi(x) \sim N_{0,1}$.

3. При решении практических задач для $x \geq 4$ значения функции $\Phi_0(x)$ принимают равными $1/2$.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	x
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586	0,0
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535	0,1
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409	0,2
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173	0,3
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793	0,4
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240	0,5
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490	0,6
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524	0,7
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327	0,8
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891	0,9
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214	1,0
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298	1,1
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147	1,2
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774	1,3
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189	1,4
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408	1,5
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449	1,6
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327	1,7
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062	1,8
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670	1,9
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169	2,0
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574	2,1
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899	2,2
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158	2,3
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361	2,4
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520	2,5
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643	2,6
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736	2,7
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807	2,8
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861	2,9
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900	3,0
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929	3,1
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950	3,2
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965	3,3
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976	3,4
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983	3,5
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989	3,6
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992	3,7
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995	3,8
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997	3,9
x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	x

11.3. Критические точки распределения F Фишера-Снедекора

(указаны «правые» критические точки)

(k_1 — число степеней свободы большей дисперсии, k_2 — меньшей)

Значение критической точки в Mathcad можно найти, используя функцию $qF(1-\alpha, k_1, k_2)$, где α — уровень значимости; $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$; n_1 и n_2 — объемы выборок.

$\alpha = 0,10$		k_1																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120
k_2	1	3986	4950	5359	5583	5724	5820	5891	5944	5986	6019	6050	6071	6122	6174	6200	6226	6253	6279	6306
	2	853	900	916	924	929	933	935	937	938	939	940	941	942	944	945	946	947	947	948
	3	554	546	539	534	531	528	527	525	524	523	522	522	520	518	518	517	516	515	514
	4	454	432	419	411	405	401	398	395	394	392	391	390	387	384	383	382	380	379	378
	5	406	378	362	352	345	340	337	334	332	330	328	327	324	321	319	317	316	314	312
	6	378	346	329	318	311	305	301	298	296	294	292	290	287	284	282	280	278	276	274
	7	359	326	307	296	288	283	278	275	272	270	268	267	263	259	258	256	254	251	249
	8	346	311	292	281	273	267	262	259	256	254	252	250	246	242	240	238	236	234	232
	9	336	301	281	269	261	255	251	247	244	242	240	238	234	230	228	225	223	221	218
	10	329	292	273	261	252	246	241	238	235	232	230	228	224	220	218	216	213	211	208
	11	323	286	266	254	245	239	234	230	227	225	223	221	217	212	210	208	205	203	200
	12	318	281	261	248	239	233	228	224	221	219	217	215	210	206	204	201	199	196	193
	13	314	276	256	243	235	228	223	220	216	214	212	210	205	201	198	196	193	190	188
	14	310	273	252	239	231	224	219	215	212	210	208	205	201	196	194	191	189	186	183
	15	307	270	249	236	227	221	216	212	209	206	204	202	197	192	190	187	185	182	179
	16	305	267	246	233	224	218	213	209	206	203	201	199	194	189	187	184	181	178	175
	17	303	264	244	231	222	215	210	206	203	200	198	196	191	186	184	181	178	175	172
	18	301	262	242	229	220	213	208	204	200	198	196	193	189	184	181	178	175	172	169
	19	299	261	240	227	218	211	206	202	198	196	194	191	186	181	179	176	173	170	167
	20	297	259	238	225	216	209	204	200	196	194	192	189	184	179	177	174	171	168	164
	22	295	256	235	222	213	206	201	197	193	190	188	186	181	176	173	170	167	164	160
	24	293	254	233	219	210	204	198	194	191	188	185	183	178	173	170	167	164	161	157
	26	291	252	231	217	208	201	196	192	188	186	184	181	176	171	168	165	161	158	154
	28	289	250	229	216	206	200	194	190	187	184	181	179	174	169	166	163	159	156	152
	30	288	249	228	214	205	198	193	188	185	182	179	177	172	167	164	161	157	154	150
	40	284	244	223	209	200	193	187	183	179	176	173	171	166	161	157	154	151	147	142
	60	279	239	218	204	195	187	182	177	174	171	168	166	160	154	151	148	144	140	135
	120	275	235	213	199	190	182	177	172	168	165	162	160	155	148	145	141	137	132	126

Приложение 11.3 (продолжение)

$\alpha = 0,05$		k_1																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120
k_2	1	161	200	216	225	230	234	237	239	271	242	243	244	246	248	249	250	251	252	253
	2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
	3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
	4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
	5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
	6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
	7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
	8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
	9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
	10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
	11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
	12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
	13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
	14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
	15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,41	2,37	2,33	2,29	2,25	2,21	2,16
	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
	17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
	18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
	19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
	20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
	22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
	24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
	26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
	28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
	30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
	40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
	60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
	120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35

11.4. Критические точки распределения χ^2

(указаны «правые» критические точки)

Значение критической точки в Mathcad можно найти, используя функцию $qchisq(\alpha, k)$, где α — уровень значимости, $k = n - 1$, n — объем выборки.

$\alpha \backslash k$	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,000	0,000	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,032	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

11.5. t -распределение Стьюдента

Значение критической точки в Mathcad можно найти, используя функцию:
 $qt(1-\alpha, k)$ — для односторонней критической области,
 $qt(1-2\cdot\alpha, k)$ — для двусторонней критической области,
 где α — уровень значимости; k — число степеней свободы, $k = n_1 + n_2 - 2$; n_1, n_2 — объемы выборок.

k	α (двусторонняя критическая область)					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6.31	12.7	31.82	63.7	318.3	637.0
2	2.92	4.30	6.97	9.92	22.33	31.6
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.22	12.9
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.01	2.57	3.37	4.03	5.89	6.86
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.40
8	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.03	4.44
12	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.95
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.50	3.77
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.74
25	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.72
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.71	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.17	3.37
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29
k	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	α (односторонняя критическая область)					

11.6. Таблица некоторых изображений (преобразование Лапласа)

$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$	$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$
$\delta(t)$	1	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$t \cdot \sin at$	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$t \cdot \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}$	$t \cdot \sin at$	$\frac{2pa}{p^2 - a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$t \cdot \cos at$	$\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$t \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(p + a)^2}$
$e^{\lambda t} \cdot \sin at$	$\frac{a}{(p - \lambda)^2 + a^2}$	$\sin(t - a)$	$\frac{e^{-ap}}{p^2 + 1}$
$e^{\lambda t} \cdot \cos at$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + a^2}$	$\cos(t - a)$	$\frac{pe^{-ap}}{p^2 + 1}$
$e^{\lambda t} \cdot \cos(at + \varphi)$	$\frac{(p - \lambda) \cos \varphi - a \sin \varphi}{(p - \lambda)^2 + a^2}$	$e^{\lambda t} \cdot \sin(at + \varphi)$	$\frac{a \cos \varphi + (p - \lambda) \sin \varphi}{(p - \lambda)^2 + a^2}$
$t^n \cdot f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
$\theta(t)$	$\frac{1}{p}$	$\theta(t - a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}$

11.7. Таблица z-преобразования

$f(n)$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$	$f(n)$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$
1	$\frac{z}{z-1}$	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	n^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
e^{an}	$\frac{z}{z-e^a}$	ne^{an}	$\frac{ze^a}{(z-e^a)^2}$
$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$	$\cos \omega n$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$sh \omega n$	$\frac{zsh \omega}{z^2 - 2zch \omega + 1}$	$ch \omega n$	$\frac{z(z - ch \omega)}{z^2 - 2zch \omega + 1}$
$e^{an} \sin \omega n$	$\frac{ze^a \sin \omega}{z^2 - 2ze^a \cos \omega + e^{2a}}$	$e^{an} \cos \omega n$	$\frac{z(z - e^a \cos \omega)}{z^2 - 2ze^a \cos \omega + e^{2a}}$

11.8. Передаточные функции типовых звеньев

Тип звена		$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$
Позиционные	Безынерционное	$W(p) = k$
	Апериодическое 1-го порядка	$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$
	Апериодическое 2-го порядка	$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$
	Колебательное	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$
	Консервативное	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$
Интегрирующее	Идеальное интегрирующее	$W(p) = \frac{k}{p}$
	Реальное интегрирующее	$W(p) = \frac{k}{(Tp + 1)p}$
Дифференцирующее	Идеальное дифференцирующее	$W(p) = kp$
	Реальное дифференцирующее	$W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}$
	Неустойчивое апериодическое 1-го порядка	$W(p) = \frac{k}{Tp - 1}$
	Неустойчивое колебательное	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p - 1}$

11.9. Основы языка CPN ML

Простые множества цветов

Unit — содержит единственный элемент.

Синтаксис:

colset name = **unit** [**with** new_unit];

Пример:

colset w = unit with mouse; — множество w содержит элемент «mouse».

Boolean — логический тип (true и false).

Синтаксис:

colset name = **bool** [**with** (new_false, new_true)];

Пример:

colset w = bool with (no,yes); — множество w логического типа, причем false — «no», true — «yes».

Операции:

– **not** a — логическое отрицание — «нет»;

– a1 **andalso** a2 — логическое умножение (конъюнкция) — «и»;

– a1 **orelse** a2 — логическое сложение (дизъюнкция) — «или».

Integer — целые числа.

Синтаксис:

colset name = **int** [**with** int-exp1..int-exp2];

Пример:

colset w = int with 0..2; — множество w содержит числа 0, 1 и 2.

Операции:

+, −, div, abs, Int.min, Int.max, ~ — унарный минус.

String — строковый тип — последовательность ASCII кода (американский стандартный код обмена информацией).

Синтаксис:

colset name = **string** [**with** string-exp1..string-exp2 [**and** int-exp1..int-exp2]];

Пример:

colset w = string with “a”..“c”; — множество w содержит буквы a, b и c.

Операции:

– ^ — конкатенация — операция последовательного объединения двух строк в одну;

– String.size — размер строки (количество символов);

– substring — подстрока.

Enumerated — перечислимые — значения перечисляются как идентификаторы в описании.

Синтаксис:

colset name = **with** id0 | id1 | ... | idn;

Пример:

colset w = with aa | bb | cc; — множество w содержит числа aa, bb и cc.

Indexed — индексированные переменные — последовательность значений, состоящих из идентификатора и спецификатора индекса.

Синтаксис:

colset name = **index** id **with** int-exp1..int-exp2;

Индексированные значения имеют вид: id i или id (i), где i — целое число, которое лежит в пределах $\text{int-exp1} \leq i \leq \text{int-exp2}$.

Составные множества цветов

Product — кортеж данных, как результат декартового произведения множеств цветов — безымянное множество.

Синтаксис:

colset name = **product** name1 * name2 * ... * namen;

Для извлечения *i*-ого элемента из кортежа используется операция

i name.

[not(#2(#1(s1)))=2] — второй элемент выражения «первый элемент переменной *s1*» не равен двум.

Record — кортеж данных, как результат декартового произведения множеств цветов — множество, в котором каждый элемент имеет свое имя.

Синтаксис:

colset name = **record** id1:name1 * id2:name2 * ... * idn:namen;

Для извлечения *i*-ого элемента из кортежа используется операция

idi name

Пример.

Элемент локальной сети может быть представлен как

colset MAC = int;

colset DATA = string;

colset frame = product MAC*MAC*DATA;

colset frame1 = record src:MAC*dst:MAC*d:DATA;

Здесь MAC-адрес представлен множеством цветов типа integer, данные — множеством типа string. Фреймы локальной сети представлены множеством цветов *frame* и *frame1*.

Кадр, отправленный устройством 2 на устройство 4, содержащий послание “aa” для множества цветов *frame* может быть представлен как

$x = \{2, 4, \text{“aa”}\}$,

а для множества цветов *frame1*

$x1 = \{src=2, dst=4, d=\text{“aa”}\}$.

Извлечения адреса получателя:

– для *frame* — #2 *x*;

– для *frame1* — #dst *x1*

Списки

При описании систем, в которых возможно ожидание освобождения обрабатывающего устройства (ожидание в очереди) предусмотрен тип данных **list**.

Синтаксис:

colset name = **list** id1:name1 * id2:name2 * ... * idn:namen;

[] — пустой список;

$x \wedge y$ — объединение списков *x* и *y* (например: $[1,2,3] \wedge [4,5] \rightarrow [1,2,3,4,5]$);

x::*y* — извлечение первого элемента из списка *y* и запись его в переменную *x*, так же данная команда добавляет элемент *x* в начало списка *y* (например: “a”::[“b”, “c”] → [“a”, “b”, “c”]);

hd *x* — получение первого элемента списка *x*;

tl *x* — список *x* после удаления первого элемента;

length *x* — длина списка *x*;

rev *x* — список *x* в обратном порядке;

`map f x` — применение функции `f` к элементам списка `x`;
`ins y x` — вставка элемента `x` в конец списка `y`.

Переменные и константы

Синтаксис описания переменных:

var `id1, id2, ..., idn : colset_name`;

где `colset_name` — предварительно заданное множество цветов.

Пример:

`var x : X`;

`var a1, a2 : AAA`;

Синтаксис описания констант:

val `id = exp`;

Пример:

`val x = 5`;

`val frame = { src=2, dst=4, d="aa" }`;

Мультимножества

Синтаксис:

`i`a`,

где `i` — целое неотрицательное число.

Пример:

`5`1++2`2++3`5` — множество содержит пять 1, две 2 и три 5.

Если множество задано как

`colset X = with aa | bb | cc`,

то мультимножество может быть задано

`3`aa++7`bb+2`cc`.

Для фрейма локальной сети содержание буфера может быть представлено как:

`1`{src=2, dst=7, d="aa"} ++ 1`{src=7, dst=2, d="bb"}` — первый кадр с данными «aa» направлен от устройства «2» на устройство «7», второй — данные «bb» от «7» на «2».

Операции:

`Empty` — данная константа создает пустое мультимножество, сопоставимое с любыми типами мультимножеств;

`ms1==ms2` — равенство;

`ms1<><>ms2` — неравенство;

`ms1>>ms2 (ms1<<ms2)` — больше, чем (меньше, чем);

`ms1>>==ms2 (ms1<<==ms2)` — больше или равно (меньше или равно);

`ms1++ms2 (ms1—ms2)` — сложение (вычитание);

`i**ms` — скалярное произведение;

size `ms` — размер мультимножества;

random `ms` — возвращает псевдослучайный цвет из мультимножества.

Временные мультимножества

Для использования временных задержек используют временные мультимножества. Описание соответствующего множества должно быть дополнено `timed`.

Пример:

```
colset X = int timed;
```

```
colset Y = int with 0..2 timed;
```

Операторы `@`, `@+`, `@@+` необходимы для добавления временных меток к цветам.

Операции:

`ms @+ i` — добавление целой временной задержки `i` к цвету;

`tms1 +++ tms2` — сложение временных мультимножеств.

Пример:

```
colset A = int timed;
```

```
var a : A;
```

```
a = 1`1@100++1`2@200++1`3@300;
```

Множество `A` типа `int` может использовать временные задержки. Переменная `a` относится к типу `A`. Фишка `1@100` может быть использована, когда модельное время будет не меньше 100 ед., `2@200` — когда модельное время не меньше 200 ед., `2@300` — 300 ед.

При задании временных задержек могут быть использованы только значения типа `INT`. Для преобразования `real` в `int` необходимо воспользоваться функциями

`floor(real x)` — округление до целого вниз;

`ceil(real x)` — округление до целого вверх;

`round(real x)` — округление по правилам.

Функции модельного времени

`fun Time() = IntInf.toInt(!CPN`Time.model_time);` — текущее время модели.

`fun Time() = IntInf.toInt(time()):int;` — текущее время модели с преобразованием значения в тип `INT`.

`fun Time() = ModelTime.toString(time()):string;` — текущее время модели с преобразованием значения в тип `STRING`.

`fun Time() = ModelTime.time():time;`

`fun Time() = IntInf.toInt(step()):int;` — получение текущего времени шага моделирования в `INT`.

`fun Time() = ModelTime.toString(step()):string;` — получение текущего времени шага моделирования в `STRING`.

`fun Time(t:string) = ModelTime.maketime(t):time;`

Случайные функции

Для задания случайных величин можно воспользоваться

`colset A = int with 1..20` — будет выбрано случайное число из диапазона от 1 до 20;

Так же можно использовать внутренний генератор случайных чисел

```
colset Range = int with 1..1000;
```

```
fun ranRange() = Range.ran();
```

здесь функция `ranRange()` сгенерирует случайную величину из задаваемого диапазона множества `Range`.

Распределения

		$M(X)$	$D(X)$
Бернулли Случайная величина принимает значения 0 и 1 с вероятностями p и q соответственно	bernoulli(p:real) : int	p	$pq = p(1-p)$
Биномиальное n — количество случайных величин, распределенных по закону Бернулли	binomial(n:int, a:real) : int	np	$npq = np(1-p)$
Хи квадрат Распределение суммы квадратов n независимых стандартных нормальных случайных величин	chisq(n:int) : int	n	$2n$
Дискретное равномерное $[a, b]$ — интервал, на котором случайная величина принимает конечное число значений с равными вероятностями	discrete(a:int, b:int) : int	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$
Эрланга n независимых случайных величин, каждая из которых имеет показательной распределений с параметром r	erlang(n:int, r:real) : real erlang(10, 0.1) round(erlang(10, 0.1))	$\frac{n}{r}$	$\frac{n}{r^2}$
Экспоненциальное (показательное)	exponential(r:real) : real exponential(1.0/5.0) round(exponential(0.2))	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r^2}$
Нормальное	normal(n:real, v:real) : real normal(10.0, 1.0)	n	v
Пуассона	poisson(m:real) : int	m	m
Стьюдента	student(n:int) : real	0, если $n > 1$	$\frac{n}{n-2}$, если $n > 2$
Непрерывное равномерное $[a, b]$ — интервал, на котором плотность вероятности постоянна	uniform(a:real, b:real) : real	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

В случае если результатом распределения является значение типа REAL, а необходим тип INT, то можно воспользоваться преобразованием real в int с помощью функций:

floor(real x) — округление до целого вниз;

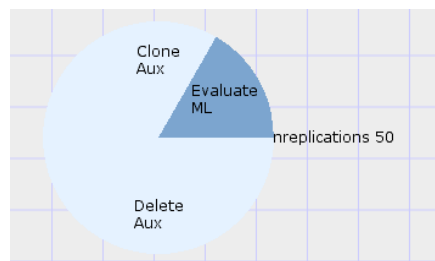
ceil(real x) — округление до целого вверх;

round(real x) — округление по правилам.

Например: ceil(student(7.0)).

Палитра «State space»

Для получения значений исследуемых характеристик после нескольких прогонов модели (например, 50) введем текстовое поле «CPN'Replications.nreplications 50», кликнув правой клавишей мышки в пустом месте страницы и выбрав команду «Create aux text». Запустим модель, кликнув правой клавишей мышки по введенной надписи и выбрав соответствующую команду.



В результате получим значения изучаемых характеристик после необходимого количества прогонов модели.

CPN Tools Simulation Perform... x CPN Tools Performance Report x +

file:///C:/Program Files/CPN Tools/Models/CCC/output/rep8/PerfReportID.html

CPN Tools Performance Report
Net: /cygdrive/C/Program Files/CPN Tools/Models/CCC/CMO.cpn
Number of replications: 50

Statistics							
Name	Avrg	90% Half Length	95% Half Length	99% Half Length	Std	Min	Max
List_length_dc_New_Page'queue_1							
count_iid	1002.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1002	1002
max_iid	10.500000	0.828139	0.993865	1.329743	3.477332	6	22
min_iid	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0
avrg_iid	1.013581	0.089252	0.107113	0.143312	0.374767	0.532010	2.263621
Marking_size_New_Page'delay_1							
count_iid	1002.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1002	1002
max_iid	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1	1
min_iid	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0
avrg_iid	0.615666	0.010896	0.013076	0.017495	0.045751	0.510849	0.718217
New_Monitor							
count_iid	500.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	500	500
max_iid	32.100000	2.149180	2.579271	3.450939	9.024343	18	56
min_iid	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0	0
sum_iid	3257.740000	176.119146	211.363892	282.794638	739.519254	2203	5418
avrg_iid	6.515480	0.352238	0.422728	0.565589	1.479039	4.406000	10.836000

Generated: Sun Sep 25 13:41:21 2016

В случае 90 % доверительной вероятности:

- 1) количество пакетов в памяти — $1,01 \pm 0,089$ шт.;
- 2) коэффициент использования обслуживающего прибора — $0,61 \pm 0,01$;
- 3) среднее время нахождения пакета данных в системе — $6,51 \pm 0,35$ ед.вр.

В случае если модель содержит n обслуживающих приборов, то коэффициент использования одной единицы оборудования определим как

$$\frac{k \pm \Delta k}{n}.$$

Так же можно было собрать статистику для простоя оборудования, для состояния в котором находится фишка (в наших моделях над состоянием «delay»). Тогда, в случае одного обслуживающего прибора, коэффициент простоя определялся как $1 - (k \pm \Delta k)$, а для n обслуживающих приборов — $\frac{n - (k \pm \Delta k)}{n}$.

Палитра «Hierarchy»



	Создать подмодель нижнего уровня. Для этого, выбрав инструмент, кликнуть на соответствующем переходе. При этом автоматически будут созданы: страница с именем данного перехода, входные и выходные позиции, связанные с позициями верхнего уровня. После этого в подмодели удаляем переход и собираем необходимую нам подмодель.
	Заменить подстановочный переход содержимым соответствующей подмодели. Все элементы подмодели будут вписаны в данный подстановочный переход, а страница с подмоделью станет невидимой.
	Связать подмодель и подстановочный переход. Возможны два случая. 1. Страницы с подмоделью нет. Для этого создаем новую страницу, кликнув правой клавишей мышки на имени модели и выбрав команду «New Page». Присваиваем новой странице нужное имя. Далее выбираем инструмент, кликаем на переходе, который должен стать подстановочным, и кликаем на имени страницы в области меню. После этого перетаскиваем страницу в рабочую область. И с нуля создаем подмодель. 2. Страница с подмоделью создана. Выбираем инструмент, кликаем на переходе, который должен стать подстановочным, и кликаем на имени страницы в области меню. В обоих случаях необходимо «вручную» обозначить позиции, которые будут являться входными и выходными в моделях верхнего и нижнего уровней, а также установить связь между позициями верхнего и нижнего уровней с помощью соответствующих инструментов.
	Установить связь между позициями в моделях верхнего и нижнего уровня. Сначала необходимо объявить позиции, которые будут являться входными и выходными в моделях верхнего и нижнего уровней. Позиции должны быть одного типа. Далее выбираем инструмент, кликаем на позиции во вложенной модели, происходит автоматический переход на модель верхнего уровня, кликаем на соответствующей позиции модели верхнего уровня.
	Сделать позицию входной в данной модели.
	Сделать позицию выходной в данной модели.

	Сделать позицию одновременно входной и выходной в данной модели.
	Сделать позицию общей. Необходимо для связи позиций находящихся далеко друг от друга или в моделях разных уровней и являющихся одной и той же позицией.

11.10. Блоки, распределения и функции GPSS Word

Транзакты (заявки, запросы, сообщения) — это динамические объекты, которые в процессе моделирования создаются в блоке GENERATE, перемещаются по функциональным блокам модели, имитирующим структуру и алгоритм работы моделируемой системы, и удаляются из модели в блоке TERMINATE.

Блоки	
EQU Формат: A EQU B	Присваивается A значение B
GENERATE Формат: GENERATE A,B,C,D,E,F,G	Вводит транзакты в модель, посылая их в следующий по порядку блок. Если в поле B не указана Функция, то интервал между поступлением транзактов определяется случайным числом, равномерно распределенным в диапазоне от (A - B) до (A + B). Если поле B является функцией (FN\$), то этот интервал определяется произведением поля A на значение функции, заданной в поле B. A — средний интервал времени между моментами создания транзактов; B — отклонение от среднего интервала между транзактами (по умолчанию ноль); C — время появления первого транзакта; D — общее число генерируемых транзактов; E — уровень приоритета каждого транзакта (от 0 до 127, значение по умолчанию 0); F — число параметров (по умолчанию 12); G — тип параметра (F — полнословный, H — полусловный — по умолчанию).
ADVANCE Формат: ADVANCE A,B	Моделирует временную задержку транзакта в течение определенного интервала. Значение задержки по умолчанию равно нулю. Если поле B не является FN\$, то время задержки является случайным числом, распределенным равномерно на интервале от (A + B) до (A - B). Если поле B является функцией FN\$, то время задержки определяется произведением поля A на значение функции в поле B. Функция может быть использована для задания времени задержки с определенным средним значением и отклонением, зависящим от A. A — среднее время задержки (константа, если B не задано); B — разброс относительно среднего значения, должен быть меньше или равен A.
SEIZE Формат: SEIZE A	Моделирует занятие OKY

QUEUE Формат: QUEUE A,B	Помещает транзакт в конец очереди. Увеличивает текущее содержимое очереди, указанной в поле A, на значение в поле B. Если поле B не определено, увеличивает содержимое очереди на единицу. Транзакт может находиться в двух различных очередях одновременно. A — номер очереди (числовое или символьное имя очереди); B — число добавляемых к очереди элементов (по умолчанию 1).
DEPART Формат: DEPART A,B	Выводит транзакт из очереди с именем A. B — число единиц, на которое уменьшается очередь (по умолчанию 1).
RELEASE Формат: RELEASE A	Освобождает устройство ОКУ. A — номер устройства (числовое или символьное имя освобождаемого устройства). Устройство, указанное в поле A, освобождается и становится доступным для других транзактов. Освобождать устройство должен тот же транзакт, который его занимал.
Для ОКУ TEST Формат: TEST X A,B,C	Сравнивает два стандартных числовых атрибута A и B. X — внутренний операнд, принимающий значения: E — равно; NE — не равно; L — меньше чем; LE — меньше чем или равно; G — больше чем; GE — больше чем или равно. A — стандартный числовой атрибут; B — стандартный числовой атрибут; C — номер альтернативного блока. Значения стандартных числовых атрибутов, указанных в поле A и B, сравниваются отношением, определяемым операндом X. Если условие выполняется, транзакт вводится в блок. Если условие не выполняется и определено поле C, транзакт переходит в указанный блок, если же C не задано, транзакт задерживается в предыдущем блоке.
TERMINATE Формат: TERMINATE A	Удаляет транзакт. A — величина, вычитаемая из содержимого счетчика завершений (поле A карты START). Транзакт удаляется из модели и поступает в пассивный буфер. Если в поле A пробел, воздействия на счетчик завершений не происходит, в противном случае его значение уменьшается на величину, указанную в поле A.
START Формат: START A,B,C,D	Управление процессом моделирования. A — счетчик числа завершений; B — подавление вывода на печать ($B = NP$); C — промежуточный вывод статистики; D — распечатка списков. Поле A определяет счетчик завершений при прогоне модели. При входе транзакта в блок TERMINATE с ненулевым значением поля A, содержимое поля A блока TERMINATE вычита-

	ется из остаточного значения счетчика – поля А карты START. Прогон завершается, когда значение счетчика достигнет нуля. Указатель NP в поле В отменяет вывод стандартного отчета GPSS. Величина, указанная в поле С, определяет число завершений, по достижении которого выдается промежуточный отчет. Таким образом, можно получать статистические данные в определенных интервалах моделирования. Если поле D содержит 1, полученный отчет будет содержать списки текущих и будущих событий, а также списки пользователя.
SAVEVALUE Формат: SAVEVALUE A,B,C	Сохраняет значение. А — имя сохраняемой величины (имя ячейки); В — присваиваемое значение; С — тип ячейки: XF, XH, XL (по умолчанию XF). Если за полем А стоит знак «+» или знак «-», значение поля В, соответственно, прибавляется или вычитается из текущего содержимого ячейки. Если знаки «+» или «-» не указаны, то значение поля В записывается в ячейку. Поле С определяет тип ячейки (XH — полусловная; XF — полнословная; XL — с плавающей точкой).
TABLE Формат: n TABLE A,B,C,D	Создает таблицу данных о распределении значений числовых величин (время пребывания транзакта в модели — $M1$, длина очереди и т.д.). N — имя таблицы; A — имя СЧА; B — верхняя граница первого интервала; C — ширина интервала (шаг); D — количество интервалов. Регистрация значения СЧА, заданного в А при объявлении таблицы, производится при прохождении транзакта через оператор «TABULATE A», который указывается в тексте модели в том месте, где требуется получить данные о значении табулируемой величины.
TABULATE A Формат: TABULATE A	Запись в таблицу с именем А.
QTABLE Формат: n QTABLE A,B,C,D	Создает таблицу времени пребывания в очереди (для построения гистограммы). n — имя таблицы; A — имя очереди (-); B — верхняя граница первого частотного интервала; C — ширина интервала; D — количество интервалов. Знак минус (-), следующий за полем А, определяет, что эта таблица является разностной таблицей (DQTABLE). Поля B,C,D определяют характеристики таблицы интервалов. Начальный буквенный символ в поле D указывает взвешенную таблицу.

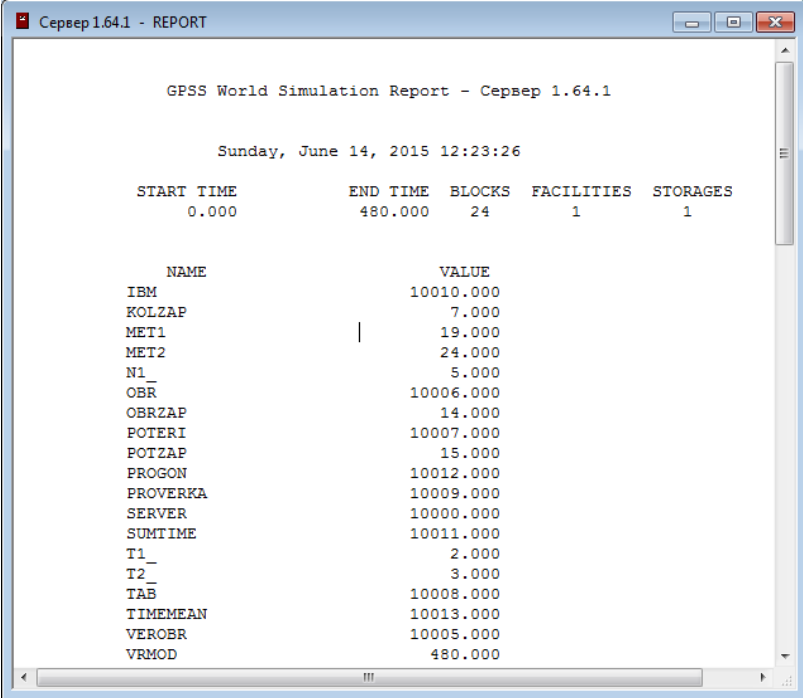
STORAGE Формат: имя STORAGE A (имя STORAGE A,B)	Задает емкость многоканального устройства (количество обслуживающих приборов). имя — имя (номер) очереди. А — емкость (количество каналов) многоканального устройства. (А — память (S) (стандартный числовой атрибут), В — емкость памяти (по умолчанию 32767). Устанавливает определенную емкость памяти. Если емкость не определена, то значением по умолчанию является 32767.)
ENTER Формат: ENTER A,B	Вход транзакта в многоканальное устройство. А — имя (символическое и/или числовое) МКУ; В — число занимаемых приборов МКУ (по умолчанию 1).
LEAVE Формат: LEAVE A,B	Выход транзакта из МКУ. А — имя (символическое и/или числовое) МКУ; В — число освобождаемых приборов МКУ (по умолчанию 1).
TRANSFER Формат: TRANSFER A,B,C,D	Изменяет движение транзакта в модели. А — режим передачи (пробел, . , ALL, BOTH, FN, P, PICK, SBR, SIM); В — следующий блок; С — следующий блок; D — значение индекса, используемое в режиме ALL. Транзакт направляется в блок, определяемый в соответствии с режимом передачи, указанным в поле А. Режимы передачи поля А: 1. Пробел — транзакт передается в блок, определяемый полем В. 2. «.» — статистический режим; в поле А указано десятичное число, выражающее вероятность перехода в блок С; его дополнение до единицы указывает вероятность перехода в блок В (не более 3 цифр). 3. ALL — транзакт последовательно пытается перейти в блоки, определяемые значениями В, В+D, В+2D.....С. 4. BOTH — транзакт последовательно пытается войти в блок В, затем в блок С, до тех пор, пока один из них станет доступным. 5. FN — функциональный режим: поле В является номером функции; следующий блок определяется суммой значения этой функции поля С. 6. P — параметрический режим: поле В является номером параметра; следующий блок определяется суммой значения этого параметра и поля С. 7. PICK — выборочный режим: блок выбирается с равной вероятностью из блоков с номерами: В, В+1,..., С. 8. SBR — режим перехода к подпрограмме: номер текущего блока помещается в параметр, указанный в поле С, а транзакт передается в блок, номер которого указан в поле В. 9. SIM — одновременный режим: проверяется одновременное

	выполнение условий беспрепятственного движения транзактов в задерживающих блоках. Если условие выполняется, транзакт передается в следующий блок, в противном случае транзакт переходит на блок С.
Для МКУ TEST Формат: TEST X A,B,C	Проверяет состояние МКУ А.
GATE Формат: GATE X A,B	Проверяет состояние устройства А. Значения условного оператора X могут быть: FV (FVN) — устройство доступно (недоступно); I (NI) — устройство прервано (не прервано); U (NU) — устройство используется (не используется); SE (SNE) — МКУ пусто (не пусто) SF (SNF) — МКУ заполнено (не заполнено); SV (SNV) — МКУ доступно (не доступно); X сравнивается с А. Если условие верно, то транзакт будет направлен к следующему блоку, в противном случае к блоку с меткой В.
ASSIGN Формат: ASSIGN A,B	Назначение и изменение параметра транзакта. А — номер изменяемого параметра (+, –); В — новое значение параметра. Если за полем А следует знак «+» или «–», то значение поля В соответственно добавляется или вычитается из А. Если знаки «+» или «–» не указаны, то значение поля В становится текущим значением параметра. Примеры: 1. ASSIGN 2,8 — присваивает параметру 2 значение 8. 2. ASSIGN 3+,V\$5 — добавляет значение переменной 5 к параметру 3.
LOOP Формат: LOOP A,B	Организация цикла. Указывается последним в группе операторов, образующих цикл. А — номер параметра транзакта, в котором указано количество повторений цикла; В — метка оператора, с которого начинается цикл. При входе транзакта значение параметра А уменьшается на единицу, а сам транзакт переходит в блок с меткой В.
Распределения	
В аргументе А данных законов записывается номер генератора равномерно распределенных случайных чисел (РРСЧ) в диапазоне от 0 до 1, который рекомендуется выбирать из диапазона от 1 до 7. Для равномерного закона в аргументе В записывается левый предел диапазона существования, а в аргументе С – правый предел. Для экспоненциального закона аргумент В принимается равным 0, а в аргументе С записывается среднее значение. Для нормального закона в операнде В записывается среднее значение, а в операнде С стандартное отклонение. Для нормального закона стандартное отклонение должно быть не более 0,2 от среднего значения (при невыполнении этого условия возможно появление отрицательных чисел, что недопустимо для имитации временных переменных). Для специального эрланговского закона аргумент В принимается равным 0, в аргумент С записывается среднее значение, а в аргумент D запи-	

сывается количество фаз.	
Экспоненциальное	EXPONENTIAL(A,B,C) A — номер генератора PPCЧ; B — смещение; C — среднее значение.
Биномиальное	BINOMIAL(A,B,C) A — номер генератора PPCЧ; B — количество испытаний; C — частота (вероятность) события.
Гамма	GAMMA (A,B,C,D) A — номер генератора PPCЧ; B — смещение; C — интенсивность; D — форма. Частный случай гамма-распределения — распределение Эрланга k -го порядка с математическим ожиданием M . Тогда: $B = 0$, $C = M/k$, $D = k$.
Нормальное	NORMAL(A,B,C) A — номер генератора PPCЧ; B — среднее значение случайной величины; C — среднее квадратическое отклонение.
Дискретное равномерное	DUNIFORM(A,B,C) A — номер генератора PPCЧ; B — минимальное значение случайной величины; C — максимальное значение.
Пуассоновское	POISSONINOMIAL(A,B) A — номер генератора PPCЧ; B — среднее значение случайной величины.
Равномерное	UNIFORM(A,B,C) A — номер генератора PPCЧ; B — минимальное значение случайной величины; C — максимальное значение.
Треугольное	TRIANGULAR(A,B,C,D) A — номер генератора PPCЧ; B — минимальное значение случайной величины; C — максимальное значение; D — мода.
Стандартные числовые атрибуты (СЧА)	
Системные СЧА	
RN_j	Число, возвращаемое j -м датчиком случайных чисел
$C1$	Текущее значение относительного модельного времени
$AC1$	Текущее значение абсолютного модельного времени
$TG1$	Текущее значение счетчика завершений
$XN1$	Номер активного транзакта (обрабатываемого в текущий момент)
$Z1$	Размер свободной оперативной памяти в байтах
СЧА транзактов	
$M1$	Время пребывания в модели активного транзакта
PR	Приоритет транзакта

P_j	Значение j -го параметра
MP_j	Разность модельного времени и значения j -го параметра
MB_j	Признак синхронизации: 1 – транзакт в блоке j принадлежит тому же ансамблю, что и текущий транзакт; 0 – в противном случае
$XN1$	Номер активного транзакта
СЧА блоков	
N_j	Общее количество транзактов, вошедших в блок j
W_j	Текущее количество транзактов, находящихся в блоке j
СЧА одноканальных устройств	
F	Текущее состояние устройства: 0 – свободно; 1 – занято (блоки PREEMPT или SEIZE)
FI	Признак состояния прерывания: 1 — устройство в состоянии прерывания (блок PREEMPT); 0 — нет
FR	Коэффициент загрузки
FV	Признак доступности устройства: 1 — доступно; 0 — нет
FC	Общее количество входов в устройство
FT	Среднее время пребывания транзакта в устройстве
СЧА многоканальных устройств	
S	Текущее количество занятых каналов
R	Текущее количество свободных каналов
SR	Коэффициент загрузки
SA	Среднее количество занятых каналов
SM	Максимальное количество занятых каналов
ST	Среднее время пребывания транзакта в устройстве
SE	Признак свободного устройства: 1 — свободно; 0 — хотя бы один канал занят
SF	Признак заполненности устройства: 1 — заполнено; 0 — хотя бы один канал свободен
SV	Признак доступности устройства: 1 — доступно; 0 — недоступно
СЧА очередей	
Q	Длина очереди
QA	Средняя длина очереди
QM	Максимальная длина очереди
QC	Общее количество входов в очередь
QZ	Количество нулевых входов (не стояли в очереди)
QT	Среднее время пребывания транзакта в очереди (включая нулевые входы)
QX	Среднее время пребывания транзакта в очереди (без учета нулевых входов)
СЧА таблиц	
TB	Среднее значение табулируемой величины
TC	Общее количество входов в таблицу
TD	Стандартное отклонение табулируемой величины

11.11. Отчет в GPSS



Сервер 1.64.1 - REPORT

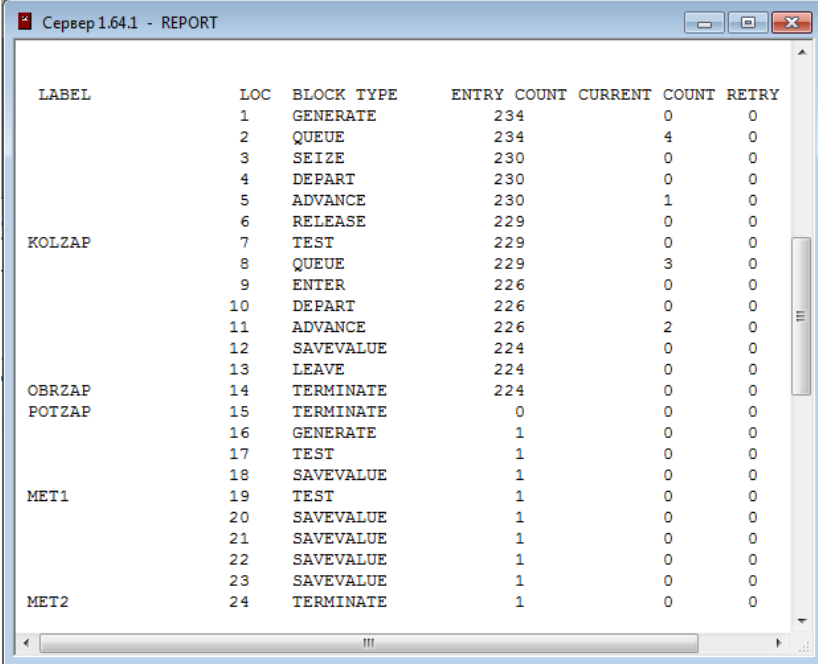
GPSS World Simulation Report - Сервер 1.64.1

Sunday, June 14, 2015 12:23:26

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	480.000	24	1	1

NAME	VALUE
IBM	10010.000
KOLZAP	7.000
MET1	19.000
MET2	24.000
N1_	5.000
OBR	10006.000
OBRZAP	14.000
POTERI	10007.000
POTZAP	15.000
PROGON	10012.000
PROVERKA	10009.000
SERVER	10000.000
SUMTIME	10011.000
T1_	2.000
T2_	3.000
TAB	10008.000
TIMEMEAN	10013.000
VEROBR	10005.000
VRMOD	480.000

START TIME — абсолютное системное время начала моделирования;
 END TIME — абсолютное системное время окончания моделирования;
 BLOCKS — количество блоков программы исключая блоки-описания;
 FACILITIES — количество одноканальных устройств;
 STORAGE — количество многоканальных устройств;
 NAME — имена переменных и меток, используемых в программе;
 VALUE — значения переменных и меток, присвоенные программой (с 10000).



Сервер 1.64.1 - REPORT

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT	COUNT	RETRY
	1	GENERATE	234	0	0	0
	2	QUEUE	234	4	0	0
	3	SEIZE	230	0	0	0
	4	DEPART	230	0	0	0
	5	ADVANCE	230	1	0	0
	6	RELEASE	229	0	0	0
KOLZAP	7	TEST	229	0	0	0
	8	QUEUE	229	3	0	0
	9	ENTER	226	0	0	0
	10	DEPART	226	0	0	0
	11	ADVANCE	226	2	0	0
	12	SAVEVALUE	224	0	0	0
	13	LEAVE	224	0	0	0
OBRZAP	14	TERMINATE	224	0	0	0
POTZAP	15	TERMINATE	0	0	0	0
	16	GENERATE	1	0	0	0
	17	TEST	1	0	0	0
	18	SAVEVALUE	1	0	0	0
MET1	19	TEST	1	0	0	0
	20	SAVEVALUE	1	0	0	0
	21	SAVEVALUE	1	0	0	0
	22	SAVEVALUE	1	0	0	0
	23	SAVEVALUE	1	0	0	0
MET2	24	TERMINATE	1	0	0	0

LOC — номер блока, присвоенный программой;

BLOC TYPE — имя блоков-операторов;
 ENTRY COUNT — количество транзактов, прошедших через блок за время моделирования;
 CURRENT COUNT — количество транзактов, находящихся в блоке на момент окончания моделирования;
 RETRY — количество транзактов, пытающихся два и более раз войти в блок.

The screenshot shows a report window titled "Сервер 1.64.1 - REPORT". It contains several tables of performance data.

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
IBM	230	0.948	1.978	1	231	0	0	0	4

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY
SERVER	5	3	229	133	0.440	0.923	2.202	0
PROVERKA	9	4	234	13	3.422	7.019	7.432	0

STORAGE	CAP.	REM.	MIN.	MAX.	ENTRIES	AVL.	AVE.C.	UTIL.	RETRY	DELAY
SERVER	2	0	0	2	226	1	1.405	0.702	0	3

TABLE	MEAN	STD.DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY	CUM. %
TAB	0.891	1.548	-	0		
			0.000 -	0.000	133	58.85
			2.000 -	2.000	51	81.42
			4.000 -	4.000	29	94.25
			6.000 -	6.000	8	97.79
			8.000 -	8.000	5	100.00

FACILITY — имя одноканального устройства;
 ENTRIES — количество транзактов, вошедших в устройство;
 UTIL. — коэффициент использования устройства (отношение времени работы устройства по обслуживанию транзактов к полному времени моделирования);
 AVE.TIME — среднее время обслуживания одного транзакта;
 AVAIL. — состояние готовности устройства на момент окончания моделирования (1 — готово к обслуживанию очередной заявки, 0 — не готово);
 OWNER — порядковый номер последнего транзакта, занимающего устройство (0 — не занималось);
 PEND — количество транзактов, ожидающих поступления на обслуживания данным устройством;
 INTER — количество транзактов, движение которых было принудительно прервано;
 RETRY — количество транзактов, ожидающих специальных условий, зависящих от состояния устройства;
 DELAY — количество транзактов, ожидающих обслуживания.
QUEUE — имя очереди;
 MAX — максимальная длина очереди;
 CONT. — длина очереди на момент окончания моделирования;
 ENTRY — общее количество, вошедших в очередь транзактов;
 ENTRY(0) — количество вошедших в очередь транзактов без учета тех, кто не стоял в очереди, а прошел через нее без ожидания;
 AVE.CONT — среднее количество транзактов в очереди (общее количество сгенерированных транзактов деленное на количество транзактов, вошедших в очередь);
 AVE.TIME — среднее время пребывания в очереди;

AVE.(0) — среднее время пребывания в очереди без учета времени тех транзактов, которые не стояли в очереди (реальное среднее время нахождения в очереди);

RETRY — количество транзактов, ожидающих специальных условий, зависящих от состояния устройства.

STORAGE — имя многоканального устройства;

CAP. — емкость устройства, определенная в операторе STORAGE;

REM. — количество не используемых приборов устройства на момент окончания моделирования;

MIN. — минимальное количество приборов устройства, используемых в процессе работы модели;

MAX. — максимальное количество приборов устройства, используемых в процессе работы модели;

ENTRIES — количество вошедших в устройство транзактов;

AVL. — состояние готовности устройства на момент окончания моделирования (1 — готово к обслуживанию очередной заявки, 0 — не готово);

AVE.C. — среднее значение занятых каналов (емкости) за период моделирования;

UTIL. — коэффициент использования устройства (отношение времени работы устройства по обслуживанию транзактов к полному времени моделирования);

RETRY — количество транзактов, ожидающих специальных условий, зависящих от состояния устройства;

DELAY — количество транзактов, ожидающих обслуживания.

TABLE — имя таблицы гистограмм;

MEAN — среднее значение;

STD.DEV. — исправленное среднеквадратическое отклонение $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$;

RANGE — шаг гистограммы;

RETRY — количество попыток повторных входов;

FREQUENCY — количество транзактов, попавших в диапазон времени;

CUM.% — накопленная частота, выраженная в процентах от общего количества, записываемых в таблицу значений.

Сервер 1.64.1 - REPORT							
SAVEVALUE		RETRY	VALUE				
VEROBR		0	0.978				
OBR		0	224.000				
POTERI		0	0				
SUMTIME		0	2813.824				
PROGON		0	1.000				
TIMEMEAN		0	12.562				
FEC	XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER
226	0		481.171	226	11	12	VALUE
231	0		481.235	231	5	6	
227	0		485.844	227	11	12	
236	0		486.812	236	0	1	
237	0		960.000	237	0	16	

SAVEVALUE — имя ячейки записи значения;

RETRY — количество транзактов, ожидающих специальных условий, зависящих от состояния устройства;

VALUE — значение ячейки на момент окончания моделирования.

FEC — список будущих событий;

FEX XN — номер транзакта в списке будущих событий;

PRI — текущий приоритет;

BDT — абсолютное системное время, когда транзакт должен покинуть список будущих событий;

ASSEM — номер транзакта в общем списке транзактов;

CURRENT — номер блока в котором находится транзакт на момент окончания моделирования;

NEXT — номер блока-оператора в который должен был перейти транзакт далее;

PARAMETER — номер или имя параметра транзакта;

VALUE — значение параметра.

CEC — список текущих событий;

CEC XN — номер транзакта в списке текущих событий;

PRI — приоритет транзакта (по умолчанию 0);

M1 — время пребывания транзакта с момента начала моделирования;

ASSEM — номер транзакта в общем списке транзактов;

CURRENT — номер блока в котором находится транзакт;

NEXT — номер блока в который перейдет транзакт далее;

PARAMETER — номер или имя параметра транзакта;

VALUE — значение параметра.

11.12. Функция Дирака

Обобщенные функции были введены в связи с трудностями решения некоторых задач математической физики, квантовой механики, электромагнетизма и т. д., где, помимо непрерывных функций, описывающих непрерывно распределенные величины (масса, источники тепла, механический импульс и др.), понадобилось использовать разрывные функции для сосредоточенных величин (точечная масса, точечный источник тепла, сосредоточенный импульс и др.).

Из разрывных функций важную роль сыграла единичная функция $\theta(x)$, определенная как:

$$1(x) = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Данная функция была введена в 1898 г. Английским инженером Хевисайдом для решения операционными методами некоторых дифференциальных уравнений теории электрических цепей.

В 1926 г. Английский физик Дирак ввел в квантовой механике символ δ , названный им дельта-функцией, которая явилась первой систематически применяемой обобщенной функцией. С физической точки зрения δ -функция Дирака представляет собой плотность единичного заряда, помещенного в начале координат. Если этот заряд имеет величину m , то его плотность $\rho(x) = m\delta(x)$.

Отсюда следует, что символ $\delta(x)$ обладает свойствами

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Заметим, что, строго говоря, $\delta(x)$ не представляет собой функцию, т. к. не существует функций, удовлетворяющих данным соотношениям. Получился, таким образом, некоторый формализм в применении δ -функции, с помощью которого достаточно просто были исследованы некоторые разрывные явления. В частности, было замечено, что между единичной функцией $\theta(x)$ и функцией $\delta(x)$ существует связь

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} \theta(x),$$

которая, очевидно, не имеет смысла в рамках классического анализа, но справедлива в смысле теории обобщенных функций.

В физике употребляются так называемые сингулярные функции, которые, как уже сказано, не могут быть корректно определены в рамках классической теории функций.

Простейшей сингулярной функцией является дельта-функция $\delta(t - \tau)$: она, по определению физиков, «равна нулю всюду, кроме одной точки τ , в этой точке равна бесконечности и обладает интегралом, равным единице». Очевидно, что эти условия несовместимы с точки зрения классического определения функции и интеграла.

При решении конкретных задач математической физики дельта-функции (и другие сингулярные функции) встречаются, как правило, только на промежуточных этапах; в окончательном ответе сингулярные функции или вообще отсутствуют или фигурируют под знаком интеграла в произведении с какой-либо достаточно «хорошей» функцией.

Пусть задана некоторая функция $f(x)$, абсолютно интегрируема в каждой конечной области пространства R_n . С помощью данной функции можно каждой основной функции $\varphi(x)$ поставить в соответствие число

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x)\varphi(x)dx,$$

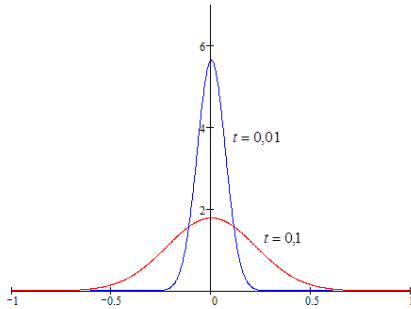
где интегрирование фактически совершается по ограниченной области, вне которой функция $\varphi(x)$ обращается в ноль.

Функции (**обобщенные функции**), заданными последним выражением называют **регулярными**, все остальные (в том числе дельта-функцию) — **сингулярными**.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot t}} e^{-\frac{x^2}{t}},$$

содержащей параметр t . При любом t $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot t}} e^{-\frac{x^2}{t}} dx = 1$.



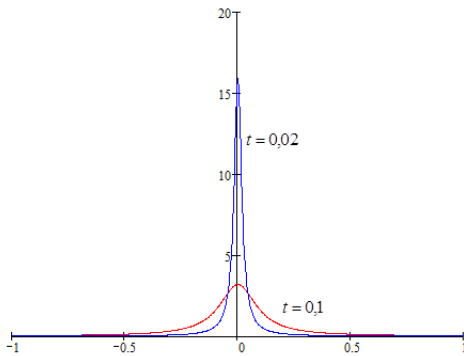
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \rightarrow 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 0.5}} e^{-\frac{x^2}{0.5}} dx \rightarrow 1$$

Рассмотрим также функцию

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{x^2 + t^2},$$

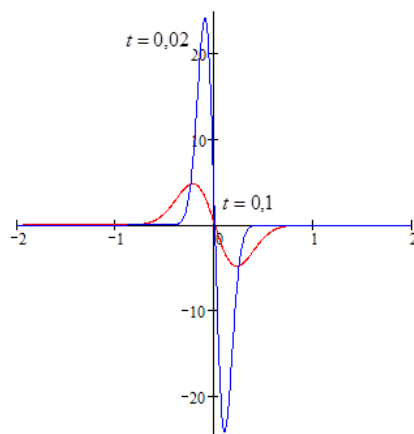
содержащую параметр t . При любом t имеем $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{t}{x^2 + t^2} dx = 1$.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{0.1}{x^2 + 0.1^2} dx \rightarrow \frac{3.1415926535897932386}{\pi} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{0.02}{x^2 + 0.02^2} dx \rightarrow \frac{3.1415926535897932386}{\pi} = 1$$

В пределе при $t \rightarrow 0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ уже перестают быть функциями в общепринятом смысле, т. к. при $x = 0$ предельная «функция» должна равняться ∞ . Такие предельные «функции», не являющиеся функциями в общепринятом смысле, называют **обобщенными функциями**.



Дельта-функцией Дирака называется обобщенная функция $\delta(x)$, удовлетворяющая требованиям;

$$1) \delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Свойства дельта-функции.

$$1. \delta(x) = \delta(-x).$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a).$$

$$3. \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (a \neq 0).$$

4. Пусть функция $f(x)$ равна нулю только в одной точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0) \text{ или в общем виде } \delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i).$$

$$5. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0).$$

Пример. Найти интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + x + 1) \delta(x - 2) dx$.

Решение. Согласно свойству 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 2x + 3) \delta(x - 2) dx = (x^2 + 2x + 3) \Big|_{x=2} = 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 11.$$

Пример. Упростить $(x^2 + x + 1) \delta(x - 2)$.

Решение. Так как функция $\delta(x - 2)$ не равна нулю только в точке $x = 2$, то множитель $(x^2 + x + 1)$ можно заменить его значением в данной точке:

$$(x^2 + 2x + 3) \delta(x - 2) = (x^2 + 2x + 3) \Big|_{x=2} \delta(x - 2) = (2^2 + 2 \cdot 2 + 3) \delta(x - 2) = 11 \delta(x - 2).$$

Пример. Упростить $\delta(-3x+4)$.

Решение. Согласно свойству 3

$$\delta(-3x+4) = \delta[-3(x-4/3)] = \frac{1}{|-3|} \delta(x-4/3) = \frac{1}{3} \delta(x-4/3).$$

Пример. Упростить $\delta(-3x+4)$.

Решение. Согласно свойству 3

$$\delta(-3x+4) = \delta[-3(x-4/3)] = \frac{1}{|-3|} \delta(x-4/3) = \frac{1}{3} \delta(x-4/3).$$

Пример. Упростить $\delta(x^2+5x+6)$.

Решение. Согласно свойству 4

$$\begin{aligned} \delta(x^2+5x+6) &= \frac{1}{|f'(-3)|} \delta(x+3) + \frac{1}{|f'(-2)|} \delta(x+2) = \frac{1}{|-1|} \delta(x+3) + \frac{1}{|1|} \delta(x+2) = \\ &= \delta(x+3) + \delta(x+2). \end{aligned}$$

Пример. Найти интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} (3x^2+x-6) \delta'(x-2) dx$.

Решение. Согласно свойству 5

$$\int_{-\infty}^{\infty} (4x^2+x-6) \delta'(x-2) dx = -(4x^2+x-6)' \Big|_{x=2} = -(8x+1) \Big|_{x=2} = -17.$$

$$t = 0,1 \quad t = 0,02$$

11.13. Полезные формулы

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha; \quad 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha; \quad 1 \pm \sin 2\alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]; & \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]; \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].\end{aligned}$$

Соотношения между $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ (универсальная тригонометрическая подстановка)

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; & \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Некоторые дополнительные формулы

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \cos \alpha &= \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right); \\ \sin \alpha - \cos \alpha &= -\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right); \\ \sin \alpha + \cos \beta &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right); \\ a \cos \alpha + b \sin \alpha &= A \sin(\alpha + \varphi), A = \sqrt{a^2 + b^2}, \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}$$

Формулы приведения

Название функции не изменяется				Название функции изменяется на сходное			
	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
tg	$-tg \alpha$	$-tg \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$	$-ctg \alpha$	$ctg \alpha$	$-ctg \alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$			$\alpha \neq \pi n, n \in Z$			
ctg	$-ctg \alpha$	$-ctg \alpha$	$ctg \alpha$	$tg \alpha$	$-tg \alpha$	$tg \alpha$	$-tg \alpha$
	$\alpha \neq \pi n, n \in Z$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$			

Значения тригонометрических функций основных углов

Функция	Угол				
	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Учебное издание

Данилова Ольга Юрьевна
Синегубов Сергей Владимирович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка С. А. Телковой
Объем 11,7 МБ.

Воронежский институт МВД России
394065, Воронеж, просп. Патриотов, 53