

УДК 336.6(075.8)
ББК 65.26я73
С77

Титульный лист	Аннотация	Содержание	Выходные данные
---------------------------	------------------	-------------------	----------------------------

ISBN 978-5-9266-1372-5

И.Н. Старостенко, А.А. Хромых

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Краснодар
2018

Старостенко И.Н.

Финансовая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.Н. Старостенко, А.А. Хромых. – Электрон. дан. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

© Краснодарский университет МВД России, 2018

© Старостенко И.Н., Хромых А.А., 2018

УДК 336.6(075.8)
ББК 65.26я73
С77

Титульный лист	Аннотация	Содержание	Выходные данные
----------------	-----------	------------	-----------------

ISBN 978-5-9266-1372-5

Введение

Раздел I. Теория процентных ставок

1. Простые проценты
 - 1.1. Проценты. Виды процентных ставок и способы начисления процентов
 - 1.2. Нарачение процентов
 - 1.3. Формула удвоения суммы
 - 1.4. Переменные ставки
 - 1.5. Реинвестирование по простым процентам
 - 1.6. Дисконтирование и учет процентов
 - 1.7. Учетная ставка
 - 1.8. Определение продолжительности ссуды и уровня процентной ставки

Задачи для самостоятельного решения

2. Сложные проценты
 - 2.1. Формула наращения по сложным процентам
 - 2.2. Сравнение силы роста простых и сложных процентов
 - 2.3. Формула удвоения суммы
 - 2.4. Формула наращения по сложным процентам, когда ставка меняется во времени
 - 2.5. Начисление годовых процентов при дробном числе лет
 - 2.6. Номинальная и эффективная ставки процентов
 - 2.7. Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов
 - 2.8. Номинальная и эффективная учетные ставки процентов
 - 2.9. Нарачение по сложной учетной ставке
- Задачи для самостоятельного решения

3. Непрерывные проценты
 - 3.1. Нарачение и дисконтирование
 - 3.2. Связь дискретных и непрерывных процентных ставок
 - 3.3. Расчет срока ссуды и процентных ставок
 - 3.4. Средние процентные ставки
- Задачи для самостоятельного решения

Раздел II. Анализ финансовых потоков платежей, планирование капитальных инвестиций и учет инфляции

4. Финансовые ренты
 - 4.1. Поток платежей
 - 4.2. Обобщающие параметры потоков платежей
 - 4.3. Нараченная сумма постоянной ренты постнумерандо
 - 4.4. Современная стоимость постоянной ренты постнумерандо
 - 4.5. Расчет срока ренты
 - 4.6. Определение ставки процентов
 - 4.7. Вечная рента
 - 4.8. Нараченная сумма и современная стоимость постоянной ренты пренумерандо
- Задачи для самостоятельного решения

5. Инфляция
 - 5.1. Инфляция
 - 5.2. Начисление по простым процентам
 - 5.3. Начисление по сложным процентам
- Задачи для самостоятельного решения

Раздел III. Использование электронных таблиц MS Excel для решения задач финансовой математики

6. Решение финансовых задач в MS Excel
 - 6.1. Специфика использования финансовых функций MS Excel
 - 6.2. Подбор параметров

6.2. Подбор параметра
6.3. Анализ данных на основе использования Таблицы подстановки
6.4. Финансовые функции MS Excel
Задачи для самостоятельного решения

Приложение

Литература

Старостенко И.Н.

Финансовая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.Н. Старостенко, А.А. Хромых. – Электрон. дан. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

© Краснодарский университет МВД России, 2018

© Старостенко И.Н., Хромых А.А., 2018

ВВЕДЕНИЕ

Денежные отношения в современном мире пронизывают все сферы человеческой деятельности. Умение правильно провести финансово-экономический анализ, составить различные финансово-экономические отчеты, рассчитать в определенных ситуациях прибыль и потери необходимо каждому банковскому работнику, бухгалтеру и любому человеку, посвятившему себя финансово-экономической деятельности.

В настоящее время значительно увеличен интерес к различного рода финансовой деятельности. При этом, уровень различных расчетов в этой области недостаточно высок. В первую очередь это относится к тем областям, где производится анализ различных платежей.

Необходимо отметить, что в современном обществе появились новые финансовые инструменты, такие как акции, облигации, векселя, чеки, банковские сертификаты и т.д., для работы с которыми требуется точное определение их рыночной стоимости. Большая часть начинающих финансовых работников довольно слабо информирована о многообразии способов получения и использования процентных денег. В то же время компьютеризация позволяет существенным образом упростить и ускорить выполнение финансово-экономических расчетов. Например, в табличном процессоре *MS Excel* содержится большой набор встроенных финансовых мастер функций. В связи с этим возрастают современные требования к подготовке специалистов по математическому моделированию в сфере экономики.

В основе всех финансовых расчетов лежит принцип временной ценности денег. *Деньги* – это мера стоимости товаров и услуг. Покупательная способность денег падает по мере роста инфляции. Это означает, что денежные суммы, полученные сегодня, больше, ценнее тех же сумм, полученных в будущем. Для того чтобы деньги сохраняли или даже наращивали свою ценность, нужно обеспечить вложение денег, приносящее определенный доход.

РАЗДЕЛ I. ТЕОРИЯ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

1. Простые проценты

1.1. Проценты. Виды процентных ставок и способы начисления процентов

Под *процентными деньгами* или *процентами* (от лат. *pro centum* – одна сотая), понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача ссуды, размещение денег на депозитный счет, продажа товара в кредит, покупка сберегательного сертификата или облигации, учет векселя и т.д.

При заключении кредитного или финансового соглашения стороны (кредитор и заемщик, инвестор и банк) обговаривают величину *процентной ставки*. *Процентная ставка* – это отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный промежуток времени, к величине займа.

Процентная ставка считается одним из важнейших элементов коммерческих, кредитных или инвестиционных контрактов. Она измеряется в виде процентах или десятичной (обыкновенной) дроби.

Основная единица времени (год, полугодие, квартал, месяц, день) начисления процентов называется *базовой*.

Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называется *периодом начисления*.

Начисление процентов производится дискретно (дискретные проценты), т.е. в отдельные, обычно равноотстоящие, моменты времени. В качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц, день. Обычно на практике имеют дело с годовыми ставками. В ряде случаев удобно применять непрерывные проценты.

В соответствии с договоренностью между кредитором и заемщиком, проценты выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга, т.е. осуществляется *капитализация процентов*.

Процесс увеличения суммы денег во времени, связанный с присоединением процентов к сумме долга, называют *наращением* или *ростом* этой суммы.

Можно ввести определение процентов и при движении во времени в обратном направлении, т.е. от будущего к настоящему. В таком случае сумма денег, относящаяся к будущему, уменьшается на величину соответствующего *дисконта* (*скидки*). Подобный способ называется *дисконтированием* (*сокращением*).

Величина процентной ставки зависит от ряда объективных и субъективных факторов. Например, от общего состояния экономики, в том числе денежно-кредитного рынка, долгосрочных и краткосрочных ожиданий его динамики, вида сделки, размера валюты, срока кредита, особенностей заемщика (его надежности) и кредитора, кредитной истории заемщика и т.д.

В финансово-экономическом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращивания суммы долга, но и в более широком смысле. Например, как *измеритель степени доходности (эффективности)* любой финансовой, кредитной, инвестиционной или коммерческо-хозяйственной деятельности вне зависимости от того, имел место или нет факт непосредственного инвестирования денежных средств и процесс их наращивания.

В зависимости от условий финансового договора, существуют различные способы начисления процентов. В связи с этим можно выделить ряд основных признаков, по которым различаются процентные ставки.

Одним из основных отличий является выбор исходной базы (суммы) для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются *простыми процентными ставками*, а во втором – *сложными процентными ставками*.

Нарощенная сумма рассчитывается как умножение первоначальной суммы долга на *множитель наращивания*, который показывает, во сколько раз

полученная сумма больше первоначальной. Расчетная формула зависит от вида применяемой процентной ставки и условий наращивания.

1.2. Наращение процентов

Под *наращенной суммой* ссуды (долга, депозита, различных видов инвестированных средств) понимается ее первоначальная сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть P – первоначальная сумма, i – процентная ставка (десятичная дробь). При наращении простых процентов по ставке i каждая следующая сумма больше предыдущей на долю i от начальной суммы, т.е. на Pi .

К концу единичного промежутка времени начисленная сумма P возрастет на iP , т.е.

$$P_1 = P + iP = P(1 + i), \quad (1.1)$$

к концу 2-го промежутка начисленная сумма возрастет еще на Pi :

$$P_2 = P_1 + iP = P(1 + i) + iP = P(1 + 2i) \quad (1.2)$$

и т.д. К концу n -го промежутка начисления наращенная сумма станет равной

$$P_n = P(1 + ni). \quad (1.3)$$

Таким образом, последовательность наращенных сумм $P, P_1, P_2, \dots, P_n$ является арифметической прогрессией с начальным членом P и разностью iP . В дальнейшем будем полагать $S = P_n$.

$$S = P(1 + ni). \quad (1.4)$$

Разность наращенной суммы S и начальной суммы P называется *процентными деньгами*. При простой процентной ставке процентные деньги растут в арифметической прогрессии. Множитель $(1 + ni)$ является *множителем наращивания*.

Наращенная сумма S , зависящая от времени, растет линейно (рис.1).

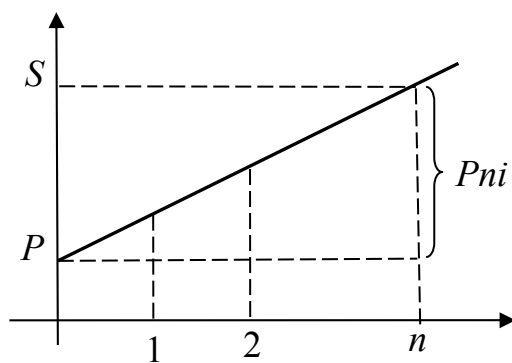


Рис. 1. Наращение по простой процентной ставке.

Пример 1.1. Банк начисляет простой процент с процентной ставкой равной 11%. Вкладчик размещает на счете 3 170 руб. Необходимо определить, какая сумма будет получена вкладчиком по счету через 6 лет.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма $P = 3170$ руб. Процентная ставка равна 11%, следовательно, $i = \frac{11}{100} = 0,11$. Срок вклада $n = 6$ лет. Таким образом, по формуле (1.3) получаем

$$S = 3170(1 + 6 \cdot 0,11) = 5262,2 \text{ руб.}$$

Ответ: 5 262,2 руб.

Следует отметить, что наращенную сумму можно представить в виде двух слагаемых – первоначальной суммы P и суммы процентов I :

$$I = Pni \quad (1.5)$$

Пример 1.2. Определить сумму процентов, если ссуда равна 100 000 руб., срок долга составляет 1,5 года при ставке простых процентов, равной 16% годовых.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма $P = 100000$ руб. Процентная ставка равна 16%, следовательно, $i = \frac{16}{100} = 0,16$. Срок вклада $n = 1,5$ года. Таким образом, по формуле (1.5) получаем

$$I = 100000 \cdot 1,5 \cdot 0,16 = 24000 \text{ руб.}$$

Ответ: 24 000 руб.

Как правило ставка процентов устанавливается в расчете за год, поэтому при продолжительности ссуды менее года необходимо выяснить

какая часть процента уплачивается кредитору. Для этого величину n представляют в виде обыкновенной дроби

$$n = \frac{t}{K} \quad (1.6)$$

где n – срок ссуды (представленный в долях года), K – число дней в году (временная база), t – срок операции (ссуды) в днях.

В этом случае возможно несколько вариантов расчета процентов, отличающихся друг от друга выбором временной базы K , а также способом измерения срока пользования ссудой.

Обычно в качестве временной базы берется год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В этом случае говорят, что вычисляют обыкновенный или коммерческий процент. Точный процент получают, когда за временную базу берут действительное число дней в году: 365 или, в случае високосного года, 366.

Определение числа дней пользования ссудой может быть точным или приближенным. В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами, а во втором – продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, приближенно считая все месяцы равными и содержащими по 30 дней. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день. Подсчет точного числа дней между двумя датами можно осуществить с помощью вычислительной техники, взяв разность этих двух дат, или с помощью специальной таблицы (приложение 1), в которой представлены порядковые номера дат в году.

Комбинируя различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды, получаем три варианта расчета процентов, применяемые на практике:

1) точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365) – британский;

2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360) – французский;

3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360) – германский.

Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени ссуды на практике не применяется.

Пример 1.3. Банк начисляет простой процент с процентной ставкой равной 27%. Вкладчик размещает на счете 8 250 руб. на срок равный 10 месяцев. Необходимо определить, какая сумма будет получена по счету в конце указанного срока.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма $P = 8250$ руб. Процентная ставка равна 27%, следовательно, $i = 0,27$. Срок вклада $n = \frac{10}{12}$ года. Таким образом, по формуле (1.4) получаем

$$S = 8250 \left(1 + \frac{10}{12} \cdot 0,27 \right) = 10106,25 \text{ руб.}$$

Ответ: 10 106,25 руб.

Пример 1.4. Банк начисляет простой процент с процентной ставкой равной 23%. Вкладчик размещает на счете 7 030 руб. на срок равный 256 дней. Необходимо определить, какая сумма будет получена вкладчиком по счету в конце указанного срока. Финансовый год (база) равен 365 дням.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма $P = 7030$ руб. Процентная ставка равна 23%, следовательно, $i = 0,23$. Финансовый год (временная база) $K = 365$ дней, срок операции $t = 256$ дней, срок вклада $n = \frac{256}{365}$ года. Таким образом, по формуле (1.4) получаем

$$S = 7030 \left(1 + \frac{256}{365} \cdot 0,23 \right) = 8164,04 \text{ руб.}$$

Ответ: 8 164,04 руб.

Пример 1.5. Ссуда в размере 1 млн. руб. выдана с 15 февраля до 20 ноября включительно под 16% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов? Рассмотреть

различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды.

Решение. При решении рассмотрим все три метода начисления процентов. Предварительно определим число дней ссуды: точное – 278 (приложение 1), приближенное – 275 (предполагая в каждом месяце по 30 дней). Процентная ставка равна 16%, следовательно, $i = 0,16$.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365):

$$S = 10000000 \left(1 + \frac{278}{365} \cdot 0,16 \right) = 1121863,01 \text{ руб.}$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (360/365):

$$S = 10000000 \left(1 + \frac{278}{360} \cdot 0,16 \right) = 1123555,56 \text{ руб.}$$

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360):

$$S = 10000000 \left(1 + \frac{275}{360} \cdot 0,16 \right) = 1122222,22 \text{ руб.}$$

Ответ: 1 121 863,01 руб., 1 123 555,56 руб., 1 122 222,22 руб.

1.3. Формула удвоения суммы

При оценки своих перспектив кредитору или должнику может быть интересно знать, через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при данной процентной ставке. Для этого в формуле (1.4) приравняем множитель наращения к величине N и получим:

$$n = \frac{N - 1}{i}. \quad (1.7)$$

Пример 1.6. Необходимо вычислить, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых процентов равной 17,5%.

Решение. По условию задачи процентная ставка равна 17,5%, следовательно, $i = 0,175$, $N = 2$. Подставляя в формулу (1.7), получаем

$$n = \frac{2 - 1}{0,175} = \frac{1}{0,175} = 5,71 \text{ лет.}$$

Ответ: 5,71 лет.

1.4. Переменные ставки

Известно, что процентные ставки не остаются неизменными во времени, поэтому в кредитных соглашениях предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае формула расчета наращенной суммы имеет вид

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 + \dots) = P \left(1 + \sum_{t=1}^m n_t i_t \right), \quad (1.8)$$

где P – первоначальная сумма (ссуда), i_t – ставка простых процентов в периоде с номером t , n_t – продолжительность периода t – периода начисления по ставке i_t .

Пример 1.7. Вкладчик размещает на счете 31 700 руб. на четыре года. Банк начисляет простой процент. Процентная ставка на первый год равна 3%, второй – 5%, третий – 7%, четвертый – 8%. Необходимо определить, какая сумма будет получена вкладчиком по счету через четыре года.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма $P = 31700$ руб. Срок вклада $n = 4$ года. Так как процентная ставка на первый год равна 3%, второй – 5%, третий – 7%, четвертый – 8%, тогда $i_1 = 0,03$, $i_2 = 0,05$, $i_3 = 0,07$, $i_4 = 0,08$. Продолжительность каждого периода $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$. Таким образом, по формуле (1.8) получаем $S = 31700(1 + 1 \cdot 0,03 + 1 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,07 + 1 \cdot 0,08) = 38991$ руб.

Ответ: 38 991 руб.

1.5. Реинвестирование по простым процентам

На практике при инвестировании средств в краткосрочные депозиты, как правило, прибегают к неоднократному последовательному повторению наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока. Фактически это означает *реинвестирование* средств, полученных на каждом этапе наращения, с помощью постоянной или переменной ставок. В этом случае наращенная сумма для всего срока составит

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)(1 + n_3 i_3) \dots = \prod_{t=1}^m (1 + n_t i_t), \quad (1.9)$$

где i_t – размер ставок, по которым производится реинвестирование.

Если промежуточные сроки начисления и процентные ставки не меняются во времени, то вместо формулы (1.9) получаем

$$S = P(1 + ni)^m, \quad (1.10)$$

где m – количество повторений реинвестирования.

Пример 1.8. Первоначальную цену товара увеличили на 9%, затем на 17%, а потом еще на 21%. Необходимо определить, на сколько всего процентов выросла цена товара?

Решение. Пусть первоначальная цена товара $P = a$ руб. Размер ставок: $i_1 = 0,09$, $i_2 = 0,17$, $i_3 = 0,21$. Следовательно, наращенная сумма для всего срока составит

$$S = a(1 + 1 \cdot 0,09)(1 + 1 \cdot 0,17)(1 + 1 \cdot 0,21) = 1,5431a \text{ руб.}$$

За весь период времени первоначальная сумма товара выросла на

$$S - P = 1,5431a - a = 0,5431a \text{ руб., что составляет } 54,31\%.$$

Ответ: 54,31%.

Пример 1.9. Вкладчик положил в банк 1-го февраля на месячный депозит под 20% годовых 500 000 руб. Проценты простые, точные. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза?

Решение. По условию задачи первоначальная сумма $P = 500\,000$ руб. Процентная ставка $i = 0,20$. Следовательно, при начислении точных процентов (365/365) по формуле (1.8) получаем

$$S = 500\,000 \left(1 + \frac{28}{365} \cdot 0,20\right) \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0,20\right) \left(1 + \frac{30}{365} \cdot 0,20\right) = 524\,781,73 \text{ руб.}$$

Ответ: 524 781,73 руб.

1.6. Дисконтирование и учет процентов

На практике очень часто приходится решать задачу обратную наращению процентов, т.е. когда по заданной сумме S , соответствующей

концу финансовой операции, необходимо найти исходную сумму P . Расчет P по S называется *дисконтированием* суммы S . Величина P , найденная дисконтированием, называется *современной величиной* или *текущей стоимостью* суммы S . Проценты в виде разности $D = S - P$ называются *дисконтом* или *скидкой*. Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называется *учетом*. Дисконт как скидка с конечной суммы долга может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Таким образом, на практике можно выделить два принципа расчета процентов: (1) посредством наращения суммы ссуды и (2) устанавливая скидку с конечной суммы долга.

В большинстве случаев фактор времени учитывается в финансовых контрактах именно с помощью дисконтирования. Величина P эквивалентна сумме S в том смысле, что через определенный период времени и при заданной процентной ставки она в результате наращения станет равной S . В связи с этим операция дисконтирования называется *приведением*. Однако, понятие приведения намного шире, чем понятие дисконтирование.

Приведение – это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то – наращение.

Существует два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

Математическое дисконтирование. Этот вид дисконтирования представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды по формуле (1.4):

$$P = \frac{S}{1 + ni} \quad (1.11)$$

Дробь $\frac{1}{1 + ni}$ называется *дисконтным множителем*. Этот множитель

показывает какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга.

Дисконт суммы S вычисляется по формуле

$$D = S - P. \quad (1.12)$$

Банковский или коммерческий учет. Операция учета широко используется в финансовых расчетах, например, при оформлении векселей.

Вексель – это письменное долговое обязательство строго установленной формы, выдаваемое заемщиком (векселедателем) кредитору (векселедержателю) и предоставляющее последнему беспорное право требовать с заемщика уплаты к определенному сроку (день погашения векселя) определенной суммы денег, указанной в векселе (номинальной стоимости векселя).

Вексель имеет следующие характеристики:

- 1) абстрактность, т.е. отсутствия каких – либо объяснений по поводу возникновения долга;
- 2) беспорность, т.е. обязательность оплаты в точном соответствии с данным векселем;
- 3) обращаемость, т.е. вексель посредством передаточной надписи может обращаться среди неограниченного количества клиентов.

Вексель можно купить или продать в любом финансовом учреждении до срока указанного на нем, но при этом по цене ниже номинальной. В таких случаях говорят, что вексель реализован с дисконтом.

1.7. Учетная ставка

Для расчета процентов при учете векселей применяется *учетная ставка*, которая обозначается символом d .

По определению, простая годовая учетная ставка вычисляется по формуле

$$d = \frac{S - P}{Sn}. \quad (1.13)$$

Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, вычисляется по

формуле

$$D = Snd, \quad (1.14)$$

откуда получаем

$$P = S - D = S - Snd = S(1 - nd). \quad (1.15)$$

Множитель $(1 - nd)$ называется *дисконтным множителем*. Срок n измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Чаще всего дисконтирование по учетной ставке вычисляется при условии, что год равен 360 дням.

Наращение по учетной ставке. Учетная ставка применяется для наращения, т.е. для расчета S по P . В этом случае из формулы (1.15) следует, что

$$S = \frac{P}{1 - nd}. \quad (1.16)$$

Сравнение ставки наращения и учетной ставки. Можно отметить, что операции наращения и дисконтирования по своей сути противоположны, но при этом ставка наращения и учетная ставка могут использоваться для решения обеих задач. В этом случае, в зависимости от применяемой ставки, можно различать прямую и обратную задачи.

<i>Прямая задача</i>	<i>Обратная задача</i>
Ставка наращения i	
<i>Наращение:</i> $S = P(1 + ni)$	<i>Дисконтирование:</i> $P = \frac{S}{1 + ni}$
Ставка учетная d	
<i>Дисконтирование:</i> $P = S(1 - nd)$	<i>Наращение:</i> $S = \frac{P}{1 - nd}$

Совмещение начисления процентов по ставке наращения и дисконтирования по учетной ставке. В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи: (1) определить конечную сумму долга на момент его погашения; (2) рассчитать

сумму, получаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

Решение двух этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращение по ставке простых процентов, указанной в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке:

$$P_2 = P_1(1 + n_1 i)(1 - n_2 d), \quad (1.17)$$

где P_1 – первоначальная сумма ссуды, P_2 – сумма, получаемая при учете обязательства, n_1 – общий срок платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты, n_2 – срок от момента учета до погашения долга.

Пример 1.10. Платежное обязательство уплатить через 110 дней 3 млн. руб. с процентами, начисляемыми по ставке простых процентов $i = 14\%$ годовых, было учтено за 15 дней до срока погашения по учетной ставке $d = 3\%$. Необходимо определить сумму, получаемую при учете. Финансовый год равен 360 дням.

Решение. Применяя формулу (1.17), найдем сумму, получаемую при учете

$$P_2 = 3 \left(1 + \frac{110}{360} \cdot 0,14 \right) \left(1 - \frac{15}{360} \cdot 0,03 \right) = 3,12 \text{ млн. руб.}$$

Ответ: 3,12 млн. руб.

1.8. Определение продолжительности ссуды и уровня процентной ставки

На практике встречаются задачи в которых, необходимо найти временной интервал, за который исходная сумма при заданной процентной ставке вырастет до нужной величины, или срок, обеспечивающий определенный дисконт с заданной величины. Для этого формулы (1.1) и (1.15) необходимо разрешить относительно n .

При использовании простой процентной ставки наращения i из формулы (1.1) временной интервал вычисляется по формуле

$$n = \frac{S - P}{Pi}. \quad (1.18)$$

При учетной ставке d из формулы (1.15) временной интервал вычисляется по формуле

$$n = \frac{S - P}{Sd}. \quad (1.19)$$

Формулы (1.18) и (1.19) дают срок, измеряемый в годах. Однако простые ставки чаще всего используются в краткосрочных операциях, когда срок исчисляется днями. В этом случае срок финансовой операции в днях выражается по формуле

$$t = nK, \quad (1.20)$$

где K – временная база.

Определение уровня процентной ставки. Уровень процентной ставки может служить мерой доходности операции, критерием сопоставления альтернатив и выбора наиболее выгодных условий. Из формул (1.1) и (1.15) получаем ставку наращения i и учетную ставку d :

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{S - P}{Pt} K, \quad (1.21)$$

$$d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{S - P}{St} K, \quad (1.22)$$

где использовалось соотношение (1.20). Следует отметить, что срок n в двух формулах имеет разный смысл: в первом случае это весь срок операции, а во втором – оставшийся срок до погашения.

Пример 1.11. Необходимо определить доходность операции для кредитора, если ему предоставлена ссуда в размере 3 млн. руб. на 130 дней и контракт предусматривает сумму погашения долга 4,1 млн. руб. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i и учетной ставки d . Финансовый год равен 360 дням.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма $P = 3$ млн. руб., сумма погашения долга $S = 4,1$ млн. руб., срок финансовой операции $t = 130$ дней. Временная база $K = 360$. Следовательно, по формулам (1.21) и

(1.22) получаем

$$i = \frac{S - P}{Pt} K = \frac{4,1 - 3}{3 \cdot 130} \cdot 360 = 1,0154 \text{ или } 101,54 \%,$$

$$d = \frac{S - P}{St} K = \frac{4,1 - 3}{4,1 \cdot 130} \cdot 360 = 0,743 \text{ или } 74,3 \%.$$

Ответ: 101,54%, 74,3%.

В некоторых случаях размер дисконта в договорах фиксируется за весь срок ссуды в виде доли (или процента) от суммы погасительного платежа. Таким образом, уровень процентной ставки задается в неявном виде. Несложно вывести формулы для нахождения значений этих ставок.

Пусть S – размер погасительного платежа, d_n – доля этого платежа, определяющая величину дисконта за весь срок ссуды n . Необходимо определить каким уровням годовых ставок i и d эквивалентны такие условия.

Пусть S – сумма возврата в конце срока ссуды, $P = S(1 - d_n)$ – реально выдаваемая ссуда в момент заключения договора. Тогда

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{S - S(1 - d_n)}{S(1 - d_n)n} = \frac{d_n}{(1 - d_n)n}, \quad (1.23)$$

$$d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{S - S(1 - d_n)}{Sn} = \frac{d_n}{n}. \quad (1.24)$$

Пример 1.12. Кредитор и заемщик договорились, что из суммы кредита, выданного на 180 дней, сразу удерживается дисконт в размере 27% от указанной суммы. Необходимо определить цену кредита в виде простой годовой учетной ставки d и годовой ставки простых процентов i . Временная база K равна 365 дням.

Решение. По условию задачи из суммы кредита удерживается дисконт в размере $d_n = 27\%$, срок ссуды 180 дней. Временная база $K = 365$ дней. Следовательно, по формулам (1.23) и (1.24) получаем

$$d = \frac{d_n}{n} = \frac{0,27}{180/365} = 0,5475 \text{ или } 54,75\%,$$

$$i = \frac{d_n}{(1 - d_n)n} = \frac{0,27}{(1 - 0,27) \cdot 180/365} = 0,75 \text{ или } 75\%.$$

Ответ: 54,75%, 75%.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Банк за год начисляет 20% на вложенную сумму. Какую сумму вкладчик внес на счет, если через год на счету оказалось 1920 руб.?

(Ответ: 1600 руб.)

Задача 1.2. Необходимо определить стоимость товара до уценки, если после снижения цены на 40% он стал стоить 1500 руб.

(Ответ: 2500 руб.)

Задача 1.3. В течение первого месяца цена товара увеличилась на 30%, а в течение следующего месяца новая цена товара уменьшилась на 10%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара за 2 месяца?

(Ответ: увеличилась на 17%)

Задача 1.4. Исходная цена товара составляет 3500 рублей, а новая – 2625 рублей. Необходимо определить на сколько процентов снижена цена товара?

(Ответ: на 25%)

Задача 1.5. Если цену товара снизить на 40%, то она уменьшится на 1200 рублей. Необходимо определить исходную цену товара.

(Ответ: 3000 руб.)

Задача 1.6. Цена товара повышена на 150%. На сколько процентов надо снизить новую цену товара, чтобы цена товара вернулась к прежнему уровню?

(Ответ: на 40%)

Задача 1.7. Банк начисляет простой процент с процентной ставкой равной 4%. Вкладчик размещает на счете 1 030 руб. Необходимо определить сумму полученную по счету через 5 лет.

(Ответ: 1236 руб.)

Задача 1.8. Через 60 дней после займа господин N выплатил ровно 10 000 руб. Необходимо определить сумму займа, если 10 000 руб. включают основную сумму и обыкновенный простой процент при 12%?

(Ответ: 9 804 руб.)

Задача 1.9. Годовая процентная ставка равна 25%. Через сколько лет первоначальная сумма утроится?

(Ответ: 8 лет)

Задача 1.10. Определить сумму процентов, если ссуда равна 300 000 руб., срок долга 2,5 года при простой процентной ставке, равной 17% годовых.

(Ответ: 127 500 руб.)

Задача 1.11. Банк начисляет простой процент с процентной ставкой равной 9%. Вкладчик размещает на счете 2 820 руб. на 3 месяца. Необходимо определить сумму полученную по счету.

(Ответ: 2883,45 руб.)

Задача 1.12. Банк начисляет простой процент с процентной ставкой равной 13%. Вкладчик размещает на счете 3 950 руб. на 140 дней. Необходимо определить сумму полученную по счету. Финансовый год (база) равен 365 дням.

(Ответ: 4 146,96 руб.)

Задача 1.13. Необходимо найти точное число дней между 19 января и 3 сентября. Год не високосный.

(Ответ: 227 дней)

Задача 1.14. Необходимо найти приближенное число дней между 11 февраля и 23 июня. Год не високосный.

(Ответ: 132 дня)

Задача 1.15. Необходимо найти точное число дней между 9 октября и 5 мая. Год високосный.

(Ответ: 209 дней)

Задача 1.16. Вклад в размере 75 000 руб. помещен в банк 3 октября и востребован 20 июня. Ставка 26% годовых. Необходимо определить сумму начисленных процентов при различных методах определения срока начисления.

(Ответ: 88890,41 руб., 89083,33 руб., 88920,83 руб.)

Задача 1.17. Вкладчик размещает на счете 39 500 руб. на три года. Банк начисляет простой процент с процентной ставкой на первый год равной 4%, второй –5%, третий – 8%. Необходимо определить сумму полученную по счету через три года.

(Ответ: 46 215 руб.)

Задача 1.18. Процентная ставка на базе 365 дней равна 27% годовых. Необходимо определить эквивалентную ей ставку на базе 360 дней.

(Ответ: 26,63%)

Задача 1.19. Процентная ставка на базе 360 дней равна 12,5% годовых. Необходимо определить эквивалентную ей ставку на базе 365 дней.

(Ответ: 12,67%)

Задача 1.20. В контракте кредитного соглашения предусмотрен следующий порядок начисления процентов: первый год – 18%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Необходимо определить множитель наращения за 2,5 года.

(Ответ: 1,48%)

Задача 1.21. Первоначальную цену товара увеличили на 15%, затем на 15%, а потом еще на 17%. Необходимо определить на сколько всего процентов выросла цена товара по сравнению с первоначальной.

(Ответ: 0,55%)

Задача 1.22. Необходимо определить первоначальную стоимость товара, если после уценки его на 10%, а затем на 10% его стоимость составила 9 153 руб.

(Ответ: 11 300 руб.)

Задача 1.23. В банк положено 1 500 руб. Через год и три месяца на счете оказалось 1 631, 25 руб. Необходимо определить сколько простых процентов в год выплачивает банк.

(Ответ: 7%.)

Задача 1.24. Вкладчик положил в банк 1-го июня на месячный депозит под 17% годовых 50 000 руб. Проценты простые, точные. Необходимо определить наращенную сумму, если операция повторяется 3 раза.

(Ответ: 52 173,21 руб.)

Задача 1.25. На сумму 26 700 ден. ед. начисляется 12% годовых. Процент простой. Необходимо определить наращенную сумму, если операция реинвестирования проводится ежемесячно в течение первого квартала. Финансовый год равен 365 дням. Год високосный.

(Ответ: 27 506,79 ден. ед.)

Задача 1.26. Инвестор открывает в банке депозит под 9% годовых при простой процентной ставке на сумму 300 тыс.руб. и хотел бы получить по счету 307,5 тыс.руб. Необходимо определить на сколько дней следует открыть депозит. Финансовый год равен 360 дням. Ответ округлить до целого числа.

(Ответ: 100 дней)

Задача 1.27. Платежное обязательство уплатить через 140 дней 4 млн. руб. с процентами, начисляемыми по ставке простых процентов $i = 15\%$ годовых, было учтено за 17 дней до срока погашения по учетной ставке $d = 4\%$. Необходимо определить сумму, получаемую при учете. Финансовый год равен 360 дням.

(Ответ: 4,23 млн. руб.)

Задача 1.28. Необходимо определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 4 млн. руб. на 150 дней и контракт предусматривает сумму погашения долга 5,4 млн. руб. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i и учетной ставки d . Финансовый год равен 360 дням.

(Ответ: 0,84%, 0,62%)

Задача 1.29. Кредитор и заемщик договорились, что из суммы кредита, выданного на 230 дней, сразу удерживается дисконт в размере 28% указанной суммы. Требуется определить цену кредита в виде простой годовой учетной ставки d и годовой ставки простых процентов i . Считать временную базу K равной 365 дням.

(Ответ: 44,43%, 61,71 %)

Задача 1.30. Необходимо определить продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 50 тыс.руб., вырос до 56 тыс.руб. при условии, что начисляются простые проценты по ставке 30% годовых. Финансовый год равен 365 дней.

(Ответ: 146 дней)

Задача 1.31. Вкладчик внес в банк под определенный процент 40 000 руб. Через год он снял со счета половину процентной прибавки, а остальной вклад и оставшуюся процентную прибавку оставил в банке. Еще через год у вкладчика на счету оказалось 47 488 руб. Необходимо определить процент годовых по вкладу в банке.

(Ответ: 12%)

Задача 1.32. Частный предприниматель оформил кредит в банке на сумму 8 млн. руб. сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 11,5% для первого года, для второго года предусматривается надбавка к процентной ставке в размере 2,5%, для третьего года и последующих лет – в размере 0,75%. Необходимо определить сумму долга, подлежащую погашению по истечении срока займа.

(Ответ: 15,36 млн. руб.)

2. Сложные проценты

2.1. Формула наращения по сложным процентам

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных отношениях, если проценты не выплачиваются периодически сразу же после их начисления за прошедший временной интервал, а присоединяются к сумме долга. Наращивание по сложной процентной ставке можно представить как последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты на один период начисления. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, называется *капитализацией процентов*.

При наращении сложных процентов по ставке i каждая следующая сумма возрастает на долю i от предыдущей.

К концу единичного промежутка начисления сумма P возрастет на долю i и становится равной

$$P_1 = P + iP = P(1 + i). \quad (2.1)$$

К концу 2-го промежутка начисления эта сумма возрастет еще на долю i от P_1 и равна

$$P_2 = P_1 + iP_1 = P(1 + i) + iP(1 + i) = P(1 + i)^2 \quad (2.2)$$

и т.д. К концу n -то промежутка начисления наращенная сумма станет равной

$$P_n = P(1 + i)^n. \quad (2.3)$$

Таким образом, последовательность наращенных сумм $P, P_1, \dots, P_n$ – есть геометрическая прогрессия с начальным членом P и знаменателем прогрессии $(1 + i)$. В дальнейшем будем полагать $S = P_n$. Тогда

$$S = P(1 + i)^n, \quad (2.4)$$

где S – наращенная сумма, i – годовая ставка сложных процентов, n – срок ссуды, $(1 + i)^n$ – множитель наращения.

Проценты за срок ссуды n вычисляются по формуле

$$I = S - P = P((1 + i)^n - 1), \quad (2.5)$$

часть из которых получена за счет начисления процентов на проценты.

Чаще всего на практике применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал, месяц, день).

Пример 2.1. Вкладчик размещает на счете 4 420 руб. под 15% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов на счете в конце каждого года. Необходимо определить сумму полученную по счету через 7 лет.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма $P = 4420$ руб. Процентная ставка равна 15%, следовательно $i = 0,15$. Срок вклада $n = 7$ лет. Таким образом, по формуле (2.4) получаем

$$S = 4420(1 + 0,15)^7 = 11757,29 \text{ руб.}$$

Ответ: 11757,29 руб.

2.2. Сравнение силы роста простых и сложных процентов

Пример 2.2. Исходная сумма кредита 100 тыс.руб. Процентная ставка 40% годовых. Необходимо определить наращенную сумму по простым и сложным процентам за 0,5 года, 1 год и 2 года.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма $P = 100$ тыс.руб. Процентная ставка равна 40%, следовательно $i = 0,40$. По формулам (1.4) и (2.4) получаем:

– *простые проценты*

$$S_1 = 100(1 + 0,5 \cdot 0,40) = 120 \text{ тыс. руб.}$$

$$S_2 = 100(1 + 1 \cdot 0,40) = 140 \text{ тыс. руб.}$$

$$S_3 = 100(1 + 2 \cdot 0,40) = 180 \text{ тыс. руб.}$$

– *сложные проценты*

$$S_1 = 100(1 + 0,40)^{0,5} = 118,32 \text{ тыс. руб.}$$

$$S_2 = 100(1 + 0,40)^1 = 140 \text{ тыс. руб.}$$

$$S_3 = 100(1 + 0,40)^2 = 196 \text{ тыс. руб.}$$

Занесем данные в таблицу

Проценты	Первоначальная сумма	Период начисления суммы		
		0,5 года	1 год	2 года
Простые	100 тыс.руб.	120 тыс.руб.	140 тыс.руб.	180 тыс.руб.
Сложные	100 тыс.руб.	118,32 тыс.руб.	140 тыс.руб.	196 тыс.руб.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- 1) при сроке $n < 1$ наращение по простой процентной ставке дает больший результат, чем по сложной;
- 2) при $n = 1$ начисление по простой и сложной процентным ставкам приводит к равным результатам;
- 3) при $n > 1$ наращение по сложной процентной ставке дает больший результат, чем по простой.

Наибольшее превышение суммы, наращенной по простым процентам, над суммой, наращенной по сложным процентам, (при одинаковых процентных ставках) достигается в средней части временного периода (рис. 2).

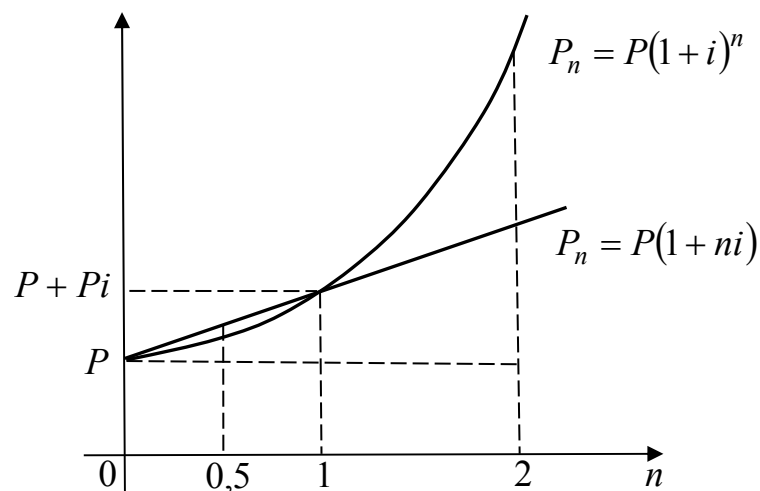


Рис. 2. Соотношение роста по простым и сложным процентам.

2.3. Формула удвоения суммы

Иногда при оценки своих перспектив кредитору или должнику может быть интересно знать, через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при определенной процентной ставке. Для этого в формуле (2.4) необходимо приравнять множитель наращения к величине N , в результате чего формула примет следующий вид:

$$n = \frac{\ln N}{\ln(1+i)}. \quad (2.6)$$

Если $N = 2$, тогда $n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} \approx \frac{0,69315}{\ln(1+i)}$

Пример 2.3. Необходимо вычислить промежуток времени (в годах), за который долг увеличится вдвое при ставке сложных процентов равной 17,5%.

Решение. По условию задачи процентная ставка сложных процентов равна 17,5%, следовательно, $i = 0,175$, $N = 2$. Подставляя в формулу (2.6), получаем:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+0,175)} = \frac{\ln 2}{\ln(1,175)} = 4,3 \text{ года.}$$

Ответ: 4,3 года.

2.4. Формула наращения по сложным процентам, когда ставка меняется во времени

В случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращения имеет следующий вид:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1+i_k)^{n_k}, \quad (2.7)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k$ – последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \dots, n_k$ соответственно.

Пример 2.4. Вкладчик размещает на счете 70 800 руб. на четыре года. Капитализация процентов осуществляется ежегодно. За первые два года банк

начисляет 7%, второй – 9%, третий – 11% годовых. Необходимо определить величину множителя наращения за четыре года.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма вклада $P = 70800$ руб. Срок вклада $n = 4$ года. Процентная ставка на первый и второй год равна 7%, третий – 9%, четвертый – 11%, следовательно, $i_1 = i_2 = 0,07$, $i_3 = 0,09$, $i_4 = 0,11$. Продолжительность каждого временного периода $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$. Таким образом, получаем

$$(1 + 0,07)^2 \cdot (1 + 0,09)^1 \cdot (1 + 0,11)^1 = 1,39.$$

Ответ: 1,39.

2.5. Начисление годовых процентов при дробном числе лет

На практике довольно часто срок в годах для начисления процентов не является целым числом, в этом случае проценты начисляются разными способами:

1) по формуле сложных процентов

$$S = P(1 + i)^n;$$

2) на основе смешанного метода, по которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробное – простые

$$S = P(1 + i)^a (1 + bi), \quad (2.8)$$

где $n = a + b$, a – целое число лет, b – дробная часть года;

3) в некоторых коммерческих банках проценты, за промежуток времени меньший целого периода, не начисляются, т.е.

$$S = P(1 + i)^a. \quad (2.9)$$

Пример 2.6. Банк выдал кредит в размере 3 млн. руб. на 2 года и 160 дней по сложной годовой ставке равной 16,5%. Необходимо определить сумму долга на конец срока. Рассмотреть различные случаи начисления процентов. Финансовый год равен 365 дней.

Решение. По условию задачи сумма кредита $P = 3$ млн. руб., а срок – 2 года и 160 дней. Сложная процентная ставка годовых равна 16,5%,

следовательно, $i = 0,165$. Таким образом, получаем

1) по формуле сложных процентов

$$S = 3(1 + 0,165)^2 \frac{160}{365} = 3 \cdot (1,165)^{2,43836} = 4,35 \text{ млн. руб.};$$

2) на основе смешанного метода, где на дробную часть начисляются простые проценты

$$S = 3(1 + 0,165)^2 \left(1 + \frac{160}{365} \cdot 0,165 \right) = 4,37 \text{ млн. руб.};$$

3) если дробная часть не учитывается

$$S = 3(1 + 0,165)^2 = 4,07 \text{ млн. руб.}$$

Ответ: 4,35 млн. руб., 4,37 млн. руб., 4,07 млн. руб.

2.6. Номинальная и эффективная ставки процентов

Номинальная ставка. Допустим, что годовая ставка сложных процентов равна j , а число периодов начисления в году m . Тогда каждый раз проценты начисляют по ставке $\frac{j}{m}$. Ставка j называется *номинальной*.

Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^N, \quad (2.10)$$

где N – число периодов начисления.

Пример 2.7. Вкладчик размещает на счете 2 440 руб. под 8% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов на счете через каждые полгода. Необходимо определить, какая сумма будет получена вкладчиком через 6 лет.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма вклада $P = 2440$ руб. Процентная ставка равна 8%, следовательно, $j = 0,08$. Срок вклада $n = 6$ лет. Начисление процентов происходит каждые полгода, т.е. $m = 0,5$. Следовательно, число периодов начисления $N = nm = 6 \cdot 2 = 12$. Таким образом, по формуле (2.10) получаем

$$S = 2440(1 + 0,08 \cdot 0,5)^{12} = 3906,52 \text{ руб.}$$

Ответ: 3906,52 руб.

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при m разовом начислении процентов в году наращенную сумму можно рассчитывать несколькими способами, приводящими к различным результатам:

1) по формуле сложных процентов

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{N}{\tau}}, \quad (2.11)$$

где $\frac{N}{\tau}$ – число (возможно дробное) периодов начисления процентов, τ – период начисления процентов;

2) по смешанной формуле

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^a \left(1 + b \frac{j}{m} \right), \quad (2.12)$$

где a – целое число периодов начисления (т.е. $a = \frac{N}{\tau}$ – целая часть от деления всего срока ссуды N на период начисления τ), b – оставшаяся дробная часть периода начисления ($b = \frac{N}{\tau} - a$).

Пример 2.8. В начале года вкладчик размещает в банке 772 тыс. руб. под 23% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов в конце каждого года. В течение года по счету начисляется простой процент. Необходимо определить, какая сумма получится на счете через 8 лет и 225 дней. Финансовая база равна 360 дням.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма $P = 772$ тыс. руб. Процентная ставка равна 23%, следовательно, $j = 0,23$. Срок вклада 8 лет и 225 дней, значит, $a = 8$ и $b = \frac{225}{360}$. Таким образом, по формуле (2.12) получаем

$$S = 772 \cdot (1 + 0,23)^8 \left(1 + 0,23 \frac{225}{360} \right) = 4625,83 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 4625,83 тыс. руб.

Эффективная ставка. Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m – разовое наращение в год по ставке равной $\frac{j}{m}$. Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой $\frac{j}{m}$, то для соответствующих множителей наращения справедливо следующее соотношение:

$$(1 + i_{\text{э}})^n = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{nm}, \quad (2.13)$$

где $i_{\text{э}}$ – эффективная ставка, j – номинальная ставка.

Связь между эффективной и номинальной ставками выражается формулой

$$i_{\text{э}} = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1. \quad (2.14)$$

Обратная зависимость имеет следующий вид

$$j = m \left((1 + i_{\text{э}})^{\frac{1}{m}} - 1 \right). \quad (2.15)$$

Пример 2.9. Банк начисляет проценты ежеквартально. Исходя из номинальной ставки 12,5% годовых, необходимо вычислить эффективную процентную ставку.

Решение. По условию задачи номинальная ставка равна $j = 0,125$. По формуле (2.14) эффективная ставка процентов равна

$$i_{\text{э}} = \left(1 + \frac{0,125}{4} \right)^4 - 1 = 0,131 \text{ или } 13,1\%.$$

Ответ: 13,1%.

Пример 2.10. Необходимо определить какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 17% годовых.

Решение. По условию задачи эффективная ставка равна $i_9 = 0,17$. По формуле (2.15) номинальная ставка процентов равна:

$$j = 4 \left((1 + 0,17)^{\frac{1}{4}} - 1 \right) = 0,1601 \text{ или } 16,01\%.$$

Ответ: 16,01%.

2.7. Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Аналогично случаю начисления простых процентов, рассмотрим два вида учета по сложной процентной ставке: математический и банковский.

Математический учет. При математическом учете решается задача обратная наращению по сложным процентам. Из формулы (2.4) для наращенной суммы сложными процентами выразим P , получим

$$P = S \frac{1}{(1+i)^n} = Sv^n, \quad (2.16)$$

где

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n} \quad (2.17)$$

– *учетный или дисконтный множитель.*

Пример 2.11. Инвестор открывает в банке депозит на 6 лет под 16% годовых и хотел бы в конце периода получить по депозиту 730 тыс.руб. Необходимо вычислить какую первоначальную сумму следует разместить инвестору на счете.

Решение. По условию задачи наращенная сумма $S = 730$ тыс.руб., процент наращенной $i = 0,16$, срок операции $n = 6$. По формуле (2.16) найдем первоначальную сумму, тогда получим:

$$P = \frac{730}{(1+0,16)^6} = 299,62 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 299,62 тыс. руб.

Если проценты начисляются m раз в год, то формулы (2.16) и (2.17) соответственно переписутся в виде

$$P = S \frac{1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}} = Sv^{mn}, \quad (2.18)$$

$$v^{mn} = \frac{1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}. \quad (2.19)$$

Величина P , полученная в результате дисконтирования S , называется *современной (текущей) стоимостью* или *приведенной величиной* S .

Современная стоимость может быть вычислена на любой момент до выплаты суммы S .

Если величина P определена дисконтированием, то величина $D = S - P$ называется *дисконтом*, причем

$$D = S - P = S(1 - v^n). \quad (2.20)$$

Банковский учет. При банковском учете предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке вычисляется по формуле

$$P = S(1 - d_{cl})^n, \quad (2.21)$$

где d_{cl} – сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае вычисляется по формуле

$$D = S - P = S - S(1 - d_{cl})^n = S(1 - (1 - d_{cl})^n). \quad (2.22)$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

Пример 2.12. Долговое обязательство на сумму 250 тыс. руб., срок оплаты которого наступает через 3 года, продано с дисконтом по сложной

учетной ставке 18% годовых. Необходимо определить размер суммы полученной за долг и величину дисконта.

Решение. По условию задачи наращенная сумма $S = 250$ тыс. руб., сложная годовая учетная ставка $d_{cl} = 0,18$, срок операции $n = 3$. Первоначальную сумму и дисконт вычислим по формулам (2.21) и (2.22):

$$P = 250(1 - 0,18)^3 = 137,84 \text{ тыс. руб.}$$

$$D = 250 - 137,842 = 112,16 \text{ тыс.руб.}$$

Ответ: 137,84 тыс. руб, 112,16 тыс. руб.

2.8. Номинальная и эффективная учетные ставки процентов

Номинальная учетная ставка. Если дисконтирование применяют m раз в году, то используют *номинальную годовую учетную ставку* f . При этом в каждом временном периоде, равном $\frac{1}{m}$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке равной $\frac{f}{m}$. Процесс дисконтирования по сложной учетной ставке m раз в год описывается формулой

$$P = S \left(1 - \frac{f}{m} \right)^N, \quad (2.23)$$

где N – общее число периодов дисконтирования ($N = mn$).

Дисконтирование не один, а m раз в год быстрее снижает величину дисконта.

Эффективная учетная ставка. Для сравнения итогов различных финансовых операций наращения служит эффективная годовая процентная ставка. *Эффективная учетная ставка* d_{cl} характеризует степень дисконтирования за год. Определим ее на основе равенства дисконтных множителей:

$$\left(1 - \frac{f}{m} \right)^{mn} = (1 - d_{cl})^n \quad (2.24)$$

откуда получаем

$$d_{cl} = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m \quad (2.25)$$

или

$$f = m \left(1 - \sqrt[m]{1 - d_{cl}}\right). \quad (2.26)$$

Следует отметить, что при $m > 1$ эффективная учетная ставка меньше номинальной.

Пример 2.13. Необходимо найти эффективную годовую сложную учетную ставку, если номинальная учетная ставка равна 16%, а дисконтирование предусматривается ежеквартальное.

Решение. По условию задачи номинальная учетная ставка $f = 0,16$. Так как дисконтирование ежеквартальное, то $m = 4$. По формуле (2.25) эффективная годовая сложная учетная ставка равна

$$d_{cl} = 1 - \left(1 - \frac{0,16}{4}\right)^4 = 0,1507 \text{ или } 15,07\%.$$

Ответ: 15,07%.

2.9. Нарращение по сложной учетной ставке

Процесс наращения является обратной задачей для учетных ставок. Формулы наращения по сложным учетным ставкам можно получить из соответствующих формул для нахождения дисконтирования (2.21) и (2.23):

$$S = P \frac{1}{(1 - d_{cl})^n}, \quad (2.27)$$

$$S = P \frac{1}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^N}. \quad (2.28)$$

Пример 2.14. Необходимо рассчитать сумму, которую следует проставить в векселе, если реально выданная сумма равна 40 млн.руб., срок погашения 5 лет. Сумма векселя рассчитывается, исходя из сложной годовой учетной ставки равной 12%.

Решение. По условию задачи выданная сумма $P = 40$ млн.руб., срок погашения $n = 5$ лет, сложная годовая учетная ставка равна $d_{cl} = 0,12$. По формуле (2.27) вычислим наращенную сумму при сложной учетной ставке:

$$S = \frac{40}{(1 - 0,12)^5} = 75,8 \text{ млн. руб.}$$

Ответ: 75,8 млн. руб.

Пример 2.15. Необходимо рассчитать сумму, которую следует проставить в векселе, если реально выданная сумма равна 73 млн. руб., срок погашения 10 лет. Сумма векселя рассчитывается, исходя из сложной годовой учетной ставки равной 16 % . Начисление процентов происходит ежеквартально.

Решение. По условию задачи выданная сумма $P = 73$ млн. руб., срок погашения $n = 10$ лет, сложная годовая учетная ставка равна $f = 0,16$. Начисление процентов происходит ежеквартально, следовательно, $m = 4$, $N = mn = 10 \cdot 4 = 40$. По формуле (2.28) вычислим наращенную сумму при сложной учетной ставке:

$$S = \frac{73}{\left(1 - \frac{0,16}{4}\right)^{40}} = 373,66 \text{ млн. руб.}$$

Ответ: 373,66 млн. руб.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1. Необходимо вычислить сумму, которую следует проставить в векселе, если реально выданная сумма равна 400 тыс. руб., срок погашения 3 года. Сумма векселя рассчитывается, исходя из сложной годовой учетной ставки равной 13,5 %.

(Ответ: 618,03 тыс. руб.)

Задача 2.2. Вкладчик размещает на счете 132 тыс. руб. на четыре года. Капитализация процентов осуществляется ежегодно. За первый год банк начисляет 2%, второй – 4%, третий – 9%, четвертый – 10,5% годовых.

Необходимо определить сумму, которая будет получена по счету через четыре года.

(Ответ: 168,65 тыс. руб.)

Пример 2.3. Вкладчик размещает на счете 24400 руб. на три года. Капитализация процентов осуществляется ежегодно. За первый год банк начисляет 3%, второй – 4%, третий – 6% годовых. Необходимо определить, сумму, которая будет получена по счету через три года.

(Ответ: 27 705,52 руб.)

Задача 2.4. Вкладчик размещает на счете 12 500 руб. под 7% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов на счете через каждые полгода. Необходимо определить сумму, которая будет получена по счету через 4 года.

(Ответ: 16 384,95 руб.)

Задача 2.5. Вкладчик размещает на счете 85 тыс. руб. под 5,9% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов на счете ежеквартально. Необходимо определить сумму, которая будет получена по счету через 5 года.

(Ответ: 113,92 тыс. руб.)

Задача 2.6. В начале года вкладчик размещает в банке 7 800 руб. под 13,6% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов в конце каждого года. В течение года по счету начисляется простой процент. Необходимо определить сумму, которая получится на счете через 4 лет и 80 дней. Финансовая база равна 360 дням.

(Ответ: 13 377,17 руб.)

Задача 2.7. Необходимо определить первоначальную величину банковского вклада, если ее будущая стоимость через 5 лет составит 50 000 руб. Сложная процентная ставка равна 9 % годовых.

Задача 2.8. Клиент внес в банк 3,5 тыс. руб. под 8,5% годовых. Через 3 года и 270 дней он изъяс вклад. Необходимо определить сумму, полученную им при начислении банком сложных процентов. Финансовая база равна 365 дням.

(Ответ: 4,75 тыс. руб.)

Задача 2.9. Депозит в размере 600 тыс. руб. внесен в банк на 4 года под 12,5% годовых (сложные проценты). Начисление процентов производится ежеквартально. Необходимо определить наращенную сумму.

(Ответ: 981,69 тыс. руб.)

Задача 2.10. За 40 дней до окончания года вкладчик размещает в банке 772 тыс.руб. под 23% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов в конце каждого года. В течение года по счету начисляется простой процент. Необходимо определить сумму, которая получится на счете через 8 лет и 217 дней. Финансовая база равна 365 дням.

(Ответ: 4608,83 тыс. руб.)

Задача 2.11. Через сколько лет сумма, равная 75 тыс. руб., достигнет 180 тыс. руб. при начислении процентов по сложной учетной ставке равной 12,5% четыре раза в год?

(Ответ: 7,11 года)

Задача 2.12. Необходимо вычислить эффективную годовую процентную ставку, если номинальная ставка равна 12% годовых и проценты начисляются ежегодно.

(Ответ: 12%)

Задача 2.13. Банк начисляет по счету 19% годовых. Капитализация процентов осуществляется ежеквартально. Необходимо определить величину эффективного процента.

(Ответ: 20,4%)

Задача 2.14. Банк начисляет по счету 17,4 % годовых. Капитализация процентов осуществляется два раза в год. Необходимо определить величину эффективного процента.

(Ответ: 18,16 %)

Задача 2.15. Необходимо вычислить эффективную годовую процентную ставку, если номинальная ставка равна 12% годовых и проценты начисляются ежемесячно.

(Ответ: 12,68%)

Задача 2.16. Доходность финансового инструмента с погашением через 220 дней равна 20% годовых. Необходимо определить величину эффективного процента. Финансовая база равна 360 дням.

(Ответ: 20,77%)

Задача 2.17. Доходность финансовой операции инвестора с погашением через 35 дней равна 7,8% годовых. Необходимо определить величину эффективного процента. Финансовая база равна 365 дням.

(Ответ: 8,08%)

Задача 2.18. Доходность финансового инструмента с погашением через 220 дней равна 20% годовых. Необходимо определить величину эффективного процента. Финансовая база равна 360 дням.

(Ответ: 20,77%)

Пример 2.19. Банк принимает валютные вклады на депозит под 14 % годовых при ежемесячном начислении процентов и их погашением в конце срока. Необходимо рассчитать доход клиента при вкладе 5 400 долл. в течение 6 месяцев.

(Ответ: 65 176,9 долл.)

Пример 2.20. Кредитная организация принимает вклады юридических лиц под 12 % годовых с ежеквартальным начислением процентов и их погашением в конце срока. Необходимо рассчитать сумму возврата денежных средств, если вложено:

- а) 260 000 ден.ед. на 2 года;
- б) 140 000 ден.ед. на 3 года;
- в) 270 000 ден.ед. на 3,5 года.

(Ответ: 329360,22 ден.ед., 199606,52 ден.ед., 408399,23 ден.ед.)

Пример 2.21. Кредитная организация начисляет сложные проценты на срочный вклад, исходя из номинальной ставки 12,5 % годовых. Необходимо определить эффективную ставку при следующих условиях:

- а) ежемесячное начисление процентов;

б) ежеквартальное начисление процентов.

(Ответ: 11,81%, 11,93%)

Задача 2.22. Три банка предлагают следующие условия для вкладов:

- 1) первый банк начисляет 36% годовых по полугодиям;
- 2) второй банк начисляет 35% годовых по кварталам;
- 3) третий банк начисляет 34% годовых ежемесячно.

Необходимо определить банк, который предлагает наилучшие условия для вкладов.

(Ответ: 29,24%, 39,87%, 39,83%, второй банк предлагает самые выгодные условия для вкладов)

Пример 2.23. Первый банк дает кредит под 30% годовых при ежеквартальном начислении процентов. Второй банк дает кредит под 29% годовых при ежемесячном начислении процентов. Необходимо определить банк, в котором выгоднее взять кредит.

(Ответ: 33,55%, 33,18%, кредит выгоднее взять во втором банке)

Пример 2.24. Необходимо рассчитать период времени, в течение которого вложенные денежные средства в банк под 12% годовых при ежемесячном, поквартальном и полугодовом начислении процентов удвоятся (использовать сложные проценты).

(Ответ: 5,81 дней, 5,86 дней, 5,95 дней)

Пример 2.25. Необходимо определить наиболее выгодное предложение для размещения вкладчиком денежных средств в банк на 6 месяцев при условии: а) простая ставка процентов равна 30% годовых; б) сложная ставка равна 29% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

(Ответ: второй вариант выгоднее.)

3. Непрерывные проценты

3.1. Нарращение и дисконтирование

Все рассмотренные выше проценты называются дискретными, так как их начисление осуществляется за фиксированный промежуток времени (год, квартал, месяц, день). Уменьшая временной промежуток (период начисления) и увеличивая частоту начисления процентов, можно перейти к непрерывным процентам.

На практике в финансово-кредитных операциях непрерывное наращение применяется крайне редко. Преимущественно непрерывное наращение применяется в анализе сложных финансовых проблем, например, при обосновании и выборе инвестиционных решений в финансовом проектировании.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки – *силу роста*, которая характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени. Она может быть как постоянной, так и изменяться во времени. При дискретном начислении процентов m раз в году по номинальной ставке j наращенная сумма определяется по формуле

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn},$$

где j – номинальная ставка процентов, а m – число периодов начисления процентов в году. Чем больше m , тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. Перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$:

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} = P \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{j}{m} \right)^m \right)^n = P \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{j}} \right)^{nj} = P e^{nj}.$$

Таким образом, в случае непрерывного начисления процентов по ставке j наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S = P e^{jn}, \quad (3.1)$$

где e^{jn} – коэффициент наращения.

Для того чтобы отличать ставку непрерывных процентов от ставок дискретных процентов, обозначим силу роста символом δ . Тогда

$$S = Pe^{\delta n}. \quad (3.2)$$

Сила роста δ представляет собой номинальную ставку процентов при $m \rightarrow \infty$.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок осуществляется по формуле

$$P = Se^{-\delta n}. \quad (3.3)$$

Пример 3.1. Вкладчик размещает в банке 618 000 руб. под 20% годовых. Процент начисляется непрерывно. Необходимо вычислить сумму денег, которую вкладчик получит на счете через 10 лет.

Решение. По условию задачи первоначальная сумма вклада $P = 618\,000$ руб., сила роста $\delta = 0,20$, период начисления $n = 10$ лет. Для нахождения наращенной суммы при непрерывном начислении процентов воспользуемся формулой (3.2):

$$S = 618\,000e^{0,20 \cdot 10} = 618\,000e^2 = 4\,566\,436,67 \text{ руб.}$$

Ответ: 4 566 436,67 руб.

3.2. Связь дискретных и непрерывных процентных ставок

Дискретные и непрерывные ставки наращения находятся в функциональной зависимости между собой. Из равенства множителей наращения

$$(1+i)^n = e^{\delta n}$$

следует, что сила роста равна

$$\delta = \ln(1+i) \quad (3.4)$$

или

$$i = e^{\delta} - 1. \quad (3.5)$$

Пример 3.2. Годовая ставка сложных процентов равна 16,5%. Рассчитать эквивалентную ей силу роста.

Решение. По условию задачи годовая ставка сложных процентов $i = 0,165$. Для нахождения эквивалентной силы роста воспользуемся формулой (3.4):

$$\delta = \ln(1 + 0,165) = 0,1527 \text{ или } 15,27\%.$$

Ответ: 15,27 %.

3.3. Расчет срока ссуды и процентных ставок

Часто при разработке условий финансовых операций необходимо решить обратную задачу, т.е. определить продолжительность ссуды или уровень процентной ставки.

Срок ссуды. Приведем формулы расчета срока ссуды n для различных условий наращивания процентов и дисконтирования.

1) При наращении по сложной годовой ставке i ,:

$$n = \frac{\log_b \left(\frac{S}{P} \right)}{\log_b (1 + i)}. \quad (3.6)$$

2) При наращении по номинальной ставке j :

$$n = \frac{\log_b \left(\frac{S}{P} \right)}{m \log_b \left(1 + \frac{j}{m} \right)}. \quad (3.7)$$

3) При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d_{cl} :

$$n = \frac{\log_b \left(\frac{P}{S} \right)}{\log_b (1 - d_{cl})}. \quad (3.8)$$

4) При дисконтировании по номинальной учетной ставке f :

$$n = \frac{\log_b \left(\frac{P}{S} \right)}{m \log_b \left(1 - \frac{f}{m} \right)}. \quad (3.9)$$

5) При наращении по постоянной силе роста δ :

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\delta}. \quad (3.10)$$

Замечание. В качестве b можно взять любое число ($b > 0$, $b \neq 1$).

Пример 3.3. Через сколько лет сумма, равная 60 млн. руб., достигнет 250 млн. руб. при начислении процентов по сложной годовой процентной ставке равной 17%?

Решение. По условию задачи начальная сумма $P=60$ млн. руб., конечная сумма $S=250$ млн. руб., сложная годовая ставка $i=0,17$. Срок ссуды найдем по формуле (3.6):

$$n = \frac{\log_b\left(\frac{250}{60}\right)}{\log_b(1+0,17)} = 9,09 \text{ лет.}$$

Ответ: 9,09 лет.

Пример 3.4. За какое время первоначальный вклад увеличится на 36% при непрерывном начислении процентов с силой роста 12% годовых?

Решение. По условию задачи сила роста $\delta=0,1$. Первоначальный вклад увеличится на 36% при непрерывном начислении процентов, следовательно, коэффициент наращения равен

$$e^{jn} = \frac{S}{P} = \frac{136}{100} = 1,36.$$

Срок ссуды найдем по формуле (3.10):

$$n = \frac{\ln(1,36)}{0,12} = 2,56 \text{ года.}$$

Ответ: 2,56 года.

Пример 3.5. При непрерывном начислении сложных процентов эффективная годовая процентная ставка составляет 10,4% годовых. Каков при этом период удвоения вклада?

Решение. По условию задачи эффективная годовая процентная ставка $i=0,104$. Используя формулу (3.3), вычислим постоянную силу роста

$\delta = \ln(1 + 0,104) = \ln(1,104)$. За некоторый промежуток времени вклад удвоился, следовательно, по формуле (3.2) получаем

$$2P = Pe^{\delta n}, \quad 2 = e^{\delta n}, \quad \delta n = \ln 2, \quad n = \frac{\ln 2}{\delta} = \frac{\ln 2}{\ln(1,104)} = 7,01 \text{ лет.}$$

Ответ: 7,01 лет.

Величина процентных ставок. Рассмотрим формулы для расчета ставок i , j , d_{cl} , f , δ для различных условий наращивания процентов и дисконтирования.

1) При наращении по сложной годовой ставке процентов i :

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1. \quad (3.11)$$

2) При наращении по номинальной ставке j :

$$j = m \left(\sqrt[mn]{\frac{S}{P}} - 1 \right). \quad (3.12)$$

3) При дисконтировании по сложной учетной ставке d_{cl} :

$$d_{cl} = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}. \quad (3.13)$$

4) При дисконтировании по номинальной учетной ставке f :

$$f = m \left(1 - \sqrt[mn]{\frac{P}{S}} \right). \quad (3.14)$$

5) При наращении по постоянной силе роста δ :

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{n}. \quad (3.15)$$

Пример 3.6. Сберегательный сертификат куплен за 150 ден. ед., выкупная его сумма равна 400 ден. ед. Срок 2,5 года. Необходимо вычислить уровень доходности инвестиций в виде годовой ставки сложных процентов.

Решение. По условию задачи начальная сумма $P = 150$ ден. ед., конечная сумма $S = 400$ ден. ед. Срок ссуды $n = 2,5$ года. Сложную годовую процентную ставку i найдем по формуле (3.11):

$$i = 2,5\sqrt[5]{\frac{400}{150}} - 1 = 0,4804 \text{ или } 48,04\%.$$

Ответ: 48,04 %.

3.4. Средние процентные ставки

При долгосрочных финансовых операциях договор между кредитором и заемщиком может предусматривать дискретное изменение действующих процентных ставок с течением времени. При этом представляют интерес так называемые средние процентные ставки, которые позволяют охарактеризовать условия всего договора в целом.

В случае простых процентов средняя процентная ставка определяется формулой

$$i_{cp} = \frac{i_1 n_1 + i_2 n_2 + \dots + i_k n_k}{n}, \quad (3.16)$$

где $n_1, n_2, \dots, n_k$ – сроки действия процентных ставок $i_1, i_2, \dots, i_k$ соответственно, n – полный срок всей финансовой операции. Эта процентная ставка называется *средневзвешенной* (определенной с учетом срока действия каждой ставки).

В частности при равных сроках действия процентных ставок

$$n_1 = n_2 = \dots = n_k = \frac{n}{k}$$

формула (3.16) упрощается и дает среднюю арифметическую ставку

$$i_{cp} = \frac{i_1 + i_2 + \dots + i_k}{k}. \quad (3.17)$$

В случае сложных процентов средняя процентная ставка определяется формулой

$$i_{cp} = \sqrt[n]{(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k}} - 1. \quad (3.18)$$

В частности при равных сроках действия процентных ставок

$$n_1 = n_2 = \dots = n_k = \frac{n}{k}$$

эта формула имеет вид

$$i_{cp} = \sqrt[k]{(1+i_1)(1+i_2) \dots (1+i_k)} - 1. \quad (3.19)$$

Пример 3.7. По вкладу начисляются простые проценты: в течение первых 5 мес. по ставке 5% годовых, затем в течение 8 мес. по ставке 12% годовых, последние 11 мес. – по ставке 15,6% годовых. Найти среднюю процентную ставку.

Решение. По условию задачи простые процентные ставки равны $i_1 = 0,05$, $i_2 = 0,12$, $i_3 = 0,156$, сроки действия процентных ставок $n_1 = 5$ мес., $n_2 = 8$ мес., $n_3 = 11$ мес. Полный срок операции составляет $n = 5 + 8 + 11 = 24$ мес. = 2 года.

Используя формулу (3.12), найдем

$$i_{cp} = \frac{5 \cdot 0,05 + 8 \cdot 0,12 + 11 \cdot 0,156}{24} = 0,1219 \text{ или } 12,19\%$$

Ответ: 12,19 %.

Пример 3.8. По вкладу начисляются сложные проценты: в течение первых двух лет по ставке 12,5% годовых, затем в течение одного года по ставке 14% годовых, последние два года – по ставке 5,9% годовых. Найти среднюю процентную ставку.

Решение. По условию задачи простые процентные ставки равны $i_1 = i_2 = 0,125$, $i_3 = 0,14$, $i_4 = i_5 = 0,059$. Полный срок операции составляет $n = 2 + 1 + 2 = 5$ лет.

Используя формулу (3.14), найдем

$$i_{cp} = \sqrt[5]{(1+0,125)^2 (1+0,14)^1 \dots (1+0,059)^2} - 1 = 0,101 \text{ или } 10,1\%$$

Ответ: 10,1%.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1. Какой должна быть ставка ссудного процента, чтобы 180 тыс. руб. увеличились до 500 тыс. руб., за срок вклада 5 лет?

(Ответ: 22,67%)

Задача 3.2. Вкладчик размещает в банке 562 тыс. руб. под 14,5% годовых. Процент начисляется непрерывно. Необходимо вычислить, какую

сумму денег вкладчик получит на счете через 8 лет.

(Ответ: 1792,74 тыс. руб.)

Задача 3.3. Вкладчик размещает в банке 75 тыс. руб. под 9,8% годовых. Процент начисляется непрерывно. Необходимо вычислить, какую сумму денег вкладчик получит на счете через полгода?

(Ответ: 79,54 тыс. руб.)

Задача 3.4. Найти величину процентной ставки, если при ежемесячном начислении сложных процентов он увеличился за 3 года 2 мес. на 820 ден. ед. Первоначальная сумма вклада 5 000 ден. ед.

(Ответ: 4,81 %)

Задача 3.5. За какое время первоначальный вклад увеличится на 64% при непрерывном начислении процентов с силой роста 18,5% годовых?

(Ответ: 2,67 года)

Пример 3.6. При непрерывном начислении сложных процентов эффективная годовая процентная ставка составляет 24,5% годовых. Каков при этом период удвоения вклада?

(Ответ: 3,16 года)

Пример 3.7. Необходимо определить величину непрерывно начисляемого процента эквивалентного 11,5 %, начисляемого один раз в год.

(Ответ: 10,89 года)

Пример 3.8. По вкладу начисляются простые проценты: в течение первых 5 мес. по ставке 5% годовых, затем в течение 8 мес. по ставке 12% годовых, последние 11 мес. – по ставке 15,6% годовых. Необходимо вычислить среднюю процентную ставку.

(Ответ: 16,38%)

Пример 3.9. По вкладу начисляются сложные проценты: в течение первых трех лет по ставке 24,7% годовых, затем в течение одного года по ставке 22% годовых, последние два года – по ставке 12,8% годовых. Найти среднюю процентную ставку.

(Ответ: 20,16%)

РАЗДЕЛ II. АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ, ПЛАНИРОВАНИЕ КАПИТАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ И УЧЕТ ИНФЛЯЦИИ

4. Финансовые ренты

4.1. Поток платежей

Многие финансовые, кредитные и коммерческие операции носят продолжительный характер и состоят не из разового платежа, а из их последовательности, распределенных во времени, т.е. потока платежей. Примерами могут служить регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами, периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.), арендная плата, дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам и т.д. Ряд последовательных выплат и поступлений называется *потоком платежей*. Отдельный элемент платежа называется *членом потока*. Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления – положительными.

Классификация потоков. Потоки платежей могут быть *регулярными* (размеры платежей постоянные или следуют установленному правилу, предусматривающему равные интервалы между платежами) и *нерегулярными*.

Поток платежей, все члены которого являются положительными величинами, а временные интервалы – постоянны, называется *финансовой рентой* или *аннуитетом*. Финансовая рента имеет следующие параметры: *член ренты* – величина каждого отдельного платежа, *период ренты* – временной интервал между двумя соседними платежами, *срок ренты* – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода, *процентная ставка* – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту, число платежей в году,

число начислений процентов в году, моменты платежа внутри периода ренты.

На практике применяют разные по своим условиям ренты. В основу их классификации может быть положен ряд признаков.

По количеству выплат членов ренты на протяжении года ренты делятся на годовые (выплата раз в году) и p -срочные, где p – количество выплат в году. Иногда при анализе производственных инвестиций применяют ренты с периодами, превышающими год. Перечисленные виды рент называются *дискретными*. В финансово-экономической практике встречаются последовательности платежей, которые производятся так часто, что их можно рассматривать как *непрерывные*.

По количеству начислений процентов на протяжении года различают: ренты с ежегодным начислением, с начислением m раз в году, с непрерывным начислением. Моменты начисления процентов необязательно должны совпадают с моментами выплат членов ренты.

По величине своих членов ренты делятся на *постоянные* (с одинаковыми размерами члена ренты) и *переменные*. Члены переменных рент изменяют свои размеры во времени, следуя определенному закону (например арифметической или геометрической прогрессии), или несистематично (задаются таблицей). Наиболее распространенный вид ренты – это постоянные ренты.

По вероятности выплат ренты делятся на *верные* и *условные*. Верные ренты подлежат безусловной уплате (например, при погашении кредита). Число членов такой ренты заранее известно. В свою очередь выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события, число ее членов заранее неизвестно. К таким рентам относятся страховые *аннуитеты* – последовательные платежи в имущественном и личном страховании. Наиболее типичным примером страхового аннуитета является пожизненная выплата пенсии.

По количеству членов различают ренты *с конечным числом членов* или *ограниченные* ренты (их срок заранее оговорен), и *бесконечные* или *вечные* ренты. На практике с вечной рентой встречаются в ряде долгосрочных операций, а именно, когда предполагается, что период функционирования анализируемой системы или срок операции весьма продолжителен и не оговаривается конкретными датами. В качестве вечной ренты рассматриваются выплаты процентов по бессрочным облигационным займам.

По соотношению начала срока ренты и какого-либо момента времени, упреждающего начало ренты (например, начало действия контракта или даты его заключения), ренты делятся на *немедленные* и *отложенные*, или *отсроченные*. Примером отсроченной ренты является погашение долга в рассрочку после льготного периода.

Очень важным является различие по моменту выплат платежей в пределах периода ренты. Если платежи осуществляются в конце этих периодов, то соответствующие ренты называют *обыкновенными*, или *постнумерандо*. Если платежи производятся в начале периодов, то их называют *пренумерандо*. Довольно часто на практике договора предусматривают платежи или поступления денег в середине периодов.

4.2. Обобщающие параметры потоков платежей

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина, каждая из которых является числом. *Наращенной суммой* потока платежей называется сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты. *Современной величиной* потока платежей называется сумма всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Все характеристики потока платежей определяются содержанием его членов или их происхождением. Наращенная сумма может представлять собой

общую сумму накопленной задолженности к концу срока, итоговый объем инвестиций, накопленный денежный резерв и т.д. В свою очередь современная стоимость характеризует приведенные к началу осуществления проекта инвестиционные затраты, суммарный капитализированный доход или чистую приведенную прибыль от реализации проекта и т.п.

Обобщающие характеристики потока платежей, особенно его современная стоимость, широко применяются в различных финансовых расчетах. Например, без них невозможно разработать план последовательного погашения задолженности, измерить финансовую эффективность проекта, осуществить сравнение или безубыточное изменение условий контрактов, решать многие другие практические задачи.

4.3. Нарощенная сумма постоянной ренты постнумерандо

Обычная годовая рента. Пусть в течение n лет в конце каждого года на расчетный счет вносится по R рублей, проценты начисляются один раз в год по ставке i . В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение $(n-1)$ года. Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \dots + R(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R , знаменатель $(1+i)$, число членов n . Эта сумма равна

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \quad (4.1)$$

Годовая рента, начисление процентов m раз в году. Предположим, что платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что применяется каждый раз ставка $\frac{j}{m}$, где j –

номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$$R\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m(n-1)}, R\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m(n-2)}, \dots, R.$$

Заметим, что полученная последовательность является геометрической прогрессией, первый член которой является R , знаменатель $\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$, число членов n . Нарощенной суммой ренты является сумма членов этой прогрессии

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}, \quad (4.2)$$

где n – срок ренты, m – частота начисления процентов в год, j – номинальная ставка процентов.

Рента p – срочная, $m = 1$. Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если R – годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен $\frac{R}{p}$. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке, у которой первый член $\frac{R}{p}$, знаменатель $(1 + i)^{\frac{1}{p}}$, общее число членов np . Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S = R \frac{(1 + i)^n - 1}{p \left((1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right)}. \quad (4.3)$$

Рента p – срочная, $p = m$. В контрактах часто число выплат в году p

равно числу начислений процентов m , т.е. $p = m$. Тогда наращенная сумма ренты имеет вид

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j}. \quad (4.4)$$

Рента p -срочная, $p \neq m$. Определим наращенную сумму для общего случая p -срочной ренты с начислением процентов m раз в году. Общее количество членов ренты равно np , величина ренты $\frac{R}{p}$. Члены ренты с начисленными процентами образуют ряд геометрической прогрессии с первым членом $\frac{R}{p}$ и знаменателем $\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$. Сумма членов полученной прогрессии равна

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]}. \quad (4.5)$$

Заметим, что из формулы (4.5) легко получить все рассмотренные выше частные случаи, задавая соответствующие значения p и m .

Пример 4.1. Фирма создает инвестиционный фонд. В течение 5 лет в фонд вносятся платежи в размере 80 тыс. руб. в год под 12% годовых. Необходимо найти величину инвестиционного фонда через 5 лет, если:

- 1) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются один раз в году;
- 2) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются ежеквартально;
- 3) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются один раз в году;
- 4) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются по полугодиям;

5) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются ежеквартально.

Решение. По условию задачи величина годового платежа $R = 80$ тыс. руб., срок ренты $n = 5$ лет, годовая процентная ставка $i = 0,12$. Вычислим величину наращенной суммы ренты постнумерандо.

1) Если платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются один раз в году, то по формуле (4.1) получаем

$$S = 80 \cdot \frac{(1 + 0,12)^5 - 1}{0,12} = 508,23 \text{ тыс. руб.}$$

2) Если платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются ежеквартально, то по формуле (4.2) получаем:

$$S = 80 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^4 - 1} = 513,82 \text{ тыс. руб.}$$

3) Если платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются один раз в году, то по формуле (4.3) получаем:

$$S = 80 \cdot \frac{(1 + 0,12)^5 - 1}{2 \cdot \left((1 + 0,12)^{\frac{1}{2}} - 1\right)} = 523,04 \text{ тыс. руб.}$$

4) Если платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются по полугодиям, то по формуле (4.4) получаем:

$$S = 80 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2 \cdot 5} - 1}{0,12} = 527,232 \text{ тыс. руб.}$$

5) Если платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются ежеквартально, то по формуле (4.5) получаем:

$$S = 80 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4 \cdot 5} - 1}{2 \cdot \left[\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1\right]} = 529,47 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 508,23 тыс. руб., 513,82 тыс. руб., 523,04 тыс. руб., 527,23 тыс. руб., 529,47 тыс. руб.

Непрерывное начисление процентов. Предположим, что проценты начисляются не дискретно, а непрерывно. Тогда ряд платежей с начисленными непрерывными процентами образует ряд геометрической прогрессии с членами

$$\frac{R}{p} e^{(n-1)\delta}, \dots, \frac{R}{p} e^{2\delta}, \frac{R}{p} e^{\delta}, \frac{R}{p},$$

сумма которого равна

$$S = R \frac{e^{\delta n} - 1}{p \left(e^{\frac{\delta}{p}} - 1 \right)}. \quad (4.6)$$

4.4. Современная стоимость постоянной ренты постнумерандо

Обычная годовая рента. Пусть член годовой ренты равен R , процентная ставка – i , проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты – n . Тогда дисконтированные величины платежей равны $R \frac{1}{i+1} = Rv$, Rv^2 , ..., Rv^n . Полученные величины образуют геометрическую прогрессию с первым членом равным Rv , знаменателем v и суммой

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}. \quad (4.7)$$

Годовая рента, начисление процентов t раз в году. В формуле (4.3) заменим дисконтный множитель $(1+i)^{-n}$ на эквивалентную величину

$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}$, а величину i выражением $\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$, тогда современная стоимость постоянной ренты вычисляется по формуле

$$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}. \quad (4.8)$$

Рента p – срочная, $m = 1$. Пусть платежи производятся p раз в год, тогда современная стоимость постоянной ренты постнумерандо равна

$$A = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{p \left((1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right)}. \quad (4.9)$$

Рента p – срочная, $p = m$. Число членов ренты равно числу начисления процентов. Тогда для нахождения современной стоимости постоянной ренты получаем

$$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}. \quad (4.10)$$

Рента p -срочная, $p \neq m$. Для расчета современной величины ренты в самом общем случае при произвольных значений p и m получаем

$$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right)}. \quad (4.11)$$

Непрерывное начисление процентов. Пусть ряд состоит из ежегодных платежей R , проценты начисляются непрерывно с силой роста равной δ . При дисконтировании по этой ставке всех членов ряда получим геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем $e^{-\delta}$. Сумма членов прогрессии вычисляется по формуле

$$A = R \frac{1 - e^{-\delta n}}{p \left(e^{\frac{\delta}{p}} - 1 \right)}. \quad (4.12)$$

Пример 4.2. Фирма предусматривает создание в течение 4-х лет фонда развития и имеет возможность вносить ежегодно 82 тыс. руб. под 8% годовых. Необходимо найти сумму, которая потребовалась бы фирме изначально для создания фонда, если бы она поместила ее в банк на 4 года под 8% годовых, при условии:

- 1) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются один раз в году;
- 2) платежи осуществляются один раз в году, проценты начисляются ежеквартально;
- 3) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются один раз в году;
- 4) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются по полугодиям;
- 5) платежи осуществляются по полугодиям, проценты начисляются ежеквартально.

Решение. По условию задачи величина годового платежа $R = 82$ тыс. руб., срок ренты $n = 4$ лет, годовая процентная ставка $i = 0,08$. Таким образом, современная величина ренты постнумерандо:

- 1) по формуле (4.7):

$$A = 82 \cdot \frac{1 - (1 + 0,08)^{-4}}{0,08} = 271,59 \text{ тыс. руб.}$$

- 2) по формуле (4.8):

$$A = 82 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{-4 \cdot 4}}{\left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 - 1} = 270,13 \text{ тыс. руб.}$$

- 3) по формуле (4.9):

$$A = 82 \cdot \frac{1 - (1 + 0,08)^{-4}}{2 \cdot \left((1 + 0,08)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)} = 276,92 \text{ тыс. руб.}$$

4) по формуле (4.10):

$$A = 82 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,08}{2} \right)^{-2 \cdot 4}}{0,08} = 276,04 \text{ тыс. руб.}$$

5) по формуле (4.11):

$$A = 82 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,08}{4} \right)^{-4 \cdot 4}}{2 \cdot \left(\left(1 + \frac{0,08}{4} \right)^{\frac{4}{2}} - 1 \right)} = 275,59 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 271,59 тыс. руб., 270,13 тыс. руб., 276,92 тыс. руб., 276,04 тыс. руб., 275,59 тыс. руб.

Пример 4.3. На приобретение квартиры взят кредит на 15 лет в размере 500 000 руб. под 12% годовых. Определить ежегодную сумму погашения долга.

Решение. В данном случае известна величина долга $A = 500\,000$, процентная ставка $i = 0,12$, срок вклада $n = 15$, поэтому размер ежегодных выплаты будет определяться по формуле (4.7):

$$500\,000 = R \frac{1 - (1 + 0,12)^{-5}}{0,12},$$

откуда после преобразований получаем, что $R = 73\,412,12$ руб.

Таким образом, ежегодно необходимо возвращать 73 412,12 руб.

Ответ: 73 412,12 руб.

4.5. Расчет срока ренты

В условиях контракта иногда возникает необходимость в определении срока ренты и числа членов ренты. Искомые величины можно получить из формул (4.1)–(4.12), разрешая их относительно n .

Обычная годовая рента.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}, \quad (4.13)$$

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}. \quad (4.14)$$

Годовая рента, начисление процентов m раз в году.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1\right) + 1\right)}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}, \quad (4.15)$$

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}\left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1\right)\right)^{-1}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}. \quad (4.16)$$

Рента p – срочная, $m=1$.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right) + 1\right)}{\ln(1+i)}, \quad (4.17)$$

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}p\left((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right)\right)^{-1}}{\ln(1+i)}. \quad (4.18)$$

Рента p – срочная, $p=m$.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}j + 1\right)}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}, \quad (4.19)$$

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}j\right)^{-1}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}. \quad (4.20)$$

Рента p -срочная, $p \neq m$.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right) + 1\right)}{\ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}, \quad (4.21)$$

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}p\left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right)\right)^{-1}}{\ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}. \quad (4.22)$$

Непрерывное начисление процентов.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left(e^{\frac{\delta}{p}} - 1\right) + 1\right)}{\delta}, \quad (4.23)$$

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}p\left(e^{\frac{\delta}{p}} - 1\right)\right)}{\delta}. \quad (4.24)$$

При расчете срока ренты необходимо учитывать следующее:

1) если расчетные значения срока будут дробными, то для годовой ренты в качестве n удобно принять ближайшее целое число лет;

2) в связи с округлением величины до целого значения необходимо пересчитать величину годового рентного платежа R с тем, чтобы наращенная сумма (или современная стоимость) ренты осталась неизменной.

Пример 4.4. Необходимо вычислить срок, необходимый для накопления 400 тыс. руб., если ежеквартально будет вноситься 10 тыс. руб. под 12 % годовых при ежегодном начислении процентов.

Решение. По условию задачи величина наращенной суммы $S = 400$ тыс. руб., число начислений процентов в году $m = 1$, рентные платежи вносятся ежеквартально $p = 4$, годовая процентная ставка $i = 0,12$, величина годового взноса $R = 10 \cdot 4 = 40$ тыс. руб. Определим срок ренты по формуле (4.13):

$$n = \frac{\ln\left(\frac{400}{40} \cdot 4 \left((1 + 0,12)^{\frac{1}{4}} - 1 \right) + 1\right)}{\ln(1 + 0,12)} = 6,75 \approx 6 \text{ лет.}$$

Вследствие округления срока ренты необходимо пересчитать величину годового взноса по формуле (4.3)

$$400 = R \cdot \frac{(1 + 0,12)^6 - 1}{4 \cdot \left((1 + 0,12)^{\frac{1}{4}} - 1 \right)}.$$

Откуда выражаем R и получаем $R = 47,22$ тыс. руб.

Таким образом, ежеквартально необходимо вносить $47,22 : 4 = 11,8$ тыс. руб.

Ответ: 11,8 тыс. руб.

4.6. Определение ставки процентов

Если речь идет о выяснении эффективности (доходности) соответствующей финансово-банковской или коммерческой операции, то необходимо определить величину процентной ставки.

На практике величину процентной ставки ренты определяют методом линейной интерполяции следующим образом:

1) при известных величинах наращенной суммы ренты S , годового платежа R и коэффициента наращения ренты $s_{n;i} = \frac{S}{R}$

$$i = i_n + \frac{s_{n;i} - s_n}{s_g - s_n} (i_g - i_n) \quad (4.25)$$

где i_g и i_n – нижнее и верхнее значения предполагаемой процентной ставки; s_g и s_n – нижнее и верхнее значения коэффициентов наращения ренты для ставок i_g и i_n .

2) при известных величинах современной стоимости ренты A , годового платежа R и коэффициента наращения ренты $a_{n;i} = \frac{A}{R}$

$$i = i_n + \frac{a_{n;i} - a_n}{a_g - a_n} (i_g - i_n) \quad (4.26)$$

где a_g и a_n – значения коэффициентов приведения ренты для ставок i_g и i_n .

На практике чаще всего при расчетах рентных платежей используются сложные проценты. Однако существуют рентные платежи, в которых начисление производится по ставкам простых процентов, при этом наращенная сумма и современная стоимость ренты вычисляются по формулам

$$S = Rn \left(1 + \frac{np-1}{2p} i \right), \quad (4.27)$$

$$A = Rnp(1 + npi)^{-1}, \quad (4.28)$$

где p – число рентных платежей в году.

4.7. Вечная рента

Вечной рентой называется последовательность платежей, число членов которой не ограничено, т.е. она выплачивается бесконечное число лет (например, выплаты по бессрочным облигационным займам). В этом случае наращенная сумма с течением времени возрастает бесконечно, при этом современная величина имеет вполне определенное конечное значение.

В случае бесконечной постоянной годовой ренты постнумерандо при $p=1$, $m=1$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}. \quad (4.29)$$

В общем случае, когда $p \geq 1$, $m \geq 1$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right)} = \frac{R}{p \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right)}. \quad (4.30)$$

Если $p \geq 1$, $m \geq 1$ и $p = m$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right)} = \frac{R}{j}. \quad (4.31)$$

4.8. Нарощенная сумма и современная стоимость постоянной ренты пренумерандо

Число платежей в году	Частота начислений процентов в году	Нарощенная сумма	Современная стоимость
$p = 1$	$m = 1$	$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)$	$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)$
	$m > 1$	$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$	$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$
$p > 1$	$m = 1$	$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{p \left((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right)} (1+i)^{\frac{1}{p}}$	$A = R \frac{(1+i)^{-n} - 1}{p \left((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right)} (1+i)^{\frac{1}{p}}$
	$m = p$	$S = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}}{j} \left(1 + \frac{j}{m}\right)$	$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j} \left(1 + \frac{j}{m}\right)$
	$m \neq p$	$S = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}}{p \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right)} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$	$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right)} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$

	$m \rightarrow \infty$	$S = R \frac{1 - e^{-\delta n}}{p \left(e^{\frac{\delta}{p}} - 1 \right)} e^{\frac{\delta}{p}}$	$A = R \frac{1 - e^{-\delta n}}{p \left(e^{\frac{\delta}{p}} - 1 \right)} e^{\frac{\delta}{p}}$
--	------------------------	--	--

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. В течение 5 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. руб., на которые начисляются проценты по годовой ставке 12%. Необходимо определить сумму, полученную на расчетном счете к концу указанного срока.

(Ответ: 63,53 млн. руб.)

Задача 4.2. Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд. В конце каждого года в фонд поступают средства в виде постоянной годовой ренты в течение 3 лет. Размер разового платежа 5 млн. руб. На поступившие взносы поквартально начисляются проценты по ставке 18,5% годовых. Необходимо определить величину фонда в конце срока.

(Ответ: 34,3 млн. руб.)

Задача 4.3. В конце каждого года инвестор в течении семи лет получает по 1500 руб. и размещает каждый платеж под 7,5 % годовых до окончания семилетнего периода. Необходимо определить будущую стоимость ренты.

(Ответ: 13 180,98 руб.)

Задача 4.4. Инвестиции производятся на протяжении 4 лет один раз в конце года по 2 млн. руб. Ставка сложных процентов равна 17% годовых. Необходимо найти сумму инвестиций к концу срока.

(Ответ: 10,28 млн. руб.)

Задача 4.5. Необходимо вычислить наращенную сумму годовой ренты, если проценты начисляются по номинальной ставке 16% ежемесячно, член ренты 50 000 руб., срок ренты 4 года.

(Ответ: 50 000 руб.)

Задача 4.6. Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд, на который ежеквартально делаются взносы по 200 000 руб. Проценты начисляются один раз в год по ставке 17,5%. Необходимо вычислить величину накопленного фонда к концу семилетнего срока.

(Ответ: 132 225,65 руб.)

Задача 4.7. В течение 5 лет для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 300 000 руб. Проценты начисляются ежемесячно по номинальной ставке 15%. Необходимо вычислить величину накопленного фонда к концу указанного срока.

(Ответ: 105 382,85 руб.)

Задача 4.8. Необходимо вычислить текущую стоимость и итоговую сумму обыкновенного аннуитета, состоящего из пяти полугодовых платежей по 10 000 руб. каждый, если деньги стоят $j=4\%$.

(Ответ: $A=47\,135$ руб., $S=52\,040$ руб.)

Задача 4.9. Семья хочет через 8 лет купить квартиру за 1 800 000 руб. Какую сумму (одинаковую) ей нужно каждый год из этих 8 лет добавлять на свой счет в банке, чтобы накопить 1 800 000 руб., если годовая ставка процента в банке 7%?

(Ответ: 175 441,97 руб.)

Задача 4.10. Гражданин N. хочет накопить 15 тыс. долл. на машину, вкладывая в банк по 2 тыс. долл. ежегодно. Годовая ставка процента в банке 7%. Как долго гражданину придется копить?

(Ответ: 6,24 лет.)

Задача 4.11. Предполагается сформировать фонд в размере 5600 д.е., делая ежегодные взносы (в конце каждого года) в течение 6 лет при сложной ставке 9,5% годовых. Какова должна быть величина каждого взноса?

(Ответ: 735,02 д.е.)

Задача 4.12. На сколько д.е. итог годовой ренты пренумерандо сроком 3 года отличается от суммы всех платежей, если величина каждого платежа 700 д.е., процентная ставка 15,8% годовых?

(Ответ: 736,26 д.е.)

Задача 4.13. Найти современную стоимость головой ренты пренумерандо с платежами по 650 д.е., если срок ренты 7 лет, а ставка приведения 12% годовых.

(Ответ: 3322,41 д.е.)

Задача 4.14. В банк внесена сумма 960 д.е. Сколько лет можно за счет этой суммы получать в конце каждого года по 1100 д.е., если процентная ставка банка 7,5% годовых?

(Ответ: 1,24 лет.)

Задача 4.15. Коэффициент наращения некоторой головой ренты постнумерандо равен 3,45. а ее коэффициент дисконтирования равен 2,3. Какова процентная ставка?

(Ответ: 14,49%)

Задача 4.16. Выдан кредит в сумме 2300 д.е. на условиях 15% годовых, который должен быть погашен в течение 10 лет равными платежами в конце каждого квартала. Найти величину каждого платежа.

(Ответ: 1120,2 д.е.)

5. Инфляция

5.1. Инфляция

Инфляция представляет собой весьма сложное и многогранное явление, оказывающее влияние на всю экономику, в том числе и на процессы на финансовом рынке.

Финансовая математика рассматривает проявление инфляции в виде роста стоимости товаров и услуг, что эквивалентно удешевлению (обесцениванию) денег с течением времени. Наличие инфляции сильно усиливает роль фактора времени, который является очень важным в финансовых расчетах. Очевидно, что наличие инфляции необходимо учитывать при планировании и проведении финансовых операций, особенно долгосрочных. При этом реальные конечные результаты таких операций могут существенно зависеть от величины инфляции.

Для количественного описания инфляции важным является понятие потребительской корзины, т.е. некоторого фиксированного набора товаров и услуг, стоимость которого в различные моменты времени можно сравнивать. Примером является потребительская корзина прожиточного минимума, которая включает в себя минимальный набор продовольственных и промышленных товаров, а также услуг, необходимый человеку. При определении общих показателей инфляции в масштабах страны, состав потребительской корзины существенно расширяется, она может включать в себя весь валовой национальный продукт.

Инфляция – это рост цен на товары и услуги, процесс обесценивания национальной валюты, снижения их покупательной способности. В условиях инфляции деньги дешевеют, так как цены на товары растут. Противоположный процесс роста покупательной способности денег получил название *дефляция*.

Инфляция по-разному влияет на участников кредитного соглашения. Кредитор может потерять часть своего дохода из-за обесценивания

денежных средств. Заемщик наоборот выигрывает, так как может погасить задолженность денежными средствами сниженной покупательной способности.

Инфляцию необходимо учитывать, по крайней мере в следующих случаях: при расчете наращенной суммы денег и при изменении реальной эффективности (доходности) финансовой операции.

5.2. Начисление по простым процентам

Следствием инфляции является падение покупательной способности денег, которое за период n характеризуется индексом $J_{нок}$. Известно, что индекс покупательной способности равен обратной величине индекса цен (инфляции) J_p , т.е.

$$\frac{J_{нок}}{J_p}.$$

Индекс цен (инфляции) показывает во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

Если наращенная за n лет сумма денег составляет S , а индекс цен равен J_p , то реально наращенная сумма денег, с учетом их покупательной способности, составляет

$$C = \frac{S}{J_p}. \quad (5.1)$$

Индекс цен (инфляции) показывает во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

Под темпом инфляции обычно понимается относительный прирост цен за некоторый период. Темп инфляции и индекс цен связаны следующим образом:

$$h = 100 \cdot (J_p - 1), \quad J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right).$$

Среднегодовые темп роста цен i_p и темп инфляции h находятся на основе величины J_p следующим образом:

$$i_p = \sqrt[p]{J_p} , \quad h = 100(\sqrt[p]{J_p} - 1).$$

Если наращение производится по простой ставке в течение n лет, то реальное наращение при темпе инфляции h составит

$$C = \frac{P(1 + ni)}{J_p}, \quad (5.2)$$

где в общем случае

$$J_p = \prod_{t=1}^n (1 + h_t) \quad (5.3)$$

и при неизменном темпе прироста цен h имеем

$$J_p = (1 + h_t)^n. \quad (5.4)$$

Процентная ставка, которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию, равна

$$i = \frac{J_p - 1}{n}. \quad (5.5)$$

Один из способов компенсации обесценивания денег заключается в увеличении ставки процентов на величину, которая называется инфляционной премией. Скорректированная таким образом ставка называется брутто-ставкой, которая обозначается r . Брутто-ставка находится из равенства скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто-ставке множителю наращения по реальной ставке процента

$$\frac{1 + nr}{J_p} = 1 + ni \quad (5.6)$$

откуда находим

$$r = \frac{(1 + ni)J_p - 1}{n}. \quad (5.7)$$

5.3. Начисление по сложным процентам

Наращенная по сложным процентам сумма к концу срока ссуды с учетом падения покупательной способности денег (т.е. в неизменных

рублях) составит

$$C = \frac{P(1+i)^n}{J_p}, \quad (5.8)$$

где индекс цен определяется выражением

$$J_p = \prod_{t=1}^n (1 + h_t) \quad (5.9)$$

или

$$J_p = (1 + h)^n \quad (5.10)$$

в зависимости от темпа инфляции.

Применяются два способа компенсации потерь от снижения покупательной способности денег при начислении сложных процентов.

1. Корректировка ставки процентов, по которой производится наращение, на величину инфляционной премии. Ставка процентов, увеличенная на величину инфляционной премии, называется брутто-ставкой r . Если годовой темп инфляции равен h , то равенство соответствующих множителей наращения имеет вид

$$\frac{1+r}{1+h} = 1+i, \quad (5.11)$$

где i – реальная ставка.

Отсюда находим

$$1+r = \frac{1+h}{1+i} = 1+i+h+ih \quad (5.12)$$

откуда

$$r = i + h + ih. \quad (5.13)$$

Инфляционная премия составляет величину $h + ih$.

2. Индексация первоначальной суммы P . В этом случае сумма P корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса. Тогда получаем

$$S = PJ_p(1+i)^n, \quad (5.14)$$

$$S = P(1 + h^n)(1 + i)^n. \quad (5.15)$$

Пример 5.1. Предполагается, что темп инфляции составит 20% в год. Необходимо вычислить ставку сложных процентов, которую следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 10%. Вычислить инфляционную премию.

Решение. Брутто-ставку вычислим по формуле (5.13):

$$r = i + h + ih = 0,1 + 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,32.$$

Инфляционная премия составит: $h + ih = 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,22$.

Ответ. В договоре следует проставить ставку сложных процентов, равную 32% годовых, при этом инфляционная премия составит 22%.

Пример 5.2. Кредит в размере 500 тыс. руб. выдан на 2 года. Реальная доходность операции должна составлять 20% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 15% в год. Необходимо определить множитель наращения, учитывающий инфляцию и наращенную сумму.

Решение. Множитель наращения определяется по формуле:

$$J_p = (1 + i)^n = (1 + h)^n (1 + i)^n = (1 + 0,15)^2 (1 + 0,2)^2 = 1,9.$$

Наращенная сумма:

$$S = PJ_p (1 + i)^n = 500 \cdot 1,9 = 950 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Множитель наращения, учитывающий инфляцию составляет 1,9. Наращенная сумма – 950 тыс. руб.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. Ежемесячный темп инфляции составляет 3%. Необходимо найти темп инфляции за год.

(Ответ: 42,58%)

Задача 5.2. За первое полугодие темп инфляции составил 13%, а по итогам всего года 20,6%. Необходимо вычислить темп инфляции за второе полугодие.

(Ответ: 6,7%)

Задача 5.3. Ежеквартальный темп инфляции в течение двух лет имел некоторое постоянное значение, кроме последнего квартала. При этом индекс инфляции за 2 года составил 1,36. Если бы темп инфляции за последний квартал был в 2 раза меньше, то индекс инфляции за 2 года составил бы 1,21. Необходимо вычислить темп инфляции за каждый квартал.

(Ответ: Темп инфляции за 1 – 7 кварталы 0,84%, за последний квартал 28,3%)

Задача 5.4. Вкладчик положил деньги в банк на депозит сроком на 1 год с начислением процентов в конце срока по ставке 17% годовых. По прогнозам, темпы инфляции в течение года составят: за первый квартал 2,8%; за второй 6,5%, за третий и четвертый по 3,7%. Требуется вычислить реальную доходность вклада с учетом инфляции.

(Ответ: Реальная доходность вклада отрицательна и составляет - 0,62%.)

Задача 5.5. В условиях предыдущего примера, найти величины брутто-ставки и инфляционной премии.

(Ответ: Брутто-ставка 37,74%; инфляционная премия 20,74%.)

Как видно, брутто-ставка существенно превышает номинальную.

Задача 5.6. В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составляет 20%. Какова реальная доходность по вкладу в банк, если годовой процент по нему равен 25%?

(Ответ: 4,167%)

Задача 5.7. Рассчитать реальную годовую ставку для следующих условий: годовой темп инфляции – 20%, брутто-ставка – 25% годовых, срок – 0,5 года.

(Ответ: 5,404%)

Задача 5.8. За два года цены выросли в 4 раза. Найти среднегодовые темп роста цен и темп инфляции.

(Ответ: Среднегодовой темп роста цен равен 2, среднегодовой темп инфляции составляет 100%)

Задача 5.9. Банк начисляет проценты по вкладу по номинальной ставке 12% годовых с ежемесячной капитализацией. Среднегодовой темп инфляции 2%. Найти реальную доходность операции.

(Ответ: В условиях данной инфляции реальную доходность будет приносить ставка 8,3%.)

Задача 5.10. Какую брутто-ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 12% реальная ставка оказалась 6%?

(Ответ: 1,508 млн. руб.)

РАЗДЕЛ III. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ MS EXCEL ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

6. Решение финансовых задач в MS Excel

Современное программное обеспечение персональных ЭВМ позволяет производить финансово-экономические расчеты различной сложности.

Среди всего многообразия пользовательских программ особое внимание уделяется табличным процессорам, которые предназначены для обработки данных в виде таблиц. Они широко применяются экономистами, финансистами, кредитными работниками, так как множество задач предприятий, фирм, банков носят учетно-аналитический характер и требуют табличной компоновки данных с последующей сортировкой, группировкой, анализом, построением диаграмм и графиков.

Принцип работы с табличным процессором довольно прост. Редактируемый документ в виде таблицы выводится на экран, и пользователь в диалоговом режиме может вводить необходимые данные (текст, числа, формулы) в клетки электронной таблицы.

Одним из мощных инструментов для финансово-экономических расчетов является табличный процессор *MS Excel* со встроенными в него финансовыми функциями. Однако финансовые работники в своей работе не всегда в полной мере используют данное средство. Программа *MS Excel* в целом содержит более 300 встроенных мастер функций, дающих возможность выполнять самые разнообразные вычисления.

6.1. Специфика использования финансовых функций MS Excel

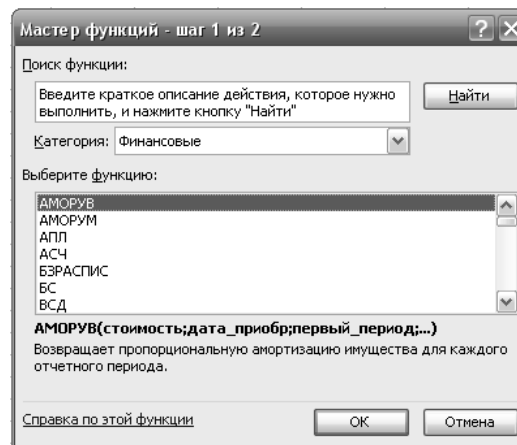
Финансовые функции *MS Excel* используются для вычисления базовых величин, необходимых при проведении более сложных финансово-экономических расчетов. Методика их изучения и использования требует соблюдения определенных правил.

1. На рабочем листе книги *MS Excel* в отдельных ячейках осуществляется подготовка значений основных аргументов функции.

2. Для осуществления расчета финансовой функции *MS Excel* курсор устанавливается в новую ячейку, где вводится формула. Если финансовая функция вызывается в продолжении ввода другой формулы, данный пункт пропускается.

3. Вызов *Мастера функции* осуществляется с помощью последовательности команд *Вставка, Функция* или нажатием одноименной кнопки на панели инструментов *Стандартная*.

4. В диалоговом окне выполняется выбор категории *Финансовые*. В списке *Функция* содержится полный перечень доступных функций выбранной категории.



Поиск функции осуществляется с помощью прокрутки путем последовательного просмотра всего предложенного списка. Для выбора функции курсор устанавливается на ее названии.

В нижней части диалогового окна приведен краткий синтаксис и справка о назначении выбираемой функции.

Кнопка *Справка* вызывает экран справки для выбранной встроенной функции, на которой установлен курсор.

Кнопка *Отмена* прекращает работу *Мастера функций*.

Кнопка *Готово (OK)* переносит в строку формулы синтаксическую конструкцию выбранной встроенной функции.

При нажатии на кнопку *Далее* осуществляется переход к работе с диалоговым окном выбранной функции.

5. Из списка функций выполняется выбор необходимой финансовой функции, после чего появляется диалоговое окно для ввода аргументов. Для каждой финансовой функции существует регламентированный по составу и формату значений перечень аргументов.

6. В поле ввода диалогового окна можно вводить как ссылки на адреса ячеек, содержащих значения аргументов, так и сами значения аргументов.

7. Если аргумент является результатом расчета другой встроенной функции *MS Excel*, то возможно организовать вычисление вложенной встроенной функции путем вызова *Мастера функции* одноименной кнопкой, расположенной перед полем ввода аргумента.

8. Возможна работа с экраном справки, поясняющей назначение и правила задания аргументов функции. Вызов справки осуществляется путем нажатия кнопки *Справка*.

9. Для отказа от работы со встроенной функцией нажимается кнопка *Отмена*.

10. Завершение ввода аргументов и запуск расчета значения встроенной функции выполняется нажатием кнопки *Готово*.

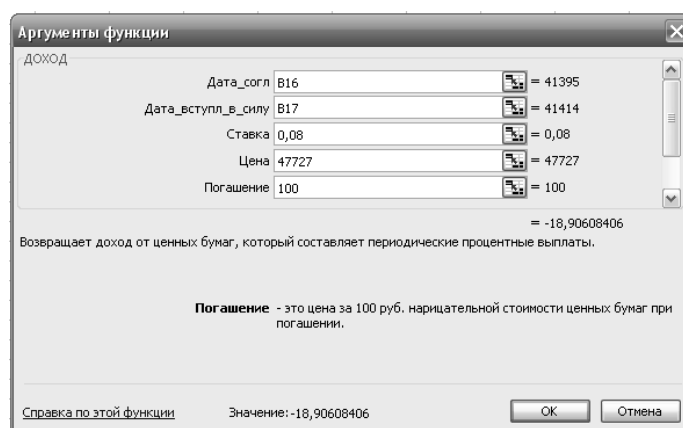
При необходимости корректировки значений аргументов выбранной функции (изменение ссылок, постоянных значений и т.п.) необходимо установить курсор в ячейку, содержащую формулу, и вызвать *Мастер функций*. При этом появляется окно для редактирования.

Принцип работы в окне редактирования аналогичен выше указанному.

Также возможно в ячейку листа *MS Excel* непосредственно ввести формулу, содержащую имя и параметры встроенных финансовых функций (без вызова *Мастера функций*). В этом случае формула начинается со знака «=». Далее следует имя функции, а в круглых скобках указываются ее аргументы в последовательности, соответствующей синтаксису функции. В качестве разделителя аргументов используется выбранный при настройке Windows разделитель, как правило это точка с запятой «;» или просто запятая «,».

Например, в ячейку B10 введена формула:

= ДОХОД(B16; B17; 0,08; 47727; 100; 2; 0).



Аргументами функции могут быть как константы, так и ссылки на адреса ячеек (например, как в данном случае).

Рассмотрим специфику задания значений аргументов финансовых функций.

1. Все аргументы, означающие расходы денежных средств (например, ежегодные платежи), представляются в виде отрицательных чисел. Аргументы, означающие поступления (например, дивиденды), представляются в виде положительных чисел.

2. Все даты, как аргументы функции, имеют числовой формат представления, например, дата 1 января 2010 года представлена числом 41275. Если значение аргумента типа *дата* берется из ячейки (например, *дата_согл* – ссылка на ячейку B16), то дата в ячейке может быть записана в обычном виде, например, как 1.01.10.

При вводе аргумента типа *дата* непосредственно в поле ввода *Мастера функции* можно воспользоваться встроенной функцией *Дата*, которая осуществляет преобразование строки символов в дату. Для этого нажимается кнопка вызова *Мастера функций*, находящаяся перед полем, и выбирается функция категории *Дата и время* – *Дата*. Далее заполняется экран ввода.

При нажатии кнопки *Готово* произойдет возврат на предыдущий экран *Мастера функций* для продолжения ввода аргументов основной финансовой

функции. При нажатии кнопки *Назад* произойдет возврат на предыдущий экран, но при этом значение аргумента не будет рассчитано. Кнопка *Отмена* позволяет полностью отказаться от использования вызванной вложенной функции.

3. Для аргументов типа *логический* возможен непосредственный ввод констант типа *Истина* или *Ложь* («1» или «0»), либо использование встроенных функций аналогичного названия категории *Логические*.

4. При непосредственном вводе формулы в ячейку необходимо следить за тем, чтобы каждый аргумент находился строго на своем месте. Если какие-то аргументы не используются, то необходимо поставить соответствующее число разделительных знаков. Если не используется последний аргумент или несколько идущих подряд последних аргументов, то соответствующие разделительные знаки можно опустить (в большинстве случаев это замечание относится к аргументам *тип* и *базис*).

6.2. Подбор параметра

Возможности электронных таблиц позволяют решать как «прямые», так и «обратные» вычислительные задачи, выполнять исследование области допустимых значений аргументов, подбирать значения аргументов под заданное значение функции. Необходимость в этом обусловлена отсутствием соответствующих «симметричных» финансовых функций.

При установке курсора в ячейку, содержащую формулу, построенную с использованием финансовых функций, и выполнении команды *Сервис, Подбор параметра* появляется диалоговое окно, в котором задается требуемое значение функции.

При нажатии кнопки *Ок* подобранное значение аргумента сохраняется в ячейке аргумента, при нажатии кнопки *Отмена* происходит восстановление значения аргумента. При неудачном завершении подбора параметра выдается соответствующее сообщение о невозможности подбора аргумента.

6.3. Анализ данных на основе использования Таблицы подстановки

Таблицы подстановки табличного процессора *MS Excel* предназначены для выбора наиболее оптимальных финансовых расчетов при различных значениях вводимых данных.

Например, оценка инвестиций при использовании разных дисконтных ставок и разных сроков погашения займа может быть реализована на основе финансовой функции *MS Excel* – *НПЗ* и *Таблицы подстановки*.

Для наглядности представления результатов финансовых расчетов целесообразно строить диаграммы, позволяющие оценить денежные потоки.

Рассмотрим некоторые финансовые функции.

6.4. Финансовые функции *MS Excel*

Функция БС

Функция **БС** предназначена для расчета будущей стоимости инвестиции на основе периодических постоянных (равных по величине сумм) платежей и постоянной процентной ставки.

Синтаксис функции **БС** (*ставка; кпер; плт; пс; тип*):

ставка – процентная ставка за период;

кпер – общее число периодов выплат или начисления процентов;

плт – это выплата, производимая в каждый период и не меняющаяся за все время срока ссуды. Включает основные платежи плюс проценты;

пс – начальное значение вклада или займа;

тип – число «0» или «1», обозначающее, когда должна производиться выплата: «0» или опущено – в конце периода, «1» – в начале периода.

Пример 6.1. Вкладчик размещает на счете 4420 руб. под 15% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов на счете в конце каждого года. Необходимо определить сумму, которая будет получена по счету через 7 лет.

Решение.

C4	fx =БС(С2;С3;;-С1)					
	A	B	C	D	E	F
1	Первоначальная сумма, ден. ед.	P=	4420,00			
2	Процентная ставка, %	i=	15,00%			
3	Срок вклада, год	n=	7			
4	Наращенная сумма, ден. ед.	S=	11757,29	←	=БС(С2;С3;;-С1)	
5						

Ответ: 11757,29 руб.

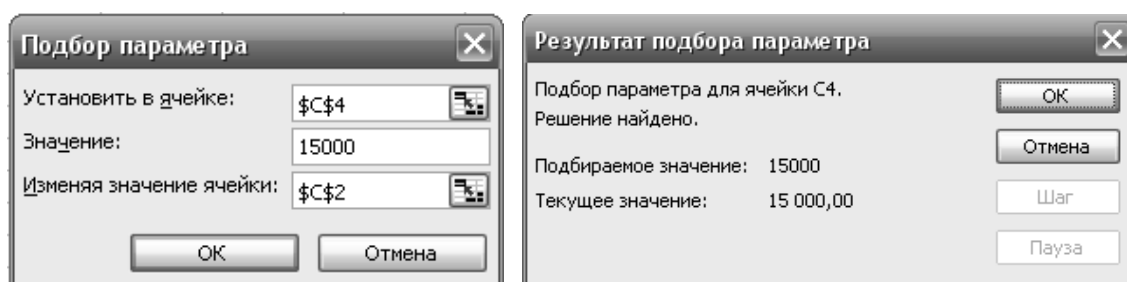
Пример 6.2. Исходя из плана начисления процентов, приведенного в предыдущей задаче, рассчитаем годовую процентную ставку, если известно, что через 7 лет вкладчик получит 15500 тыс. руб.

Решение. Для решения данной задачи воспользуемся аппаратом подбора параметра пакета *MS Excel*, вызываемого командой меню *Сервис, Подбор параметра*.

В ячейку C4 запишем формулу =БС(С2;С3;;-С1).

C4	fx =БС(С2;С3;;-С1)					
	A	B	C	D	E	
1	Первоначальная сумма (руб.):	P=	4420,00			
2	Процентная ставка (%):	i=				
3	Срок вклада (год):	n=	7,00			
4	Наращенная сумма (руб.):	S=	4 420,00	←	=БС(С2;С3;;-С1)	

Установив курсор в ячейку C2, выбираем в меню *MS Excel* команду *Сервис, Подбор параметра* и заполняем диалоговое окно.



В результате в ячейке C2 появится значение, равное искомой годовой процентной ставке.

C2		fx	19,0720568436852%			
	A	B	C	D	E	
1	Первоначальная сумма (руб.):	P=	4420,00			
2	Процентная ставка (%):	i=	19,07%			
3	Срок вклада (год):	n=	7,00			
4	Наращенная сумма (руб.):	S=	15 000,00	←	=БЗРАСПИС(C2;C3;;-C1)	

Функция БЗРАСПИС

Функция **БЗРАСПИС** предназначена для расчета будущей стоимости первоначальной основной суммы после применения ряда (плана) ставок сложных процентов. Функция **БЗРАСПИС** используется для вычисления будущей стоимости инвестиции с переменной процентной ставкой.

Синтаксис функции **БЗРАСПИС** (*первичное*; *план*):

первичное – это стоимость инвестиции на текущий момент;

план – это массив применяемых процентных ставок.

Пример 6.3. Вкладчик размещает на счете 70 800 руб. на четыре года. Капитализация процентов осуществляется ежегодно. За первые два года банк начисляет 7%, второй – 9%, третий – 11% годовых. Необходимо определить сумму, которая будет получена через четыре года.

Решение.

C6		fx	=БЗРАСПИС(C1;C2:C5)			
	A	B	C	D	E	F
1	Первоначальная сумма (руб.):	P=	70800			
2	Процентная ставка (%):	i ₁ =	7,00%			
3		i ₂ =	7,00%			
4		i ₃ =	9,00%			
5		i ₄ =	11,00%			
6	Наращенная сумма (руб.):	S=	98073	←	=БЗРАСПИС(C1;C2:C5)	

Ответ: 98073 руб.

Функция ПС

Функция **ПС** предназначена для расчета приведенной (к текущему моменту) стоимости инвестиции. Приведенная (нынешняя) стоимость представляет собой общую сумму, которая на настоящий момент равноценна ряду будущих выплат. Например, когда занимают деньги, то сумма займа является приведенной (нынешней) стоимостью для заимодавца.

Синтаксис функции **ПС(ставка ;кпер;плт;бс;тип)**:

ставка – процентная ставка за период. Например, если получена ссуда на автомобиль под 10 процентов годовых и делаются ежемесячные выплаты, то процентная ставка за месяц составит 10%/12 или 0,83%. В качестве значения аргумента *ставка* нужно ввести в формулу 10%/12 или 0,83% или 0,0083.

кпер – общее число периодов платежей по аннуитету. Например, если получена ссуда на 4 года под автомобиль и делаются ежемесячные платежи, то ссуда имеет «4·12» (или 48) периодов. В качестве значения аргумента *кпер* в формулу нужно ввести число 48.

плт – выплата, производимая в каждый период и не меняющаяся за все время выплаты ренты. Обычно выплаты включают основные платежи и платежи по процентам, но не включают других сборов или налогов. Например, ежемесячная выплата по четырехгодичному займу в 10 000 руб. под 12 процентов годовых составит 263,33 руб. В качестве значения аргумента выплата нужно ввести в формулу число -263,33.

бс – требуемое значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты. Если аргумент опущен, то он полагается равным 0 (например, будущая стоимость займа равна 0). Предположим, если требуется накопить 50000 руб. для оплаты специального проекта в течение 18 лет, то 50 000 руб. это и есть будущая стоимость. Можно сделать предположение о сохранении заданной процентной ставки и определить, сколько нужно откладывать каждый месяц.

тип – число «0» или «1», обозначающее, когда должна производиться выплата.

Пример 6.4. Инвестор открывает в банке депозит на 6 лет под 16% годовых и хотел бы в конце периода получить по депозиту 730 тыс.руб. Необходимо определить первоначальную сумму, которую следует разместить инвестору на счете.

Решение.

C1	fx = ПС(C2;C3;;-C4)					
	A	B	C	D	E	F
1	Первоначальная сумма, ден. ед.	P=	299,62	← =ПС(C2;C3;;-C4)		
2	Процентная ставка, %	i=	16,00%			
3	Срок вклада, год	n=	6			
4	Наращенная сумма, ден. ед.	S=	730,00			
5						

Ответ: 299,62 тыс.руб.

Функция ЧИСТНЗ

Функция **ЧИСТНЗ** предназначена для расчета чистой приведенной стоимости для денежных потоков, которые не обязательно являются периодическими. Чтобы вычислить чистую приведенную стоимость для ряда периодических денежных потоков, следует использовать функцию **ЧПС**.

Синтаксис функции **ЧИСТНЗ (ставка ;значения;даты)**:

ставка — это ставка дисконтирования, применяемая к денежным потокам;

значения — это ряд денежных потоков, соответствующий графику платежей приведенной в аргументе даты. Первый платеж является необязательным и соответствует выплате в начале инвестиции. Если первое значение является выплатой, оно должно быть отрицательным. Все последующие выплаты дисконтируются на основе 365-дневного года. Ряд значений должен содержать по крайней мере одно положительное и одно отрицательное значения.

даты — это расписание дат платежей, которое соответствует ряду денежных потоков. Первая дата означает начальную величину в графике платежей. Все другие даты должны быть позже этой даты, но могут идти в произвольном порядке.

Пример 6.5. Рассмотрим инвестицию размером 10 млн. руб. 1 июля 2012 года, которая принесет доходы: 2850 тыс. руб. 15 сентября 2012 года, 5620 тыс. руб. 1 ноября 2012 года, 6250 тыс. руб. 1 января 2013 года. Норма дисконтирования 9,4%. Необходимо определить чистую текущую стоимость инвестиции на 1 июля 2012 года и на 1 июля 2011 года.

Решение:

C4	fx =ЧИСТНЗ(В3;В2;F2;В1:F1)					
	A	B	C	D	E	F
1	Даты выплат и поступлений:	01.07.11	01.07.12	15.09.12	01.11.12	01.01.13
2	Суммы операций (тыс.руб.):	0,00	-10000,00	2850,00	5620,00	6250,00
3	Процентная ставка (%):	9,40%				
4	Чистая стоимость (тыс.руб.):	4222,8401	3859,05009			
5		=ЧИСТНЗ(В3;С2:F2;С1:F1)				
6						

Ответ: 4222,84 тыс.руб., 3859,05 тыс.руб.

Функция ПОЛУЧЕНО

Функция **ПОЛУЧЕНО** предназначена для расчета суммы, полученной к сроку погашения полностью обеспеченных ценных бумаг.

Синтаксис **ПОЛУЧЕНО** (дата_согл; дата_вступл_в_силу; инвестиция; скидка ; базис):

дата_согл – дата расчета за ценные бумаги (более поздняя, чем дата выпуска, когда ценные бумаги были проданы покупателю);

дата_вступл_в_силу – срок погашения ценных бумаг. Эта дата определяет момент истечения срока действия ценных бумаг;

инвестиция – это объем инвестиции в ценные бумаги;

скидка – скидка на ценную бумагу;

базис – используемый способ вычисления дня.

Пример 6.6. Вексель выдан 6.09.96 на сумму 125000 руб., оплачен – 12.09.98 с учетной ставкой равной 7%. Необходимо определить сумму к получению по векселю.

Решение.

B5	fx =ПОЛУЧЕНО(В1;В2;В4;В3)				
	A	B	C	D	E
1	Дата соглашения:	06.09.1996			
2	Дата погашения:	12.09.1998			
3	Учетная ставка:	7,00%			
4	Номинальная стоимость:	125 000,00			
5	Итоговая сумма:	145 546,28	< =ПОЛУЧЕНО(В1;В2;В4;В3)		

Ответ: 145 546,28 тыс.руб.

Функция СТАВКА

Функция **СТАВКА** предназначена для расчета процентной ставки по аннуитету за один период. **СТАВКА** вычисляется путем итерации и может давать нулевое значение или несколько значений.

Синтаксис **СТАВКА(кпер;плт;пс;бс;тип;предположение)**:

кпер – общее число периодов платежей по аннуитету;

плт – регулярный платеж (один раз в период), величина которого остается постоянной в течение всего срока аннуитета. Обычно **плт** состоит из платежа основной суммы и платежа процентов, но не включает других сборов или налогов. Если аргумент опущен, должно быть указано значение аргумента **бс**.

пс – приведенная к текущему моменту стоимость или общая сумма, которая на текущий момент равноценна ряду будущих платежей;

бс – требуемое значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты. Если аргумент **бс** опущен, то он полагается равным «0» (например, **бс** для займа равно 0);

тип – число «0» или «1», обозначающее, когда должна производиться выплата.

Пример 6.7. Предположим, что некоторой компании потребуется 100000 тыс. руб. через 2 года. Компания готова вложить 3000 тыс. руб. сразу и по 2500 тыс. руб. каждый последующий месяц. Каким должен быть процент на инвестированные средства, чтобы получить необходимую сумму в конце второго года?

Решение:

C5		fx =СТАВКА(C1;-C2;-C4;C3)					
	A	B	C	D	E	F	
1	Срок займа (мес.):	n=	24				
2	Ежемесячная сумма платежей (тыс.руб.):	R=	2500,00				
3	Сумма займа (тыс.руб.):	S=	100000,00				
4	Начальный вклад (тыс.руб.):	R ₀ =	3000,00				
5	Ежемесячная процентная ставка (%):	i=	3,61%	←	=СТАВКА(C1;-C2;-C4;C3)		
6	Годовая процентная ставка (%):		43,34%				

Годовая процентная ставка составит $3,61\% \cdot 12 = 43,34\%$.

Ответ: 43,34%.

Функция ЭФФЕКТ

Функция **ЭФФЕКТ** предназначена для расчета эффективной (фактической) годовой процентной ставки, если заданы номинальная годовая процентная ставка и количество периодов в году, за которые начисляются сложные проценты.

Синтаксис функции **ЭФФЕКТ** (*номинальная_ставка* ; *кол_пер*):

номинальная_ставка – это номинальная годовая процентная ставка;

кол_пер – количество периодов в году, за которые начисляются сложные проценты.

Пример 6.8. Необходимо вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 12,5% годовых.

Решение.

C3		fx =ЭФФЕКТ(C1;C2)				
	A	B	C	D	E	F
1	Номинальная ставка, %	j=	12,50%			
2	Количество начислений в году	n=	4			
3	Эффективная ставка, %	i ₃ =	13,10%	←	=ЭФФЕКТ(C1;C2)	
4						

Ответ: 13,1%.

Функция НОМИНАЛ

Функция **НОМИНАЛ** предназначена для расчета номинальной годовой ставки, если заданы эффективная (фактическая) ставка и число периодов в году, за которые начисляются сложные проценты.

Синтаксис функции **НОМИНАЛ**(*эффект_ставка* ; *кол_пер*):

эффект_ставка – фактическая процентная ставка;

кол_пер – количество периодов в году, за которые начисляются сложные проценты.

Пример 6.9. Необходимо определить какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 17% годовых.

Решение.

C1		fx =НОМИНАЛ(C3;C2)					
	A	B	C	D	E	F	G
1	Номинальная ставка, %	j=	16,01%	← =НОМИНАЛ(C3;C2)			
2	Количество начислений в году	n=	4				
3	Эффективная ставка, %	i _э =	17,00%				
4							

Ответ: 16,01%.

Функция ПЛТ

Функция **ПЛТ** предназначена для расчета суммы периодического платежа для аннуитета на основе постоянства сумм платежей и постоянства процентной ставки.

Синтаксис функции **ПЛТ** (*ставка; кпер; нс; бс; тип*):

ставка – процентная ставка по ссуде;

кпер – общее число выплат по ссуде;

нс – приведенная к текущему моменту стоимость, или общая сумма, которая на текущий момент равноценна ряду будущих платежей, называемая также основной суммой;

бс – требуемое значение будущей стоимости, или остатка средств после последней выплаты. Если аргумент **бс** опущен, то он полагается равным «0» (например, для займа, значение **бс** равно 0).

тип – число «0» или «1» обозначает когда должна производиться выплата.

Пример 6.10. На приобретение квартиры взят кредит на 15 лет в размере 500 000 руб. под 12% годовых. Необходимо определить ежегодную сумму погашения долга.

Решение.

F5		fx =ПЛТ(F3/100;F2;-F4)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1									
2	Срок ренты (лет)		n=	15					
3	Годовая процентная ставка (%)		i=	12					
4	Современная величина ренты (ден.ед)		S=	500000,00					
5	Величина годового платежа (ден.ед)		R=	73412,12	← =ПЛТ(F3/100;F2;-F4)				

Ответ: 73 412,12 руб.

В финансово-кредитных операциях возможны ситуации, когда величина платежа либо увеличивается, либо уменьшается с течением времени. В таких случаях потоки платежей нерегулярные.

Для получения их обобщающих характеристик требуется прямой счет, т.е. вычисление соответствующих характеристик по каждому платежу и последующему их суммированию.

Например, в том случае, если банк позволяет производить выплаты по кредиту в сумме, большей установленного аннуитета, то с помощью *MS Excel* можно составить график погашения кредита. Для составления графика погашения кредита для примера 6.9 введем в ячейку D7 первоначальную сумму кредита, в столбец A – год взноса аннуитетного платежа, в столбец B – формулу для расчета начисленных за год процентов (12% от остатка по кредиту), в столбец C – формулу для расчета суммы аннуитета (4.7), в столбец D – формулу для расчета остатка по кредиту (предыдущий остаток плюс проценты минус выплата):

	A	B	C	D	E	F
1						
2				Срок ренты (лет)	n=	15
3				Годовая процентная ставка (%)	i=	12
4				Современная величина ренты (ден.ед)	S=	500000,00
5						
6	Год	%	Возврат	Остаток		
7	0			500000,00		
8	1	=D7*\$F\$3/100	=B8/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A7)))	=D7+B8-C8		
9	2	=D8*\$F\$3/100	=B9/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A8)))	=D8+B9-C9		
10	3	=D9*\$F\$3/100	=B10/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A9)))	=D9+B10-C10		
11	4	=D10*\$F\$3/100	=B11/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A10)))	=D10+B11-C11		
12	5	=D11*\$F\$3/100	=B12/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A11)))	=D11+B12-C12		
13	6	=D12*\$F\$3/100	=B13/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A12)))	=D12+B13-C13		
14	7	=D13*\$F\$3/100	=B14/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A13)))	=D13+B14-C14		
15	8	=D14*\$F\$3/100	=B15/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A14)))	=D14+B15-C15		
16	9	=D15*\$F\$3/100	=B16/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A15)))	=D15+B16-C16		
17	10	=D16*\$F\$3/100	=B17/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A16)))	=D16+B17-C17		
18	11	=D17*\$F\$3/100	=B18/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A17)))	=D17+B18-C18		
19	12	=D18*\$F\$3/100	=B19/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A18)))	=D18+B19-C19		
20	13	=D19*\$F\$3/100	=B20/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A19)))	=D19+B20-C20		
21	14	=D20*\$F\$3/100	=B21/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A20)))	=D20+B21-C21		
22	15	=D21*\$F\$3/100	=B22/(1-(1+\$F\$3/100)^(-(\$F\$2-A21)))	=D21+B22-C22		

В результате для примера 6.9 получим следующую таблицу:

	A	B	C	D	E	F
1						
2				Срок ренты (лет)	n=	15
3				Годовая процентная ставка (%)	i=	12
4				Современная величина ренты (ден.ед)	S=	500000,00
5						
6	Год	%	Возврат	Остаток		
7	0			500000,00		
8	1	60000,00	73412,12	486587,88		
9	2	58390,55	73412,12	471566,31		
10	3	56587,96	73412,12	454742,14		
11	4	54569,06	73412,12	435899,08		
12	5	52307,89	73412,12	414794,85		
13	6	49775,38	73412,12	391158,11		
14	7	46938,97	73412,12	364684,97		
15	8	43762,20	73412,12	335035,04		
16	9	40204,21	73412,12	301827,13		
17	10	36219,26	73412,12	264634,26		
18	11	31756,11	73412,12	222978,25		
19	12	26757,39	73412,12	176323,52		
20	13	21158,82	73412,12	124070,23		
21	14	14888,43	73412,12	65546,54		
22	15	7865,58	73412,12	0,00		

В этой таблице можно увидеть все текущие параметры кредита – начисленные за любой год проценты и остаток по кредиту. В том случае, если в 10-й год возврата кредита вместо установленного аннуитетного платежа равного 73 412,12 руб. внести сумму 150 000 руб., то эту сумму необходимо указать в ячейке C17. В результате по формулам пересчитается сумма аннуитета, которую необходимо будет выплачивать в последующие годы:

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Срок ренты (лет)				n=	15
3	Годовая процентная ставка (%)				i=	12
4	Современная величина ренты (ден.ед)				S=	500000,00
5						
6	Год	%	Возврат	Остаток		
7	0			500000,00		
8	1	60000,00	73412,12	486587,88		
9	2	58390,55	73412,12	471566,31		
10	3	56587,96	73412,12	454742,14		
11	4	54569,06	73412,12	435899,08		
12	5	52307,89	73412,12	414794,85		
13	6	49775,38	73412,12	391158,11		
14	7	46938,97	73412,12	364684,97		
15	8	43762,20	73412,12	335035,04		
16	9	40204,21	73412,12	301827,13		
17	10	36219,26	150000,00	188046,38		
18	11	22565,57	52165,90	158446,05		
19	12	19013,53	52165,90	125293,68		
20	13	15035,24	52165,90	88163,03		
21	14	10579,56	52165,90	46576,69		
22	15	5589,20	52165,90	0,00		

Функция КПЕР

Функция **КПЕР** предназначена для нахождения общего количества периодов выплат для инвестиции на основе периодических постоянных выплат и постоянной процентной ставки.

Синтаксис функции **КПЕР (ставка ;плт;пс;бс;тип):**

ставка – процентная ставка за период;

плт – выплата, производимая в каждый период; это значение не может меняться в течение всего периода выплат. Обычно платеж состоит из основного платежа и платежа по процентам и не включает налогов и сборов.

пс – приведенная к текущему моменту стоимость или общая сумма, которая на текущий момент равноценна ряду будущих платежей;

бс – требуемое значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты. Если аргумент **бс** опущен, то он полагается равным «0» (например, **бзс** для займа равно 0).

тип – число «0» или «1», обозначающее, когда должна производиться выплата.

Пример 6.11. Кредит на сумму 560 000 руб. взят под 12,8% годовых. Ежемесячный платеж составляет 20 000 руб. Определить количество периодов, необходимых для возврата кредита.

Решение.

B1	=КПЕР(B2/12;B4;-B3)				
	A	B	C	D	E
1	Срок кредита	33,44	←	=КПЕР(B2/12;B4;-B3)	
2	Процентная годовая ставка:	12,80%			
3	Ежемесячный платеж:	560 000,00			
4	Сумма кредита:	20 000,00			

Ответ: 33,44 года.

Функция КПЕР

Функция **КПЕР** используется при вычислении внутренней ставки доходности для ряда потоков денежных средств, представленных их численными значениями. Денежные потоки не обязательно должны быть равными по величине, как в случае аннуитета. Однако они должны иметь место через равные промежутки времени, например ежемесячно или ежегодно. Внутренняя ставка доходности – это процентная ставка, принимаемая для инвестиции, состоящей из платежей (отрицательные величины) и доходов (положительные величины), которые осуществляются в последовательные и одинаковые по продолжительности периоды.

Синтаксис функции **ВСД(значения; предположение)**:

значения – это массив или ссылка на ячейки, содержащие числа, для которых требуется подсчитать внутреннюю ставку доходности. Значения должны содержать, по крайней мере, одно положительное и одно отрицательное значение.

ВСД использует порядок значений для интерпретации порядка денежных выплат или поступлений.

Если аргумент, который является массивом или ссылкой, содержит текст, логические значения или пустые ячейки, то такие значения игнорируются.

предположение – это величина, о которой предполагается, что она близка к результату **ВСД**.

MS Excel использует метод итераций для вычисления **ВСД**. Начиная со значения предположение, функция **ВСД** выполняет циклические вычисления, пока не получит результат с точностью 0,00001 процента. Если функция **ВСД** не может получить результат после 20 попыток, то выдается значение ошибки «#ЧИСЛО!».

В большинстве случаев нет необходимости задавать предположение для вычислений с помощью функции **ВСД**. Если предположение опущено, то оно полагается равным 0,1 (10 процентов).

Если **ВСД** возвращает значение ошибки «#ЧИСЛО!» или если результат далек от ожидаемого, можно попытаться выполнить вычисления еще раз с другим значением аргумента предположение.

Пример 6.12. Инвестиции в строительство торгового центра 240 млн. руб. Планируемая ежегодная прибыль должна составить: в первый год – 10 млн. руб., во второй год – 16 млн. руб., в третий год – 34 млн. руб., в четвертый – 56 млн. руб., в пятый – 86 мл. руб. Определить внутреннюю норму доходности проекта.

Решение.

C7	=ВСД(C1:C6)				
	A	B	C	D	E
1	Размер инвестиций:		-240,00		
2	Ежегодная прибыль:	I	10,00		
3		II	34,00		
4		III	56,00		
5		IV	74,00		
6		V	86,00		
7	Норма доходности:		0,02	=ВСД(C1:C6)	

Ответ: 2%.

Функция ОБЩДОХОД

Функция **ОБЩДОХОД** вычисляет накопленную сумму между любыми двумя периодами, поступившую в счет погашения займа.

Синтаксис функции **ОБЩДОХОД**(ставка; кол_пер; нз; нач_период; кон_период; тип:)

ставка – это процентная ставка;

кол_пер – это общее количество периодов выплат;

нз – это стоимость инвестиции на текущий момент;

нач_период – это номер первого периода, включенного в вычисления.

Периоды выплат нумеруются начиная с 1;

кон_период – это номер последнего периода, включенного в вычисления;

тип – это выбор времени платежа.

Пример 6.13. Кредит на сумму 100 000 руб. взят на 3 года под 19% годовых. Погашение производится ежемесячно. Определить, какая сумма будет выплачена в счет основного долга к концу первого года.

Решение.

B4		fx =ОБЩДОХОД(B3/12;B2*12;B1;1;12;0)				
	A	B	C	D	E	F
1	Сумма кредита:	100 000,00р.				
2	Срок кредита:	3,00				
3	Годовая процентная ставка:	19,00%				
4	Сумма в счет долга:	-27282,23	← =ОБЩДОХОД(B3/12;B2*12;B1;1;12;0)			

Ответ: 27282,23 руб.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.1. Необходимо определить наращенную сумму для вклада в размере 64 000 руб., размещенного под 17,5% годовых на один год двумя способами:

- 1) по формуле (1.4);
- 2) используя функцию БС.

Задача 6.2. Вкладчик вложил в банк 16 000 руб. на 3 года под 14% годовых с ежемесячным присоединением процентов ко вкладу. Необходимо составить график наращивания основной суммы вклада и определить, сколько составит наращенная сумма через 3 года.

Определить, сколько составит наращенная сумма с помощью формулы сложных процентов (2.4). Сравните результаты.

Задача 6.3. Клиент в течение 5 лет в начале каждого года делает вклады в банк в размере 75 тыс. руб. под 8 % годовых. Необходимо определить величину накопленной к концу 5-го года суммы.

Задача 6.4. На приобретение квартиры взят кредит на 10 лет в размере 1 000 000 руб. под 18% годовых. Необходимо определить ежегодную сумму погашения долга. Составить график погашения кредита. Вычислить общую сумму выплат за 10 лет.

Задача 6.5. Составьте график погашения кредита по данным задачи при условии, что в 3-й и 7-й годы погашения кредита были погашены суммы, в 2 раза большие суммы текущего аннуитета. Вычислить общую сумму выплат за 10 лет. Необходимо определить на сколько процентов будет отличаться общая сумма выплат по сравнению с предыдущим условием.

Задача 6.6. Необходимо рассчитать, какая сумма будет на счете, если сумма размером 5000 тыс. руб. размещена под 12% годовых на 3 года, а проценты начисляются каждые полгода.

Задача 6.7. По вкладу размером 2000 тыс. руб. начисляется 10% годовых. Необходимо рассчитать, какая сумма будет на сберегательном счете через 5 лет, если проценты начисляются ежемесячно.

Задача 6.8. На сберегательный счет вносятся платежи по 200 тыс. руб. в начале каждого месяца. Необходимо рассчитать, какая сумма окажется на счете через 4 года при ставке процента 13,5% годовых.

Задача 6.9. Необходимо рассчитать будущую стоимость облигации номиналом 420 тыс. руб., выпущенной на 5 лет, если предусмотрен следующий порядок начисления процентов: в первые два года – 13,5% годовых, в следующие два года – 15% и в последний год – 20% годовых.

Задача 6.10. Ожидается, что будущая стоимость инвестиции размером 1500 тыс. руб. к концу 4-го года составит 7000 тыс. руб. При этом за первый год доходность составит 13%, за второй – 17%, за четвертый – 23%.

Необходимо рассчитать доходность инвестиции за третий год. Используйте аппарат *Подбора параметра*.

Задача 6.11. Необходимо рассчитать текущую стоимость вклада, который через три года составит 15500 тыс. руб. при начислении 21% в год.

Задача 6.12. Необходимо определите текущую стоимость обязательных ежемесячных платежей размером 100 тыс. руб. в течение 8 лет, если процентная ставка составляет 12,6% годовых.

Задача 6.13. Необходимо определить чистую текущую стоимость проекта на 1.01.2012, затраты по которому на 20.12.2012 составят 100 млн. руб. Ожидается, что за первые полгода 2013 года проект принесет следующие доходы:

- 1) на 01.03.2013 – 18 млн. руб.;
- 2) на 15.04.2013 – 40 млн. руб.;
- 3) на 30.06.2013 – 51 млн.руб.

Норма дисконтирования составляет 12% годовых.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

день месяца	Порядковые номера дней в году											
	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баусова З. И.* Финансовые вычисления в математической экономике с применением MS Excel. Учебное пособие. / З. И. Баусова, О. В. Прокофьев – Пенза: Изд-во ПИЭРАУ, 2005.
2. *Башарин Г. П.* Начала финансовой математики.– М: ИНФРА-М, 1997.
3. *Бочаров П. П.* Финансовая математика: учебник. / П. П. Бочаров, Ю. Ф. Касимов. – М.: Гардарики, 2002.
4. *Гарай И. И.* Информационные технологии управления. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы «Решение экономических задач с использованием средств MS Excel. – Архангельск: СГМУ, 2009.
5. *Жуленев С. В.* Финансовая математика: введение в классическую теорию. – М.: Изд-во МГУ, 2001.
6. *Капитоненко В. В.* Финансовая математика и ее приложения. – М.: Приор, 2000.
7. *Ковалев В. В.* Финансовый менеджмент. Конспект лекций с задачами и тестами: учебное пособие. / В. В. Ковалев, Вит. В. Ковалев – Москва: Проспект, 2010.
8. *Кочович Е.* Финансовая математика; с задачами и решениями: Учеб.-метод, пособие. – 2-е изд., доп. и перераб.: пер. с серб. Е. Кочович. – М.: Финансы и статистика, 2004.
9. *Кошкин В. Л.* Финансовая математика (Теория и практика финансовых вычислений): учебное пособие. / В. Л. Кошкин, А. М. Губернаторов; Владим. гос. ун-т. имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012.
10. *Красс М.С.* Математика для экономистов): учебное пособие. / М.С. Красс, В.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2005.
11. *Кузнецов Б. Т.* Финансовая математика: Учебное пособие для вузов. / Б. Т. Кузнецов. – М.: Издательство «Экзамен», 2005.

12. *Лукашин Ю. П.* Финансовая математика: Учебно-методический комплекс. / М.: Изд. центр ЕАОИ, 2008.
13. *Малыхин В. И.* Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
14. *Мельников А. В.* Математические методы финансового анализа. / А. В. Мельников, Н. В. Попова, В. С. Скорнякова – М.: «Анкил», 2006.
15. *Мицкевич А. А.* Финансовая математика. – М.: ОЛМА-ПРЕСС Инвест; Институт Экономических стратегий, 2003.
16. *Ротарь В. Г.* Математическая экономика. Методические указания для проведения лабораторных занятий. / В. Г. Ротарь, А. Н. Поляков – Кафедра ОСУ АВТФ. – Томск: 2008.
17. *Фронтов В.Н.* Задачи по финансовой математики: Учеб. пособие. – М.: ВГНА, 2006.
18. *Фронтов В. Н.* Задачи по финансовой математики. Учебное пособие. – М: ВГНА, 2006.
19. *Четыркин Е. М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело, 1995.
20. *Шимон Беннинга.* Финансовое моделирование с использованием Excel. –2-е издание. – М.: Вильямс, 2007.