



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ КАЗЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МИНИСТЕРСТВА ВНУТРЕННИХ ДЕЛ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ИМЕНИ В.Я. КИКОТЯ»

Е. А. Сандрюкова, Н. М. Дубинина

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебное пособие

Москва

2019

ББК 65.050

С18

Рецензент:

*начальник кафедры информационно-компьютерных технологий
и деятельности ОВД Белгородского юридического института
МВД России имени И. Д. Путилина, доцент, кандидат технических
наук А. Н. Прокопенко;*

*преподаватель кафедры специальной связи в органах внутренних дел
МВД России Пензенского филиала ВШПКМВД России,
кандидат технических наук А. В. Рой*

Сандрюкова, Е. А.

С18 ***Экономико-математические методы и модели*** : учебное пособие / Е. А. Сандрюкова, Н. М. Дубинина – М. : Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя, 2019. – 130 с.
ISBN 978-5-9694-0742-8

Учебное пособие содержит теоретический материал, проиллюстрированный типовыми примерами, по теме «Экономико-математические методы и модели», и направлено на приобретение курсантами и слушателями факультета подготовки сотрудников для подразделений экономической безопасности и противодействия коррупции Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя теоретических знаний, практических умений и навыков использования математических методов и основ математического моделирования для оптимизации их будущей профессиональной деятельности и эффективного решения служебных задач.

ББК 65.050

ISBN 978-5-9694-0742-8

© Московский университет
МВД России имени В.Я. Кикотя, 2019
© Сандрюкова Е. А., Дубинина Н. М., 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Раздел 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	7
1.1. Постановка задачи линейного программирования.....	7
1.2. Основные методы решения задач линейного программирования.....	20
1.2.1. Графический метод решения задач линейного программирования.....	21
1.2.2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.....	27
1.2.3. Транспортная задача	42
1.3. Двойственность задач линейного программирования	60
1.3.1. Постановка взаимно двойственных задач.....	60
1.3.2. Основное неравенство для двойственных задач.....	65
1.3.3. Основная теорема двойственности	66
1.4. Компьютерное решение задач линейного программирования.....	71
Раздел 2. ТЕОРИЯ ИГР	77
2.1. Введение в теорию игр.....	77
2.2. Матричные игры.....	79
2.2.1. Равновесная ситуация	80
2.2.2. Смешанные стратегии.....	83
2.3. Методы решения матричных игр.....	87
2.3.1. Игры $(2 \times n)$	87
2.3.2. Игры $(m \times 2)$	92
2.3.3. Игры $(m \times n)$	95
2.4. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования.....	97
2.5. Игры с природой.....	100
Раздел 3. МЕТОДЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ	110
3.1. Основные понятия теории графов	110
3.2. Система сетевого планирования и управления	113
3.3. Правила построения сетевых графиков.....	115
3.4. Временные параметры сетевых графиков.....	117
3.5. Резервы времени	120
3.6. Анализ и оптимизация сетевого графика	124
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	126
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	127

ВВЕДЕНИЕ

В сложившихся реалиях рыночной экономики деятельность предприятий и организаций любого уровня одной из главных целей имеет стремление получить наибольшую прибыль при затратах, сведенных к минимуму. Для достижения этой цели в условиях высокой конкуренции руководитель вынужден постоянно и глубоко анализировать текущую ситуацию на рынке, а также внутри своего предприятия с возможностью дальнейшего прогнозирования важных изменений и выработки оптимальных стратегий развития своего производства.

Одним из инструментов принятия решений в экономической деятельности выступает раздел прикладной математики «Математическое программирование» – дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного (или оптимального) управления организационными системами (предприятия, фирмы, банки и др.). Математическое программирование занимается изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения.

Прежде чем произвести расчеты экономической задачи, ее нужно формализовать, т. е. составить математическую модель изучаемого процесса, причем результаты исследований математических моделей не вызывают сомнения лишь в том случае, если модели адекватно отображают реальные ситуации и достаточно совершенны.

При формализации задач составления оптимального плана первоначально выделяется цель, формируется целевая функция (минимум затрат, максимум прибыли и т. д.) и условия ограничений (имеющиеся ресурсы; необходимое количество питательных веществ и т. п.).

В связи с тем, что отыскание максимума или минимума целевой функции не имеет принципиальных отличий, будем говорить об оп-

тимальном (*optimum* – наилучший) или экстремальном значении искомой целевой функции.

Таким образом, условия реальных экономических задач могут быть выражены количественными параметрами и записаны в виде математических соотношений, тем самым получена математическая формулировка практической задачи – ее математическая модель.

Процесс формирования реальной математической задачи и последующего ее решения достаточно сложен. Опишем этот процесс в виде следующих этапов.

1. Изучение процесса, объекта или явления: анализ особенностей развития; факторный анализ; выделение основополагающих характеристик; выделение критерия оптимизации.

2. Описательное моделирование: на основе критерия оптимизации выявление основных связей между характеристиками процесса или явления, участвующими в составлении модели.

3. Математическое моделирование: критерий оптимизации записывается в виде функции цели, все условия ограничений – в виде системы уравнений и неравенств.

4. Поиск метода решения: на основе полученной математической модели делается вывод либо о применении известного метода решения, либо о поиске нового метода.

5. Решение задачи на ЭВМ: в связи с тем, что задачи, содержащие целевую функцию и условия-ограничения, описывающие поведение реальных объектов, как правило, имеют большое число переменных и большое число зависимостей между ними, целесообразно осуществлять поиск оптимального решения с помощью ЭВМ. Исходные данные для решения задачи вводят в память ЭВМ вместе с программой,

которая обрабатывает введенную числовую информацию, находит решение и выдает его пользователю в заданной им форме.

6. Анализ полученного решения и его интерпретация: формальный анализ предусматривает проверку полученного оптимального решения с точки зрения математических расчетов и правильности исходных данных; содержательный анализ проверяет соответствие решения реальному объекту или явлению, модель которого применялась для изучения. В случае неудовлетворительного результата вносятся изменения, и процесс повторяется сначала.

7. Анализ решения на устойчивость: проводится исследование поведения полученного поведения при незначительных изменениях исходных данных, которое позволяет сделать вывод о допустимости применения данной модели в дальнейших расчетах.

Раздел 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Многие экономические задачи, связанные с вопросами наилучшего распределения ограниченных ресурсов, эффективно решаются с помощью методов линейного программирования. Диапазон приложений методов линейного программирования в экономике достаточно широк и продолжает расти по мере новых исследований.

Термин «линейное программирование» впервые появился в 1951 г. в работах американских ученых Дж. Данцига и Т. Кумпанса, а первые работы по линейному программированию были выполнены в конце 1930-х годов в Ленинградском государственном университете Л. В. Канторовичем. Употребление слова «программирование» связано с тем, что при решении задач находят такой набор переменных, который является программой (планом) при выполнении поставленной задачи.

Методы решения такого типа задач позволяют найти оптимальные варианты управления процессом, т. е. выбрать лучшее решение из всех возможных. Такие задачи относятся к задачам оптимизации.

1.1. Постановка задачи линейного программирования

Рассмотрим ряд наиболее характерных задач, решаемых методом линейного программирования.

1. Задача об использовании сырья

Допустим, что для изготовления продукции двух видов – $П_1$ и $П_2$ требуется четыре вида сырья – S_1, S_2, S_3, S_4 . Запасы сырья каждого вида ограничены и составляют соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 условных

единиц. Количество единиц сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно и задается табл.1.

Таблица 1

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		Π_1	Π_2
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Доход		c_1	c_2

Здесь a_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2$) означает количество единиц сырья вида S_i , необходимое для изготовления продукции вида Π_j . В последней строке таблицы указан доход, получаемый предприятием от реализации одной единицы каждого вида продукции. Необходимо составить такой план выпуска продукции видов Π_1 и Π_2 , при котором доход предприятия от реализации всей продукции оказался бы максимальным.

Вышеописанная задача является общей для целого класса аналогичных задач, в которых разница состоит в количестве выпускаемой продукции, используемого сырья и стоимости единицы товара.

Рассмотрим пример составления модели подобной задачи на основе представленных в табл. 2 исходных данных:

Таблица 2

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		Π_1	Π_2
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
Доход		7	5

Введем переменные задачи: x_1 – число единиц продукции вида Π_1 и x_2 – число единиц продукции вида Π_2 . Тогда для изготовления такого количества продукции потребуется $(2x_1 + 3x_2)$ единиц сырья S_1 . Так как всего имеется 19 единиц сырья S_1 , то должно выполняться неравенство:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 19.$$

Аналогично для остальных видов сырья получим следующие ограничения:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 13; \\ 3x_2 \leq 15; \\ 3x_1 \leq 18. \end{cases}$$

При этих условиях доход Z предприятия составит

$$Z = 7x_1 + 5x_2.$$

Таким образом, математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$Z = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19; \\ 2x_1 + x_2 \leq 13; \\ 3x_2 \leq 15; \\ 3x_1 \leq 18. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. Задача об использовании мощностей оборудования

Пусть предприятию требуется за время T выпустить N_1 единиц продукции вида Π_1 и N_2 вида Π_2 . Каждый из видов продукции может производиться двумя машинами A и B с различными мощностями, заданными табл. 3.1. Здесь a_1 есть количество единиц продукции вида Π_1 , произведенной машиной A в единицу времени. Аналогичный смысл имеют и остальные данные из этой таблицы.

Таблица 3.1

	Π_1	Π_2
A	a_1	a_2
B	b_1	b_2

В табл. 3.2 указаны расходы на изготовление каждого вида продукции. Здесь $\acute{a}_1$ выражает цену единицы рабочего времени машины A при изготовлении продукции вида Π_1 . Смысл остальных величин аналогичен.

Таблица 3.2

	Π_1	Π_2
A	$\acute{a}_1$	$\acute{a}_2$
B	β_1	β_2

Требуется составить оптимальный (наиболее рациональный) план работы машин, а именно: найти, сколько времени каждая из машин A и B должна быть занята изготовлением каждого из видов продукции Π_1 и Π_2 так, чтобы стоимость всей продукции предприятия оказалась минимальной, но в то же время заданный план был бы выполнен.

Составим математическую модель поставленной задачи. Введем переменные (табл. 3.3). Здесь, x_1 означает время работы машины A по изготовлению продукции Π_1 . Аналогичный смысл имеют величины x_2, x_3, x_4 .

Таблица 3.3

	Π_1	Π_2
A	x_1	x_2
B	x_3	x_4

По условию задачи машины A и B работают одновременно, значит, выполнение плана по времени можно записать системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq T; \\ x_3 + x_4 \leq T. \end{cases}$$

Левые части этих неравенств означают общие времена работы соответственно машин A и B . Неравенства (а не точные равенства) возникают потому, что при обеспечении плана по номенклатуре машины не обязаны работать все отведенное им по плану время T . (Здесь могут оказаться возможности для перевыполнения плана по времени).

Продукцию Π_1 машина A изготавливает за x_1 единиц времени, за единицу же времени она производит a_1 единиц продукции этого вида. Значит, всего машина A изготовит $a_1 x_1$ единиц продукции Π_1 . Рассуждая аналогично, получим, что машина B изготовит $b_1 x_3$ единиц продукции вида Π_1 . Тогда для выполнения плана по номенклатуре должно выполняться условие

$$a_1 x_1 + b_1 x_3 = N_1.$$

Точно так же для обеспечения плана выпуска продукции вида Π_2 должно выполняться равенство

$$a_2 x_2 + b_2 x_4 = N_2.$$

Из цели, поставленной перед задачей, следует, что общая стоимость всей продукции составит:

$$F = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 x_3 + \beta_2 x_4.$$

В итоге мы приходим к следующей математической задаче:

$$F = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 x_3 + \beta_2 x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq T; \\ x_3 + x_4 \leq T; \\ a_1 x_1 + b_1 x_3 = N_1; \\ a_2 x_2 + b_2 x_4 = N_2. \end{cases} \quad (1)$$

$$x_j \geq 0, j = \overrightarrow{1, 4}.$$

Отметим один из важных вариантов поставленной задачи. Потребует, чтобы машины A и B работали все время T , отведенное им по плану. Тогда неравенства

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq T; \\ x_3 + x_4 \leq T \end{cases}$$

превратятся в равенства. В то же время два последних равенства из системы (1) превратятся, вообще говоря, в неравенства

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_3 \geq N_1; \\ a_2x_2 + b_2x_4 \geq N_2, \end{cases}$$

так как, работая все время T , машины могут не только выполнить, но и перевыполнить план по номенклатуре. При этом требование минимизации стоимости не будет противоречить выполнению или, быть может, перевыполнению плана по номенклатуре.

3. Транспортная задача

Допустим, что на двух пунктах отправления A_1 и A_2 сосредоточено a_1 и a_2 единиц некоторого груза, который требуется доставить в три пункта назначения B_1, B_2, B_3 в количестве соответственно b_1, b_2, b_3 единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j (равную c_{ij}) считаем заданной. Все данные полезно свести в табл. 4.

Таблица 4

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
Потребность в грузе	b_1	b_2	b_3	$\sum a_i = \sum b_j$

Требуется составить такой план перевозок, при котором их общая стоимость была бы наименьшей.

Введем переменные: x_{ij} – количество единиц груза, предназначенного к перевозке из пункта A_i в пункт B_j . Тогда количество груза, который планируется перевезти из пунктов A_1 и A_2 в пункт B_1 , составит

$$x_{11} + x_{21}.$$

Но потребность в грузе в пункте B_1 равна b_1 , значит должно выполняться равенство

$$x_{11} + x_{21} = b_1.$$

Аналогично

$$x_{12} + x_{22} = b_2;$$

$$x_{13} + x_{23} = b_3.$$

С другой стороны, общее количество груза, отправленного из пункта A_1 , должно совпадать с запасом a_1 груза, имеющимся в этом пункте, т. е.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1.$$

Аналогично

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2.$$

Сведем все величины и соотношения в табл. 5 (матрицу перевозок). Тогда легко проверить, что сумма всех x_{ij} , расположенных в i -й строке, равна запасу a_i в пункте назначения A_i . Сумма же всех x_{ij} из столбца j равна потребности b_j пункта назначения B_j .

Таблица 5

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Потребность в грузе	b_1	b_2	b_3	

По условию задачи общая стоимость F всех перевозок равна

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}.$$

Таким образом, математическая модель транспортной задачи (по критерию стоимости перевозок) такова:

$$F = \sum c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} = b_2; \\ x_{13} + x_{23} = b_3; \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2. \end{cases} \quad (3)$$

$$x_j \geq 0, j = \overrightarrow{1, 3}.$$

Отметим, что при решении транспортной задачи следует учитывать важное условие, вытекающее из самого условия задачи:

$$\sum a_i = \sum b_j.$$

4. Задача о структуре питания

Для поддержания жизнедеятельности человека и любого другого живого существа требуется потребление им в сутки некоторого количества питательных веществ. Количество этих питательных веществ в различных видах g_i ($i = 1, 2, \dots$) продуктов различно. Для иллюстрации задачи ограничимся двумя видами продуктов и зададим табл. 6, в которой, например, число a_{11} указывает на запасы вещества B_1 в продукте вида g_1 . Смысл остальных чисел a_{ij} аналогичен.

Таблица 6

Питательные вещества	Норма	Виды продуктов	
		g_1	g_2
B_1	b_1	a_{11}	a_{12}
B_2	b_2	a_{21}	a_{22}
B_3	b_3	a_{31}	a_{32}
B_4	b_4	a_{41}	a_{42}
B_5	b_5	a_{51}	a_{52}
Стоимость		c_1	c_2

Пусть стоимость некоторой единицы продукта вида g_i составляет c_i . Требуется составить план питания так, чтобы его стоимость была наименьшей, но организм получил бы не менее минимальной суточной нормы питательных веществ всех видов B_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Пусть x_1 и x_2 — количество видов продуктов g_1 и g_2 , употребляемых человеком в пищу (подразумевается, что все покупаемые продукты потребляются). Тогда общие запасы вещества B_1 в двух видах продуктов составляют

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

и не должны быть меньше минимальной нормы b_1 . Это требование приводит к неравенству

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1.$$

Знак неравенства (а не точного равенства) возникает потому, что при выбранной системе питания в приобретенной пище жиров может оказаться и больше минимальной нормы. Аналогичные рассуждения приводят еще к четырем неравенствам:

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \geq b_4; \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 \geq b_5. \end{cases}$$

При этом общая стоимость F питания равна

$$F = c_1x_1 + c_2x_2.$$

Итак, мы пришли к следующей математической задаче. Задана система

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i, \quad (i=1..5) \quad (4)$$

пяти линейных неравенств с двумя неизвестными x_1, x_2 и целевая функция относительно этих же неизвестных

$$F = c_1x_1 + c_2x_2. \quad (5)$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы (4) найти такое, которое придает функции (5) F наименьшее значение.

5. Задача об использовании оборудования

Пусть производству поставлен план: требуется изготовить 50 единиц продукции вида $П_1$, 30 единиц вида $П_2$ и 45 – вида $П_3$. Каждый из видов продукции изготавливается на двух станках – A_1 и A_2 . Табл. 7 указывает производительность станков: числа означают время, необходимое для изготовления на данном станке одной единицы продукции определенного вида.

Таблица 7

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	4	10	10
A_2	6	8	20

Требуется составить план использования оборудования так, чтобы на изготовление продукции трех видов ушло минимальное количество времени.

Пусть x_{ij} – количество продукции вида $П_j$ ($j = 1, 2, 3$), которое будут производить на станке A_i ($i = 1, 2$), с тем чтобы задание по номенклатуре оказалось выполненным.

Удобства ради сведем искомые величины x_{ij} в табл. 8.

Таблица 8

Виды продукции Машины	П ₁	П ₂	П ₃
A ₁	x_{11}	x_{12}	x_{13}
A ₂	x_{21}	x_{22}	x_{23}
План по номенклатуре	50	30	45

Условие выполнения плана по номенклатуре требует удовлетворения равенств

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 50; \\ x_{12} + x_{22} = 30; \\ x_{13} + x_{23} = 45. \end{cases}$$

Для изготовления x_{11} единиц продукции $П_1$ на машине A_1 требуется (согласно заданной производительности) $4x_{11}$ единиц времени; для производства же x_{12} и x_{13} единиц продукции $П_2$ и $П_3$ требуется соответственно $10x_{12}$ и $10x_{13}$ единиц времени. Следовательно, общее время работы машины A_1 составит

$$t_1 = 4x_{11} + 10x_{12} + 10x_{13}.$$

Подобно этому общее время работы машины A_2 составит

$$t_2 = 6x_{21} + 8x_{22} + 20x_{23}.$$

Поскольку машины A_1 и A_2 работают одновременно, время T реализации плана равно наибольшей из величин t_1 и t_2 , т. е.

$$T = \max(t_1, t_2).$$

Итак, мы пришли к следующей математической задаче.

1) условие неотрицательности переменных x_i (параметров управления), которое следует из смысла поставленной задачи (неравенства 11);

2) целевая функция (критерий эффективности). Линейную функцию $f(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_0$ называют целевой функцией, так как в поставленной задаче по ней определяют, в каком смысле понимать слова «выгоднее всего». При выборе решения задачи предпочтение отдается тому решению, которое обращает показатель эффективности (функцию цели) в максимум или же в минимум;

3) система ограничений. Систему (8) называют системой ограничений, потому что она составляется исходя из условий задач, в которых всегда рассматриваются ограниченные количества имеющихся ресурсов. Если система ограничений составлена в канонической форме, т. е. в виде системы линейных уравнений с n неизвестными, и выполнено условие неотрицательности переменных (9), то всегда должно быть $m < n$. Система ограничений исходя из условий задачи может быть записана в виде системы неравенств. В этом случае не обязательно выполнение неравенства $m < n$. От системы ограничений, заданной в виде неравенств, при необходимости всегда можно перейти к канонической системе ограничений, добавив или отняв дополнительные неотрицательные переменные. Эти переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях задачи отражаются расход и наличие производственных ресурсов, то дополнительные переменные в оптимальном плане будут характеризовать объем неиспользованных ресурсов.

Всякий набор значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих системе ограничений, называют *допустимым планом*.

Тот допустимый план, при котором целевая функция принимает максимальное (или минимальное) значение, называют *оптимальным планом (стратегией, управлением)*.

Задача линейного программирования может не иметь решений в следующих случаях:

- 1) если система ограничений несовместна;
- 2) если система ограничений совместна, но только в области отрицательных чисел, т. е. не выполняется условие неотрицательности переменных x_i ;
- 3) система ограничений совместна, есть допустимые решения, но среди них нет оптимального решения.

Замечания

1. Задачи линейного программирования не могут быть решены методами оптимизации, применяемыми в математическом анализе, так как первая производная линейной функции равна постоянной величине и, следовательно, не содержит неизвестного параметра для последующего его определения.

2. Линейное программирование принципиально отличается и от алгебраических методов определения искомых величин с помощью уравнений. К основным отличиям следует отнести тот факт, что для алгебраического метода нахождения неизвестных необходимо иметь столько уравнений, сколько имеется неизвестных. Это условие не является обязательным для линейного программирования.

1.2. Основные методы решения задач линейного программирования

Чтобы иметь представление о методах решения задач линейного программирования, охарактеризуем обзорно некоторые из них.

Графический метод. Этот метод является наиболее простым и наглядным, но применяется лишь для решения ограниченного класса задач.

Симплексный метод. Он является наиболее общим и позволяет решать любые задачи линейного программирования путем «направленного перебора решений»: сначала находят любое возможное решение, которое называют опорным планом; затем путем последовательного улучшения от цикла к циклу переходят к оптимальному плану.

Транспортный или распределительный метод. Этот метод является упрощенной формой симплексного метода для последовательного улучшения плана перевозок, который первоначально использовался для решения так называемых транспортных задач, а в настоящее время – для решения и других типов задач.

1.2.1. Графический метод решения задач линейного программирования

В основе графического метода лежит геометрическая интерпретация задачи линейного программирования и применяется в основном для решения задач в случае, если:

- 1) система ограничений состоит из неравенств с двумя переменными – x_1 и x_2 ;
- 2) система ограничений состоит из m уравнений с n переменными и $n - m \leq 2$.

И в том и в другом случае система ограничений определяет на плоскости выпуклый многоугольник, лежащий в первой четверти координатной плоскости. Он определяет область допустимых решений.

Оптимальное решение задачи, если оно существует, достигается в одной из угловых точек многоугольника решений системы ограничений.

Графический метод решения задачи линейного программирования с двумя переменными

Покажем на примере, как графическим методом отыскивается максимум или минимум заданной функции при заданной системе ограничений.

Пример. Найти наибольшее значение функции $z = 2x_1 + 3x_2 - 3$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5; \\ x_1 - x_2 \geq -4; \\ x_1 + x_2 \leq 8. \end{cases} \quad (10)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Решение. Найдем область допустимых решений. Для этого построим прямые

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 5; (1); \\ x_1 - x_2 = -4; (2); \\ x_1 + x_2 = 8; (3); \\ x_1 = 0; (4); \\ x_2 = 0. (5) \end{cases} \quad (11)$$

и отметим штриховкой «допустимые» полуплоскости – решения каждого из неравенств системы (11).

Часть первого координатного угла, принадлежащая одновременно всем полуплоскостям (многоугольник $OABCD$), и есть *область допустимых решений – ОДР* (рис. 1).

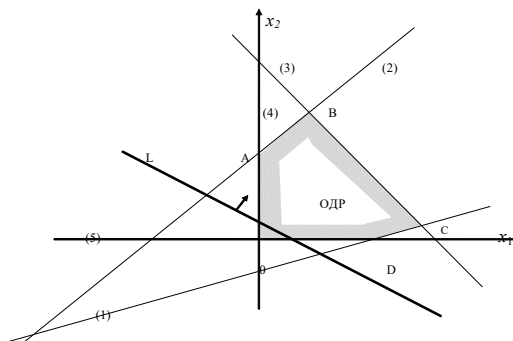


Рис. 1

Среди этих решений требуется найти оптимальное, т. е. среди всех точек выпуклого многоугольника $OABCD$ надо найти такую точку, координаты которой обращают в максимум линейную функцию $z = 2x_1 + 3x_2 - 3$.

Для этого дадим геометрическую интерпретацию целевой функции $z = 2x_1 + 3x_2 - 3$. Придадим z определенное числовое значение, например, возьмем $z = 0$, получим линейное уравнение с двумя неизвестными $2x_1 + 3x_2 - 3 = 0$, график которого есть прямая линия на плоскости. Построим ее. Если придавать z какие-то значения $c_1, c_2, c_3, \dots$, то прямая L будет перемещаться параллельно самой себе; при перемещении в одну сторону z будет возрастать, в другую – убывать.

Определим, в каком направлении функция $z = 2x_1 + 3x_2 - 3$ возрастает. Для этого возьмем какую-нибудь точку области допустимых значений, например точку с координатами $(0; 3)$, и подсчитаем значение z в этой точке $z = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 3 = 6$. Значение функции z возросло по сравнению с первоначальным $z = 0$.

Отметим стрелками направление, в котором z возрастает. Если теперь будем мысленно передвигать прямую L параллельно самой себе в направлении стрелок, то очевидно, что функция z достигнет своего оптимального (максимального) значения в точке B – «точке выхода» из области допустимых решений.

Определим координаты точки B . Точка B является точкой пересечения прямых (2) и (3), следовательно, ее координаты находят из системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -4; \\ x_1 + x_2 = 8. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x_1 = 2$; $x_2 = 6$.

Теперь вычислим значение целевой функции $z = 2x_1 + 3x_2 - 3$ при этих значениях неизвестных $z = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 - 3 = 19$.

Ответ. Наибольшее значение функции $z = 2x_1 + 3x_2 - 3$ равно 19 и оно достигается при: $x_1 = 2$; $x_2 = 6$.

Замечание. Может случиться, что оптимальных решений будет бесконечное множество. Такое случается тогда, если экстремум целевой функции достигается не в одной вершине многоугольника, а на отрезке. Такое происходит, если в многоугольнике допустимых решений есть стороны, параллельные прямой L . Тогда максимум можно считать в любом конце отрезка AB (рис. 2).

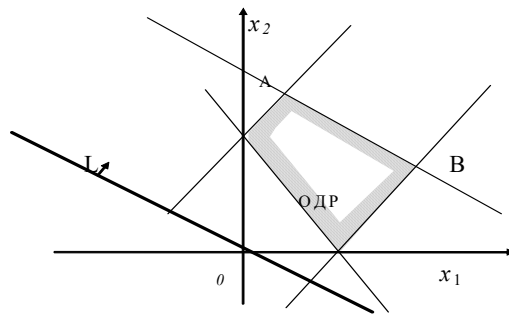


Рис. 2

На рис. 3 показан случай, когда целевая функция не имеет максимума.

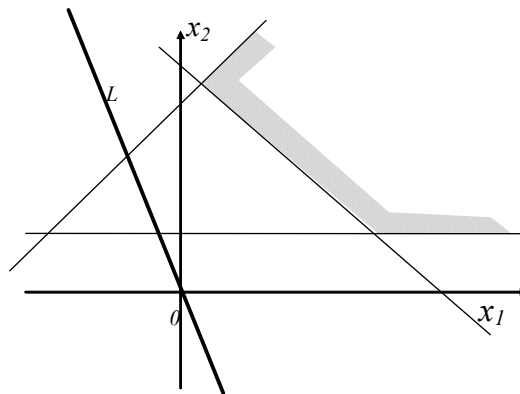


Рис. 3

Графический метод решения задач с системой ограничений в виде системы m уравнений с n неизвестными при условии $(n - m \leq 2)$.

Этот случай рассмотрим на военной задаче.

Пример. Четыре типа оружия ($m = 4$): ракет, снарядов и т. п. необходимо распределить по шести носителям ($n = 6$): кораблям, самолетам и т. п. При этом известны запасы оружия I, II, III, IV типов, известно, в каком количестве оружие каждого типа может быть распределено на шести носителях $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ и, кроме того, известны вероятности поражения каждого носителя (табл. 9):

Таблица 9

Оружие \ Носители	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	Запасы
I	4			1			16
II		2			1		10
III			1	2	6		76
IV	4	3				1	24
Вероятности поражения носителей	0,4	0,5	0,2	0,8	0,6	0,3	

Определить, какое количество носителей каждого типа следует иметь для того, чтобы средние потери в них были минимальны.

Замечание. В условии задачи даны вероятности поражения носителей. Вероятность – это число P , характеризующее объективную возможность поражения носителей при заданных условиях ($0 \leq p \leq 1$).

Решение.

1. Введем параметры управления: пусть носителей H_1 , нужно x_1 единиц, носителей H_2 – x_2 , носителей H_3 – x_3 , носителей H_4 – x_4 , носителей H_5 – x_5 и носителей H_6 – x_6 ед.

2. Составим математическую модель задачи:

$$\text{а) система ограничений: } \begin{cases} 4x_1 + x_4 = 16; \\ 2x_2 + x_5 = 10; \\ x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 76; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_6 = 24; \\ x_i \geq 0. \quad (i=1,2,3,4,5,6). \end{cases}$$

б) целевая функция z будет характеризовать средние ожидаемые потери и запишется так:

$$z = 0,4x_1 + 0,5x_2 + 0,2x_3 + 0,8x_4 + 0,6x_5 + 0,3x_6.$$

Требуется составить такой план распределения оружия по носителям, при котором эта функция достигает минимума.

3. Решим задачу графическим методом.

Это возможно, так как выполняется условие $n - m = 2$. Действительно, в системе ограничений число неизвестных 6, число уравнений 4, следовательно $(6 - 4 = 2)$ условие выполнено.

Перейдем от условий-равенств к условиям-неравенствам. Для этого переменные x_3, x_4, x_5, x_6 выразим через x_1, x_2 . Помня о том, что все переменные должны быть неотрицательны, запишем это условие в виде ограничений-неравенств.

$$\begin{cases} x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; & (1), (2) \\ x_3 = 8x_1 + 12x_2 - 16 \geq 0; & (3) \\ x_4 = 16 - 4x_1 \geq 0; & (4) \\ x_5 = 10 - 2x_2 \geq 0; & (5) \\ x_6 = 24 - 4x_1 - 3x_2 \geq 0. & (6) \end{cases}$$

Теперь будем решать задачу с системой ограничений, состоящей из неравенств с двумя переменными. При этом целевую функцию z тоже выразим через переменные x_1 и x_2 :

$$z = 0,4x_1 + 0,5x_2 + 0,2(8x_1 + 12x_2 - 16) - 0,8(16 - 4x_1) + 0,6(10 - 2x_2) + 0,3(24 - 4x_1 - 3x_2) = -2,4x_1 + 0,8x_2 + 22,8.$$

Итак, $z = -2,4x_1 + 0,8x_2 + 22,8$.

Далее поступаем так, как и в предыдущих задачах: по системе ограничений строим ОДР. Строим вектор $\vec{n} = \{-2,4; 0,8\}$ и прямую $-2,4x_1 + 0,8x_2 = 0$. Мысленно перемещаем прямую L в направлении, противоположном вектору $\vec{n}$ (в этом направлении функция z уменьшается), находим вершину многоугольника, в которой функция достигает минимума. Это точка A (рис. 4).

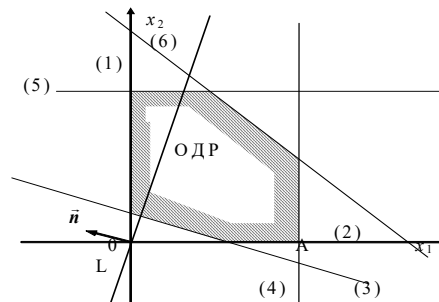


Рис. 4

Координаты точки $A: x_1 = 4; x_2 = 0$. При этом $z_{\min} = 13,2$. Подставив значения $x_1 = 4; x_2 = 0$ в выражения для x_3, x_4, x_5, x_6 , находим их:

$$x_3 = 8 \cdot 4 + 12 \cdot 0 - 16 = 16; \quad x_4 = 16 - 4 \cdot 4 = 0;$$

$$x_5 = 10 - 0 = 10; \quad x_6 = 24 - 4 \cdot 4 - 3 \cdot 0 = 8.$$

Ответ: $x_1 = 4; x_2 = 0; x_3 = 16; x_4 = 0; x_5 = 10; x_6 = 8$, т. е. носителей первого типа H_1 нужно взять 4 ед., третьего типа $H_3 - 16$, пятого $H_5 - 10$, шестого $H_6 - 8$ ед. Носителей типа H_2 и H_4 не брать. При таком распределении имеющегося ресурса оружия по носителям общие потери будут минимальны: $z = 13,2$.

1.2.2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Геометрический метод решения основной задачи линейного программирования возможен в случае двух и даже трех переменных. В

случае большего числа переменных геометрический метод возможен лишь при условии $n - m \leq 2$, где n – число неизвестных задачи, заданной в каноническом виде: m – число уравнений системы ограничений. В остальных случаях универсальным методом, с помощью которого могут решаться любые задачи линейного программирования, является симплекс-метод.

Выше указывалось, что если система ограничений задачи линейного программирования непротиворечива, то область допустимых решений образует в пространстве выпуклый многогранник. При этом оптимальное решение (если оно существует) обязательно достигается в некоторой вершине многогранника или на его отрезке. Поэтому, чтобы найти оптимальное решение (или решения) задачи линейного программирования, достаточно методом перебора проверить все угловые точки многоугольника на оптимальность.

Симплексный метод является универсальным методом решения задач линейного программирования и выражен в упорядоченном переборе вершин области допустимых решений. В его основе лежит алгоритм симплексного преобразования системы, обеспечивающий переход не к любому, а к лучшему решению.

Выделим основные этапы решения задачи линейного программирования с помощью симплексного метода:

- 1) нахождение некоторого опорного плана;
- 2) проверка полученного опорного плана на оптимальность;
- 3) в случае неоптимальности опорного плана – переход к новому опорному плану, уменьшающему (или увеличивающему) значение целевой функции.

Теорема (о конечности симплекс-метода). Если на каждом шаге симплекс-метода получается невырожденный опорный план, то через конечное число шагов будет получен оптимальный план.

Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим симплекс-метод на конкретном примере.

Пример.

Найти максимум функции $z = 7x_1 + 5x_2$, если задана система ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19; \\ 2x_1 + x_2 \leq 13; \\ 3x_2 \leq 15; \\ 3x_1 \leq 18. \end{cases}$$

Решение.

Прежде всего, перейдем от системы неравенств к системе уравнений, добавив к каждому из них соответственно: x_3 , x_4 , x_5 , x_6 — балансовые переменные. Получим систему из четырех уравнений с шестью неизвестными.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13; \\ 3x_2 + x_5 = 15; \\ 3x_1 + x_6 = 18. \end{cases}$$

1-й шаг.

Найдем какой-либо допустимый (опорный) план, соответствующий одной из вершин многогранника. Но так как в каждой из вершин многогранника две переменные равны нулю, то можно их принять за свободные, а остальные за базисные. При этом пользуются правилом: «если какая-нибудь переменная входит в систему ограничений только в одно из уравнений, имея тот же знак, что и свободный член правой части, то эту переменную можно принять за основную (базисную)».

В нашем примере этому правилу соответствуют: x_3, x_4, x_5, x_6 . Следовательно, первый опорный план будет принят, если взять x_3, x_4, x_5, x_6 — за базисные переменные, а x_1 и x_2 — за свободные переменные.

Тогда имеем:

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2; \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2; \\ x_5 = 15 - 3x_2; \\ x_6 = 18 - 3x_1. \end{cases} \quad (12)$$

По условию $z = 7x_1 + 5x_2$. Приняв $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, получаем первый опорный план: $(0; 0; 19; 13; 15; 18)$. При этом плане $z = 0$.

Это решение не отвечает требованиям задачи, т. е. не будет оптимальным.

2-й шаг.

Теперь попытаемся увеличить z . Заметим, что в выражении $z = 7x_1 + 5x_2$ на увеличение z влияет как увеличение x_1 , так и увеличение x_2 , так как оба они имеют положительный знак. Пусть, например, будем увеличивать x_1 . Но увеличение x_1 не может быть беспредельным, его надо брать таким, чтобы x_3, x_4, x_5, x_6 не были отрицательными.

Из системы (12) найдем, каким может быть x_1 из каждого уравнения при условии, что $x_2 = 0$, и выберем из них минимальное (при таком значении x_1 будет выполняться условие неотрицательности x_3, x_4, x_5, x_6).

$$\text{Итак, } x_1 = \min \left\{ \frac{19}{2}; \frac{13}{2}; \frac{18}{3} \right\} = 6.$$

Это значение $x_1 = 6$ относится к четвертому уравнению. Следовательно, при $x_1 = 6$ получим $x_6 = 0$. Отсюда следует, что x_1 переходит в базисные переменные, а x_6 — в свободные.

Итак, x_1, x_3, x_4, x_5 – базисные переменные; x_2, x_6 – свободные.

Выразим через x_2, x_6 , все остальные переменные и целевую функцию.

$$\begin{cases} x_1 = 6 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_3 = 19 - 2(6 - \frac{1}{3}x_6) - 3x_2 \\ x_4 = 18 - 2(6 - \frac{1}{3}x_6) - x_2 \\ x_5 = 15 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_3 = 7 + \frac{2}{3}x_6 - 3x_2 \\ x_4 = 1 + \frac{2}{3}x_6 - x_2 \\ x_5 = 15 - 3x_2 \end{cases} \quad (13)$$

$$z = 7(6 - \frac{1}{3}x_6) + x_6 \Rightarrow z = 42 - \frac{7}{3}x_6 + 5x_2.$$

Полагая $x_2 = 0, x_6 = 0$, получим второй опорный план: (6; 0; 7; 1; 15; 0) и $z = 42$.

Этот план опять не будет оптимальным, так как увеличить функцию цели $z = 42 - \frac{7}{3}x_6 + 5x_2$ можно еще за счет x_2 (содержится в этом выражении со знаком плюс). Поэтому будем искать новый опорный план.

3-й шаг.

Из системы (13) найдем $\min x_2$, по-прежнему полагая $x_6 = 0$.

$$x_2 = \min \left\{ \frac{7}{3}; 1; 5 \right\} = 1.$$

Такое $x_2 = 1$ входит в третье уравнение.

Следовательно, при $x_2 = 1$ переменная x_4 равна нулю.

Итак, теперь x_1, x_2, x_3, x_5 базисные переменные; x_4, x_6 – свободные.

Выразим через x_4, x_6 все остальные переменные и целевую функцию.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_6 - x_4 \\ x_1 = 6 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_3 = 7 + \frac{2}{3}x_6 - 3(1 + \frac{2}{3}x_6 - x_4) \\ x_5 = 15 - 3(1 + \frac{2}{3}x_6 - x_4) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_6 - x_4 \\ x_1 = 6 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_3 = 4 - \frac{4}{3}x_6 + 3x_4 \\ x_5 = 12 - 2x_6 + 3x_4 \end{array} \right. \quad (14)$$

$$z = 42 - \frac{7}{3}x_6 + 5(1 + \frac{2}{3}x_6 - x_4) \Rightarrow z = 47 + x_6 - 5x_4.$$

Полагая $x_4 = 0$ и $x_6 = 0$, получим третий опорный план: $(6; 1; 4; 0; 12; 0)$ и $z = 47$.

И опять этот план не оптимальный. Увеличить $z = 47 + x_6 - 5x_4$ можно за счет x_6 (входит в z с положительным знаком).

4-й шаг.

Из системы (14) найдем

$$x_6 = \min \left\{ \frac{6}{1/3}; \frac{4}{4/3}; \frac{12}{2} \right\} = \{ 18; 3; 6 \} = 3.$$

Это $x_6 = 3$ соответствует третьему уравнению. Следовательно, при $x_6 = 3$ получим $x_3 = 0$.

Теперь x_1, x_2, x_5, x_6 – базисные переменные; x_3, x_4 – свободные.

Выразим через x_3, x_4 все остальные переменные и целевую функцию.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_6 = 3 + \frac{9}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_3 \\ x_1 = 6 - \frac{1}{3}(3 + \frac{9}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_3) \\ x_2 = 1 - \frac{2}{3}(3 + \frac{9}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_3) - x_4 \\ x_5 = 12 - 2(3 + \frac{9}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_3) + 5x_4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_6 = 3 + \frac{9}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_3 \\ x_1 = 5 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = 6 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \end{array} \right.$$

$$z = 47 + (3 + \frac{9}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_3) - 5x_4 = 50 - \frac{3}{4}x_3 - \frac{11}{4}x_4.$$

Четвертый опорный план: $(5; 3; 0; 0; 6; 3)$ и $z = 50$.

Этот план и будет оптимальным, так как в целевую функцию $z = 50 - \frac{3}{4}x_3 - \frac{11}{4}x_4$ больше не входят переменные с положительным знаком.

Ответ. Оптимальное решение задачи: (5; 3; 0; 0; 6; 3), при котором $z = 50$.

Решение задачи линейного программирования М-методом

Пример.

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -6; \\ x_1 - 2x_2 \geq -8; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

Заметим, прежде всего, что задачу отыскания минимума функции $z = x_1 + x_2$ можно свести к задаче отыскания максимума функции $-z = z^* = -x_1 - x_2$, что мы и сделаем.

Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -6; \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = -8, \end{cases}$$

$$z^* = -x_1 - x_2.$$

1-й шаг.

Найдем первый опорный план. У нас два уравнения и четыре неизвестных. Следовательно, два из четырех неизвестных будут базисные, два – свободные. Переменную x_3 можно взять за базисную (основную), так как она в уравнения входит один раз и ее знак (минус) совпадает со знаком свободного члена. Переменная x_4 тоже входит в уравнения один раз, но взять ее за основную мы не можем, так как ее

знак (минус) не совпадает со знаком свободного члена (+8) (т. е. здесь нарушается условие неотрицательности переменных). Поэтому во второе уравнение введем искусственную переменную y . В целевую функцию тоже введем искусственную переменную y с некоторым коэффициентом M , который может быть очень большим. В ходе решения системы мы от этой искусственной переменной избавимся.

Итак,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -6; \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + y = 8. \end{cases} \quad (15)$$

$$z^* = -x_1 - x_2 - My.$$

Теперь у нас два уравнения и пять неизвестных.

1-е условие: y, x_3 – базисные переменные; x_1, x_2, x_4 – свободные.

$$\begin{cases} x_3 = 6 + x_1 - x_2; \\ y = 8 - x_1 - 2x_2 + x_4. \end{cases} \quad (16)$$

$$z^* = -x_1 - x_2 - M(8 - x_1 - 2x_2 + x_4);$$

$$z^* = -x_1 - x_2 - 8M + Mx_1 + 2Mx_2 - Mx_4;$$

$$z^* = -8M + (M - 1)x_1 + (2M - 1)x_2 - Mx_4.$$

Первый опорный план: $(0; 0; 6; 0; 8)$ и $z^* = -8M$.

2-й шаг.

Улучшим план. Найдем $x_2 = \min \left\{ \frac{6}{1}; \frac{8}{2} \right\} = 4$ из системы (16). Следова-

тельно, во втором уравнении, если $x_2 = 4$, то $y = 0$. Вот мы и освободились от искусственной переменной y , что нам и было нужно.

2 условие: x_2, x_3 – базисные переменные; x_1, x_4, y – свободные.

Составим новую систему:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = 6 + x_1 - 4 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 4 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = 2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

$$z^* = -x_1 - x_2 = -x_1 - 4 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 = -4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4.$$

Второй опорный план: $(0; 4; 2; 0$ и $y = 0)$.

$z_{\max} = -4$, тогда $z_{\min} = 4$.

Ответ. Оптимальное решение задачи $(0; 4; 2; 0$ и $y = 0)$, при котором $z_{\min} = 4$.

Применение симплекс-метода дает решение задачи линейного программирования за конечное число шагов, если все получающиеся опорные планы оказываются невырожденными. При этом условии значение целевой функции на каждом шаге оптимизируется (уменьшается или увеличивается), если же план вырожденный, то значение целевой функции при переходе к новому плану не изменится. План при этом останется вырожденным. При получении последовательности вырожденных планов, для которых значение целевой функции не изменяется, возникает опасность «зацикливания» — через некоторое количество шагов можно прийти к базису, который уже рассматривался.

Возможность возникновения подобных ситуаций необходимо предусмотреть. Методы, предупреждающие появление вырожденного плана, основаны на том, что небольшими изменениями условий задачи ее приводят к невырожденному случаю.

Например, для этого иногда достаточно немного изменить компоненты свободных членов. Это приведет и к некоторым изменениям переменных x , что и предотвратит вырожденность.

Решение задач линейного программирования с использованием симплекс-таблиц

Процесс решения задачи линейного программирования симплекс-методом можно представить в виде последовательности вычисляемых таблиц. Каждому шагу соответствует своя таблица. Рассмотрим метод симплекс-таблиц на примере задачи из предыдущего раздела.

Пример.

Найти максимум функции $z = 7x_1 + 5x_2$, если задана система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19; \\ 2x_1 + x_2 \leq 13; \\ 3x_2 \leq 15; \\ 3x_1 \leq 18; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Как и в симплексном методе, запишем эту задачу в виде системы уравнений, добавив к каждому из неравенств соответственно: x_3, x_4, x_5, x_6 . Получим систему из четырех уравнений с шестью неизвестными.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13; \\ 3x_2 + x_5 = 15; \\ 3x_1 + x_6 = 18 \end{cases}$$

Мы знаем, что x_3, x_4, x_5, x_6 являются базисными переменными, а x_1, x_2 — свободными. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2; \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2; \\ x_5 = 15 - 3x_2; \\ x_6 = 18 - 3x_1 \end{cases}$$

$$Z = 7x_1 + 5x_2.$$

Далее запишем эту задачу в следующем виде:

$$\begin{cases} x_3 + 2x_1 + 3x_2 = 19; \\ x_4 + 2x_1 + x_2 = 13; \\ x_5 + 3x_2 = 15; \\ x_6 + 3x_1 = 18. \end{cases}$$

$$Z - 7x_1 - 5x_2 = 0$$

И на основании данной записи заполним первую симплекс-таблицу (табл. 10).

Таблица 10

Базисные переменные (БП)	Свободные члены (СЧ)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	19	2	3	1	0	0	0
x_4	13	2	1	0	1	0	0
x_5	15	0	3	0	0	1	0
x_6	18	3	0	0	0	0	1
Z	0	-7	-5	0	0	0	0

В этой табл. 10 столбец БП содержит список базисных переменных и функцию Z . Столбец СЧ содержит свободные члены, т. е. правые части системы уравнений и функции Z . Остальные коэффициенты являются коэффициентами перед переменными в соответствующем базисной переменной уравнении. Так, например, первое уравнение системы $x_3 + 2x_1 + 3x_2 = 19$ порождает первую строку табл. 10 (в таблице она закрашена) и т. д.

Полученная таблица соответствует значению первого опорного плана. Действительно, положив значения свободных переменных равными нулю, из уравнений мы увидим, что значения базисных переменных равны: $x_3 = 19$; $x_4 = 13$; $x_5 = 15$; $x_6 = 18$ и $Z = 0$. Эти значения выделены жирным шрифтом во втором столбце табл. 10 напротив соответствующих переменных. Таким образом, имеем первый опорный план: $(0; 0; 19; 13; 15; 18)$ и $Z = 0$. Данный план является допустимым, так как все переменные имеют значения больше либо равные нулю.

Чтобы определить, является ли значение целевой функции максимальным, ответим на вопрос: нельзя ли значение функции увеличить? Для этого выясним, имеются ли положительные коэффициенты в выражении $Z = 7x_1 + 5x_2$ при неизвестных x_1 и x_2 или отрицательные в выражении $Z - 7x_1 - 5x_2 = 0$, т. е. являются ли эти коэффициенты отрицательными в табл. 10. Увеличение значений этих переменных приведет к увеличению значения функции. Уменьшение значений переменных невозможно, так как в исходной точке их значения равны 0 и уменьшение приведет к отрицательным значениям переменных, что недопустимо.

Если отрицательных коэффициентов в таблице нет, то базисное решение, отвечающее данному базису, является оптимальным. В данном случае в последней строке имеются отрицательные числа: -7 и -5 . Выберем наибольшее из них по абсолютной величине. Отметим столбец, в котором оно находится, вертикальной стрелкой (табл. 11).

Таблица 11

БП	СЧ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	19	2	3	1	0	0	0
x_4	13	2	1	0	1	0	0
x_5	15	0	3	0	0	1	0
x_6	18	3	0	0	0	0	1
Z	0	-7	-5	0	0	0	0
							

Если все числа в этом столбце отрицательные, то задача решения не имеет.

Если в столбце, отмеченном стрелкой, имеются положительные числа, то надо сделать следующий шаг. В данном случае положительными являются числа 2, 2 и 3 (они выделены в табл. 11 жирным шрифтом и затемнены). Находим отношения соответствующих свободных членов к данным

числам (эти отношения вычислены и показаны справа от табл. 12 в соответствующих строках), затем выбираем из них наименьшее. В данном случае это число 6. Отмечаем горизонтальную строку, в которой находится число 6, горизонтальной стрелкой слева табл. 12. Элемент таблицы, стоящий на пересечении отмеченных столбца и строки, называется разрешающим (он выделен жирным шрифтом и затемнением).

Таблица 12

	БП	СЧ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
	x_3	19	2	3	1	0	0	0		$19/2 = 9.5$	
	x_4	13	2	1	0	1	0	0		$13/2 = 6.5$	
	x_5	15	0	3	0	0	1	0			
	x_6	18	3	0	0	0	0	1		$18/3 = 6$	
	Z	0	-7	-5	0	0	0	0			

Далее начинается перестройка таблицы. Эта перестройка связана со сменой базисной переменной, а именно: x_1 становится базисной переменной, а x_6 – свободной. Для этой цели, прежде всего, умножаем выделенную строку на такое число, чтобы на месте разрешающего элемента появилась единица, т. е. на $\frac{1}{3}$. Полученные результаты записываем в новой таблице в той же строке (табл. 13).

Затем к каждой из оставшихся строк таблицы, включая последнюю строку, прибавляем вновь полученную строку, умноженную на такие числа, чтобы в клетках отмеченного столбца появились нули. Полученные результаты вписывают в новую таблицу. Например, каждый элемент 5-й строки

x_1	6	1	0	0	0	0	0	$1/3$
-------	---	---	---	---	---	---	---	-------

умножаем на (-2) и прибавляем к 3-й строке.

x_4	13	2	1	0	1	0	0	0
-------	----	---	---	---	---	---	---	---

В результате получаем новую 3-ю строку.

x_4	1	0	1	0	1	0	$-2/3$
-------	---	---	---	---	---	---	--------

Если строка в отмеченном столбце уже содержит 0, как, например, 4-я строка,

x_5	15	0	3	0	0	1	0
-------	----	---	---	---	---	---	---

то над ней преобразования не выполняются (нет необходимости) и она остается без изменений.

В результате получили новую симплекс-таблицу (табл. 13).

Таблица 13

БП	СЧ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_3	7	0	3	1	0	0	$-2/3$		-2
x_4	1	0	1	0	1	0	$-2/3$		-2
x_5	15	0	3	0	0	1	0		
x_1	6	1	0	0	0	0	$1/3$		$1/3$
Z	42	0	-5	0	0	0	$7/3$		7

К табл. 13 применяется тот же метод анализа. Ее анализируют на наличие отрицательных чисел в последней строке и т. д. В нашем случае требуется еще два преобразования таблицы (табл. 14).

Таблица 14

БП	СЧ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_3	7	0	3	1	0	0	$-2/3$	$7/3$	
x_4	1	0	1	0	1	0	$-2/3$	1	
x_5	15	0	3	0	0	1	0	$15/3 = 5$	
x_1	6	1	0	0	0	0	$1/3$		
Z	42	0	-5	0	0	0	$7/3$		
									

В данном случае в последней строке одно отрицательное число: -5 . Отмечаем соответствующий столбец. Для положительных чисел столбца вычисляем отношение свободных членов к этим числам. Эти отношения справа таблицы 5: $7/3$, 1 и 5. Минимальное из них (-1). Отмечаем строку x_4 . Разрешающий элемент 1. С помощью линейных преобразований обну-

ляем разрешающий столбец и получим очередной цикл задачи в виде табл.

15. Далее повторяем те же действия.

Таблица 15

БП	СЧ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_3	4	0	0	1	-3	0	4/3	3	
x_2	1	0	1	0	1	0	-2/3		
x_5	12	0	0	0	-3	1	2	6	
x_1	6	1	0	0	0	0	1/3	18	
Z	47	0	0	0	5	0	-1		
									

В табл. 15 в последней строке отрицательное значение (-1). В результате аналогичных преобразований получим табл. 16.

Таблица 16

БП	СЧ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_6	3	0	0	3/4	-9/4	0	1		3/4
x_2	3	0	1	1/2	-1/2	0	0		2/3
x_5	5	0	0	-3/2	3/2	1	0		-2
x_1	5	1	0	-1/4	3/4	0	0		-1/3
Z	50	0	0	3/4	11/4	0	0		1

В табл. 16 в последней строке нет отрицательных чисел. Найдено оптимальное решение (значения второго столбца табл. 17).

Таблица 17

БП	СЧ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	3	0	0	3/4	-9/4	0	1
x_2	3	0	1	1/2	-1/2	0	0
x_5	5	0	0	-3/2	3/2	1	0
x_1	5	1	0	-1/4	3/4	0	0
Z	50	0	0	3/4	11/4	0	0

Ответ.

Значение целевой функции равно 50, а координаты точки, в которой достигается оптимум, равны (5; 3; 0; 0; 5; 3). Значения базисных

переменных отмечены в таблице жирным шрифтом, а значения свободных переменных равны нулю.

1.2.3. Транспортная задача

Познакомимся еще с одним частным типом задач линейного программирования, которые в силу некоторых особенностей своей структуры допускают решение более простыми методами. В частности, к ним относится транспортная задача, или задача о перевозках. Транспортная задача, относясь к классу линейных оптимизационных задач, обладает всеми их качествами, но в то же время имеет определенные особенности, позволяющие применять специфические методы решения, с которыми мы и познакомимся.

Постановка задачи.

На базах $B_1, B_2, \dots, B_m$ сосредоточены определенные однородные ресурсы в количествах $b_1, b_2, \dots, b_m$ соответственно. Указанные ресурсы должны быть доставлены потребителю на объекты $P_1, P_2, \dots, P_n$ в количествах $a_1, a_2, \dots, a_n$ соответственно. Известны затраты C_{ij} на доставку единицы груза (ресурсов) с любой базы B_i на любой объект P_j . Требуется составить такой план доставки ресурсов с баз на объекты который, удовлетворяет все запросы на доставку, и общая сумма всех затрат была бы наименьшей.

Критерием эффективности поставленной задачи будут общие затраты (расход топлива, моторесурса, пробег, время и т. п.) на перевозки.

Для того чтобы транспортная задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы сумма всех заявок была равна сумме всех запасов, т. е.

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j.$$

В этом случае модель называют *закрытой*. Если это условие не выполняется, то модель называется *открытой*.

В закрытой модели весь имеющийся в наличии груз развозится полностью, причем все заказы на поставку полностью удовлетворены (правильный баланс).

Задачу с неправильным балансом (открытая модель) $\sum_{i=1}^n a_i \neq \sum_{j=1}^m b_j$ сводят к транспортной задаче с правильным балансом следующим образом:

1. Если сумма заявок меньше суммы запасов $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{j=1}^m b_j$ (все заявки могут быть удовлетворены, но не все запасы израсходованы), то вводят фиктивный пункт потребления Π_ϕ , условно приписав ему заявку a_ϕ , равную избытку запаса над заявками, тогда получают закрытую модель, т. е. $\sum_{i=1}^n a_i + a_\phi = \sum_{j=1}^m b_j$. Затраты на перевозку единицы груза в фиктивный пункт назначения берут равными нулю $C_{i\phi} = 0$ (ведь фактически в пункт Π_ϕ ничего перевозиться не будет).

2. Если сумма запасов меньше суммы заявок $\sum_{i=1}^n a_i > \sum_{j=1}^m b_j$ (запасов не хватает на удовлетворение всех заявок), то можно так или иначе урезать заявки, опираясь на практическую целесообразность, получив тем самым задачу с правильным балансом, либо ввести фиктивный пункт отправления B_ϕ , условно приписав ему недостающий запас. В случае второго варианта распределение заявок осуществляется в первую очередь для действительных поставщиков и потребителей, а в последнюю – для фиктивных. В решении задачи фиктивный результат отбрасывается. *Постановка задачи.*

задается условиями – равенствами (17) и (18), содержащими $(m + n)$ линейных уравнений с $(m \times n)$ неизвестными, и минимизируемой линейной функцией Z .

Поскольку транспортная задача относится к классу оптимизационных линейных задач, то, безусловно, ее можно решить с помощью универсального симплексного метода, но по сравнению с общей задачей линейного программирования транспортная модель имеет некоторые особенности, позволяющие решать ее более просто:

- в системе ограничений применяется одинаковая единица измерения для всех величин (перевозится однородный груз);
- коэффициенты при всех переменных в условиях (17) и (18) равны единице;
- система ограничений представляет собой систему, состоящую из $(m + n)$ уравнений с $(m \times n)$ переменными.

Заметим, что среди этих $(m + n)$ уравнений одно уравнение лишнее и его можно отбросить. Это происходит потому, что рассматриваемая модель задачи закрытая, и, если, например, известно наличие груза на всех базах и потребности всех получателей, кроме одного, то мы его можем легко вычислить (т. е. не составлять соответствующего уравнения). Следовательно, в системе остается $(m + n - 1)$ уравнение.

Чтобы составить какой-либо план перевозок, нужно решить систему $(m + n - 1)$ уравнений с $(m \times n)$ неизвестными. Эта система имеет бесчисленное множество решений, но оптимальный план ищется только среди ее базисных решений.

Среди $(m \times n)$ неизвестных выделяются $(m + n - 1)$ базисных неизвестных, остальные неизвестные – свободные, они равны нулю.

План называют допустимым, если он удовлетворяет условиям системы ограничений (балансовым условиям).

Допустимый план называют опорным (или невырожденным), если в нем отлична от нуля $(m + n - 1)$ перевозка. Если план включает в себя меньше чем $(m + n - 1)$ положительных переменных, то он называется вырожденным.

Решение транспортной задачи в общем случае сводится к преобразованию так называемой таблицы перевозок.

В таблице перевозок записываются:

- 1) пункты отправления (базы) и запасы, имеющиеся на этих базах;
- 2) пункты потребления (объекты) и заявки, поданные этими пунктами;
- 3) затраты на перевозку единицы груза с каждой базы, каждому потребителю C_{ij} .

Затраты C_{ij} записываются в левом верхнем углу клетки таблицы, а перевозки X_{ij} – в остальной части клетки.

Транспортная таблица имеет следующий вид (табл. 18):

Таблица 18

Потребители Базы		P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_n
		a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_n
B_1	b_1	C_{11}/X_{11}	C_{12}/X_{12}	C_{13}/X_{13}	$\dots$	C_{1n}/X_{1n}
B_2	b_2	C_{21}/X_{21}	C_{22}/X_{22}	C_{23}/X_{23}	$\dots$	C_{2n}/X_{2n}
B_3	b_3	C_{31}/X_{31}	C_{32}/X_{32}	C_{33}/X_{33}	$\dots$	C_{3n}/X_{3n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
B_m	b_m	C_{m1}/X_{m1}	C_{m2}/X_{m2}	C_{m3}/X_{m3}	$\dots$	C_{mn}/X_{mn}

Клетки, в которых записаны ненулевые перевозки, будем называть базисными, а остальные – свободными. Нулевые перевозки обычно в таблицу не записывают.

Таким образом, в таблице перевозок, представляющей опорный план, будет $(m + n - 1)$ базисных клеток. Кроме того, сумма перевозок в каждой строке таблицы должна быть равна запасу на данной базе, а сумма перевозок в каждом столбце – заявке данного потребителя.

В дальнейшем все действия по отысканию решения транспортной задачи сводятся к преобразованию транспортной таблицы. При описании этих преобразований удобно пользоваться нумерацией клеток: например, клетка (i, j) – клетка, стоящая в i -й строке, j -м столбце.

Решение транспортной задачи можно разбить на следующие этапы:

I. Записать условие задачи в виде таблицы.

II. Составить первый исходный опорный план.

III. Проверить полученный план на оптимальность методом потенциалов.

IV. Если план оптимальный, подсчитать значение целевой функции Z . Если план не оптимальный, то надо улучшить его и вновь проверить на оптимальность.

Существует несколько методов построения первого опорного плана. Наиболее употребляемые из них – это метод северо-западного угла и метод наименьшей стоимости.

1. Метод северо-западного угла (диагональный метод).

При этом методе максимально допустимое количество груза помещается в верхнюю левую (северо-западную) клетку таблицы; далее заполняется соседняя клетка (в строке или столбце в зависимости от того, где имеются еще не использованные возможности перевозок);

таким же образом (вправо и вниз) производится дальнейшее заполнение клеток до распределения всего количества груза.

Замечание. Если ни в ту, ни в другую из соседних клеток ничего поставить нельзя, то в любой из них подставляется так называемый «базисный нуль», далее заполнение идет, как описано выше. Таким образом, сохраняется условие допустимости плана (необходимое количество базисных клеток $(m + n - 1)$). План получается вырожденным, но это не мешает обычному порядку расчета. Клетка с нулевой поставкой в процессе вычисления считается базисной.

2. Метод наименьшей стоимости.

При этом методе построение первого опорного плана начинают с клетки с наименьшей стоимостью (в случае, если таких клеток несколько, заполняется любая из них), затем заполняют клетку со следующей по величине стоимостью (затратами) и т. д., пока не распределят все ресурсы.

Алгоритм оценки оптимальности плана методом потенциалов.

1. Построение первого опорного плана.

2. Проверка плана на допустимость: если число базисных клеток в опорном плане меньше, чем $(m + n - 1)$, то не хватит количества уравнений для определения потенциалов. В этом случае в одну из свободных клеток с наименьшей стоимостью таблицы добавляется базисный нуль так, чтобы общее число базисных клеток стало равным $(m + n - 1)$ (например, в клетку одновременно вычеркиваемых строки и столбца таблицы при составлении нового плана). При этом важно, чтобы клетка с базисным нулем не образовывала замкнутого прямоугольного контура с другими клетками таблицы.

3. Определить значение целевой функции.

Проверка условия оптимальности. Определяем потенциалы U_i, V_j . Для каждой базисной клетки, таблицы должно выполняться условие $U_i + V_j = C_{ij} (*)$. Получим систему $(m+n-1)$ уравнений с $(m+n)$ неизвестными. Поскольку число переменных больше числа уравнений, то система является неопределенной и имеет бесконечное число решений. Поэтому первое из неизвестных потенциалов задают произвольно, например, 0. Остальные потенциалы рассчитывают по формулам (*). План $X^* = (x_{ij}^*)$ транспортной задачи будет оптимальным, если существует система $(m+n)$ чисел U_i, V_j , удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} U_i + V_j = C_{ij}, \text{ для } x_{ij}^* > 0; \\ U_i + V_j \leq C_{ij}, \text{ для } x_{ij}^* = 0. \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Особенности решения транспортной задачи рассмотрим на конкретных примерах.

Пример.

На трех базах снабжения горючим B_1, B_2, B_3 имеется некоторый однородный груз в количествах 25; 55 и 75 ед. соответственно. Этот груз надо отправить четырем заказчикам (потребителям) P_1, P_2, P_3, P_4 в количествах 40; 20; 80 и 10 ед. соответственно. Затраты (стоимости) перевозки единицы груза с базы B_1 заказчикам P_1, P_2, P_3, P_4 составляют соответственно 12; 6; 10 и 5 денежных единиц, с базы B_2 — 4; 3; 2 и 4 денежных единицы, с базы B_3 — 10; 6; 6 и 4 денежных единицы (стоимость перевозки можно оценить, например, стоимостью расходуемого при перевозке топлива). Составить такой план доставки

груза с баз заказчикам, при котором общая сумма затрат была бы наименьшей.

Решение.

I. На основании исходных данных составим транспортную табл. 19:

Таблица 19

Потребители Базы		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
		40	20	80	10
B_1	25	12	6	10	5
B_2	55	4	3	2	4
B_3	70	10	6	6	4

Таблица состоит из $m=3$ строк (количество баз) и $n=4$ столбцов (количество потребителей).

Модель задачи закрытая, так как

$$\sum_{i=1}^4 a_i = 40 + 20 + 80 + 10 = 150;$$

$$\sum_{j=1}^3 b_j = 25 + 55 + 75 = 150;$$

$$\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j.$$

II. Составим первый опорный план.

Построим опорный план задачи методом северо-западного угла.

На базе B_1 имеется 25 ед. груза. Выделим их потребителю Π_1 (запишем в клетку (1; 1) – первая строка, первый столбец – число 25).

Недостающие $(40 - 25 = 15)$ ед. груза потребителю Π_1 выделим с базы B_2 (запишем в клетку (2; 1) число 15).

На базе B_2 осталось $(55 - 15 = 40)$ ед. груза; выделим 20 ед. груза потребителю Π_2 и оставшиеся 20 ед. потребителю Π_3 . Недостающие $(80 - 20 = 60)$ ед. груза выделим Π_3 с базы B_3 . На базе B_3 осталось

($70 - 60 = 10$) ед. груза; выделим их потребителю $П_4$ (принцип распределения: сначала распределяем все, что имеется на данной базе, и лишь затем переходим к следующей).

Составили первый план (табл. 20).

Таблица 20

Получатели База		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
		40	20	80	10
B_1	25	12 25	6	10	5
B_2	55	4 15	3 20	2 20	4
B_3	70	10	6	6 60	4 10

Проверим, является ли этот план допустимым (все заявки должны быть удовлетворены, все запасы исчерпаны). Для этого подсчитаем суммы поставок, стоящих в занятых клетках по строкам и по столбцам.

Суммы поставок по строкам должны быть равны 25; 55; 70, по столбцам – 40; 20; 80; 10. Эти равенства выполняются, значит, баланс не нарушен – план допустимый.

Проверим, является ли полученный план опорным (должно быть $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ заполненных клеток).

У нас шесть заполненных клеток. План опорный (невыврожденный).

Этому плану соответствуют затраты:

$Z = 12 \cdot 25 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 20 + 6 \cdot 60 + 4 \cdot 40 = 860$ денежных единиц.

Замечание. Проверку плана на его допустимость и невырожденность следует проводить для каждого вновь составленного плана.

III. Проверим план на оптимальность, т. е. будет ли при этом плане общая сумма денежных затрат на перевозку минимальной или ее можно еще уменьшить путем изменения плана перевозок.

Для исследования полученного плана на оптимальность в теории линейного программирования есть методы, позволяющие автоматически выделять из свободных клеток наиболее «выгодные» (если таких клеток нет, то план оптимальный). Этот метод носит название «метод потенциалов».

Суть метода потенциалов.

К транспортной таблице добавляют строку и столбец, в которых записывают числа (потенциалы) по строкам U_i и по столбцам V_j . Эти числа подбирают так, чтобы для базисных клеток выполнялось равенство $U_i + V_j + C_{ij} = 0$ (т. е. обращают в нули стоимости в базисных клетках).

Затем пересчитывают стоимости перевозок в свободных клетках по формуле $C'_{ij} = U_i + V_j + C_{ij}$, где C'_{ij} — новая стоимость перевозки в пустой клетке (i, j) . В результате пересчета могут появиться как клетки с положительными стоимостями ($C'_{ij} > 0$), так и клетки с отрицательными стоимостями ($C'_{ij} < 0$). Клетки с положительными стоимостями «невыгодны», так как ведут к увеличению затрат на перевозки. Клетки с отрицательными стоимостями «выгодны», так как они уменьшают стоимость перевозок.

Если после пересчета стоимостей в таблице есть клетка с отрицательной стоимостью, то построенный план не оптимальный, и его можно улучшить за счет переброски груза в эту клетку. Если таких клеток несколько, то наиболее «выгодной» клеткой будет клетка с наибольшей по абсолютной величине отрицательной стоимостью.

Проверим на оптимальность полученный план в нашей задаче. Для этого построим табл. 21 с системой потенциалов.

Таблица 21

Получатели База		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	U_i
		40	20	80	10	
B_1	25	12 25	6	10	5	-12
B_2	55	4 15	3 20	2 20	4	-4
B_3	70	10	6	6 60	4 10	-8
V_j		0	1	2	4	

Для базисной клетки (1; 1) (первая строка, первый столбец) возьмем произвольно $V_1 = 0$. Для базисной клетки должно выполняться равенство $U_1 + V_1 + C_{11} = 0$, следовательно, $U_1 + 0 + 12 = 0$, отсюда $U_1 = -12$.

Для базисной клетки (2; 1) (вторая строка, первый столбец) имеем $V_1 = 0$, тогда $U_2 + 0 + 4 = 0$, отсюда $U_2 = -4$.

Для базисной клеткой (2; 2) имеем $U_2 = -4$, тогда $-4 + V_2 + 2 = 0$, получим $V_2 = 1$.

Для базисной клетки (2; 3) имеем $U_2 = -4$, тогда $-4 + V_3 + 2 = 0$, получим $V_3 = 2$.

Для базисной клетки (3; 3) $V_3 = 2$, тогда $U_3 + 2 + 6 = 0$, отсюда $U_3 = -8$ и для клетки (3, 4) имеем $-8 + V_4 + 4 = 0$, получим $V_4 = 4$.

Сделаем пересчет стоимостей перевозок для свободных клеток и построим новую табл. 22.

Новая стоимость для свободной клетки вычисляется по формуле

$$C'_{ij} = U_i + V_j + C_{ij}.$$

Для клетки (1; 2) новая стоимость будет $C'_{12} = -12 + 1 + 6 = -5$.

Для клетки (1; 3) $C'_{13} = -12 + 2 + 10 = 0$.

Для клетки (1; 4) $C'_{14} = -12 + 4 + 5 = -3$.

Для клетки (2; 4) $C'_{24} = -4 + 4 + 4 = 4$.

Для клетки (3; 1) $C'_{31} = -8 + 0 + 10 = 2$.

Для клетки (3; 2) $C'_{32} = -8 + 1 + 6 = -1$.

Составим табл. 22 с учетом пересчета стоимостей:

Таблица 22

Получатели		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
		40	20	80	10
База		0	5	0	5
B_1	25	25			
B_2	55	15	20	20	4
B_3	70	2	-1	0	0
				60	10

В полученной табл. 22 имеются три клетки с отрицательной стоимостью, это клетки (1; 2) со стоимостью $C_{12} = -5$, клетка (1; 4) со стоимостью $C_{14} = -3$ и клетка (3; 2) со стоимостью $C_{32} = -1$.

Самая «выгодная» клетка (1; 2), так как в ней самая большая по абсолютной величине стоимость $C_{12} = -5$. В нее и будем перебрасывать груз.

IV. Улучшение плана.

Переброска груза в «выгодную» клетку возможна только по циклу, так как суммы перевозок по строкам и столбцам должны остаться неизменными.

Цикл – это замкнутый многоугольник с горизонтальными и вертикальными сторонами, одна вершина которого лежит в данной свободной клетке, остальные – в занятых (базисных) клетках.

В теории линейного программирования доказывается, что, если составленный план – опорный, то для каждой свободной клетки транспортной таблицы существует, и при том единственный, цикл.

Найдем цикл для клетки (1; 2) и отметим его контуром в табл. 23:

Таблица 23

Получатели База		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
		40	20	80	10
B_1	25	0	5	0	5
B_2	55	0	0	0	4
B_3	70	2	-1	0	0
				60	10

Нарисуем этот цикл отдельно, указав в цикловых заполненных клетках количество груза. Припишем вершине свободной клетки знак (+) и далее чередуем знаки вершин многоугольника:

(-)	(+)
25	
(+)	(-)
15	20

Знак плюс (+) указывает, что в эти клетки будем перебрасывать груз; знак минус (-) – то, что из этих клеток будем брать груз для переброски. Число единиц груза, которые можно перебросить по циклу, определяется наименьшей перевозкой, стоящей в клетке со знаком минус (-).

Выберем наименьшее количество груза в клетках со знаком минус: $\min\{25; 20\} = 20$, т. е. 20 ед. груза можно перебросить по циклу. Прибавляем по 20 ед. груза в клетках со знаком (+) и вычитаем в клетках со знаком (-).

Составим новую табл. 24 с учетом выполненной переброски груза.

Таблица 24

Получатели База		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
		40	20	80	10
B_1	25	0	-5	0	-3
B_2	55	0	0	0	4
B_3	70	2	-1	0	0
				60	10

Очевидно, что цикл пересчета не нарушает допустимость плана, так как баланс заявок и запасов сохраняется.

Замечание.

Иногда после переброски груза по циклу может возникнуть вырождение плана (заполненных клеток меньше, чем $(m + n - 1)$). Чтобы перейти к невырожденному плану, достаточно ничтожно мало изменить запасы или заявки так, чтобы общий баланс не нарушался (например, на величину ϵ), а после нахождения оптимального решения отбросить эту величину, как равную нулю..

Проверим полученный план на оптимальность: произведем пересчет стоимостей с помощью потенциалов.

В базисных клетках стоимость должна быть равна нулю, а у нас в занятой клетке (1; 2) стоимость $C_{12} = -5$.

Вновь методом потенциалов обратим стоимости в занятых клетках в нуль.

Возьмем $V_2 = 5$, тогда $U_1 + 5 - 5 = 0$; $U_1 = 0$, остальные потенциалы равны 0 (табл. 25).

Таблица 25

Получатели База		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	U_i
		40	20	80	10	
B_1	25	0	-5	0	-3	0
B_2	55	5	20	0	4	0
B_3	70	2	-1	0	0	0
V_j		0	5	0	0	

Произведем пересчет оценок.

Для клетки (2; 2): $C'_{22} = 0 + 5 + 0 = 5$.

Для клетки (3; 2): $C'_{32} = 0 + 5 - 1 = 4$.

В остальных клетках стоимости не изменились, так как потенциалы равны нулю; табл. 25 преобразуется в табл. 26:

Таблица 26

Получатели База		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
		40	20	80	10
B_1	25	0 / 5	0 / 20	0 /	-3 /
B_2	55	0 / 35	0 / 20	0 /	4 /
B_3	70	2 /	4 /	0 / 60	0 / 10

В табл. 26 есть клетка (1; 4) с отрицательной стоимостью $C_{14} = -3$, значит, найденный план не оптимальный, и его можно улучшить за счет клетки (1; 4).

Найдем для этой клетки цикл и отметим его контуром в табл. 27.

Таблица 27

Получатели База		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
		40	20	80	10
B_1	25	0 / 5	0 / 20	0 /	-3 /
B_2	55	0 / 35	0 / 20	0 /	4 /
B_3	70	2 /	4 /	0 / 60	0 / 10

Нарисуем этот цикл отдельно.

(-) 5		(+)
(+) 35	20 (-)	
	60 (+)	10 (-)

Припишем вершине свободной клетки знак (+) и далее чередуем знаки вершин. Выберем наименьшее количество груза в клетках со знаком (-): $\min\{5; 20; 10\} = 5$.

Перебросим 5 ед. груза в клетки со знаком (+) (т. е. в клетках со знаком плюс прибавим по 5 ед. груза, а в клетках со знаком минус столько же вычтем). Составим табл. 28 с учетом последнего цикла.

Таблица 28

Получатели База		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
		40	20	80	10
B_1	25	0 5	0 20	0	-3 5
B_2	55	0 40	0	0 15	4
B_3	70	2	4	0 65	0 5

Видим, что в результате циклического переноса груза баланс заявок и запасов не нарушился – план допустимый.

Заполненных клеток осталось по-прежнему шесть, т. е. план опорный (невыврожденный).

Добиваясь нулей в базисных клетках методом потенциалов, проверяем полученный план на оптимальность.

Подберем потенциалы так, чтобы обратить в нуль стоимость (-3) в клетке (1; 4) и сохранить нули в других занятых клетках.

Для занятой клетки (1; 4) $C_{14} = -3$. Возьмем $U_1 = 3$, из равенства $3 + V_2 + 0 = 0$ получим $V_2 = -3$.

Потенциалы для остальных занятых клеток равны нулю (табл. 29).

Таблица 29

Получатели База		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	U_i
		40	20	80	10	
B_1	25	0 0	0 20	0	-3 5	3
B_2	55	0 40	5	0 15	4	0
B_3	70	2	4	0 65	0 5	0
V_j		0	-3	0	0	

Пересчитаем стоимости в свободных клетках с помощью равенства

$$C'_{ij} = U_i + V_j + C_{ij}.$$

Для клетки (1; 1) новая стоимость будет $C'_{11} = 3 + 0 + 0 = 3$.

Для клетки (1; 3) $C'_{13} = 3 + 0 + 0 = 3$.

Для клетки (2; 2) $C'_{22} = 0 + 5 - 3 = 2$.

Для клетки (2; 4) $C'_{24} = 0 + 0 + 4 = 4$.

Для клетки (3; 1) $C'_{31} = 0 + 0 + 2 = 2$.

Для клетки (3; 2) $C'_{32} = 0 - 3 + 4 = 1$.

Табл. 30 перевозок примет следующий вид:

Таблица 30

Получатели База		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
		40	20	80	10
B_1	25	3 0	0 20	3 5	0 5
B_2	55	0 40	2 15	0 15	4 5
B_3	70	2 65	1 65	0 65	0 5

В полученной таблице нет клеток с отрицательными стоимостями, следовательно, построенный план оптимальный.

Подсчитаем стоимость перевозки при найденном оптимальном плане. Для этого составим табл. 31, в которую внесем первоначальные (из условия задачи) стоимости.

Таблица 31

Получатели База		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
		40	20	80	10
B_1	25	0 0	6 20	0 5	5 5
B_2	55	4 40	0 15	2 15	0 5
B_3	70	0 65	0 65	6 65	4 5

Подсчитаем стоимость перевозки по найденному плану:

$$Z = 6 \cdot 20 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 15 + 6 \cdot 65 + 4 \cdot 5 = 745 \text{ денежных единиц.}$$

По сравнению со стоимостью перевозки по первоначальному плану затраты на перевозку по новому плану снизились на $860 - 745 = 115$ денежных единиц.

Ответ.

С базы B_1 будем перевозить 20 ед. груза заказчику P_2 и 5 ед. груза заказчику P_4 ; с базы B_2 – 40 ед. груза заказчику P_1 и 15 ед. груза заказчику P_3 ; с базы B_3 – 65 ед. груза заказчику P_3 и 5 ед. груза заказчику P_4 .

При этом затраты составят 745 денежных единиц.

1.3. Двойственность задач линейного программирования

1.3.1. Постановка взаимно двойственных задач

Рассмотрим ситуацию, демонстрирующую возникновение взаимно двойственных задач линейного программирования при решении реальных экономических задач.

Допустим, на некотором предприятии после выполнения годового плана возник вопрос: как поступить с излишками сырья? Возможны две ситуации: либо запустить остатки сырья в дальнейшее производство продукции предприятия, либо продать эти излишки сырья другим производителям. Чтобы определиться с выбором, потребовалось рассчитать, что же сделать выгоднее. Так в линейном программировании возникла теория двойственности.

Рассмотрим задачу, иллюстрирующую две двойственные задачи.

Допустим, после выполнения планового заказа на предприятии имеется два вида сырья: S_1 и S_2 , остатки которых составляют соответственно 35 и 20 ед. Из этого сырья можно наладить производство

трех видов товаров: T_1 , T_2 , T_3 . От реализации каждой единицы товара T_1 завод получит 7 руб. прибыли, каждая единица товара T_2 даст заводу 6 руб. прибыли, а каждая единица T_3 – 18 руб. прибыли. Известны также нормы расхода сырья на производство товаров T_1 , T_2 , T_3 и данные от прибыли с единицы каждого товара (эти данные сведены в табл. 32).

Таблица 32

	S_1	S_2	Прибыль
Ед. T_1	1	2	7
Ед. T_2	1	1	6
Ед. T_3	5	2	18
Запасы	35	20	

Число 5 в таблице означает, что на производство 1 ед. товара T_3 используется 5 ед. сырья S_1 .

Проанализируем два варианта реализации сырья.

Рассмотрим первый вариант: запустить остатки сырья в дальнейшее производство продукции предприятия.

Пусть x_i – количество единиц товара T_i , $i = 1, 2, 3$, которое следует произвести. Неизвестные x_1 , x_2 , x_3 должны удовлетворять условиям:

$$f = 7x_1 + 6x_2 + 18x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 35; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0; \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Среди всех решений системы ограничений выбрать такое, для которого $f = \max$.

Здесь в левой части первого неравенства системы ограничений записано количество сырья S_1 , которое расходуется на выпуск x_1 единиц T_1 , x_2 единиц T_2 и x_3 единиц T_3 ; это количество не должно превышать имеющегося запаса сырья S_1 , т. е. 35. Аналогичный смысл имеет второе неравенство системы.

Прибыль, которую получит предприятие от реализации плана выпуска товаров (x_1, x_2, x_3) , будет, очевидно, $f = 7x_1 + 6x_2 + 18x_3$ руб. В интересах предприятия максимизировать эту прибыль.

Назовем эту задачу задачей I .

Исследуем теперь вторую возможность: продать остатки сырья другому предприятию. В этом случае встает вопрос: по каким ценам продавать эти излишки?

Пусть эти цены — y_1, y_2 (y_i — цена единицы сырья S_i), причем очевидно, что $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$.

В контексте возможности первого варианта необходимо учесть следующее требование: прибыль от продажи единицы сырья должна быть не меньше прибыли от выручки за продукцию, которую можно из этого сырья изготовить. Исходя из этого условия приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 7; \\ y_1 + y_2 \geq 6; \\ 5y_1 + 2y_2 \geq 18. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Здесь, в частности, первое из неравенств означает, что выручка от продажи одной единицы сырья S_1 и двух единиц S_2 не меньше, чем прибыль, которую могло бы получить предприятие от продажи единицы товара T_1 . Аналогично интерпретируются другие два неравенства.

Что касается целевой функции, то ее смысл – в соблюдении интересов покупателя, а именно: в стремлении затратить минимум средств на покупку этого сырья. Таким образом, расходы на покупку сырья выражаются величиной:

$$\varphi = 35y_1 + 20y_2.$$

Тогда соблюдение всех условий второго варианта использования излишков сырья можно выразить задачей:

найти $\varphi = 35y_1 + 20y_2 \rightarrow \min$ при условиях

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 7; \\ y_1 + y_2 \geq 6; \\ 5y_1 + 2y_2 \geq 18. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Назовем эту задачу задачей *II*.

Задачи *I* и *II* называются двойственными друг другу.

Алгоритм составления двойственных задач.

1. Если первая задача имеет размеры $(m \times n)$ (m ограничений с n неизвестными), то вторая – размеры $(n \times m)$. Так, в задаче *I* два ограничения с тремя неизвестными, а в задаче *II* – три ограничения с двумя неизвестными.

2. Матрицы коэффициентов при неизвестных в левых частях систем ограничений обеих задач взаимно транспонированные. Так, в задаче *I* матрица из коэффициентов при x_1, x_2, x_3 есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

в то время как в задаче *II* матрица из коэффициентов при y_1, y_2 есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Свободные члены систем ограничений обеих задач взяты из коэффициентов при неизвестных целевой функции двойственной задачи.

4. В задаче *I* все ограничения представляют собой неравенства типа « $\leq$ », причем в этой задаче требуется достичь максимума f ; напротив, в задаче *II* все ограничения – неравенства типа « $\geq$ », причем требуется достичь минимума ϕ .

Двойственные задачи в общей форме

Задача <i>I</i>	Задача <i>II</i>
$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \quad (1) \\ x_3 \geq 0, \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2. \end{cases} \quad (2) \end{cases}$ $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ Среди всех решений системы (1), (2) выбрать такое, для которого $f = \max$	$\begin{cases} y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0. \end{cases} \quad (1')$ $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq c_2, \quad (2') \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \geq c_3, \end{cases}$ $\phi = b_1y_1 + b_2y_2$ Среди всех решений системы (1'), (2') выбрать такое, для которого $\phi = \min$

Задачи *I* и *II* можно записать в матричной форме.

Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов

при неизвестных в системе (2), а также матрицы-столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричная форма записи задач *I* и *II*:

Задача I	Задача II
$X \geq 0$ (1) $AX \leq B$ (2) $f = C^T X \rightarrow \max$ при условиях (1), (2)	$Y \geq 0$ (1') $A^T Y \geq C$ (2') $\phi = B^T Y \rightarrow \min$ при условиях (1'), (2')

1.3.2. Основное неравенство для двойственных задач

Теорема (основное неравенство). Пусть X – какое-нибудь допустимое решение задачи I (т. е. любое решение системы (1), (2)), а Y – какое-нибудь допустимое решение задачи II (любое решение системы (1'), (2')). Тогда справедливо неравенство

$$f(X) \leq \phi(Y). \quad (19)$$

Доказательство. Дано, что $AX \leq B$. Тогда $(AX)^T \leq B^T \Leftrightarrow X^T A^T \leq B^T$. Умножим обе части неравенства справа на матрицу $Y \geq 0$: $(X^T A^T)Y \leq B^T Y$ или, ввиду ассоциативности умножения матриц,

$$X^T (A^T Y) \leq B^T Y = \phi(Y). \quad (20)$$

Аналогично, умножив обе части неравенства $A^T Y \geq C$ слева на матрицу $X^T > 0$, будем иметь

$$X^T (A^T Y) \geq X^T C = f(Y). \quad (21)$$

Соединяя неравенства (20) и (21), получим

$$f(X) \leq X^T A^T Y \leq \phi(Y). \quad (22)$$

откуда и следует основное неравенство (19).

Следствие 1 (достаточный признак оптимальности). Если для каких-то допустимых решений X_0 и Y_0 задач I и II выполняется равенство

$$f(X_0) \leq \phi(Y_0), \quad (23)$$

то X_0 есть оптимальное решение задачи I, а Y_0 – оптимальное решение задачи I'.

Доказательство. Для любого допустимого решения X задачи I имеем (согласно неравенству (21))

$$f(X) \leq \varphi(Y_0),$$

следовательно, $f(X) \leq f(X_0)$, что и доказывает оптимальность X_0 . Аналогично доказывается оптимальность Y_0 .

Следствие 2. Если в одной из задач I и II целевая функция не ограничена с соответствующей стороны (т. е. $\max f = \infty$ в задаче I или $\min \varphi = -\infty$ в задаче II), то другая задача не имеет допустимых решений.

Доказательство. Допустим, в задаче I $\max f = \infty$. Если бы существовало допустимое решение Y_0 задачи II , то ввиду (19) все числа $f(X)$ (где X – любое допустимое решение задачи I) были бы ограничены сверху одним и тем же числом $\varphi(Y_0)$, что противоречит условию $\max f = \infty$.

1.3.3. Основная теорема двойственности

Основная теорема. Если разрешима одна из двойственных задач I или II , то разрешима и другая, причем $\max f = \min \varphi$.

Основная теорема двойственности имеет несколько важных следствий. Прежде всего, отметим, что вопрос приоритетного выбора применения сырья имеет ответом следующее: каждая из двух возможностей реализации сырья выгодна в равной степени. Действительно, равенство $\max f = \min \varphi$ означает, что максимальная прибыль, которую можно получить от изготовления из остатков сырья продукции T_1, T_2, T_3 , совпадает с выручкой от продажи сырья другому предприятию.

В качестве следствия теперь можно получить весьма важное утверждение.

Критерий оптимальности. Пусть X_0 и Y_0 – допустимые решения соответственно задач I и II . Для того чтобы X_0 было оптимальным решением задачи I , а Y_0 – оптимальным решением задачи II , необходимо и достаточно выполнение равенства

$$f(X_0) = \varphi(Y_0). \quad (24)$$

Доказательство. Пусть X_0 и Y_0 – оптимальные решения соответственно задач I и II . Значит, $f(X_0) = \max f$, $\varphi(Y_0) = \min \varphi$, и равенство (24) вытекает из основной теоремы. Обратно, если справедливо (24), то согласно следствию 1 (достаточный признак оптимальности) решения X_0 и Y_0 оптимальны.

Невязки – это разности между левыми и правыми частями ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq c_2, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq c_2, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \geq c_3. \end{cases} \quad \text{Если задача } I \text{ имеет}$$

размеры $(m \times n)$ и X – любое допустимое решение, то соответствующие ему невязки будут:

$$\tilde{y}_i = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha i} x_{\alpha} - b_i, (i = 1, 2, \dots, m).$$

Аналогично запишутся невязки для задачи II :

$$\tilde{x}_j = \sum_{\beta=1}^n a_{\beta j} y_{\beta} - c_j, (j = 1, 2, \dots, n).$$

Очевидно, все $\tilde{y}_i \leq 0$, а все $\tilde{x}_j \geq 0$. Если какая-либо из невязок равна нулю, то соответствующее ей ограничение обращается в строгое равенство.

Теорема равновесия. Пусть X и Y – допустимые решения задач I и II . Для того чтобы эти допустимые решения были одновременно оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$x_j \tilde{x}_j \geq 0, (j = 1, 2, \dots, n); \quad (25)$$

$$y_i \tilde{y}_i \leq 0, (i = 1, 2, \dots, m). \quad (26)$$

Доказательство. Из основной теоремы следует, что для оптимальности X и Y необходимо и достаточно выполнение равенства $f(X) = \varphi(Y)$ или, из (22), одновременное выполнение двух равенств:

$$X^T A^T Y = f(X), \quad (27)$$

$$X^T A^T Y = \varphi(Y). \quad (28)$$

По правилу умножения матриц раскроем произведение $X^T A^T Y$ и получим число, равное сумме всех чисел вида $a_{ij} x_j y_i$. Пусть задача I имеет размеры $(m \times n)$, тогда равенства (27) и (28) примут вид

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n; \quad (29)$$

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_j y_i = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m, \quad (30)$$

где $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Тогда соотношение (29) запишем

$$x_1 \left(\sum_i a_{i1} y_i - c_1 \right) + x_2 \left(\sum_i a_{i2} y_i - c_2 \right) + \dots + x_n \left(\sum_i a_{in} y_i - c_n \right) = 0,$$

или, что то же,

$$x_1 \tilde{x}_1 + x_2 \tilde{x}_2 + \dots + x_n \tilde{x}_n = 0. \quad (31)$$

Аналогично преобразуем соотношение (30) и получим

$$y_1 \tilde{y}_1 + y_2 \tilde{y}_2 + \dots + y_m \tilde{y}_m = 0. \quad (32)$$

Таким образом, чтобы решения X и Y были одновременно оптимальны, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\begin{cases} x_1\tilde{x}_1 + x_2\tilde{x}_2 + \dots + x_n\tilde{x}_n = 0, \\ y_1\tilde{y}_1 + y_2\tilde{y}_2 + \dots + y_m\tilde{y}_m = 0. \end{cases}$$

Зная, что слагаемые $x_1\tilde{x}_1, x_2\tilde{x}_2, \dots, x_n\tilde{x}_n$ должны быть неотрицательны, делаем вывод, что равенство (31) эквивалентно системе равенств (2). Аналогично рассуждая, равенство (32) эквивалентно системе равенств (2'). Теорема доказана.

Проанализируем условия оптимальности (2) и (2'). Очевидно, (2) можно записать в следующей форме:

$$x_j \neq 0 \Rightarrow \tilde{x}_j = 0; \quad x_j = 0 \Rightarrow \tilde{x}_j \neq 0, \quad (33)$$

а условие (2') – в аналогичной форме:

$$y_i \neq 0 \Rightarrow \tilde{y}_i = 0; \quad y_i = 0 \Rightarrow \tilde{y}_i \neq 0. \quad (34)$$

Следствие. Если в оптимальном решении одной из двойственных задач одна из компонент отлична от нуля, то для любого оптимального решения другой задачи соответствующая невязка равна нулю; если для оптимального решения одной из задач какая-либо невязка отлична от нуля, то для любого оптимального решения другой задачи соответствующая компонента равна нулю.

Последнее следствие – известное равновесие между задачами I и II, что и дало название «теорема равновесия».

Раскроем экономический смысл условий (33) и (34).

Допустим, что для некоторого оптимального решения X задачи I и некоторого номера i (1 или 2) выполняется условие:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 < b_i.$$

Это означает, что расход сырья S_i строго меньше его запаса и, значит, это сырье не является дефицитным. Тогда, согласно (36), $y_i = 0$, т. е. продажная цена сырья S_i должна равняться 0. Значит, ве-

личина y_i является «мерой дефицитности» сырья S_i . Поэтому величины y_i называют *двойственными ценами*.

Пусть один из видов сырья, скажем S_1 , оказался не дефицитен, т. е. для некоторого оптимального решения X имеем

$$a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 < b_1.$$

Тогда увеличение запаса сырья S_1 не должно оказывать влияния на прибыль, т. е. на $\max f$. Обоснование такого заключения дается с помощью теоремы равновесия. В таком случае и уменьшение запаса S_i на прибыль до тех пор, пока сырье S_i остается недефицитным.

Рассмотрим в заключение такой вопрос: прибыль $Z = \max f(x)$ зависит в том числе от запасов b_1 и b_2 . Пусть при малом изменении одного из запасов b_i , например b_1 , вектор Y_0 остается решением двойственной задачи (в частности, так будет, если сырье S_1 не дефицитно). Как же влияет изменение b_1 на скорость изменения прибыли $\max f$? Учитывая, что $z = \min \phi$, будем иметь

$$z = b_1 y_1^0 + b_2 y_2^0,$$

$$z + \Delta z = (b_1 + \Delta b_1) y_1^0 + b_2 y_2^0,$$

откуда следует $\Delta z = \Delta b_1 \cdot y_1^0$.

Отсюда имеем такое равенство: $\frac{dz}{db_1} = y_1^0$, т. е. двойственная оценка

выступает как скорость изменения прибыли. В частности, это означает, что зависимость $\max f$ от b_1 является линейной. Подчеркнем, что это заключение справедливо при условии неизменности оптимального решения двойственной задачи.

1.4. Компьютерное решение задач линейного программирования

На практике типичная задача линейного программирования содержит сотни и даже тысячи переменных и ограничений. Для решения таких задач требуется использование компьютерных программ. Наиболее простой и доступной является программа Excel с функцией *Поиск решения* в меню *Сервис*. Она предназначена для решения задач средних размеров. Для решения больших задач необходимо использовать коммерческие программы, такие как AMPL и LINGO.

Покажем использование Excel на задаче 1 об использовании сырья п. 1.1. Напомним, что математически эта задача формулируется следующим образом:

$$Z = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19; \\ 2x_1 + x_2 \leq 13; \\ 3x_2 \leq 15; \\ 3x_1 \leq 18. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

На рис. 5 показано возможное табличное представление этой задачи.

Здесь содержится семь типов данных:

- 1) матрица коэффициентов системы ограничений (затененные ячейки B5: C8);
- 2) правая часть системы ограничений – свободные члены (ячейки F5: F8);
- 3) значения переменных x_1, x_2 (затененные ячейки B14: C14);

4) значения коэффициентов перед неизвестными в целевой функции (ячейки B11: C11);

5) значение целевой функции (ячейка D11);

6) формулы, по которым вычисляются значения левых частей ограничений (ячейки D5: D8);

7) формула, по которой вычисляется значение целевой функции (ячейка D11).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Решение задачи об использовании сырья							
3		Входные данные:							
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									

Детализация данных из таблицы:

- Входные данные (ячейки B5:D8):**

	2	3	0
Матрица	2	1	0
системы	0	3	0
ограничений	3	0	0
- Правые части ограничений (ячейки F5:F8):**

19
13
15
18
- Целевая функция (ячейки B10:D11):**

			Z
Целевая функция	7	5	0
- Решение (ячейки B13:D14):**

	x_1	x_2
Решение	0	0

Рис. 5

Вся остальная информация на рабочем листе является пояснительными надписями. Расположение ячеек, содержащих данные задачи, не строго, важно только то, чтобы они находились в отдельных ячейках, и на них можно сослаться при задании параметров средства *Поиск решения*. Тем не менее, рекомендуем придерживаться структуры таблицы, как показано на рис. 5, поскольку она наглядна и удобна в работе.

Покажем соответствие между математической моделью и табличной. Начнем с соответствия формул этих моделей. Коэффициенты левых частей ограничений и целевой функции помещены в диапазо-

ны ячеек $B5:C8$ и $B11:C11$. В следующей табл. 33 приведены алгебраические формулы и эквивалентные им формулы Excel и ячейки, в которых эти формулы записаны.

Таблица 33

	Алгебраическая формула	Формула Excel	Ячейка
Целевая функция	$z = 7x_1 + 5x_2$	$= B11 * B\$14 + C11 * C\14	$D11$
Ограничение 1	$2x_1 + 3x_2$	$= B5 * B\$14 + C5 * C\14	$D5$
Ограничение 2	$2x_1 + x_2$	$= B6 * B\$14 + C6 * C\14	$D6$
Ограничение 3	$3x_2$	$= B7 * B\$14 + C7 * C\14	$D7$
Ограничение 4	$3x_1$	$= B8 * B\$14 + C8 * C\14	$D8$

Формула вводится только в ячейку $D5$, в ячейки $D6:D8$ ее копируют протягиванием. Чтобы правильно скопировать формулы, в формуле ячейки $D5$ надо ссылки на ячейки $B14$ и $C14$ (содержащих значения x_1 и x_2) сделать абсолютными в виде $B\$14$ и $C\$14$. Для таблиц с большим количеством данных в ячейку $D5$ можно ввести формулу:

$$= СУММПРОИЗВ(B5:C5;B\$14:C\$14)$$

и затем скопировать ее в ячейки $D6:D8$.

Далее в меню *Сервис* выберем команду *Поиск решения*. Откроется диалоговое окно, показанное на рис. 6.

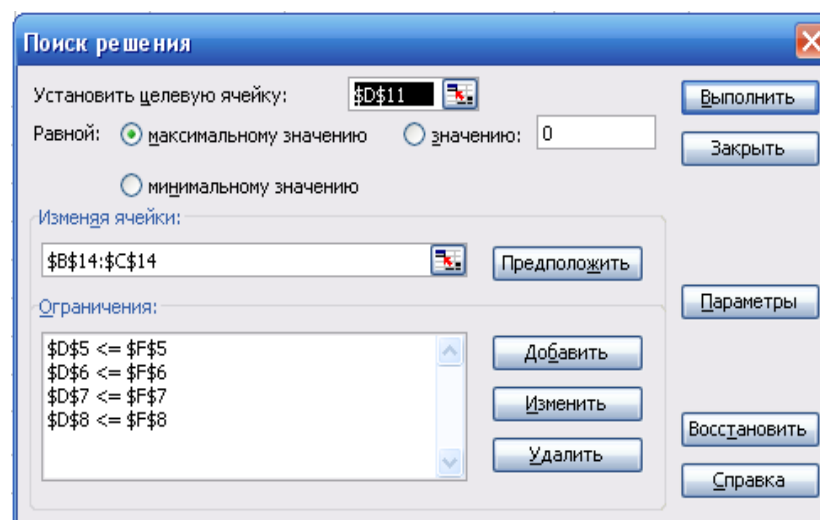


Рис. 6

Введем в поле ввода целевой ячейки адрес ячейки, в которой вычисляется значение целевой функции, и укажем ее устремление (максимальное или минимальное значение). Далее введем адреса ячеек, содержащих значения переменных. В нашей модели:

- 1) в поле ввода *Установить целевую ячейку* введем $D\$11$;
- 2) установим переключатель *Равной* максимальному значению;
- 3) в поле ввода *Изменяя ячейки* вводится $B\$14:C\14 .

Введенные данные указывают средству *Поиск решения*, что неизвестные помещены в ячейки $B14$ и $C14$, а искомый максимум целевой функции вычисляется в ячейке $D11$.

Далее зададим ограничения задачи, щелкнув на кнопку *Добавить* в диалоговом окне *Поиск решения*. Отрывшееся диалоговое окно *Добавление ограничения* предоставляет средства для ввода всех частей ограничений (левой части, знака неравенства и значения правой части) (рис. 7).

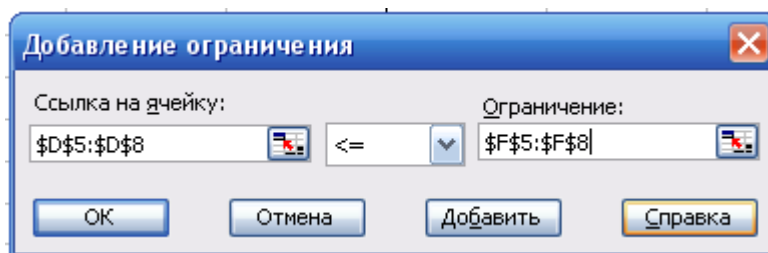


Рис. 7

В нашей задаче в открытое окно (рис. 7) введем ограничения модели $D\$5:D\$8 \leq F\$5:F\8 .

Здесь в ячейках $F5:F8$ записаны значения свободных членов ограничений.

Далее с помощью диалогового окна *Добавление ограничения* (рис. 8) введем тривиальные ограничения (условия неотрицательности) для переменных.

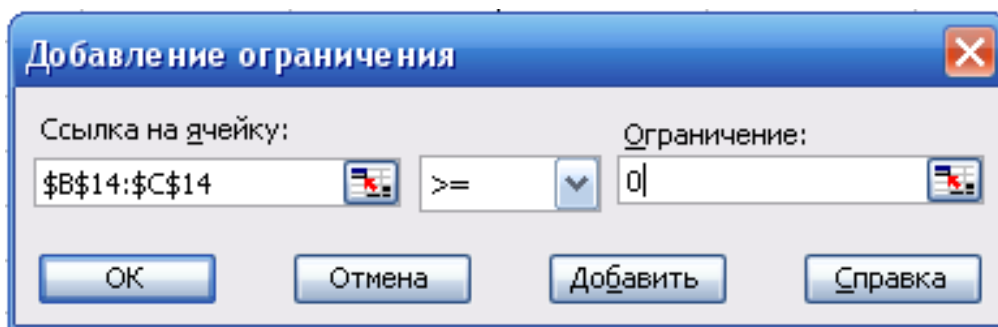


Рис. 8

В нашем случае введем:

$$\$B\$14:\$C\$14 \geq 0.$$

После введения всех исходных данных задачи проверим установленные параметры работы средства *Поиск решения* (максимальное время поиска решения, максимальное количество итераций, относительная погрешность и т. д.). Для этого откроем диалоговое окно *Параметры* поиска решения, щелкнув на кнопку *Параметры*, и установим опцию *Линейная модель*. Здесь же укажем, что все переменные должны быть неотрицательными (опция *Неотрицательные значения*).

Далее щелкнем на кнопку *Выполнить* в диалоговом окне *Поиск решения* (см. рис. 6) и получим искомый результат задачи.

После того, как функция *Поиск решения* найдет решение данной задачи, оптимальное значение целевой функции появится в ячейке *D11*, а значения переменных x_1 и x_2 – в ячейках *B14* и *C14* соответственно.

Также появится новое диалоговое окно *Результаты поиска решения*, которое даст возможность получить более детальную информацию о решении в виде отчетов (рис. 9, 10).

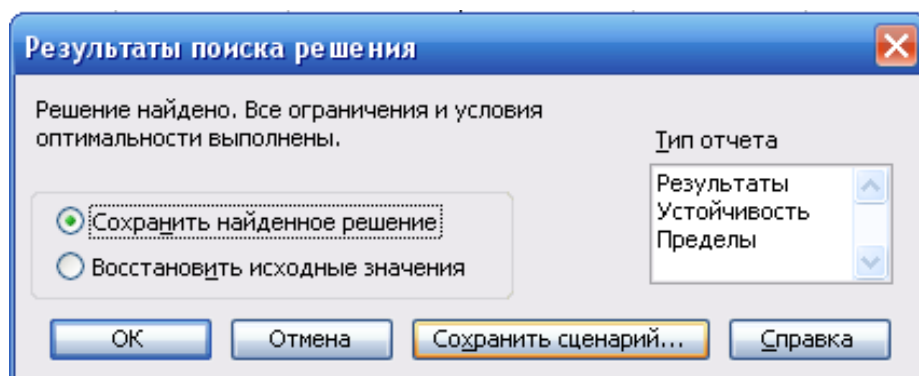


Рис. 9

Microsoft Excel - компьютер									
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка									
M20 fx Arial Cyr									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	Решение задачи об использовании сырья								
3	Входные данные:								
4				Значение левой части		Значение правой части			
5		2	3	19	≤	19			
6	Матрица	2	1	13	≤	13			
7	системы	0	3	9	≤	15			
8	ограничений	3	0	15	≤	18			
9									
10	Целевая			Z					
11	функция	7	5	50					
12									
13		x_1	x_2						
14	Решение	5	3						
15									
16									

Рис. 10

В нашем случае видим, что задача имеет следующее решение

Ответ. $Z_{\max} = 50$, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$.

Раздел 2. ТЕОРИЯ ИГР

2.1. Введение в теорию игр

Достаточно часто в экономической деятельности возникают ситуации, когда необходимо согласовать действия отдельных участников определенного экономического процесса, но с противоположными интересами, для слаженной работы всей системы. В решении этой задачи помогает математический метод, называемый теорией игр, который позволяет рассчитать лучшее практическое поведение для участников, обязанных согласовать действия при наличии между ними конфликта интересов.

Теория игр – это численный аппарат, позволяющий рассчитать вероятность различных сценариев поведения системы (называемой «игра»), контролируемой различными факторами, которые определяются некоторым числом участников – игроков. В экономике теория игр используется наиболее часто. В качестве игровой ситуации можно рассмотреть два конкурирующих предприятия, которые пытаются рассчитать дальнейшие стратегические шаги своего экономического противника с целью его обыграть в получении прибыли.

В экономике в качестве игроков можно рассмотреть предприятия-производители, торговые компании, банки и другие организации самого разного рода.

Введем основные понятия теории игр.

Игра – это математическая модель конфликтной ситуации.

Игроки – заинтересованные стороны, участвующие в конфликте.

Для каждой игры вводятся *правила*, прописывающие варианты действий игроков (*стратегии*), объем информации каждого игрока о

поведении противника, *выигрыши* (выражаются численно), к которым приводит каждая совокупность действий.

В условиях конфликта каждый игрок выбирает свою стратегию, в результате чего складывается набор стратегий, называемый *ситуацией*.

Игра с двумя игроками называется *парной*, с большим количеством игроков – *множественной*.

Выбор и применение предусмотренного в рамках правил игры действия называется *ходом игрока*. Ходы могут быть осознанными или случайными.

Если игра проводится с численным выигрышем, она называется *игрой с выигрышем*.

В случае, если оценка ситуации численно невозможна, указывают ее сравнительную предпочтительность для игроков. В этом случае рассматривают *игру с предпочтениями*, в которой игра с выигрышем является частным случаем.

Игра называется *антагонистической*, если выигрыш одного игрока равен проигрышу его противника.

Мы ограничимся рассмотрением только игр с выигрышами.

Для поиска решения игры требуется для каждой конфликтующей стороны выбрать такую стратегию, при которой один из игроков получит максимальный выигрыш, в то время как его противник придерживается своей стратегии. И, наоборот, второй игрок получит минимальный проигрыш при том, что первый придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются *оптимальными*.

Оптимальные стратегии должны обладать свойством устойчивости, при котором каждому из игроков должно быть невыгодно отказаться от выбранной им в этой игре стратегии.

2.2. Матричные игры

Рассмотрим игру двух игроков – A и B , каждый из которых имеет конечное число стратегий.

Допустим, что игрок A имеет m стратегий – $A_1, A_2, \dots, A_m$, а игрок B имеет n стратегий $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Предположим, что игрок A выбрал стратегию A_i , а игрок B – стратегию B_k , считая, что этот выбор однозначно определяет исход игры, а именно: выигрыш a_{ik} игрока A и выигрыш b_{ik} игрока B , где

$$b_{ik} = -a_{ik}.$$

Отрицательный выигрыш назовем *проигрышем*.

Поскольку выигрыши двух игроков равны, но отличаются друг от друга знаком, то при анализе такой игры можно рассматривать выигрыши лишь одного из игроков (допустим, игрока A).

Значения a_{ik} выигрыша при каждой паре стратегий $\{A_i, B_k\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$ удобно записывать в виде прямоугольной таблицы (табл. 34), строки которой соответствуют стратегиям игрока A , а столбцы – стратегиям игрока B .

Таблица 34

	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

либо в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица имеет размер $(m \times n)$ и называется *матрицей игры*, или *платежной матрицей*.

Часто игру называют *игрой* $(m \times n)$.

Матричные игры относятся к разряду антагонистических игр.

2.2.1. Равновесная ситуация

Допустим, что игра $(m \times n)$ задана платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где строки матрицы – стратегии игрока A , а столбцы – стратегии игрока B .

Теория игр исходит из предположения, что каждый игрок стремится к получению наибольшего для себя выигрыша, но при этом считая, что его противник так же действует наилучшим для себя образом.

Проанализируем стратегии игроков на оптимальность.

Зная, что на стратегию A_i игрока A игрок B ответит стратегией B_k такой, при которой выигрыш игрока A будет минимальным, игрок A будет стремиться максимизировать свой выигрыш из гарантированных минимальных выигрышей. Таким же образом игрок B будет действовать в отношении всех m стратегий игрока A .

Выберем в каждой строке платежной матрицы (35) минимальный элемент $\alpha_i = \min_k a_{ik}$, $i = 1, 2, \dots, m$ и запишем их в правом столбце табл.

35. Затем среди чисел α_i выбираем максимальное число

$$\alpha = \max_i a_i = \max_i \min_k a_{ik} \quad (36)$$

Таблица 35

Стратегии игрока A \ Стратегии игрока B	B_1	B_2	$\dots$	B_k	$\dots$	B_n	Минимальные выигрыши игрока A
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2k}	$\dots$	a_{2n}	α_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ik}	$\dots$	a_{in}	α_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}	α_m
Максимальные выигрыши игрока A	β_1	β_2	$\dots$	β_k	$\dots$	β_n	

Число α называется *нижней ценой игры*.

Построение стратегии игрока A на максимизации минимальных выигрышей называется *принципом максимина*.

Далее в каждом столбце платежной матрицы (35) выберем максимальный элемент $\beta_k = \max_i a_{ik}$, $k = 1, 2, \dots, n$ и запишем их в нижней строке табл. 35. Естественно, что в свою очередь игрок B выберет ту стратегию $\beta_k = \max_i a_{ik}$, при которой максимальный выигрыш первого игрока A минимален, т. е.

$$\beta_k = \min_k \beta_k = \min_k \max_i a_{ik}. \quad (37)$$

Число β называется *верхней ценой игры*.

Построение стратегии игрока B на минимизации максимальных выигрышей называется *принципом минимакса*.

Нижняя и верхняя цены всегда связаны соотношением

$$\alpha \leq \beta.$$

В случае, если $\alpha = \beta$, такую игру называют *равновесной* или *игрой с седловой точкой*, а пара оптимальных стратегий $(A_i^{opt}; B_k^{opt})$ – *седловой*

точкой матрицы. Цена игры обозначается буквой v . Седловых точек в матричной игре может быть несколько, но все они имеют одно и то же значение.

Пример. Пусть даны четыре стратегии первого игрока A и пять стратегий второго игрока B и платежная матрица игры:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определить нижнюю и верхнюю цены игры и оптимальные стратегии игроков.

Решение. Найдем наилучшую стратегию игрока A : из минимальных значений в каждой строке выберем максимальное (в нашем случае $\max(3; 3; 6; 3) = 6$). Получим *нижнюю цену игры* $\alpha = 6$.

Найдем наилучшую стратегию игрока B : из максимальных значений в каждом столбце выберем минимальное (в нашем случае $\min(8; 7; 10; 8; 11) = 7$). Получим *верхнюю цену игры* $\beta = 6$.

Для удобства воспользуемся табл. 36:

Таблица 36

Стратегии игрока A \ Стратегии игрока B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Минимальные выигрыши игрока A	Нижняя цена игры
A_1	3	6	4	5	8	3	
A_2	3	4	6	7	6	3	
A_3	7	6	10	8	11	6	$\alpha = 6$
A_4	8	5	4	7	3	3	
Максимальные выигрыши игрока A	8	6	10	8	11		
Верхняя цена игры		$\beta = 6$					

Поскольку $\alpha = \beta$, игра имеет седловую точку; оптимальные стратегии игроков – $(A_3; B_2)$; цена игры $v = 6$.

2.2.2. Смешанные стратегии

Матричная игра с седловой точкой – легкий, но не распространенный пример игровой ситуации. Чаще всего вышеописанный алгоритм решения приводит к ситуации, где $\alpha < \beta$.

В этом случае предложенный путь выбора стратегий не дает равновесной ситуации.

Пример. Рассмотрим игру (3×3) , платежная матрица которой дана ниже (табл. 37):

Таблица 37

4	-1	-3	-3	
-2	1	3	-2	$\alpha = -2$
0	2	-3	-3	
4	2	3		
	$\beta = 2$			

Применив предложенный алгоритм, находим нижнюю цену игры $\alpha = -2$ и соответствующую ей стратегию A_2 и верхнюю цену игры $\beta = 2$ и соответствующую ей стратегию B_2 .

Очевидно, что при многократном повторении игры выбор игроками стратегий A_2 и B_2 приведет к среднему выигрышу, равному 1, причем $(\alpha = -2) \leq 1 \leq (\beta = 2)$.

В случае, если игрок B догадается, что его соперник придерживается стратегии A_2 , он тут же применит стратегию B_1 и сведет его выигрыш к проигрышу (-2) . Естественно, игрок A в ответ применит ответную стратегию A_1 , приводящую его к выигрышу $-(4)$. Следовательно, ситуация $\{A_2, B_2\}$ равновесной не является.

При нарушении равенства $\alpha = \beta$ встает проблема следующего рода: как распределить между игроками разницу $\beta - \alpha$?

Ответить на этот вопрос поможет введение понятия смешанных стратегий.

Смешанной стратегией S_A игрока A называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_m$, для которых выполняется условие: $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.

Смешанные стратегии игрока A записываются в виде матрицы

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

или в виде строки $S_A = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m)$.

Смешанные стратегии игрока B записываются аналогично:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

$$\text{или } S_B = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n).$$

Замечание. Каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии. Например, чистая стратегия A_i , у которой все частоты p_m , кроме одной, равны 0, а та единственная p_i равна 1.

Рассмотрим независимые наборы частот двух игроков $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ в условиях смешанных стратегий, в которых любая ситуация в чистых стратегиях является случайным событием и происходит с вероятностью $p_i q_k$.

Игрок A в ситуации $\{A_i, B_k\}$ получает выигрыш a_{ik} , следовательно, математическое ожидание (среднее значение) выигрыша игрока A в условиях ситуации в смешанных стратегиях (P, Q) равно

$$H_A(P, Q) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} p_i q_k.$$

Оптимальными смешанными стратегиями игроков A и B соответственно являются стратегии $P^0 = \{p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0\}$ и $Q^0 = \{q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0\}$, если выполнено следующее соотношение:

$$H_A(P, Q^0) \leq H_A(P^0, Q^0) \leq H_A(P^0, Q). \quad (38)$$

В этом соотношении:

– левое неравенство-отклонение игрока A от оптимальной стратегии P^0 при условии, что игрок B придерживается стратегии Q^0 , приводит к тому, что выигрыш отклонившегося игрока A может только уменьшиться;

– правое неравенство-отклонение игрока B от оптимальной стратегии Q^0 при условии, что игрок A придерживается стратегии P^0 , приводит к тому, что выигрыш игрока A может только возрасти, и, значит, выигрыш игрока B только уменьшиться.

Приведенное условие оптимальности (38) равносильно тому, что

$$\max_P \min_Q H_A(P, Q) = H_A(P^0, Q^0) = \min_Q \max_P H_A(P, Q). \quad (39)$$

Цена игры – величина $\eta = H_A(P^0, Q^0)$, определяемая формулой (39).

Решением матричной игры называется набор (P^0, Q^0, η) , состоящий из оптимальных смешанных стратегий игроков A и B , и цены игры.

Выясним, какие матричные игры имеют решение в смешанных стратегиях, и, если решение есть, как его найти.

Теорема 1 (Дж. Фон Нейман). Для матричной игры с любой матрицей A величины $\max_P \min_Q H_A(P, Q)$ и $\min_Q \max_P H_A(P, Q)$ равны между собой:

$$\max_P \min_Q H_A(P, Q) = \min_Q \max_P H_A(P, Q).$$

Более того, существует по крайней мере одна ситуация в смешанных стратегиях (P^0, Q^0) , для которой выполняется соотношение

$$H_A(P^0, Q^0) = \max_P \min_Q H_A(P, Q) = \min_Q \max_P H_A(P, Q).$$

Теорема 1 говорит о том, что любая матричная игра в смешанных стратегиях имеет решение.

Теорема 2. Пусть $P^0 = \{p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0\}$ и $Q^0 = \{q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0\}$ – оптимальные смешанные стратегии и η – цена игры. Оптимальная смешанная стратегия P^0 игрока A смешивается только из тех чистых стратегий A_i , $i = 1, 2, \dots, m$ (т. е. отличными от нуля могут быть вероятности p_i только с теми номерами $i = 1, 2, \dots, m$), для которых выполнены равенства

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} q_k^0 = \eta.$$

Теорема 2 говорит о том, что смешиваются не все чистые стратегии. Аналогично, в оптимальной смешанной стратегии Q^0 игрока B не равными нулю могут быть только те вероятности q_k , для номеров $k = 1, 2, \dots, n$ которых выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} p_i^0 = \eta,$$

и имеет место соотношение

$$\eta = \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ik} p_i^0 = \max_P \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ik} p_i = \min_Q \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n a_{ik} q_k = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n a_{ik} q_k^0 = \eta.$$

В матричной игре пар оптимальных стратегий может быть несколько.

2.3. Методы решения матричных игр

Рассмотрим матричную игру, у которой число стратегий хотя бы одного из игроков равно двум, т. е. игру $2 \times n$ и игру $m \times 2$. Здесь эффективно применить *графический метод решения*.

2.3.1. Игры $(2 \times n)$

Графический метод нахождения оптимальных стратегий возможен и достаточно прост.

Пусть дана платежная матрица игры $2 \times n$ —
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Нахождение цены игры и оптимального значения p^0 для игрока A сводится (по теореме о двойном описании игры) к решению уравнения

$$\eta = \min_{1 \leq k \leq n} (a_{1k} p^0 + a_{2k} (1 - p^0)) = \max_{0 \leq p \leq 1} \min_{1 \leq k \leq n} (a_{1k} p + a_{2k} (1 - p)).$$

Алгоритм нахождения искомого результата.

1. Поиск седловой точки. При ее отсутствии решение игры нужно искать в смешанных стратегиях.

2. Нахождение средних выигрышей игрока A $w = a_{1k} p + a_{2k} (1 - p)$ (проводится при условии, что игрок B выбирает только чистые стратегии).

3. Построение нижней огибающей на координатной плоскости (p, w) .

4. Отыскание цены игры и оптимальной смешанной стратегии игрока A .

Опишем *план нахождения графическим методом* максимума функции игрока A

$$\max_{1 \leq k \leq n} (a_{1k}p + a_{2k}(1-p)). \quad (40)$$

1. Допустим, что игрок A выбрал смешанную стратегию $P = \{p, 1-p\}$, а игрок B – k -ю чистую стратегию, $k = 1, 2, \dots, n$. В этом случае в ситуации $\{P, k\}$ средний выигрыш игрока A оказывается равным

$$(k): \quad w = a_{1k}p + a_{2k}(1-p).$$

Очевидно, что уравнение (k) на плоскости (p, w) описывает прямую, а следовательно, каждой чистой стратегии игрока B на этой плоскости соответствует своя прямая.

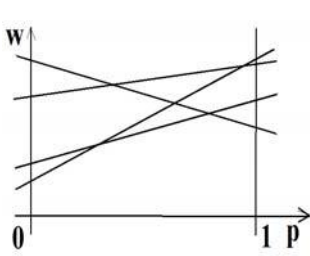


Рис. 11

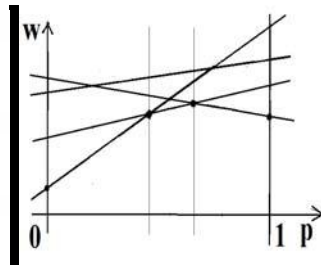


Рис. 12

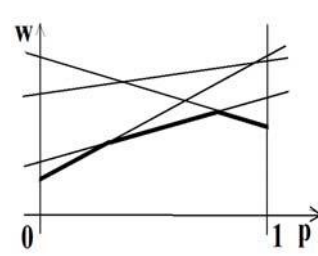


Рис. 13

Поэтому сначала на плоскости (p, w) рисуются все прямые:

$$(k): \quad w = a_{1k}p + a_{2k}(1-p) \quad (\text{рис. 11}).$$

2. Для каждого значения p , $0 \leq p \leq 1$ путем визуального сравнения соответствующих ему значений w на каждой из построенных прямых определяется и отмечается минимальное из них (рис. 12).

3. В результате получается ломаная, которая и является графиком функции (37) (выделена жирным на рис. 13). Эта ломаная как бы огибает снизу все семейство построенных прямых, и по этой причине ее принято называть *нижней огибающей* этого семейства.

4. Верхняя точка построенной нижней огибающей определяет и цену игры – η и оптимальную стратегию $P^0 = \{p^0, 1-p^0\}$ игрока A . (рис. 14).

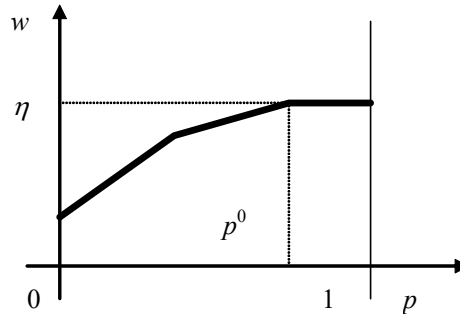


Рис. 14

Покажем, как ищется оптимальная смешанная стратегия игрока B .

В данном случае может быть несколько ситуаций, зависящих от формы нижней огибающей.

I. Нижняя огибающая имеет ровно одну наивысшую точку (p^0, w^0) .

1. Если $p^0 = 0$ (оптимальная стратегия игрока A – чистая стратегия A_2), то игроку B выгодно применять чистую стратегию, соответствующую номеру прямой, проходящей через точку $(0, w^0)$ и имеющей наибольший отрицательный наклон (рис. 15).

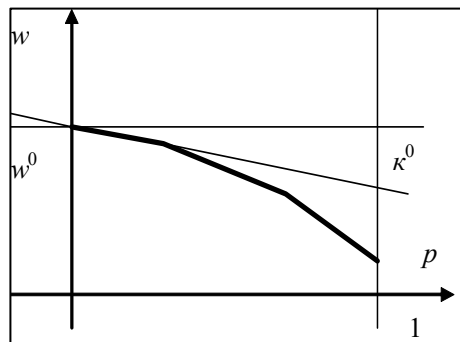


Рис. 15

2. Если $p^0 = 1$ (оптимальная стратегия игрока A – чистая стратегия A_1), то оптимальной для игрока B является чистая стратегия, соответствующая номеру прямой, проходящей через точку $(1, w^0)$ и имеющей положительный наклон (рис. 16).

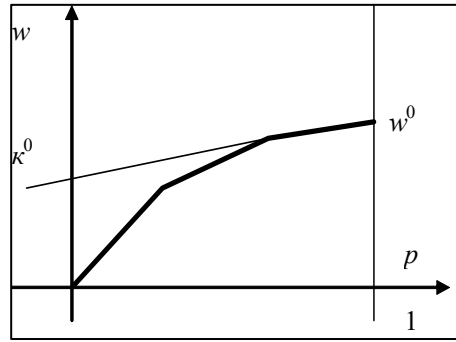


Рис. 16

3. Если $0 < p^0 < 1$, то в наивысшей точке нижней огибающей пересекаются по крайней мере две прямые, одна из которых (k -я) имеет положительный наклон, а другая (ℓ -я) – отрицательный (рис. 17), и оптимальная смешанная стратегия игрока B получается, если положить

$$q_k = q, q_\ell = 1 - q, q_j = 0, j \neq k, \ell,$$

где q – решение уравнения $a_{1k}q + a_{1\ell}(1 - q) = a_{2k}q + a_{2\ell}(1 - q)$.

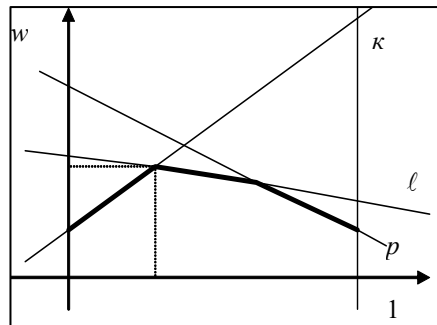


Рис. 17

4. Нижняя огибающая содержит горизонтальный участок, соответствующий чистой стратегии k^0 игрока B , которая и является оптимальной для него (рис. 18).

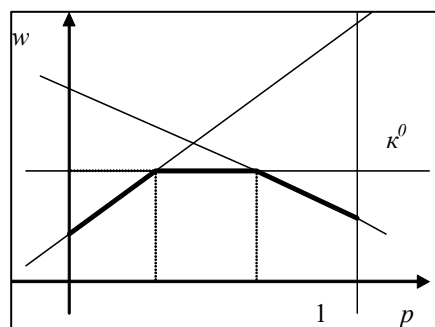


Рис. 18

Замечание. Ситуацию с наличием лишь двух конкурирующих стратегий игрока A нельзя считать надуманной, поскольку на практике она возникает сравнительно часто. Например, если нужно сравнить два образца некоторого изделия (скажем, старого и модернизированного) с целью выяснения возможности замены, это весьма удобно сделать при помощи платежной матрицы $2 \times n$.

Пример. Решить игру $2 \times n$, исходные данные которой приведены в табл. 38.

Таблица 38

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B						Вероятности использования чистых стратегий игроком A
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	6	4	3	1	-1	0	p
A_2	-2	-1	1	0	5	4	$1-p$
Вероятности использования чистых стратегий игроком B	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	

Решение. Проанализируем игру на наличие седловой точки. Нижняя цена игры равна $\alpha = -1$, верхняя равна $\beta = 1$. Седловой точки нет, так как $\alpha \neq \beta$, значит, решение надо искать в смешанных стратегиях.

Построим график нижней огибающей $\min_{1 \leq k \leq n} (a_{1k}p + a_{2k}(1-p))$. Предварительно запишем уравнения прямых на основе выражения

$$w_k = a_{1k}p + a_{2k}(1-p).$$

$$\begin{aligned}
 w_1 &= 6p - 2 \cdot (1 - p) = 8p - 2; \\
 w_2 &= 4p - 1 \cdot (1 - p) = 5p - 1; \\
 w_3 &= 3p + (1 - p) = 2p + 1; \\
 w_4 &= p + 0 \cdot (1 - p) = p; \\
 w_5 &= -p + 5 \cdot (1 - p) = -6p + 5; \\
 w_6 &= 0 \cdot p + 4 \cdot (1 - p) = -4p + 4.
 \end{aligned}$$

На рис. 19 изображены графики данных прямых.

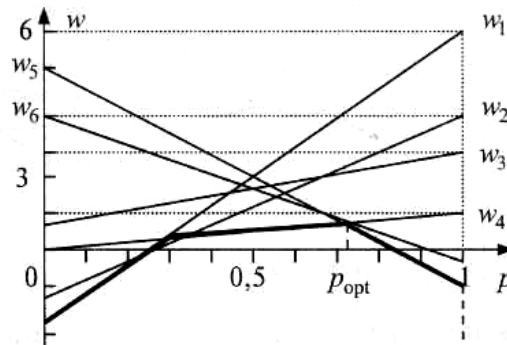


Рис. 19

На рис.19 видно, что точка максимума нижней огибающей ломаной лежит на пересечении прямых w_4 и w_5 .

Решив уравнение $p = -6p + 5$, получим $p_{opt} = \frac{5}{7}$. Значит, цена игры (средний выигрыш игрока A) равна $v = E(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt}) = \frac{5}{7}$.

Ответ. Цена игры и оптимальная стратегия игрока A равны:

$$v = \frac{5}{7}; \quad \bar{p}_{opt} = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7} \right).$$

2.3.2. Игры ($m \times 2$)

Рассмотрим ситуацию, когда в матричной игре две чистые стратегии имеет игрок B , а у игрока A число чистых стратегий равно m . В этом случае платежная матрица игры имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Анализ такой игры во многом напоминает рассуждения, описанные для игры $(2 \times n)$.

Допустим, $Q = \{q, 1 - q\}$ – произвольная смешанная стратегия игрока B . В случае, если игрок A выбирает i -ю чистую стратегию, $i = 1, 2, \dots, m$, то средний выигрыш игрока B в ситуации $\{i, Q\}$ будет равным

$$(i): w = a_{i1}q + a_{i2}(1 - q), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (41)$$

Очевидно, что уравнение (41) является уравнением прямой, описывающим зависимость этого выигрыша от переменной q , графиком функции $\max_{1 \leq i \leq m} (a_{i1}q + a_{i2}(1 - q))$ является верхняя огибающая семейства прямых, соответствующих чистым стратегиям игрока A (рис. 20).

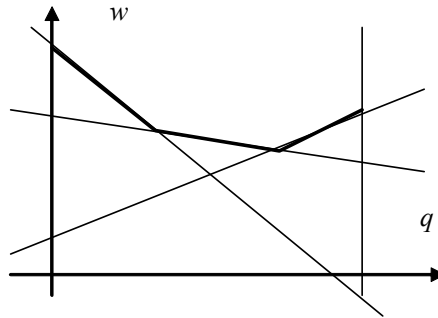


Рис. 20

Абсцисса q^0 нижней точки полученной ломаной определяет оптимальную смешанную стратегию игрока B , а ордината w^0 – цену игры.

Поиск оптимальной смешанной стратегии игрока A проводится аналогично поиску оптимальной смешанной стратегии игрока B в игре $2 \times n$.

Пример. Решить игру $(m \times 2)$, заданную платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 10 & 7 \\ 7 & 9 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение. Проанализируем игру на наличие седловой точки. Нижняя цена игры равна $\alpha = 7$, верхняя — $\beta = 11$. Седловой точки нет, так как $\alpha \neq \beta$, значит, решение надо искать в смешанных стратегиях.

Решим матричную игру графически. Построим прямые, соответствующие стратегиям игрока A (рис. 21).

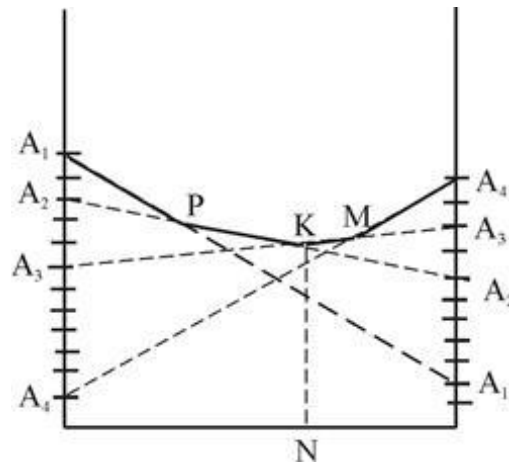


Рис. 21

Верхняя граница кривой A_1PKMA_4 изображает выигрыш игрока A . Точка K имеет наименьшую ординату, которая и есть цена игры. Поскольку точка K лежит на пересечении прямых A_2 и A_3 , то оптимальными стратегиями для игрока A будут вторая и третья. Получим матрицу оптимальных стратегий $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Применим формулы

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

По данным задачи получим

$$p_1 = \frac{9-7}{10+9-7-7} = \frac{2}{5};$$

$$p_2 = \frac{10-7}{10+9-7-7} = \frac{3}{5};$$

$$q_1 = \frac{9-7}{10+9-7-7} = \frac{2}{5};$$

$$q_2 = \frac{10-7}{10+9-7-7} = \frac{3}{5};$$

$$v = \frac{10 \cdot 9 - 7 \cdot 7}{10+9-7-7} = \frac{41}{5}.$$

Ответ. $p^* = \left(0; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; 0\right), q^* = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right).$

2.3.3. Игры ($m \times n$)

В некоторых ситуациях матричные игры больших размеров можно упростить без ущерба для правильности решения, сократив число чистых стратегий игроков. В основе такого преобразования лежит правило доминирования. Раскроем его суть.

Правило доминирования.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – произвольная $m \times n$ – матрица.

Будем говорить, что i -я строка $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ матрицы A не больше j -й строки $(a_{j1} \ a_{j2} \ \dots \ a_{jn})$ этой матрицы, если одновременно выполнены следующие n неравенств:

$$a_{i1} \leq a_{j1}, \ a_{i2} \leq a_{j2}, \ \dots, \ a_{in} \leq a_{jn}.$$

В этом случае говорят, что j -я строка доминирует i -ю или что стратегия A_j игрока A доминирует стратегию A_i .

При наличии строк-доминант число строк в матрице A можно уменьшить, отбросив доминируемую строку.

Аналогично k -й столбец $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ матрицы A не меньше s -го столбца $\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \dots \\ a_{ms} \end{pmatrix}$ этой матрицы, если одновременно выполнены следующие m неравенств:

$$a_{1k} \geq a_{1s}, a_{2k} \geq a_{2s}, \dots, a_{mk} \geq a_{ms}.$$

Здесь говорят, что s -й столбец доминирует k -й столбец, или что стратегия B_s доминирует стратегию B_k .

Если в матрице A один из столбцов доминирует другой столбец, то число столбцов в матрице A можно уменьшить путем отбрасывания доминируемого столбца.

Пример.

Пусть дана платежная матрица A , которую упростим за счет доминируемых строк и столбцов. Все преобразования представлены ниже:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

1. В исходной матрице, сравнивая поэлементно столбцы, очевидно, что второй столбец доминирует четвертый, который отбросим.

2. Аналогично во второй матрице третья строка доминирует первую, значит, отбросим первую строку.

3. В третьей матрице второй столбец доминирует третий, который удалим.

В итоге игру $(3 \times 4) A$ сократили до игры $(2 \times 2) A'$, которые эквивалентны друг другу, свели нахождение оптимальных стратегий игры к более простому решению.

Найдя оптимальные стратегии в игре с усеченной за счет доминируемых строк и столбцов матрицей, можно найти и оптимальное решение в исходной игре. При этом доминируемые чистые стратегии игроков в смешении не участвуют, а значит, соответствующие им вероятности следует взять равными нулю.

При описанном выше упрощении матрицы игры некоторые из оптимальных стратегий могут быть потеряны, но эта ситуация не изменит цену игры и даст хотя бы одну пару оптимальных решений.

2.4. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пусть дана платежная матрица $A = (a_{ik})$ игры $(m \times n)$, все элементы которой взяты положительными. Для этого можно воспользоваться преобразованиями матрицы, описанными в п. 2.3.3. В этом случае искомая цена игры W^o будет положительным числом.

Проанализируем интересы игрока A .

При любой чистой стратегии B_k , $k = 1, 2, \dots, n$ игрока B оптимальная смешанная стратегия $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ игрока A гарантирует ему средний выигрыш, не меньший W^o (по теореме о свойствах оптимальных смешанных стратегий игроков). Это значит, что

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} p_i \geq W^o, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

которые с учетом обозначений $x_i = \frac{p_i}{W^o}$, $i = 1, 2, \dots, m$

можно записать так:

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} x_i \geq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^m x_i = \frac{1}{W^o}, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Поскольку цель игрока A – максимально увеличить свой гарантированный выигрыш, то задача отыскания решения матричной игры сводится к поиску неотрицательных величин $x_1, x_2, \dots, x_m$, для которых выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} x_i \geq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^m x_i \rightarrow \min.$$

Проанализируем интересы игрока B .

При любой чистой стратегии A_i , $i = 1, 2, \dots, m$ игрока A оптимальная смешанная стратегия $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ игрока B гарантирует его средний проигрыш, не больший W^o . Это значит, что

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} q_k \leq W^o, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^n q_k = 1, \quad q_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

которые с учетом обозначений $y_k = \frac{q_k}{W^o}$, $k = 1, 2, \dots, n$,

можно записать так:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} y_k \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{W^o}, \quad y_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку цель игрока B – минимизировать гарантированный проигрыш, то поиск решения матричной игры заключается в нахождении неотрицательных величин $y_1, y_2, \dots, y_n$, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} y_k \leq 1, i = 1, 2, \dots, m, \sum_{k=1}^n y_k \rightarrow \max.$$

Таким образом, мы подошли к следующему важному утверждению

Теорема. Решение матричной игры с положительной платежной матрицей (a_{ik}) равносильно решению двойственных задач линейного программирования (табл. 39):

Таблица 39

(A)	(B)
$\sum_{i=1}^m x_i \rightarrow \min$	$\sum_{k=1}^n y_k \rightarrow \max$
$\sum_{i=1}^m a_{ik} x_i \geq 1, k = 1, 2, \dots, n$	$\sum_{k=1}^n a_{ik} y_k \leq 1, i = 1, 2, \dots, m,$
$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$	$y_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n.$

Здесь цена игры

$$W^o = \frac{1}{\theta}, \text{ где } \theta = \sum_{i=1}^m x_i^o = \sum_{k=1}^n y_k^o,$$

$$\text{а } p_i^o = \frac{x_i^o}{\theta}, i = 1, 2, \dots, m, , q_k^o = \frac{y_k^o}{\theta}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Алгоритм решения матричной игры.

1. Преобразовываем исходную матрицу игры так, чтобы все ее элементы были строго положительны. Для этого находим такое положительное число C , при сложении которого с каждым элементом матрицы результат был бы достигнут.

2. Решаем двойственные задачи линейного программирования (A) и (B) (см. табл. 39) и находим (x_i^o, y_k^o) и число θ .

3. Строим оптимальные смешанные стратегии игроков A и B соответственно:

$$p_i^o = \frac{x_i^o}{\theta}, q_k^o = \frac{y_k^o}{\theta}.$$

Находим цену игры:

$$W^o = \frac{1}{\theta} - C.$$

2.5. Игры с природой

Парная игра, в которой заинтересованный в результате игры игрок A выступает против соперника, безразличного к итогу игры, называется *игрой с природой*. Другими словами, игра с природой – смоделированная конфликтная ситуация, в которой игрок с осознанной целью вынужден принимать стратегические решения при воздействии комплекса внешних факторов.

Игрок A называется *статистиком*, а его соперник (комплекс внешних факторов) – *природой*.

В играх с природой, в отличие от рассмотренных парных игр, достаточно найти оптимальные стратегии только для статистика, так как природа не стремится обратить ситуацию в свою пользу и развивается в ее процессе по своим, не зависимым от требований статистика, правилам.

Проанализируем такую игру.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ – стратегии статистика, а $P_1, P_2, \dots, P_n$ – состояния природы.

Различают два вида игр с природой:

1. Задача о поиске оптимального решения в условиях риска, когда известны вероятности состояний природы.
2. Задача о принятии решения в условиях неопределенности, когда вероятности состояний природы определить невозможно.

В случае, если статистик знает вероятности a_{ik} применения каждой своей чистой стратегии A_i , зависящие от любой стратегии природы P_k , то игру можно задать платежной матрицей (табл. 40).

Таблица 40

	Π_1	Π_2	$\dots$	Π_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	α_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	α_m
β_k	β_1	β_2	$\dots$	β_n	

Здесь $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$ – минимально возможные выигрыши статистика при стратегии A_i ; $\beta_j, j = 1, 2, \dots, n$ – максимально возможные выигрыши статистика при состоянии Π_k .

Для анализа и решения игры с природой, кроме платежной матрицы, применяется также матрица рисков статистика.

Риском статистика r_{ik} называют разность между максимальным выигрышем $\max_i a_{ik}$, который он мог бы получить, достоверно зная, что природа реализует состояние Π_k , и тем выигрышем a_{ik} , который он получит, используя стратегию A_i , не зная, какое состояние Π_k природа реализует:

$$r_{ik} = \max_i a_{ik} - a_{ik} = \beta_k - a_{ik} \geq 0. \quad (42)$$

В решении игр с природой часто удобно использовать средние показатели рисков и выигрыша, которые вычисляются соответственно по формулам

$$\overline{r_i} = \sum_{k=1}^n r_{ik} q_k, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (43)$$

$$\overline{a_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} q_k, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (44)$$

В этих формулах q_k – вероятность наступления события Π_k . Применяя формулы (43) и (44), получим матрицу рисков статистика (табл. 41).

Таблица 41

	Π_1	Π_2	...	Π_n	$\bar{r}_i$
A_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1n}	$\bar{r}_1$
A_2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2n}	$\bar{r}_2$
...	...	...	...	...	...
A_m	r_{m1}	r_{m2}	...	r_{mn}	$\bar{r}_m$
q_k	q_1	q_2	...	q_n	

Применив формулы (43), табл. 41 можно записывать также в виде табл. 42.

Таблица 42

	Π_1	Π_2	...	Π_n	$\bar{a}_i$
A_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1n}	$\bar{a}_1$
A_2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2n}	$\bar{a}_2$
...	...	...	...	...	...
A_m	r_{m1}	r_{m2}	...	r_{mn}	$\bar{a}_m$
q_k	q_1	q_2	...	q_n	

Пример. Построить матрицу рисков по следующей платежной матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Применим формулу $a_k = \max_i a_{ik}$. Получим

$$a_1 = \max_i a_{i1} = 4;$$

$$a_2 = \max_i a_{i2} = 8;$$

$$a_3 = \max_i a_{i3} = 6;$$

$$a_4 = \max_i a_{i4} = 9.$$

По формуле (42) $r_{ik} = \max_i a_{ik} - a_{ik} = \beta_k - a_{ik} \geq 0$ найдем элемент матрицы рисков $r_{11} = 4 - 1 = 3$.

Аналогично рассчитаем все остальные элементы матрицы рисков:

$$r_{12} = 8 - 4 = 4 ; r_{13} = 6 - 5 = 1 ; r_{14} = 9 - 9 = 0 ; r_{21} = 4 - 3 = 1 ;$$

$$r_{22} = 8 - 8 = 0 ; r_{23} = 6 - 5 = 1 ; r_{24} = 9 - 3 = 6 ; r_{31} = 4 - 4 = 0 ;$$

$$r_{32} = 8 - 6 = 2 ; r_{33} = 6 - 6 = 0 ; r_{34} = 9 - 2 = 7 .$$

Таким образом, получили матрица рисков $R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, которая

позволяет изучить некоторые особенности проведения данной игры с природой.

На примере нашей задачи, в частности, можно сделать следующие заключения: в случае выбора статистиком стратегии A_2 он получит одинаковые выигрыши $a_{21} = a_{24} = 3$, но с точки зрения рисков эти выигрыши теряют свою равноценность, так как при выборе стратегии A_2 риски игрока при состояниях природы Π_1, Π_4 не равны: $r_{21} = 1; r_{24} = 6$.

Иными словами, при состоянии природы Π_1 игрок максимально мог бы выиграть $a_{31} = 4$ ед., а выбрав стратегию A_2 и получив выигрыш $a_{21} = 3$ ед., он теряет 1 ед. Аналогично при состоянии природы Π_4 игрок мог бы получить максимальный выигрыш $a_{14} = 9$ ед., но при выборе стратегии A_2 он, получив такой же выигрыш, равный 3, теряет при этом 6 ед. Именно в этом смысл матрицы рисков.

Перед поиском оптимальных стратегий статистика необходимо пройти некоторые подготовительные этапы, а именно:

- 1) проанализировать игру на наличие седловой точки;
- 2) в случае отсутствия седловой точки (т. е. нижняя и верхняя цены игры не равны) и, если это возможно, упростить платежную матрицу, учитывая доминирование стратегий статистика. Упрощать матрицу за

счет отбрасывания стратегий природы нельзя, что как она реализует свои состояния независимо от того, выгодны они статистику или нет;

3) после упрощения платежной матрицы перейти к матрице рисков.

При поиске оптимальных решений в играх с природой применяются несколько критериев, дающих некоторую схему принятия решений.

Разберем основные критерии.

Критерий Байеса (статистический, наибольшего среднего результата, максимального математического ожидания). Критерий Байеса применяется в случае, если статистику известны вероятности q_k наступления события Π_k , которые, как правило, определяются опытным путем и называются *апостериорными*. По критерию Байеса оптимальной стратегией статистика будет та чистая стратегия A_i , при которой средний выигрыш a_i максимизируется или средний риск r_j минимизируется. Недостаток критерия заключается в том, что не всегда можно точно определить вероятность того или иного состояния природы. Формулой для этого критерия является

$$\max \bar{a}_i = \max \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j .$$

Критерий Лапласа (критерий максимума математического ожидания выигрыша). Критерий Лапласа отличается от критерия Байеса тем, что апостериорные вероятности неизвестны, и их полагают равными т. е. $q_1 = q_2 = \dots = q_n = \frac{1}{n}$. Формула для критерия:

$$\max \bar{a}_i = \frac{1}{n} \max \sum_{j=1}^n a_{ij} .$$

Критерий Сэвиджа (критерий крайнего пессимизма). Этот критерий применяется в ситуации, если статистик предполагает наиболее неблагоприятные для него действия со стороны природы и, как следствие, ожидает больших для себя потерь. По критерию Сэвиджа выбирать в качестве оптимальной надо ту чистую стратегию A_i , при которой максимальный риск является минимальным (минимакс). Формула для критерия:

$$r = \min_i \max_k r_{ik}.$$

Критерий Вальда. Этот критерий также является критерием крайнего пессимизма, но отличается от критерия Сэвиджа тем, что рекомендуется выбирать такую чистую стратегию A_i , при которой наименьший выигрыш будет максимальным (максимин). Формула для критерия:

$$a = \max_i \min_k a_{ik}.$$

Критерий Гурвица (критерий пессимизма-оптимизма). Данный критерий применяется по средним характеристикам между крайним пессимизмом и высоким оптимизмом. Предполагается, что природа пребывает в самом невыгодном для статистика состоянии с вероятностью $1 - \gamma$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью γ (γ – коэффициент пессимизма). Исходя из этого предположения рекомендуется выбирать такую чистую стратегию A_i , для которой выполняется условие

$$G = \max_i (\gamma \min_k a_{ik} + (1 - \gamma) \max_k a_{ik}),$$

где $\gamma=0 \div 1$ выбирается экспертным путем. При $\gamma=1$ критерий Гурвица преобразуется в критерий Вальда.

При решении игр с природой рекомендуется применять все критерии, по результатам которых выбирается наиболее часто встречающаяся оптимальная стратегия.

Пример. Перед торговой фирмой поставлена задача разработки нескольких вариантов плана продажи товаров на предстоящий период с учетом меняющейся конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Варианты прибыли, получаемые от возможных сочетаний, даны в виде матрицы выигрышей в табл. 43, причем коэффициент пессимизма заявлен как $\lambda = 0,6$.

Таблица 43

Планы продажи	Состояние конъюнктуры рынка и спроса			
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	150	150	150	150
A_2	100	300	300	300
A_3	50	250	450	450
A_4	0	200	400	600

Требуется составить оптимальный план продажи товаров.

Решение. Данная задача относится к решению игры с природой, в которой статистиком выступает торговая фирма, а за природу выступают состояние конъюнктуры рынка и спроса.

Представим табл. 43 в виде матрицы платежей:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 150 & 150 & 150 \\ 100 & 300 & 300 & 300 \\ 50 & 250 & 450 & 450 \\ 0 & 200 & 400 & 600 \end{pmatrix}.$$

Как было сказано выше, для решения игры с природой используется ряд критериев, ни один из которых не является универсальным, так как каждый из них основывается на своих допущениях. Поэтому применим к задаче все критерии и выберем то решение, которое чаще всего появляется, как рекомендуемое.

Критерий Вальда. Поскольку данный критерий применяется в предположении, что природа реализует свое самое невыгодное для

статистика состояние, статистик стремится из наименьших выигрышей выбрать наибольший и тем самым получить гарантию хотя бы наименьшего выигрыша $a = \max_i \min_k a_{ik}$, где a_{ik} — элемент матрицы выигрышей.

Для этого из каждой строки матрицы A выбираем минимальный элемент, а затем среди полученных значений выбираем максимальное:

$$a = \max_i \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = 150,$$

что соответствует стратегии A_1 , которая (по данному критерию) и является оптимальной, гарантирующей выигрыш, равный 150.

Критерий минимального риска Сэвиджа. Аналогично крайне пессимистическому критерию Вальда статистик имеет для себя крайне неблагоприятный прогноз в игре с природой, но, в отличие от критерия максимина, ориентируется не на выигрыш, а на риск проигрыша:

$r = \min_i \max_k r_{ik}$, где r_{ik} — элемент матрицы рисков.

Составим матрицу рисков. По формуле $a_k = \max_i a_{ik}$ найдем

$$a_1 = 150, a_2 = 300, a_3 = 450, a_4 = 600.$$

Применив формулу $r_{ik} = \max_i a_{ik} - a_{ik} = \beta_k - a_{ik} \geq 0$, получим матрицу рисков

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 300 & 450 \\ 50 & 0 & 150 & 300 \\ 100 & 50 & 0 & 150 \\ 150 & 100 & 50 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь применяем формулу $r = \min_i \max_k r_{ik}$:

$$r = \min_i \begin{pmatrix} 450 \\ 300 \\ 150 \\ 150 \end{pmatrix} = 150.$$

Получили, что минимальный риск дают две стратегии – A_3 и A_4 , которые считаются оптимальными с точки зрения критерия Сэвиджа.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Согласно этому критерию, оптимальную стратегию определяют из соотношения $\max_i (\gamma \min_k a_{ik} + (1 - \gamma) \max_k a_{ik})$, где γ – коэффициент пессимизма, который принимает значения в диапазоне: $0 \leq \gamma \leq 1$. При $\gamma = 1$ получаем крайний пессимизм (критерий Вальда); при $\gamma = 0$ получаем крайний оптимизм. Обычно коэффициент пессимизма берут как нечто среднее и исходя из субъективных соображений.

В нашем случае

$$G = \max_i \left(0,6 \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,4 \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 450 \\ 600 \end{pmatrix} \right) = \max_i \begin{pmatrix} 150 \\ 180 \\ 210 \\ 240 \end{pmatrix} = 240.$$

Согласно критерию Гурвица, наилучшей считается стратегия A_4 .

Критерий Лапласа. Поскольку вероятности состояний природы статистику неизвестны, допустим их равновероятными, т. е.

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}.$$

Отсюда средний выигрыш от применения i -й стратегии находим по формуле

$$M_i = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 a_{ik}, i = 1, 2, 3, 4.$$

Получим

$$M_1 = \frac{1}{4}(150 + 150 + 150 + 150) = 150;$$

$$M_2 = \frac{1}{4}(100 + 300 + 300 + 300) = 250;$$

$$M_3 = \frac{1}{4}(50 + 250 + 450 + 450) = 300;$$

$$M_4 = \frac{1}{4}(0 + 200 + 400 + 600) = 300.$$

Среди найденных средних выигрышей выберем максимальный

$$\max_i M_i = M_3 = M_4 = 300.$$

Путем данных рассуждений получили две оптимальные стратегии – A_3 и A_4 .

Критерий минимального среднего риска. Проанализируем матрицу рисков в допущении, что вероятности рисков равны

$$R_i = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 r_{ik}.$$

По этой формуле найдем средние значения рисков и выберем из них минимальное

$$R_1 = \frac{1}{4}(0 + 150 + 300 + 450) = 225;$$

$$R_2 = \frac{1}{4}(50 + 0 + 150 + 300) = 125;$$

$$R_3 = \frac{1}{4}(100 + 50 + 0 + 150) = 75;$$

$$R_4 = \frac{1}{4}(150 + 100 + 50 + 0) = 75.$$

$$\min_i R_i = R_3 = R_4 = 75.$$

По этому критерию также получили две оптимальные стратегии – A_3 и A_4 .

Вывод: по совокупности критериев оптимальной следует признать стратегию A_4 .

Раздел 3. МЕТОДЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Основные понятия теории графов

На практике некоторые процессы удобно изобразить в виде рисунков, состоящих из точек (вершин) и линий (ребер), соединяющих определенные пары этих вершин. Вершины – это основные ситуации, ребра – связи между ними. Такие рисунки называли *графами*.

Применяют графы и при исследовании систем методом пространства состояний. Здесь вершины – состояния системы, процесса, ребра – действия, которые могут изменить состояние. При решении оптимизационных задач вершинами могут быть предполагаемые решения, ребрами – правила для их нахождения.

Маршрутом (путем) в графе, соединяющим вершины A и B , называется такая последовательность его ребер, в которой каждые два ребра имеют общую концевую точку, причем первое ребро выходит из вершины A , а последнее входит в вершину B (рис. 22). Например, маршрутами от точки A до точки B могут быть ADB или $ACEDB$ и т. д.

Граф называется *связанным*, если для любых двух его вершин может быть указан маршрут, по которому из одной вершины можно попасть в другую.

На рис. 22 – связанный граф, на рис. 23 – несвязные графы.

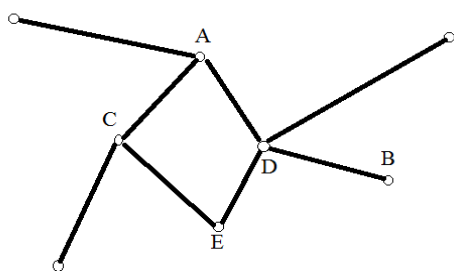


Рис. 22

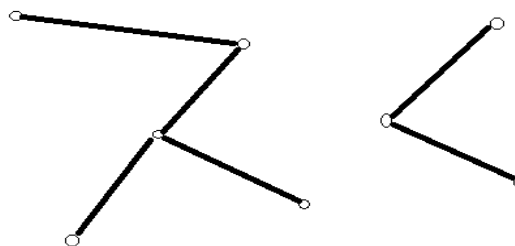


Рис. 23

Маршрут, не содержащий повторяющихся ребер, называется *цепью*. Вершины в цепи могут повторяться несколько раз.

Например, на рис. 24 маршрут $ADCEDB$ является цепью, маршрут $ACDECDDB$ цепью не является.

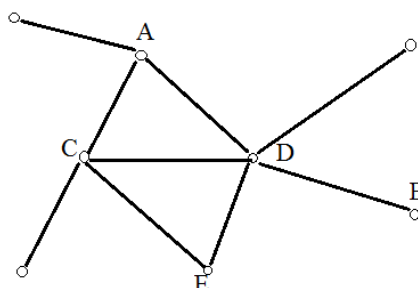


Рис. 24

Цикл – это цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают.

Например, на рис. 22 цепь – $ADECA$.

Число сходящихся в вершине ребер называется ее *степенью* (порядком).

Вершина называется *четной*, если в ней сходится четное число ребер. Такой граф называется *эйлеровым графом*. Вершина называется *нечетной*, если сходящееся в ней число ребер нечетно. На рис. 24 вершина C – четна, вершина D – нечетна.

Конечным графом называется граф с конечным числом ребер.

Теорема Эйлера. В любом конечном связанном графе, все вершины которого четны, существует цикл, в котором каждое ребро графа участвует ровно один раз. Такой цикл называется *эйлеровым циклом*.

Пример. Найти эйлеров цикл для графа, представленного на рис. 25, взяв за начальную вершину A .

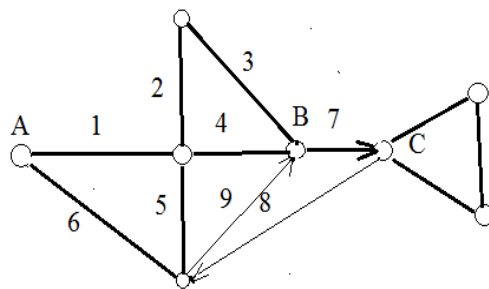


Рис. 25

Решение. Проверим, что это эйлеров граф. В начальную вершину A можно вернуться, в частности, по ребрам 1, 2, 3, 4, 5, 6. Поскольку в полученный цикл входят не все ребра, продолжим анализ. В данном цикле обязательно есть вершина, из которой выходят еще не пройденные ребра, которых четное число. Допустим, что это вершина B , из которой построим вторую цепь, исключая пройденные ранее ребра. На рис. 24 это ребра 7, 8, 9.

Объединив построенные два цикла, получим суммарный цикл (рис. 26). Пройдем его по ребрам 1, 2, 3 из вершины A до вершины B , затем – по второму циклу 7, 8, 9 вернемся в вершину B , далее по ребрам 4, 5, 6 дойдем до начальной вершины A .

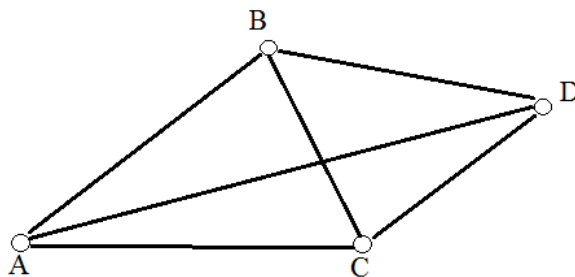


Рис. 26

Наконец, из вершины C строим, совместив его с двумя предыдущими, третий цикл – 1, 2, 3, 7, 10, 11, 12, 8, 9, 4, 5, 6, в который входят все ребра графа (см. рис. 25).

Эйлеров граф построен.

Если цикл проходит через каждую вершину графа ровно по одному разу, он называется *гамильтоновым*. Если заданный граф допускает гамильтонов цикл, то он называется *гамильтоновым графом*. На данный момент нет критерия определения гамильтонова графа и не известны алгоритмы его поиска. Однако задача построения гамильтонова цикла является весьма актуальной.

Орграфом называется граф, у которого ориентированы ребра, т. е. указаны начало и конец каждого из них (рис. 27).

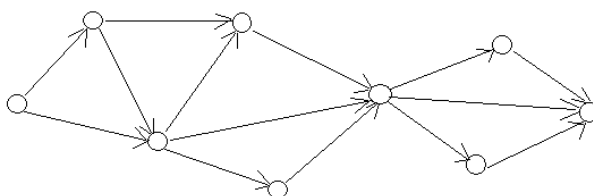


Рис. 27

Граф, не имеющий циклов, называется *деревом* (рис. 28).

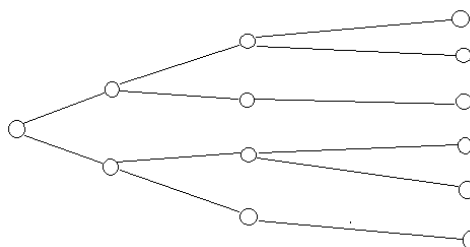


Рис. 28

3.2. Система сетевого планирования и управления

В математических моделях экономических процессов граф называется *сетью* или *сетевым графиком*.

Планирование и управление комплексом работ по тому или иному проекту – сложная и достаточно противоречивая задача, при решении которой оценка временных и стоимостных параметров функционирования системы осуществляется различными методами, среди которых большое значение имеет *метод сетевого планирования*.

Сетевое планирование — это совокупность расчетных методов и контрольных мероприятий по планированию и управлению комплексом работ с помощью сетевого графика.

Система сетевого планирования и управления позволяет решить следующий комплекс задач:

- 1) сформировать план выполнения некоторого комплекса работ, в частности управления проектом;
- 2) выявить временные, трудовые, материальные и денежные ресурсы;
- 3) осуществить управление работами с прогнозированием и предупреждением возможных срывов.

Основными элементами сетевой модели являются *события* и *работы*. События на схеме обозначаются кружком или квадратом, работы — направленным отрезком прямой, соединяющим события. Пример фрагмента сетевого графика представлен на рис. 29.

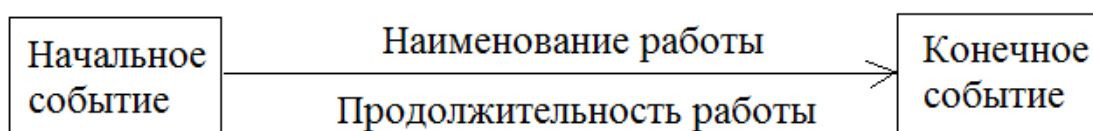


Рис. 29

Под работой при построении сетевого графика понимают ожидание (т. е. протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда) и фиктивную работу, указывающую, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов другой. Фиктивная работа показывает логическую связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов и времени.

Начальным этапом планирования управленческой деятельности является составление сетевых графиков. Для этого весь планируемый

процесс разбивается на отдельные работы и события, определяются их логические связи, последовательности выполнения и длительность каждой работы, на основании чего и составляется сетевой график. После упорядочения сетевого графика определяются параметры событий и работ, резервы времени и критический путь, проводятся анализ и оптимизация сетевого графика.

3.3. Правила построения сетевых графиков

При построении сетевого графика соблюдаются следующие несложные логические правила.

1. График должен быть простым, без лишних пересечений.
2. Стрелки (работы) должны быть направлены слева направо.
3. Между двумя событиями может быть изображена только одна работа (рис. 30).

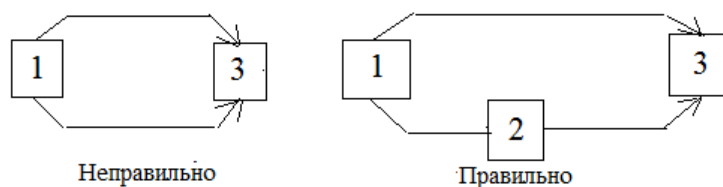


Рис. 30

4. В сетевом графике не должно быть тупиков, т. е. событий, из которых не выходит ни одна работа (кроме заключительного события), а также событий, которым не предшествует хотя бы одна работа (кроме начального события). На рис. 31 событие 1 – тупик, а событию 2 не предшествует ни одна работа.

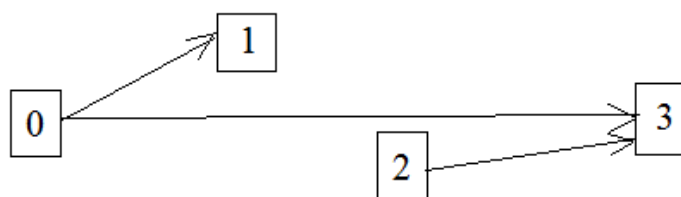


Рис. 31

5. В сетевом графике не должно быть путей, соединяющих некоторые события с ними же самими (рис. 32).

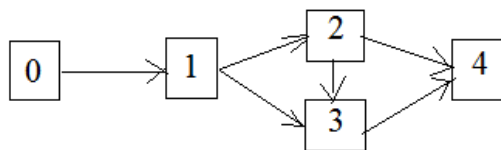


Рис. 32

6. В сети не должно быть событий, обозначенных одинаковыми кодами.

Располагаться события и работы должны упорядоченно, т. е. слева направо в порядке возрастания кодов.

Пример. Построить сетевой график создания опытного образца боевого пистолета. Перечень планируемых работ приведен в табл. 44.

Таблица 44

№ п/п	Код работы	Виды работ	Сроки выполнения работы, недели
1	0 – 1	Разработка технического задания	3
2	1 – 5	Проведение патентного поиска	5
3	1 – 2	Составление блок-схемы	3
4	1 – 3	Разработка эскизного проекта	4
5	2 – 4	Разработка принципиальной схемы	3
6	4 – 5	Проведение расчетов	2
7	3 – 5	Макетирование блоков	5
8	5 – 7	Разработка конструкторской документации	4
9	5 – 6	Разработка технологической документации и оснастки	5
10	6 – 7	Изготовление оснастки	5
11	2 – 7	Выбор и приобретение комплектующих	4
12	7 – 8	Изготовление опытного образца	5
13	8 – 9	Испытание опытного образца и корректировка документации	3

Решение. На рис. 33 представлен сетевой график работ. В квадратах указан номер, соответствующий виду работы; стрелками отмечены связи между работами; рядом со стрелками указаны продолжительности работ в неделях.

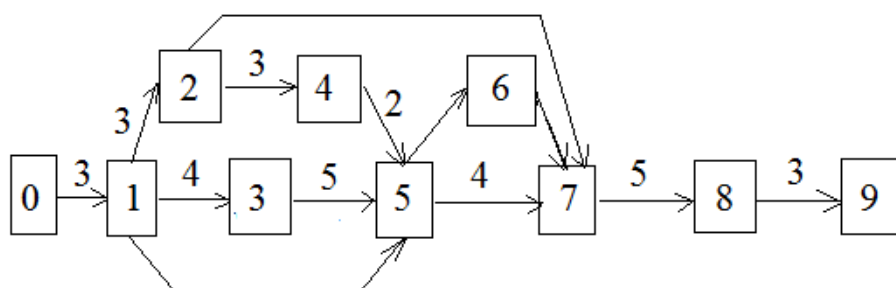


Рис. 33

Путь – это любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.

Полный путь – это любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, конец – с завершающим.

Например, на рис. 33 путь от события 1 до события 5 – это цепь 1–2, 2–4, 4–5, или 1–3, 3–5, или 1–5; полный путь – 0–1, 1–5, 5–7, 7–8, 8–9.

Критический путь – это полный путь, имеющий наибольшую продолжительность всех работ.

Критическими называются работы и события, расположенные на критическом пути.

3.4. Временные параметры сетевых графиков

При анализе сетевых графиков используются следующие временные параметры:

1. Ранний срок наступления заданного события равен продолжительности максимального пути, предшествующего этому событию:

$$t_p(i) = \max_i t_{p,k}(i), \quad (45)$$

где $t_{p,k}(i)$ – срок свершения i -го события при использовании пути под номером k , предшествующего этому событию.

Если событие j имеет предшествующих событий i_m , то ранний срок свершения события j находится по формуле

$$t_p(j) = \max_{i_m} (t_p(i_m) + t(i_m, j)), \quad (46)$$

где t – номер предшествующего события; $t(i_m, j)$ – продолжительность работы $i_m - j$.

2. Поздний срок $t_n(i)$ наступления заданного i -го события равен продолжительности критического пути без продолжительности максимального пути, следующего за этим событием:

$$t_n(j) = t_{kp} - \max_r t_r(i, J), \quad (47)$$

где J – номер завершающего события; r – номер пути от события i до события J ; $t_r(i, J)$ – продолжительность пути под номером r от события i до завершающего события j .

Второй способ определения позднего срока предполагает движение по сети справа налево:

$$t_n(i) = \max_l (t_n(j_l) - t(i, j_l)), \quad (48)$$

где l – номер пути от события i до события j_l ; $t(i, j_l)$ – продолжительность пути под номером l от события i до события j_l .

3. Резерв времени заданного события равен разности между поздним и ранним сроками его свершения:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i). \quad (49)$$

Здесь *необходимым условием* является прохождение критического пути через события с нулевыми резервами времени. *Достаточным условием* является то, что для критических работ должно выполняться условие

$$t_p(j) - t_p(i) = t(i, j).$$

Пример. Определить ранний и поздний сроки свершения всех событий задачи 1, их резервы времени и критический путь.

Решение. Для определения раннего срока свершения событий применим формулы (45) и (46) и результаты расчетов внесем в табл. 45.

Таблица 45

№ п/п	Сроки свершения событий, недели		Резерв времени $R(i)$ недели
	Ранний, $t_p(i)$	Поздний, $t_n(i)$	
0	$t_p(0) = 0$	$t_n(0) = 3 - 3 = 0$	0
1	$t_p(1) = 3$	$t_n(1) = (7 - 3; 7 - 4; 12 - 5) = 3$	0
2	$t_p(2) = 3 + 3 = 6$	$t_n(2) = (10 - 3; 22 - 4) = 7$	1
3	$t_p(3) = 3 + 4 = 7$	$t_n(3) = 12 - 5 = 7$	0
4	$t_p(4) = 6 + 3 = 9$	$t_n(4) = 12 - 2 = 10$	1
5	$t_p(5) = (7 + 5; 3 + 5) = 12$	$t_n(5) = (22 - 4; 22 - 10) = 12$	0
6	$t_p(6) = 12 + 5 = 17$	$t_n(6) = 22 - 5 = 17$	0
7	$t_p(7) = (17 + 5; 6 + 4) = 22$	$t_n(7) = 27 - 5 = 22$	0
8	$t_p(8) = 22 + 5 = 27$	$t_n(8) = 30 - 3 = 27$	0
9	$t_p(9) = 27 + 3 = 30$	$t_n(4) = 30$	0

Здесь видим, что поздний срок свершения последнего события совпадает с его ранним сроком, т. е. $t_n(9) = 30$. Далее считаем по формуле (48) при движении справа налево. В результате критиче-

ский путь проходит через события с нулевыми резервами времени через следующие работы: 0–1; 1–3; 3–5; 5–6; 6–7; 7–8; 8–9 (рис. 33).

Длина критического пути $t_{кр} = 30$ недель.

Отметим результаты расчетов прямо на графике (рис. 34).

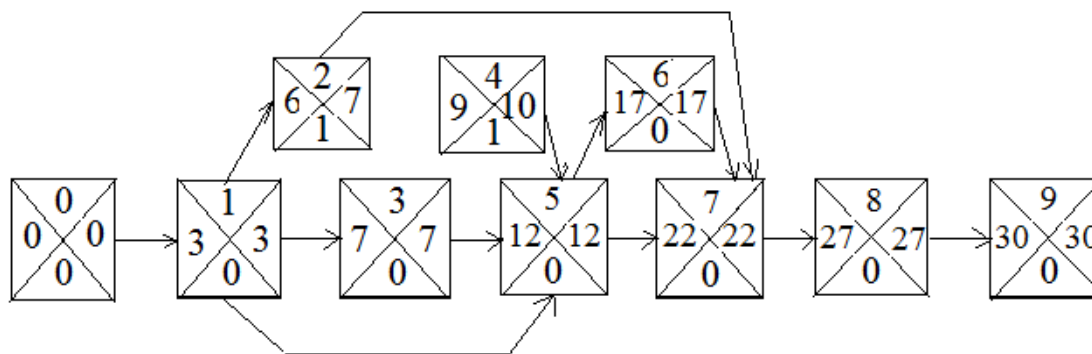


Рис. 34

На рис. 34 представлен сетевой график рис. 33, на котором в разделенных на четыре части квадратах-событиях сверху проставлены номера событий, слева – ранний срок свершения этих событий, справа – поздний срок свершения события, внизу – резерв времени данного события.

3.5. Резервы времени

Резерв времени любого заданного полного пути равен разности между длиной критического и рассматриваемого путей:

$$R(L) = t_{кр} - t(L), \quad (50)$$

где $R(L)$ – резерв времени любого полного пути L ;

$t(L)$ – длина рассматриваемого пути L .

Резерв времени заданного полного пути показывает, на сколько можно увеличить продолжительность всех работ, принадлежащих этому пути, без увеличения общего срока работ.

Полный резерв времени заданной работы $(i; j)$ показывает, на сколько можно увеличить время выполнения этой работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменится:

$$R_{полн}(i; j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i; j), \quad (51)$$

где $R_{полн}(i; j)$ – полный резерв времени работы $(i; j)$;

$t_n(j)$ – поздний срок свершения j -го события;

$t_p(i)$ – ранний срок свершения i -го события;

$t(i; j)$ – время выполнения работы $(i; j)$.

Графически сроки работ, представленные в формуле (51), показаны на рис. 35.

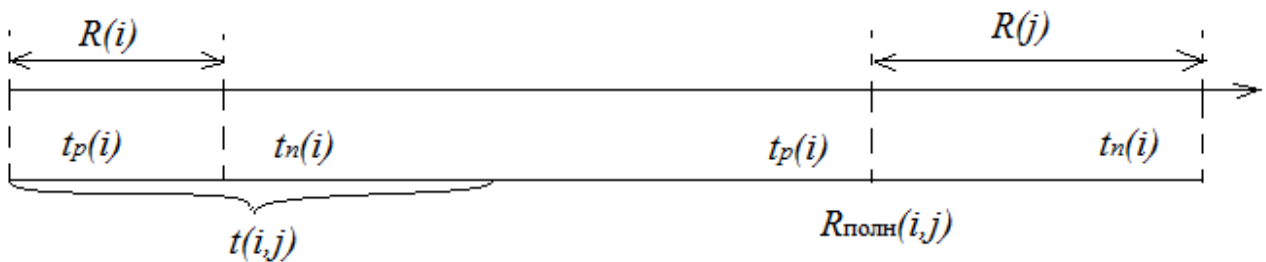


Рис. 35

На нижнем отрезке рис. 35 время $t(i; j)$ выполнения работы $(i; j)$ показано скобкой. Оставшаяся часть отрезка представляет собой полный резерв времени $R_{полн}(i; j)$ работы $(i; j)$.

Частный резерв времени первого вида $R_1(i; j)$ заданной работы $(i; j)$ является частью полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность этой работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события:

$$R_1(i; j) = t_n(j) - t_n(i) - t(i; j); \quad (52)$$

$$R_1(i; j) = R_{полн}(i; j) - R(i). \quad (53)$$

Графически частный резерв времени первого вида $R_1(i; j)$ работы $(i; j)$ представлен на рис. 36.

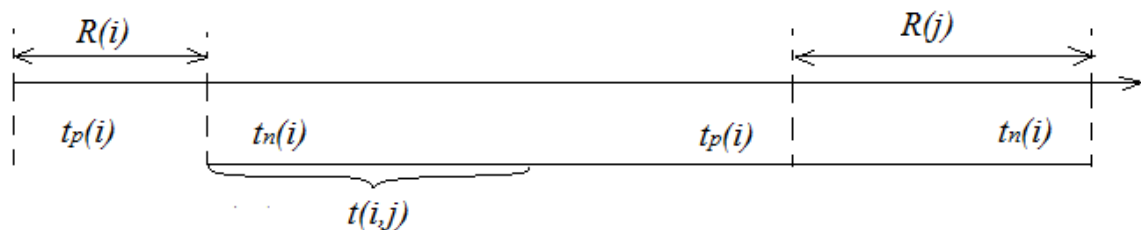


Рис. 36

Частный резерв времени второго вида $R_c(i; j)$ (свободный резерв времени) заданной работы $(i; j)$ является частью полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность этой работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события:

$$R_c(i; j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i; j). \quad (54)$$

Графически частный резерв времени второго вида $R_c(i; j)$ работы $(i; j)$ представлен на рис. 37.

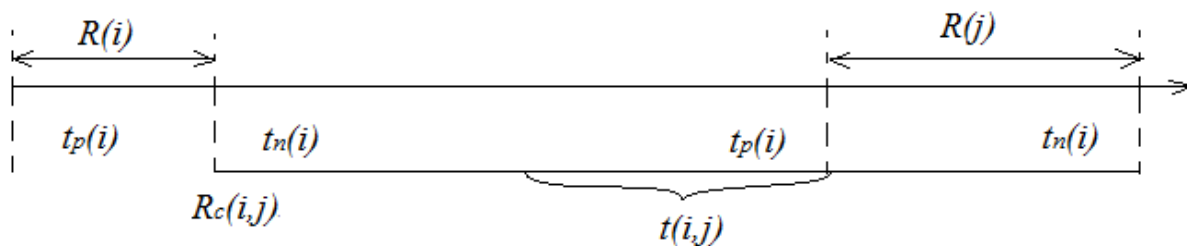


Рис. 37

Независимый резерв времени $R_H(i; j)$ заданной работы $(i; j)$ является частью полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность этой работы, получаемой для случая, когда предшествующая работа заканчивается в поздний срок, а последующая – в ранний:

$$R_H(i; j) = t_p(j) - t_n(i) - t(i; j); \quad (55)$$

$$R_H(i; j) = R_{полн}(i; j) - R(i) - R(j). \quad (56)$$

Графически независимый резерв времени $R_H(i; j)$ заданной работы $(i; j)$ представлен на рис. 38.

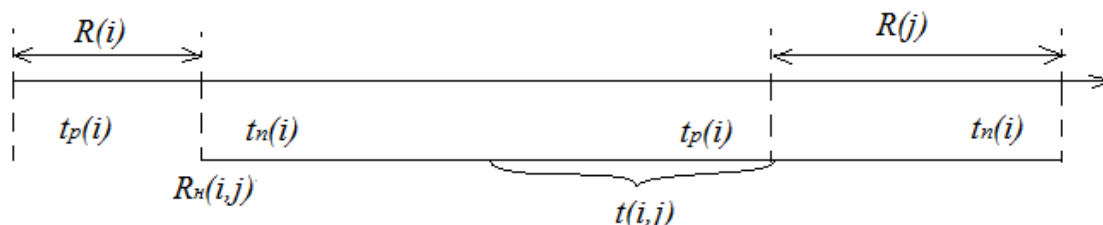


Рис. 38

Работы, лежащие на критическом пути, резервов времени не имеют.

Пример. Для условий примеров 1 и 2 определить полный, частные и независимый резервы времени.

Решение. Результаты расчетов по формулам (50) – (56) представлены в табл. 46.

Таблица 46

№	Код работы	Продолжительность	Сроки начала и окончания работы				Резервы времени работы			
			$t_p(i)$	$t_n(i)$	$t_p(j)$	$t_n(j)$	$R_{полн}(i, j)$	$R_l(i, j)$	$R_c(i, j)$	$R_n(i, j)$
1	(0; 1)	3	0	0	3	3	0	0	0	0
2	(1; 5)	5	3	3	12	12	4	4	4	4
3	(1; 2)	3	3	3	6	7	1	1	0	0
4	(1; 3)	4	3	3	7	7	0	0	0	0
5	(2; 4)	3	6	7	9	10	1	0	0	—
6	(4; 5)	2	9	10	12	12	1	0	1	0
7	(3; 5)	5	7	7	12	12	0	0	0	0
8	(5; 7)	4	12	12	22	22	6	6	6	6
9	(5; 6)	5	12	12	17	17	0	0	0	0
10	(6; 7)	5	17	17	22	22	0	0	0	0
11	(2; 7)	4	6	7	22	22	12	11	12	11
12	(7; 8)	5	22	22	27	27	0	0	0	0
13	(8; 9)	3	27	27	30	30	0	0	0	0

3.6. Анализ и оптимизация сетевого графика

Анализ и оптимизация сетевого графика проводятся с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов.

Рассмотрим оптимизацию сетевого графика методом «время-стоимость». В этом случае обычно предполагается, что стоимость работы увеличивается пропорционально уменьшению ее продолжительности (рис. 39).

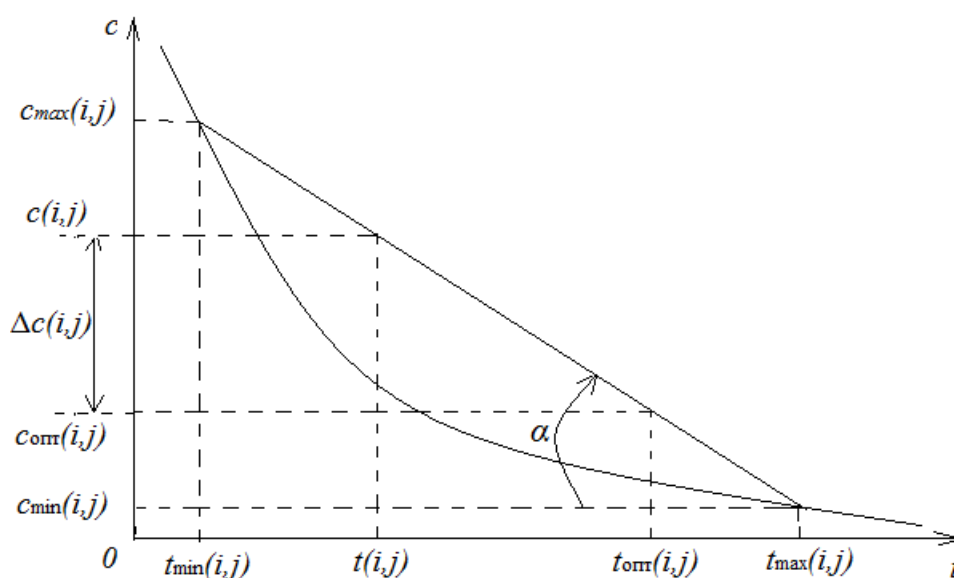


Рис. 39

На рис. 39 введены следующие обозначения:

c — стоимость;

t — время;

$t_{\min}(i, j)$ — минимально возможная продолжительность работы (i, j) ;

$t_{\max}(i, j)$ — максимально возможная продолжительность работы (i, j) ;

$t_{\text{opt}}(i, j)$ — оптимальная продолжительность работы (i, j) ;

$t(i, j)$ — заданная продолжительность работы (i, j) ;

$c_{\max}(i, j)$ — максимально возможная стоимость работы (i, j) ;

$c_{\min}(i, j)$ — минимально возможная стоимость работы (i, j) ;

$c_{opt}(i; j)$ – оптимальная стоимость работы $(i; j)$;

$c(i; j)$ – заданная стоимость работы $(i; j)$;

$\Delta c(i, j) = c(i, j) - c_{onn}(i, j)$ – изменение стоимости работы;

α – угол наклона аппроксимирующей прямой с осью абсцисс, являющейся в данном случае отрицательной величиной.

Из геометрии рис. 39 следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta c(i, j)}{t(i, j) - t_{onn}(i, j)}.$$

Отсюда (при условии, что $|\operatorname{tg} \alpha| = k(i, j)$) находим

$$\begin{aligned} \Delta c(i, j) &= [t_{onn}(i, j) - t(i, j)]k(i, j); \\ |\operatorname{tg} \alpha| = k(i, j) &= \frac{c_{\max}(i, j) - c_{\min}(i, j)}{t_{\max}(i, j) - t_{\min}(i, j)}. \end{aligned}$$

Величина $k(i; j)$ характеризует изменение затрат при изменении времени выполнения работы $(i; j)$. Эта величина может быть определена по формуле (см. рис. 39).

Оптимизация сетевого графика может быть проведена, например, за счет использования свободного резерва времени $R_c(i; j)$ (формулы (54), (55)). При этом продолжительность каждой работы увеличивается до тех пор, пока не будет исчерпан этот резерв или пока не будет достигнуто значение максимально возможной продолжительности работы $t_{\max}(i; j)$. Стоимость исполнения всего проекта до оптимизации равна сумме стоимостей всех работ:

$$c = \sum c(i, j), \quad (57)$$

а после проведения оптимизации уменьшится на величину

$$\Delta c = \sum \Delta c(i, j) = \sum [t_{onn}(i, j) - t(i, j)]k(i, j). \quad (58)$$

В формуле (57) суммирование ведется по всем работам, в формуле (58) – только по тем, по которым проводилась оптимизация.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы надеются, что приведенный материал по основам линейного программирования, теории игр и методам сетевого планирования и управления поможет курсантам и слушателям факультета подготовки сотрудников для подразделений экономической безопасности и противодействия коррупции Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя в изучении раздела «Экономико-математические модели и методы» дисциплины «Математика».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. Фомин Г. П. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник. – М. : Юрайт, 2013.
2. Сотников В. Н., Попов А. М. Экономико-математические методы и модели : учебник для прикладного бакалавриата. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Юрайт, 2015.
3. Новиков А. И. Экономико-математические методы и модели : учебник для бакалавров. – М. : Дашков и К, 2017.
4. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математические методы и модели для магистрантов экономики : учебное пособие. – 2-е изд., доп. – СПб. : Питер, 2010.
5. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов. – СПб. : Питер, 2006.
6. Афанасьев М. Ю., Багриновский К. А., Матюшок В. М. Прикладные задачи исследования операций : учебное пособие. – М. : ИНФРА-М, 2006.
7. Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Путко Б. А. и др. Практикум по высшей математике для экономистов : учебное пособие для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
8. Общий курс высшей математики для экономистов: учебное пособие / под ред. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА-М, 2007.
9. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / под ред. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА-М, 2008.

Дополнительный

1. Афанасьев М. Ю., Багриновский К. А. Матюшок В. М. Прикладные задачи исследования операций. – М. : Инфра-М., 2006.
2. Федосеев В. В., Гармаш А. Н., Дайитбегов Д. М. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие для вузов. – М. : ЮНИТИ, 2001.
3. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании : учебник. – М. : Дело, 2000.
4. Елисеева И. И., Юзбашев М. М. Общая теория статистики : учебник. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2000.
5. Гусак А. А., Бричикова Е. А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. – 2-е изд., стереотип. – Минск : ТетраСистемс, 2000.
6. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. – М. : Наука, 1978.
7. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, 1997.
8. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М. : Высшая школа, 1986.
9. Переяслова И. Г., Колбачев Е. Б. Основы статистики. – Ростов н/Д : Феникс, 1999.
10. Ниворожкина Л. И., Морозова З. А., Герасимова И. А., Житников И. В. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов : руководство для решения задач. – Ростов н/Д : Феникс, 1999.
11. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике : учебник. – 2-е изд. – М. : МГУ им. М.В. Ломоносова; Дело и Сервис, 1999.

12. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций в экономике : учебное пособие для вузов. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999.

13. Шипачев В. С. Задачи по высшей математике : учебное пособие для вузов. – М. : Высшая школа, 1996.

14. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие. – 13-е изд., испр. – М. : Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997.

15. Колесников А. Н. Краткий курс математики для экономистов : учебное пособие. – М. : Инфра-М, 1997.

16. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учебное пособие для вузов. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000.

17. Дубров А. М., Лагоша Б. А., Хрусталеv Е. Ю. Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе : учебное пособие / под ред. Б. А. Лагоши. – М. : Финансы и статистика, 1999.

18. Громыко Г. Л. Общая теория статистики : практикум. – М. : Инфра-М, 1999.

19. Овчаренко Е. К., Ильина О. П., Балыбердин Е. В. Финансово-экономические расчеты в EXCEL. – 2-е изд., доп. – М. : Филинь, 1998.

Учебное пособие

Е. А. Сандрюкова

кандидат экономических наук

Н. М. Дубинина

кандидат юридических наук, доцент

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ



Редактор *Васильевых Е. М.*

Корректор *Титова В. П.*

Компьютерная верстка *Гридчина Т. А.*

Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя
117997, г. Москва, ул. Академика Волгина, д. 12

Подписано в печать
27.03.2019 г.
Заказ № 17580

Формат 60×84 1/16
Цена договорная

Тираж 107 экз.
Объем 3,06 уч.-изд. л.
7,56 усл. печ. л.
